

**Вопросы к экзамену по курсу  
“Методы математической физики”. Первый поток**

1. Сформулируйте лемму о поведении решений уравнения  $(k(x)u'(x))' - q(x)u = 0, x \in (a, b)$ , где  $k(x) = (x - a)\varphi(x), \varphi(a) \neq 0$ , в особых точках.
2. Напишите уравнение Бесселя и его фундаментальную систему решений. Дайте определение функций, входящих в эту фундаментальную систему решений.
3. Дайте определение цилиндрической функции. Приведите пример цилиндрических функций.
4. Дайте определение функции Бесселя с помощью обобщенного степенного ряда.
5. Напишите формулы для функций Бесселя порядков  $1/2$  и  $-1/2$ . Всегда ли функции Бесселя полуцелого порядка можно выразить через элементарные функции?
- 6. Получите интегральное представление функции Бесселя.**
7. Дайте определение функций Бесселя, Неймана и Ханкеля.
8. Напишите формулу, связывающую функции Ханкеля положительного и отрицательного индексов.
9. Как связаны функции Бесселя, Неймана и Ханкеля?
- 10. Получите асимптотические формулы при больших значениях аргумента для функций Бесселя, Неймана и Ханкеля первого и второго рода.**
- 11. Получите определитель Вронского функций Бесселя и Ханкеля.**
12. Опишите поведение функций Бесселя, Неймана и Ханкеля в окрестности нуля.
13. Поставьте задачу на собственные значения для функций Бесселя. Где она возникает?
14. Поставьте задачу Штурма-Лиувилля для оператора Лапласа в круге в случае граничных условий первого рода. Напишите собственные функции.
15. Поставьте задачу Штурма-Лиувилля для оператора Лапласа в круге в случае граничных условий второго рода. Напишите собственные функции.
16. Напишите характеристическое уравнение для определения собственных значений задачи Штурма-Лиувилля для оператора Лапласа в круге в случае граничных условий различного типа.
17. Напишите общую формулу для квадрата нормы собственной функции задачи на собственные значения для цилиндрических функций.
18. Напишите собственные функции круга для граничных условий Дирихле и Неймана.
19. Напишите уравнение для цилиндрических функций чисто мнимого аргумента. Напишите фундаментальную систему решений этого уравнения.
20. Дайте определение функций Инфельда и Макдональда.

- 21. Получите асимптотическую формулу для функции Инфельда при больших значениях аргумента.**
- 22. Получите асимптотическую формулу для функции Макдональда при больших значениях аргумента.**
23. Дайте определение классических ортогональных полиномов.
- 24. Сформулируйте и докажите теорему о нулях классических ортогональных полиномов.**
25. Являются ли производные классических ортогональных полиномов классическими ортогональными полиномами? Если да, то с каким весом они ортогональны?
26. Поставьте задачу на собственные значения для классических ортогональных полиномов на отрезке с условиями в особых точках.
27. Напишите формулу для собственных значений задачи Штурма-Лиувилля для классических ортогональных полиномов.
- 28. Получите формулу Родрига для классических ортогональных полиномов.**
29. Дайте определение полиномов Якоби. Напишите формулу Родрига для полиномов Якоби.
30. Дайте определение полиномов Лежандра.
31. Поставьте задачу на собственные значения для полиномов Лежандра. Напишите выражение собственных значений для полиномов Лежандра. Напишите выражение квадрата нормы для полиномов Лежандра.
32. Дайте определение производящей функции классических ортогональных полиномов.
- 33. Получите производящую функцию для полиномов Лежандра.**
34. Дайте определение полиномов Лагерра. Сформулируйте задачу на собственные значения, решениями которой они являются.
- 35. Получите производящую функцию для полиномов Лагерра.**
36. Дайте определение полиномов Эрмита. Сформулируйте задачу на собственные значения, решениями которой они являются.
- 37. Получите производящую функцию для полиномов Эрмита.**
- 38. Докажите замкнутость и полноту в пространстве  $L_2(-1,1)$  системы полиномов Лежандра.**
39. Сформулируйте теорему Стеклова для полиномов Лежандра.
40. Дайте определение присоединенных функций Лежандра. Поставьте задачу на собственные значения для присоединенных функций Лежандра.
41. Напишите собственные значения для присоединенных функций Лежандра. Напишите выражение квадрата нормы для присоединенных функций Лежандра.

