

## Тема 1. Поверхностные интегралы.

### 1. Определения.

- 1.1. Сформулируйте определение поверхностного интеграла первого рода.
- 1.2. Сформулируйте определение поверхностного интеграла второго рода.

### 2. Основные теоремы и формулы (без доказательства).

- 2.1. Запишите формулу для вычисления поверхностного интеграла первого рода

$$\iint_S f(x, y, z) d\sigma \text{ при условии, что поверхность } S \text{ задана в виде}$$

$$z = h(x, y), \quad (x, y) \in G, \quad G - \text{область на плоскости } (x, y).$$

- 2.2. Запишите формулу для вычисления поверхностного интеграла первого рода

$$\iint_S f(x, y, z) d\sigma \text{ при условии, что поверхность } S \text{ задана в параметрической форме.}$$

- 2.3. Запишите формулу для вычисления поверхностного интеграла второго рода

$$\iint_S f(x, y, z) \cos \gamma d\sigma \text{ при условии, что поверхность } S \text{ задана в виде}$$

$$z = h(x, y), \quad (x, y) \in G, \quad G - \text{область на плоскости } (x, y), \quad \gamma - \text{угол между нормалью к выбранной стороне поверхности и осью } Oz.$$

- 2.4. Запишите формулу для вычисления поверхностного интеграла второго рода

$$\iint_S f(x, y, z) \cos \alpha d\sigma \text{ при условии, что поверхность } S \text{ задана в параметрической}$$

форме,  $\alpha$  – угол между нормалью к выбранной стороне поверхности и осью  $Ox$ .

- 2.5. Запишите формулу для вычисления поверхностного интеграла второго рода

$$\iint_S P dydz + Q dx dz + R dx dy \text{ при условии, что поверхность } S \text{ задана в параметрической форме.}$$

- 2.6. Запишите формулу Стокса и сформулируйте достаточные условия её применимости.

- 2.7. Запишите формулу Остроградского-Гаусса и сформулируйте достаточные условия её применимости.

### 3. Теоремы с доказательством.

- 3.1. Докажите теорему о формуле Стокса.
- 3.2. Докажите теорему о формуле Остроградского-Гаусса.
- 3.3. Докажите теорему об условиях независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования в пространстве.

### 4. Вопросы и задачи.

- 4.1. Используя формулу Остроградского-Гаусса, вычислите интеграл:

$$4.1.1 \quad \iint_S (x + e^y) dydz + (y - e^z) dx dz + (z + e^x) dx dy, \text{ где } S - \text{внешняя сторона сферы } x^2 + y^2 + z^2 = 1;$$

$$4.1.2 \quad \iint_S \left( \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right) ds, \text{ где } S - \text{гладкая поверхность, ограничивающая область } D, \cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma - \text{направляющие косинусы внешней нормали к поверхности } S, P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z) \text{ имеют в } \bar{D} \text{ непрерывные частные производные второго порядка.}$$

$$4.1.3 \quad \iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy, \text{ где } S - \text{внутренняя сторона эллипсоида}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

4.1.4  $\iint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$ , где  $S$  - внешняя сторона поверхности тела  $\{x^2 + y^2 \leq z \leq H\}$ ;

4.1.5  $\iint_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$ , где  $S$  - внешняя сторона поверхности куба  $x \in [-1; 1], y \in [-1; 1], z \in [-1; 1]$ .

4.2. Используя формулу Стокса, вычислите интеграл:

4.2.1.  $\int_{AB} (x^2 - yz) dx + (y^2 - xz) dy + (z^2 - xy) dz$ , где  $AB$  есть отрезок винтовой

линии  $x = a \cos \varphi, y = a \sin \varphi, z = \frac{h}{2\pi} \varphi$  от точки  $A(a, 0, 0)$  до точки  $B(a, 0, h)$ .

4.2.2.  $\oint_L y^2 dx + xy dy + (x^2 + y^2) dz$ , где  $L$  - замкнутый контур, образованный при пересечении трех плоскостей  $x = 0, y = 0, z = a$  с эллиптическим параболоидом  $x^2 + y^2 = az$ , причем  $x \geq 0, y \geq 0$  ( $a > 0$ ). Обход контура совершается против часовой стрелки, если смотреть из точки  $(0, 0, 2a)$ .

