ЛЕКЦИЯ 12

Уравнение теплопроводности. Волновое уравнение

Всюду в этой лекции $\Omega \subset R^N$ — открытое множество с достаточно гладкой (например, класса C^∞) границей Γ, $Q = \Omega \times (0, +\infty)$ — «цилиндр», $\Sigma = \Gamma \times (0, +\infty)$ — его боковая граница. Предполагается, что граница Γ есть ограниченное множество. Таким образом, или множество Ω, или его дополнение является ограниченным множеством.

Мы используем стандартные пространства $L^2(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$ (где норма берётся целиком, а не в «усечённом» варианте, поскольку область Ω может не быть ограниченной), $H^2(\Omega)$, а также $\mathbf{L}^2(\Omega)$ — пространство вектор-функций из N компонент, каждая из которых принадлежит $L^2(\Omega)$. Норма в $\mathbf{L}^2(\Omega)$ задаётся естественным образом: $\|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = \sum_{i=1}^N \|u_i\|^2_{L^2(\Omega)}$.

§ 8. Уравнение теплопроводности

Рассмотрим задачу

$$u_t - \Delta u = 0, \quad (x, t) \in Q, \tag{1}$$

$$u|_\Sigma = 0, \tag{2}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega. \tag{3}$$

Будем искать её решение в виде абстрактной функции $u : [0, +\infty) \to H$.

Теорема 1. Пусть $u_0 \in L^2(\Omega)$. Тогда существует единственное решение задачи (1)—(3), удовлетворяющее условиям

$$u \in C([0, +\infty); L^2(\Omega)) \cap C((0, +\infty); H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)), \tag{4}$$

$$u \in C^1((0, +\infty); L^2(\Omega)). \tag{5}$$

Наконец,

$$\frac{1}{2}\|u(T)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^T \|\nabla u(t)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} dt = \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{6}$$

Замечание 1. Можно показать, что решение u задачи (1)—(3) на самом деле обладает гладкостью

$$\forall \varepsilon > 0 \quad u \in C^\infty(\overline{\Omega} \times [\varepsilon, +\infty)),$$

но это выходит за рамки нашего курса.

Замечание 2. В случае ограниченной области Ω (допускающей взять «усечённую» $H_0^1(\Omega)$-норму $\|w\|_{H_0^1(\Omega)} := \|\nabla u(t)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$) из тождества (6) вытекает, что сходится интеграл

$$\int_0^{+\infty} \|\nabla u(t)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} dt \leqslant \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} < +\infty,$$

а значит, $u \in L^2(0, +\infty; H_0^1(\Omega))$.

Доказательство. Применим теорему 2 из лекции 10 к пространству $H := L^2(\Omega)$ и оператору $A : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$, заданному следующим образом:

$$\begin{aligned} &\mathcal{D}(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \\ &Au = -\Delta u. \end{aligned}$$

Для этого нам нужно доказать, что A — максимальный монотонный оператор в $L^2(\Omega)$. Имеем
1) A — монотонный в $L^2(\Omega)$:

$$\forall u \in \mathcal{D}(A) \quad (Au, u)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega (-\Delta u) u \, dx = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \geqslant 0;$$

2) A — максимальный монотонный в $L^2(\Omega)$, поскольку при любом $f \in L^2(\Omega)$ уравнение

$$u - \Delta u = f$$

имеет (единственное) решение в $H_0^1(\Omega)$ и это решение лежит в $H^2(\Omega)$ (на самом деле оно обладает ещё большей гладкостью, но об этом ниже);
3) A — симметрический оператор (как следует из леммы 1 лекции 10, это гарантирует его самосопряжённость). Действительно,

$$\forall u, v \in \mathcal{D}(A) \quad (Au, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega (-\Delta u) v \, dx = \int_\Omega (\nabla u, \nabla v) \, dx = \int_\Omega u(-\Delta v) \, dx = (u, Av)_{L^2(\Omega)}.$$

Таким образом, в силу теоремы 2 из лекции 10 получаем, что

$$\begin{aligned} u \in C([0,+\infty); H) \cap C^1((0,+\infty); H) \cap C((0,+\infty); \mathcal{D}(A)) = \\ = C([0,+\infty); L^2(\Omega)) \cap C^1((0,+\infty); L^2(\Omega)) \cap C((0,+\infty); H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)), \end{aligned} \tag{7}$$

т. е. (4), (5).