## 42. Докажите замкнутость и полноту в пространстве $L_2(-1,1)$ системы

### присоединенных функций Лежандра.

43. Сформулируйте теорему Стеклова для присоединенных функций Лежандра.
44. Дайте определение сферических функций. Поставьте задачу на собственные значения для сферических функций.
45. Является ли система сферических функций замкнутой и полной? Сформулируйте соответствующие утверждения. Сформулируйте теорему Стеклова для сферических функций.
46. Напишите условие ортогональности и выражение квадрата нормы для сферических функций.
47. Дайте определение шаровых функций.
48. Поставьте задачу на собственные значения для шара в случае линейных граничных условий различного типа. Напишите собственные функции шара для граничных условий Дирихле и Неймана..
49. Что такое характеристики уравнения в частных производных второго порядка в случае двух переменных?
50. Дайте определения уравнений эллиптического, гиперболического и параболического типов в случае двух переменных и напишите для них канонические формы.
51. Дайте определение уравнений параболического типа в случае многих переменных и напишите для него каноническую форму.
52. Дайте определение уравнения гиперболического типа в случае многих переменных и напишите для него каноническую форму.
53. Дайте определение уравнения эллиптического типа в случае многих переменных и напишите для него каноническую форму.
54. Дайте определение корректно поставленной задачи по Адамару.
55. Приведите примеры постановки начально-краевых задач для уравнения теплопроводности и колебаний и приведите определения классических решений этих задач.
56. Дайте определение пространства Лебега  $L_2$ . Как оно строится?
57. Дайте определение полных и замкнутых ортогональных систем функций в пространстве Лебега  $L_2$ . Как связаны между собой эти понятия?
58. Как вводится интеграл Лебега по схеме Даниэля?
59. Дайте определение обобщенного решения краевой задачи. Как вводится сходимость в пространстве основных и в пространстве обобщенных функций?
60. Как вводится понятие фундаментального решения?
61. Изложите общую схему метода разделения переменных (метода Фурье). К решению каких задач можно свести решение общей начально-краевой задачи в линейном случае (редукция полной задачи)?
62. Поставьте задачу Штурма-Лиувилля для оператора Лапласа с граничными условиями Дирихле на границе  $S$  области  $D$  и перечислите основные свойства

собственных функций и собственных значений этой задачи.

63. Напишите первую и вторую формулы Грина. Каковы условия их применимости?

64. Напишите третью формулу Грина для двумерного и трехмерного случая.

65. Приведите пример постановки краевой задачи для уравнения Лапласа.

66. Дайте определение гармонических функций. Приведите примеры. Является ли гармоническая функция бесконечно дифференцируемой? Обоснуйте ответ.

67. Сформулируйте теорему Гаусса и теорему о среднем для гармонических функций.

68. Сформулируйте принцип максимума и принцип сравнения для гармонических функций.

69. Сформулируйте теорему единственности решения внутренней краевой задачи для уравнения Лапласа в случае граничных условий Дирихле. Каким методом она доказывается?

70. Сформулируйте теорему единственности решения внутренней краевой задачи для уравнения Лапласа в случае граничных условий третьего рода. Каким методом она доказывается?

71. Имеет ли место единственность решения внутренней краевой задачи для уравнения Лапласа в случае граничных условий второго рода? Обоснуйте ответ.

72. Дайте определение регулярной на бесконечности функции в случае двух и трех переменных.

73. Сформулируйте теорему единственности решения внешней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в трехмерном случае. Каким методом она доказывается?

74. Сформулируйте теорему единственности решения внешней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в двумерном случае. Каким методом она доказывается?

75. В чем состоит различие в постановках и свойствах решений внутренних и внешних краевых задач для уравнения Лапласа в двумерном и трехмерном случаях?

76. Дайте определение функции Грина внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в трехмерном случае и запишите решение задачи с помощью функции Грина.

77. Дайте определение функции Грина внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в двумерном случае и запишите решение задачи с помощью функции Грина.

78. Дайте определение функции Грина внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа в трехмерном случае и запишите решение задачи с помощью функции Грина.

**79. Постройте функцию Грина внутренней краевой задачи Неймана для уравнения Лапласа.**

80. Дайте определение объемного потенциала. Использование объемного

потенциала при решении уравнения Пуассона.

81. Сформулируйте теорему о равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра.

82. Дайте определения потенциалов простого и двойного слоя в двумерном и трехмерном случаях.

83. Дайте определение поверхности Ляпунова.

84. Сформулируйте теорему о существовании и непрерывности потенциала простого слоя.

85. Сформулируйте теорему о существовании потенциала двойного слоя.

86. Претерпевает ли разрыв при переходе через несущую поверхность потенциал простого слоя? Обоснуйте ответ.

**87. Выведите формулу для разрыва нормальной производной потенциала простого слоя.**

88. Чему равно значение потенциала двойного слоя с постоянной плотностью в трехмерном и двумерном случае внутри, на и вне несущей поверхности?

**89. Дайте определение потенциала двойного слоя. Сформулируйте и докажите его основные свойства.**

90. Метод сведения краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа к союзным интегральным уравнениям Фредгольма.

**91. Сформулируйте и докажите теоремы существования решений внутренней задачи Дирихле и внешней задачи Неймана для уравнения Лапласа в трехмерном случае.**

92. Сформулируйте теорему существования решения внутренней задачи Неймана и внешней задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Назовите метод ее доказательства.