4.2.3.  $\oint_L x dx + x dy + z dz$ , где  $L$  - окружность, образованная при пересечении сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = 8$  и плоскости  $x = z$ . Обход окружности совершается против часовой стрелки, если смотреть из точки  $(0, 0, 5)$ .

4.2.4.  $\oint_L (y - z) dx + (z - x) dy + (x - y) dz$ , где  $L$  - эллипс, образованный при пересечении цилиндрической поверхности  $x^2 + y^2 = a^2$  и плоскости  $\frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1$  ( $a > 0, h > 0$ ), пробегаемый против часовой стрелки, если смотреть из точки  $(2a, 0, 0)$ .

4.3. Найдите поток векторного поля  $\vec{F}$  через поверхность  $S$  в направлении внешней нормали к  $S$ :

4.3.1.  $\vec{F} = \{-x^3, -y^3, -z^3\}$ ,  $S$  — поверхность куба  $\{0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a\}$ ;

4.3.2.  $\vec{F} = \{0, y^3, z\}$ ,  $S$  — часть параболоида  $z = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 2$ .

4.4. Докажите, что объём  $V$  тела, ограниченного гладкой поверхностью  $S$ , выражается формулой  $V = \frac{1}{3} \iint_S (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) ds$ , где  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  - направляющие косинусы внешней нормали к поверхности  $S$ .

4.5. Применяя формулу Остроградского-Гаусса, сведите к тройному интегралу поверхностный интеграл  $\iint_S \left( \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \right) ds$ , где  $S$  — гладкая поверхность, ограничивающая конечную область  $D$ ,  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  - направ-

ляющие косинусы внешней нормали к поверхности  $S$ ,  $u(x,y,z)$  имеет в  $\bar{D}$  непрерывные частные производные второго порядка.

- 4.6. Найдите момент инерции относительно оси  $Oz$  части конической поверхности  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , вырезанной цилиндром  $x^2 + y^2 = 2x$ . Поверхностная плотность  $\rho = x$ .
- 4.7. Найдите момент инерции относительно оси  $Oz$  части сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $z \geq 0$ ,  $y \geq 0$ , вырезанной цилиндром  $x^2 + y^2 = 2x$ . Поверхностная плотность  $\rho = zy$ .
- 4.8. Пользуясь формулой Стокса, найдите циркуляцию векторного поля  $\vec{F} = \{z^3, x^3, y^3\}$  вдоль контура, образованного при пересечении гиперboloида  $2x^2 + z^2 - y^2 = a^2$  и плоскости  $x + y = 0$ . Обход контура совершается против часовой стрелки, если смотреть из точки  $(0, 2a, 0)$ .
- 4.9. Найдите работу силового поля  $\vec{F} = \{x + 3y + 2z, 2x + z, x - y\}$  вдоль замкнутого контура  $MNPM$ , где  $MNP$  — треугольник с вершинами в точках  $M(1, 0, 0)$ ,  $N(0, 1, 0)$ ,  $P(0, 0, 1)$ . Обход контура совершается против часовой стрелки, если смотреть из точки  $(5, 5, 5)$ .

## 5. Задачи повышенной трудности.

- 5.1. Докажите, что если  $S$  — гладкая поверхность, ограничивающая некоторое тело,  $\vec{l}$  — постоянный вектор,  $\vec{n}$  — вектор нормали к поверхности  $S$ ,  $\varphi$  — угол между векторами  $\vec{l}$  и  $\vec{n}$ , то  $\iint_S \cos \varphi dS = 0$ .
- 5.2. Докажите формулу  $\iiint_V \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r} = \frac{1}{2} \iint_S \cos \alpha ds$ , где  $S$  — поверхность, ограничивающая тело  $V$ ,  $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$ ,  $\vec{r}$  — радиус-вектор, идущий от точки  $(x, y, z)$ , лежащей внутри  $V$ , к точке  $(\xi, \eta, \zeta)$ ,  $\alpha$  — угол между вектором  $\vec{r}$  и внешней нормалью  $\vec{n}$  к поверхности  $S$ .
- 5.3. Докажите, что если  $S$  — гладкая поверхность, ограничивающая тело  $V$ , и  $u(x, y, z)$  имеет в  $\bar{D}$  непрерывные частные производные второго порядка, то  $\iint_S \frac{\partial u}{\partial n} ds = \iiint_V \Delta u dx dy dz$ , где  $\frac{\partial u}{\partial n}$  — производная по направлению внешней нормали к поверхности  $S$ ,  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  — оператор Лапласа.
- 5.4. Докажите, что если  $S$  — гладкая поверхность, ограничивающая тело  $V$  и  $u(x, y, z)$  имеет в  $\bar{D}$  непрерывные частные производные второго порядка, то  $\iint_S u \frac{\partial u}{\partial n} ds = \iiint_V \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz + \iiint_V u \Delta u dx dy dz$ , где  $\frac{\partial u}{\partial n}$  — производная по направлению внешней нормали к поверхности  $S$ ,  $\Delta$  — оператор Лапласа.