Перейдём к доказательству тождества (6). Для этого домножим уравнение на $u(t)$ и проинтегрируем по Ω при каждом t. Получим:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right) + \|\nabla u\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = 0. \tag{8}$$

Обозначим: $\varphi(t) := \frac{1}{2}\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}$. Интегрируя теперь по времени от ε до T, получим:

$$\varphi(T) - \varphi(\varepsilon) = \int_\varepsilon^T \varphi'(t) \, dt = -\int_\varepsilon^T \|\nabla u\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \, dt. \tag{9}$$

Интегрировать от 0 нельзя, поскольку функция φ может не быть дифференцируемой в 0. Однако она непрерывна в 0, поскольку $u \in C([0,+\infty); L^2(\Omega))$. Поэтому можно устремить $\varepsilon \to +0$ и получить (6).

▲

§ 9. Волновое уравнение

Рассмотрим задачу (обозначения те же, что и в предыдущем параграфе)

$$u_{tt} - \Delta u = 0, \quad (x,t) \in Q, \tag{10}$$

$$u|_{\Sigma} = 0, \tag{11}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{12}$$

$$u_t(x,0) = v_0(x), \quad x \in \Omega. \tag{13}$$

Теорема 2. Пусть $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $v_0 \in H_0^1(\Omega)$. Тогда существует единственное решение u задачи (10)—(13), удовлетворяющее условиям

$$u \in C([0,+\infty); H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,+\infty); H_0^1(\Omega)) \cap C^2([0,+\infty); L^2(\Omega)). \tag{14}$$

При этом

$$\forall t \geqslant 0 \quad \|u_t(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u(t)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = \|v_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u_0\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}. \tag{15}$$

Замечание 3. Соотношение (15) есть закон сохранения энергии.

Доказательство.

Запишем уравнение (10) в виде системы двух уравнений 1-го порядка:

$$\begin{cases} u_t - v = 0, \quad (x,t) \in Q, \\ v_t - \Delta u = 0, \quad (x,t) \in Q, \end{cases} \tag{16}$$

и положим

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Тогда система (16) принимает вид

$$\frac{dU}{dt} + AU = \theta, \tag{17}$$

где

$$AU = \begin{pmatrix} \Theta & -I \\ -\Delta & \Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v \\ -\Delta u \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Применим следствие из теоремы Хилле—Иосиды (см. начало лекции 10) в пространстве $H :=$ $:= H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ со скалярным произведением

$$(U_1, U_2) := \int_{\Omega} (\nabla u_1, \nabla u_2)\, dx + \int_{\Omega} u_1 u_2\, dx + \int_{\Omega} v_1 v_2\, dx,$$

где

$$U_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим неограниченный оператор $A: H \to H$ с $\mathcal{D}(A) = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$, заданный на этой области определения формулой (18). Докажем, что оператор $A+E$ является максимальным монотонным.

1) Для любой вектор-функции $U \in \mathcal{D}(A)$ имеем

$$
\begin{aligned}
(AU, U)_H + \|U\|_H^2 = \left(\begin{pmatrix} -v \\ -\Delta u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right)_H + \left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right)_H = \\
= -\int_\Omega (\nabla v, \nabla u)\, dx - \int_\Omega vu\, dx + \int_\Omega (-\Delta u) v\, dx + \\
+ \int_\Omega (\nabla u, \nabla u)\, dx + \int_\Omega u^2\, dx + \int_\Omega v^2\, dx = \\
= -\int_\Omega vu\, dx + \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx + \int_\Omega u^2\, dx + \int_\Omega v^2\, dx = \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx + \int_\Omega (u^2 + v^2 - uv)\, dx \geqslant 0
\end{aligned}
$$

в силу оценки $uv \leqslant \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$.