93. Напишите необходимое условие разрешимости внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа. Откуда оно следует?

94. Что такое потенциал Робена? Каков его физический смысл?

95. Напишите фундаментальное решение уравнения Гельмгольца в двумерном и трехмерном случаях.

96. Дайте определение объемного потенциала, поверхностных потенциалов простого и двойного слоя для уравнения Гельмгольца.

97. Принцип максимума для уравнения Гельмгольца.

98. В каком случае имеет место единственность решения внутренних краевых задач для уравнения Гельмгольца? Приведите формулировки соответствующих теорем.

**99. Сформулируйте и докажите принцип максимума для уравнения параболического типа.**

100. Сформулируйте принципы сравнения для уравнения параболического типа.
101. Сформулируйте теорему единственности и теорему устойчивости решения внутренней начально-краевой задачи Дирихле для уравнения параболического типа. Назовите метод их доказательства.
102. Сформулируйте теорему существования классического решения начально-краевой задачи Дирихле для однородного уравнения теплопроводности на отрезке.
103. Напишите функцию Грина для уравнения теплопроводности на отрезке в случае граничных условий Дирихле. В чем ее физический смысл?
104. Поставьте начальную задачу для уравнения теплопроводности на бесконечной прямой. Сформулируйте теорему единственности решения начальной задачи для уравнения теплопроводности на бесконечной прямой.
105. Сформулируйте теорему существования классического решения задачи Коши для уравнения теплопроводности на бесконечной прямой.
106. Напишите фундаментальное решение уравнения теплопроводности на бесконечной прямой. Каковы его свойства и физический смысл?
107. Что такое "парадокс бесконечной теплопроводности"? Чем его можно объяснить?
108. Поставьте начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности на полубесконечной прямой. В чем заключается "метод продолжения" для построения решения начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности на полупрямой для задач Дирихле и Неймана?
- 109. Постройте функцию Грина для уравнения теплопроводности на полупрямой в случае граничных условий Дирихле. Какой ее физический смысл?**
- 110. Постройте функцию Грина для уравнения теплопроводности на полупрямой в случае граничных условий Неймана. Какой ее физический смысл?**
111. Напишите общий вид решения начально-краевой задачи для неоднородного уравнения теплопроводности на полупрямой в случае однородных граничных условий.
112. Поставьте начальную задачу для уравнения теплопроводности в пространстве и сформулируйте теорему единственности ее решения.
113. Сформулируйте теорему существования классического решения задачи Коши для уравнения теплопроводности в пространстве.
114. Напишите общий вид решения однородного уравнения теплопроводности на полубесконечной прямой при однородном начальном и неоднородном граничном условии Дирихле. Сформулируйте принцип Дюамеля.
115. Сформулируйте теорему единственности решения общей начально-краевой задачи для уравнения колебаний. Каким методом она доказывается?
116. Сформулируйте теорему существования классического решения начально-краевой задачи для однородного уравнения колебаний на отрезке в

случае однородных граничных условий Дирихле.

**117. Для уравнения колебаний постройте функцию влияния мгновенного точечного импульса (функцию Грина) на отрезке.**

118. Поставьте начальную задачу для уравнения колебаний на бесконечной прямой. В чем состоит метод распространяющихся волн?

**119. Поставьте начальную задачу для однородного уравнения колебаний на бесконечной прямой. Напишите формулу Даламбера. Докажите теоремы существования, единственности и устойчивости решения.**

120. Что такое "характеристический треугольник" на фазовой плоскости? В чем состоит метод интегрирования по фазовой плоскости.

**121. Выведите формулу для решения задачи Коши для неоднородного уравнения колебаний на бесконечной прямой.**

122. Сформулируйте теорему существования и единственности классического решения неоднородного уравнения колебаний на бесконечной прямой.

123. В чем состоит "метод продолжения" построения решения начально-краевой задачи для уравнения колебаний на полупрямой в случае однородных граничных условий Дирихле и Неймана?

124. Напишите решение начально-краевой задачи для однородного уравнения колебаний на полупрямой в случае однородного начального условия и неоднородного граничного условия Дирихле. Каким методом можно его получить?

125. Поставьте задачу Коши для уравнения колебаний в пространстве. Рассмотрите сферически симметричный случай.

**126. Выведите формулу Кирхгофа.**

**127. Выведите формулу Пуассона, описывающую процесс распространения колебаний в трехмерном пространстве.**

128. В чем состоит "метод спуска" Адамара?

**Замечание.** Экзаменационный билет состоит из пяти вопросов. Пятый вопрос билета содержит вопрос на доказательство утверждений или на вывод определенных соотношений. Эти вопросы в списке вопросов отмечены жирным шрифтом.