## Тема 2. Скалярные и векторные поля.

### 1. Определения.

- 1.1. Сформулируйте определение градиента скалярного поля в декартовой системе координат.
- 1.2. Сформулируйте определение дивергенции векторного поля в декартовой системе координат.
- 1.3. Сформулируйте определение ротора векторного поля в декартовой системе координат.
- 1.4. Сформулируйте инвариантное определение дивергенции.
- 1.5. Сформулируйте инвариантное определение ротора.
- 1.6. Сформулируйте определение циркуляции векторного поля вдоль кривой.
- 1.7. Сформулируйте определение потока векторного поля через заданную сторону поверхности.
- 1.8. Сформулируйте определение потенциального векторного поля.
- 1.9. Сформулируйте определение соленоидального векторного поля.

### 2. Основные теоремы и формулы (без доказательства).

- 2.1. Сформулируйте свойства потенциального векторного поля.
- 2.2. Сформулируйте свойства соленоидального векторного поля.
- 2.3. Сформулируйте теорему о представлении векторного поля как суммы потенциального и соленоидального полей.
- 2.4. Запишите формулу для  $\text{grad } u$  в криволинейных ортогональных координатах.
- 2.5. Запишите формулу для  $\text{div } \vec{a}$  в криволинейных ортогональных координатах.
- 2.6. Запишите формулу для  $\text{rot } \vec{a}$  в криволинейных ортогональных координатах.

### 3. Теоремы с доказательством.

### 4. Вопросы и задачи.

4.1. Найдите угол между:

4.1.1. Градиентами функций  $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$  и  $v = xy + yz + zx - 18x - 6z - y$  в точке  $M(3, 5, 4)$ .

4.1.2. Градиентами скалярного поля  $u = \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}$  в точках  $M_1(1, 2, 2)$  и  $M_2(-3, 1, 0)$ .

4.2. Вычислите, если  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ,  $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ ,  $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$  – постоянные векторы:

4.2.1.  $\text{grad} \left( \frac{1}{r} \right)$ ;

4.2.2.  $\text{div } \vec{r}$ ,  $\text{div}(r\vec{r})$ ,  $\text{div}(r^2\vec{r})$ ,  $\text{div}(r^{-1}\vec{r})$ ,  $\text{div}(r^{-2}\vec{r})$ ;

4.2.3.  $\text{grad}(\vec{c}, \vec{r})$ ;

4.2.4.  $\text{div}(r\vec{c})$ ,  $\text{div}(\vec{b}(\vec{r}, \vec{c}))$ ;

4.2.5.  $\text{rot } \vec{r}$ ,  $\text{rot}(r\vec{r})$ ,  $\text{rot} \left( \frac{\vec{r}}{r} \right)$ ;

4.2.6.  $\text{div}[\vec{c} \times \vec{r}]$ ;

4.2.7.  $\text{rot}[\vec{c} \times \vec{r}]$ .