2) Чтобы установить, что оператор $A+E$ — *максимальный* монотонный, требуется доказать, что $A + 2E$ сюръективен. Пусть

$$
F = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in H
$$

(т. е. $f \in H_0^1(\Omega)$, $g \in L^2(\Omega)$); требуется решить уравнение $AU + 2U = F$, т. е. систему

$$
\begin{cases} -v + 2u = f, \quad x \in \Omega, \\ -\Delta u + 2v = g, \quad x \in \Omega, \end{cases} \tag{19}
$$

в классе

$$
u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \quad v \in H_0^1(\Omega).
$$

Из (19) получаем уравнение

$$
-\Delta u + 4u = 2f + g,
$$

которое имеет единственное решение в $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Тогда из соотношения $v = 2u - f$ получаем, что $v \in H_0^1(\Omega)$. Таким образом, и система (19) имеет решение.

Применяя следствие из теоремы Хилле—Иосиды (см. начало лекции 10) и замечая, что $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(A) \equiv \mathcal{D}(A+E)$, видим, что существует единственное решение задачи

$$
\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} + (A+E)U - 1 \cdot U = \theta, \quad t \in [0, +\infty), \\ U(0) = U_0 \in \mathcal{D}(A+E) \end{cases}
$$

и это решение обладает гладкостью

$$
U \in C^1([0, +\infty); H) \cap C([0, +\infty); \mathcal{D}(A)).
$$

В силу определения пространств H и $\mathcal{D}(A)$ это означает, что

$$u \in C^1([0,+\infty); H_0^1(\Omega)) \cap C([0,+\infty); H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)),$$
$$v \equiv u' \in C^1([0,+\infty); L^2(\Omega)) \cap C([0,+\infty); H_0^1(\Omega)),$$

откуда и выводится (14). Чтобы доказать закон сохранения энергии (15), умножим уравнение (10) на u_t и проинтегрируем по Ω с учётом соотношений

$$\int_\Omega u_{tt} u_t \, dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_t\|^2_{L^2(\Omega)},$$
$$\int_\Omega (-\Delta u) u_t \, dx = \int_\Omega (\nabla u, \nabla(u_t)) \, dx = \int_\Omega (\nabla u, (\nabla u)_t) \, dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}. \tag{20}$$

Здесь второе равенство в цепочке (20) вытекает из такого соображения. Как доказано выше, $u \in C^1([0,+\infty); H_0^1(\Omega))$; оператор ∇ можно рассматривать как ограниченный оператор из $H_0^1(\Omega)$ в $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Соответственно, $\nabla u \in C^1([0,+\infty); \mathbf{L}^2(\Omega))$ и $(\nabla u)_t = \nabla(u_t)$, где в левой части дифференцирование по t производится в пространстве $\mathbf{L}^2(\Omega)$, а в правой — в пространстве $H_0^1(\Omega)$. ▲

Замечание 4. Легко заметить свойство «обратимости во времени» волнового уравнения: утверждение, аналогичное теореме 2, верно и при решении «назад по времени»: от $t = 0$ в сторону $t \to -\infty$. Действительно, при замене переменной $t \mapsto -t$ уравнение не меняет вида. В противоположность этому, свойства уравнения теплопроводности при таком обращении кардинально меняются, потому что при аналогичной замене оператор A переход в оператор $-A$, не обладающий нужным свойством монотонности. Это легко понять ещё и таким образом: если решение уравнение теплопроводности «вперёд» за сколь угодно малое время сглаживает начальные данные, то попытка двинуться обратно может, наоборот, «испортить» сколь угодно гладкие данные.

Задачи для самостоятельного решения

1. Предположим теперь, что Ω — ограниченная область и поэтому допускает введение на $H_0^1(\Omega)$ «усечённой нормы». Исследовать вопрос о том, можно ли при этом обойтись без введения оператора $A + E$ и ограничиться использованием самой теоремы Хилле—Иосиды, а не следствия из неё.