- 4.3. Вычислите  $\text{grad}(uv)$ ,  $\text{grad}(u^2)$ ,  $\text{grad} f(u)$ ,  $\text{grad}(\sin u)$ ,  $\text{grad} \frac{1}{u}$ , где  $u, v$  – дифференцируемые скалярные поля.
- 4.4. Применяя оператор Гамильтона, докажите справедливость следующих формул, если  $u$  – дифференцируемое скалярное поле,  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  – дифференцируемые векторные поля:
- 4.4.1.  $\text{div}(u\vec{a}) = (\text{grad} u \cdot \vec{a}) + u \text{div} \vec{a}$ ;
- 4.4.2.  $\text{rot}(u\vec{a}) = [\text{grad} u \cdot \vec{a}] + u \text{rot} \vec{a}$ ;
- 4.4.3.  $\text{div}[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{b} \text{rot} \vec{a} - \vec{a} \text{rot} \vec{b}$ .
- 4.5. Используя оператор Гамильтона  $\nabla$ , докажите справедливость следующих формул, если  $u$  и  $v$  – дважды дифференцируемые скалярные поля,  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  – дважды дифференцируемые векторные поля,  $\Delta$  – оператор Лапласа:
- 4.5.1.  $\text{div}(u \text{grad} v) = (\text{grad} u \cdot \text{grad} v) + u \Delta v$ ;
- 4.5.2.  $\text{rot}(\text{rot} \vec{a}) = \text{grad} \text{div} \vec{a} - \Delta \vec{a}$ ;
- 4.5.3.  $\text{rot}[\vec{a} \times \vec{b}] = (\vec{b}, \nabla) \vec{a} - (\vec{a}, \nabla) \vec{b} + \vec{a} \text{div} \vec{b} - \vec{b} \text{div} \vec{a}$ ;
- 4.5.4.  $\text{grad}(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \nabla) \vec{b} + (\vec{b}, \nabla) \vec{a} + [\vec{a} \times \text{rot} \vec{b}] + [\vec{b} \times \text{rot} \vec{a}]$ .
- 4.6. Вычислите  $\text{rot} \text{grad} u$ , где  $u$  – дважды дифференцируемое скалярное поле.
- 4.7. Вычислите  $\text{div} \text{rot} \vec{a}$ , где  $\vec{a}$  – дважды дифференцируемое векторное поле.
- 4.8. Вычислите дивергенцию электрического поля  $\vec{E}$  точечного заряда  $e$ , помещенного в точку  $(x_0, y_0, z_0)$ .
- 4.9. Вычислите ротор векторного поля  $\vec{a} = x\mathbf{i} + \frac{y}{y^2 + z^2} \mathbf{j} - \frac{z}{y^2 + z^2} \mathbf{k}$  в точках, где  $y^2 + z^2 \neq 0$ , и циркуляцию этого поля вдоль окружности  $L : \{y^2 + z^2 = 1, x = x_0\}$ .
- 4.10. Найдите поток векторного поля  $\vec{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ : а) через внешнюю сторону боковой поверхности конуса  $x^2 + y^2 \leq z^2$  ( $0 \leq z \leq h$ ); б) через внутреннюю сторону основания этого конуса.
- 4.11. Найдите поток векторного поля  $\vec{a} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$  в направлении внешней нормали к поверхности: а) через боковую поверхность цилиндра  $x^2 + y^2 \leq a^2$  ( $0 \leq z \leq h$ ); б) через полную поверхность этого цилиндра.
- 4.12. Найдите поток векторного поля  $\vec{a} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$  через сферу  $x^2 + y^2 + z^2 = x$  в направлении внешней нормали к поверхности.
- 4.13. Проверьте, что векторное поле  $\vec{a}$  является потенциальным и найдите его скалярный потенциал:
- 4.13.1.  $\vec{a} = 2xy\mathbf{i} + x^2z\mathbf{j} + x^2y\mathbf{k}$ ;
- 4.13.2.  $\vec{a} = \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{y}{x^2 + y^2} \mathbf{j}$  ( $x^2 + y^2 \neq 0$ );
- 4.13.3.  $\vec{a} = yz(2x + y + z)\mathbf{i} + xz(x + 2y + z)\mathbf{j} + xy(x + y + 2z)\mathbf{k}$ .

4.14. Убедитесь, что векторное поле  $\vec{a} = \frac{2}{(y+z)^{1/2}} \mathbf{i} - \frac{x}{(y+z)^{3/2}} \mathbf{j} - \frac{x}{(y+z)^{3/2}} \mathbf{k}$  является потенциальным и найдите работу этого поля вдоль пути, соединяющего точки  $M(1, 1, 3)$  и  $N(2, 4, 5)$  и расположенного в октанте  $x > 0, y > 0, z > 0$ .

4.15. Покажите, что векторное поле  $\vec{a} = ye^{x^2} \mathbf{i} + 2yz \mathbf{j} - (2xyze^{x^2} + z^2) \mathbf{k}$  является соленоидальным.

### 5. Задачи повышенной трудности.

5.1. Вычислите, если

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} - \text{постоянный вектор:}$$

5.1.1.  $\operatorname{div}(r^5(\vec{a}, \vec{r})\vec{r})$ ;

5.1.6.  $\operatorname{div} \operatorname{grad}(r^4)$ ;

5.1.2.  $\operatorname{rot}(r^5(\vec{a}, \vec{r})\vec{r})$ ;

5.1.7.  $\operatorname{div} \operatorname{grad}((\vec{a}, \vec{r})^5)$ ;

5.1.3.  $\operatorname{rot}(r(\vec{a}, \vec{r})\vec{r})$ ;

5.1.8.  $\operatorname{grad}(r \cdot (\vec{a}, \vec{r})^4)$ ;

5.1.4.  $\operatorname{grad}(r \cdot (\vec{a}, \vec{r})^7)$ ;

5.1.9.  $\operatorname{div} \operatorname{grad}(r^2(\vec{a}, \vec{r}))$ ;

5.1.5.  $\operatorname{grad}(r^7(\vec{a}, \vec{r}))$ ;

5.1.10.  $\operatorname{div}(r^2(\vec{a}, \vec{r}) \cdot \vec{r})$ .

5.2. Разложите векторное поле  $\vec{a} = (x+y)\mathbf{i} + (x-y)\mathbf{j} + (z+1)\mathbf{k}$  на сумму потенциального и соленоидального полей.

5.3. Проверьте, что векторное поле  $\vec{a} = \frac{x}{x^2+y^2} \mathbf{i} + \frac{y}{x^2+y^2} \mathbf{j}$  является соленоидальным, и найдите его векторный потенциал.

## Тема 3. Числовые ряды.

### 1 Определения.

- 1.1. Сформулируйте определение частичной суммы числового ряда.
- 1.2. Сформулируйте определение сходящегося числового ряда.
- 1.3. Сформулируйте определение расходящегося числового ряда.
- 1.4. Сформулируйте определение абсолютно сходящегося ряда.
- 1.5. Сформулируйте определение условно сходящегося ряда.

### 2. Основные теоремы и формулы (без доказательства).

- 2.1. Сформулируйте критерий Коши сходимости числового ряда.
- 2.2. Сформулируйте необходимое условие сходимости ряда.
- 2.3. Сформулируйте необходимое и достаточное условие сходимости ряда с положительными членами.
- 2.4. Сформулируйте признак сравнения рядов с положительными членами.
- 2.5. Сформулируйте признак Даламбера сходимости ряда с положительными членами.
- 2.6. Сформулируйте признак Коши сходимости ряда с положительными членами.
- 2.7. Сформулируйте интегральный признак сходимости ряда с положительными членами.
- 2.8. Сформулируйте признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда.
- 2.9. Сформулируйте признак Дирихле-Абеля сходимости знакопеременного ряда.
- 2.10. Сформулируйте теорему о перестановке членов суммы абсолютно сходящегося ряда.
- 2.11. Сформулируйте теорему Римана о перестановке членов суммы условно сходящегося ряда.

### 3. Теоремы с доказательством.

- 3.1. Докажите теорему о критерии Коши сходимости числового ряда.
- 3.2. Докажите теорему о необходимом условии сходимости ряда.
- 3.3. Докажите теорему о необходимом и достаточном условии сходимости ряда с положительными членами.
- 3.4. Докажите теорему о признаке сравнения рядов с положительными членами.
- 3.5. Докажите теорему о признаке Даламбера сходимости ряда с положительными членами.
- 3.6. Докажите теорему о признаке Коши сходимости ряда с положительными членами.
- 3.7. Докажите интегральный признак сходимости ряда с положительными членами.
- 3.8. Докажите теорему о признаке Лейбница сходимости знакочередующегося ряда.
- 3.9. Докажите теорему о признаке Дирихле-Абеля сходимости знакопеременного ряда.
- 3.10. Докажите теорему о связи сходимости и абсолютной сходимости ряда.
- 3.11. Докажите теорему о перестановке членов абсолютно сходящегося ряда.

### 4. Вопросы и задачи.

4.1. Найдите сумму ряда:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}; & \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}; \\ \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} x^k; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}; & \text{д) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)(2n+5)}. \end{array}$$

4.2. Пользуясь критерием Коши, докажите сходимость ряда:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{2^n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos x^n}{n^2}.$$

4.3. Пользуясь критерием Коши, докажите, что ряд расходится:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{1}{\sqrt{n}}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

4.4. Исследуйте ряды на сходимость:

$$\begin{array}{ll} 4.4.1. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} e^{-n}; & 4.4.9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}; \\ 4.4.2. \sum_{n=1}^{\infty} \sin n; & 4.4.10. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \sin \frac{1}{n}; \\ 4.4.3. \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^2 \sin \frac{1}{n^2 + n + 1}\right); & 4.4.11. \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(2 + \frac{1}{n}\right)^{-n}; \\ 4.4.4. \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n^2); & 4.4.12. \sum_{n=1}^{\infty} 3^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}; \\ 4.4.5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}; & 4.4.13. \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \cos^2 \frac{n\pi}{3}; \\ 4.4.6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{n!}; & 4.4.14. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 + \cos n}{2 + \cos n}\right)^{2n - \ln n}; \\ 4.4.7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}; & 4.4.15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p} \quad p > 1; \\ 4.4.8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}; & 4.4.16. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p \ln n}, \quad p \leq 1; \end{array}$$

$$4.4.17. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n};$$

$$4.4.18. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)};$$

$$4.4.19. \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^p \ln \frac{n-1}{n+1}.$$

4.5. Исследуйте ряды на сходимость и абсолютную сходимость:

$$4.5.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n},$$

$$4.5.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{p+1}};$$

$$4.5.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^p};$$

$$4.5.4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p};$$

$$4.5.5. \sum_{n=0}^{\infty} \cos(\pi\sqrt{n^2 + n});$$

$$4.5.6. \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^p}\right);$$

$$4.5.7. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi n}{4}}{\ln n};$$

$$4.5.8. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{arctg} n}{\sqrt{n}};$$

$$4.5.9. \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2 + k^2}).$$

## 5. Задачи повышенной трудности.

5.1. Исследуйте ряды на сходимость:

$$5.1.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{n^\alpha};$$

$$5.1.2. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)}.$$

5.2. Исследуйте ряды на сходимость и абсолютную сходимость:

$$5.2.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi n}{4}}{n^p + \sin \frac{\pi n}{4}};$$

$$5.2.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\frac{p+1}{n}}};$$

$$5.2.3. \sum_{n=1}^{\infty} \sin n \cdot \ln\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)$$

5.3. Найдите сумму ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{2^n}$ .

5.4. Пусть  $b_n > 0$  и  $b_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Можно ли утверждать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$$

сходится? Обоснуйте ответ.

5.5. Пусть ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 1$ . Можно ли утверждать, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

также сходится? Обоснуйте ответ.

## Тема 4. Функциональные последовательности и ряды.

### 2 Определения.

- 1.1. Сформулируйте два определения равномерной сходимости функциональной последовательности.
- 1.2. Сформулируйте определение равномерной сходимости функционального ряда.
- 1.3. Сформулируйте отрицание к определению равномерной сходимости функциональной последовательности.
- 1.4. Сформулируйте отрицание к определению равномерной сходимости функционального ряда.
- 1.5. Сформулируйте определение сходимости в среднем функциональной последовательности.



- 1.6. Сформулируйте определение сходимости в среднем функционального ряда.
- 1.7. Сформулируйте определение равномерно ограниченной функциональной последовательности.
- 1.8. Сформулируйте определение равномерно непрерывной функциональной последовательности.

### **3. Основные теоремы и формулы (без доказательства).**

- 3.1. Сформулируйте критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности.
- 3.2. Сформулируйте критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда.
- 3.3. Сформулируйте мажорантный признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда.
- 3.4. Сформулируйте признак Дирихле-Абеля равномерной сходимости функционального ряда.
- 3.5. Сформулируйте теорему о непрерывности предела функциональной последовательности.
- 3.6. Сформулируйте теорему о непрерывности суммы функционального ряда.
- 3.7. Сформулируйте теорему о переходе к пределу под знаком производной для функциональной последовательности.
- 3.8. Сформулируйте теорему о почленном дифференцировании функционального ряда.
- 3.9. Сформулируйте теорему о переходе к пределу под знаком интеграла для функциональной последовательности.
- 3.10. Сформулируйте теорему о почленном интегрировании функционального ряда.
- 3.11. Сформулируйте теорему Арцела.

### **3. Теоремы с доказательством.**

- 3.1. Сформулируйте критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности. Докажите необходимость условия Коши.
- 3.2. Сформулируйте критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда. Докажите необходимость условия Коши.
- 3.3. Сформулируйте критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности. Докажите достаточность условия Коши.
- 3.4. Сформулируйте критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда. Докажите достаточность условия Коши.
- 3.5. Докажите теорему о мажорантном признаке Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда.
- 3.6. Докажите теорему о признаке Дирихле-Абеля равномерной сходимости функционального ряда.
- 3.7. Докажите теорему о непрерывности предела функциональной последовательности.
- 3.8. Докажите теорему о непрерывности суммы функционального ряда.
- 3.9. Докажите теорему о переходе к пределу под знаком производной для функциональной последовательности.
- 3.10. Докажите теорему о почленном дифференцировании функционального ряда.
- 3.11. Докажите теорему о переходе к пределу под знаком интеграла для равномерно сходящейся функциональной последовательности.
- 3.12. Докажите теорему о переходе к пределу под знаком интеграла для функциональной последовательности, сходящейся в среднем.
- 3.13. Докажите теорему о почленном интегрировании функционального ряда, сходящегося в среднем.

### **4. Вопросы и задачи.**

- 4.6. Найдите предел и исследуйте на равномерную сходимость функциональную последовательность на заданном промежутке:

$$4.6.1. f_n(x) = x^n, x \in (0,1);$$

$$4.6.2. f_n(x) = \arcsin(x^n), \\ x \in (0,1);$$

$$4.6.3. f_n(x) = \operatorname{arctg}(x^n), \\ x \in (0,1);$$

$$4.6.4. f_n(x) = \sqrt[n]{x}, x \in (0,1);$$

$$4.6.5. f_n(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^n}\right), \\ x \in (0,1);$$

$$4.6.6. f_n(x) = \frac{1}{1+(x-n)^2}, \\ x \in (-\infty; +\infty);$$

$$4.6.7. f_n(x) = e^{-nx^2}, \\ x \in (-\infty; +\infty);$$

$$4.6.8. f_n(x) = \ln(1-x^n), \\ x \in (0,1);$$

$$4.6.9. f_n(x) = \operatorname{arctg}(nx), \\ x \in (-\infty; +\infty);$$

$$4.6.10. f_n(x) = e^{-nx} \quad \text{а) } x \in (0,1); \\ \text{б) } x \in [1, \infty);$$

$$4.6.11. f_n(x) = x^n - x^{n+1}, x \in [0;1];$$

$$4.6.12. f_n(x) = \frac{1}{1+n^2x^2}, \\ x \in (-\infty; +\infty);$$

$$4.6.13. f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}, \\ \text{а) } x \in [1; +\infty); \text{б) } x \in [0;1];$$

$$4.6.14. f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx}, \\ x \in [0; +\infty);$$

$$4.6.15. f_n(x) = \frac{nx}{1+n^4x^4}, \\ x \in (-\infty; +\infty).$$

4.1. Докажите, что последовательность  $f_n(x) = nx(1-x)^n$  сходится неравномерно на сегменте  $[0;1]$ , но  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$ .

4.2. Докажите, что последовательность  $f_n(x) = \frac{1}{n} \operatorname{arctg}(x^n)$  сходится равномерно на  $(-\infty; +\infty)$ , но  $\left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)' \Big|_{x=1} \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \left( f_n'(x) \Big|_{x=1} \right)$ .

4.3. Докажите, что последовательность  $f_n(x) = x^2 + \frac{1}{n} \sin n \left( x + \frac{\pi}{2} \right)$  сходится равномерно на  $(-\infty; +\infty)$ , но соотношение  $\left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n'(x)$  не имеет места.

4.4. Определите область сходимости функционального ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}$ .

4.5. Определите области сходимости и абсолютной сходимости функционального ряда:

$$4.5.1. \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin k}{k^x};$$

$$4.5.2. \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k^x + (-1)^k}.$$

4.6. Исследуйте ряд на равномерную сходимость.

$$4.6.1. \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-kx}, x \in (0; +\infty);$$

$$4.6.4. \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k} + \sqrt{x}}, \\ x \in [0; +\infty);$$

$$4.6.2. \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(2kx)}{k\sqrt{k}}, \\ x \in (-\infty; +\infty);$$

$$4.6.3. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}x}{1+k^4x^2}, \\ x \in (-\infty; +\infty);$$

$$4.6.5. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}, \quad x \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon], \text{ где } \varepsilon > 0, \quad 0 < \varepsilon < \pi.$$

4.7. Определите радиус и интервал сходимости степенного ряда:

$$4.7.1. \sum_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k^2} x^k;$$

$$4.7.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3 + (-1)^n)^n}{n} x^n.$$

$$4.7.2. \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!} x^k;$$

4.8. Укажите область определения функции  $f(x)$  и исследуйте функцию на непрерывность:

$$4.8.1. f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^x},$$

$$4.8.2. f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin k}{k^x}.$$

4.9. Докажите, что функция  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$  непрерывна и имеет непрерывную производную на интервале  $(-\infty; \infty)$ .

4.10. Найдите сумму степенного ряда и укажите область сходимости:

$$4.10.1. \sum_{k=1}^{+\infty} x^k;$$

$$4.10.4. \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k};$$

$$4.10.2. \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!};$$

$$4.10.5. \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k};$$

$$4.10.3. \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1};$$

$$4.10.6. \sum_{n=1}^{\infty} nx^n.$$

4.11. Получите разложение в степенной ряд функции  $f(x) = \operatorname{arctg} x$ . Найдите сумму ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ . Указание: сначала разложите в степенной ряд производную  $f(x) = \operatorname{arctg} x$ , а потом примените почленное интегрирование.

4.12. Докажите, что функциональная последовательность  $f_n(x) = x^n \sqrt{1-x}$  сходится в каждой точке и в среднем на сегменте  $[0; 1]$  к функции  $f(x) = 0$ .

4.13. Докажите, что функциональная последовательность  $f_n(x) = nx^n \sqrt{1-x}$  сходится в каждой точке сегмента  $[0; 1]$  к функции  $f(x) = 0$  и не сходится в среднем на сегменте  $[0; 1]$  к этой функции.

## 6. Задачи повышенной трудности.

5.1. Найдите предел и исследуйте на равномерную сходимость функциональную последовательность  $f_n(x) = x^n$  на промежутке  $x \in [0, 1]$ .

5.2. При каких значениях параметра  $\alpha$  последовательность  $f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}$  (а) сходится на сегменте  $[0; 1]$ , (б) сходится равномерно на сегменте  $[0; 1]$ ?

5.3. Докажите, что функциональный ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$  на промежутке  $x \in (-1; 1)$  не является равномерно сходящимся.

5.4. Докажите, что функциональный ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$  на промежутке  $x \in (-1; 1)$  не является равномерно сходящимся.

5.5. Докажите, что функциональный ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} kx^k$  на промежутке  $x \in (0; 1)$  не является равномерно сходящимся.

5.6. Докажите, что функциональный ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k kx^k$  на промежутке  $x \in (-1; 1)$  не является равномерно сходящимся.

5.7. Исследуйте сходимость ряда в граничных точках интервала сходимости:

$$5.7.1. \sum_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k^2} x^k; \quad 5.7.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3 + (-1)^n)^n}{n} x^n.$$

$$5.7.2. \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!} x^k;$$

5.8. Приведите пример функциональной последовательности, которая сходится к функции  $f(x)$  в каждой точке сегмента  $[a, b]$ , но не сходится к  $f(x)$  в среднем на  $[a, b]$ .

5.9. Приведите пример функциональной последовательности, которая сходится в среднем к некоторой функции на сегменте  $[a, b]$ , но не сходится ни в одной точке этого сегмента.

5.10. Докажите, что если функциональная последовательность  $\{f'_n(x)\}$  равномерно ограничена на промежутке  $X$ , то функциональная последовательность  $\{f_n(x)\}$  равностепенно непрерывна на промежутке  $X$ .

5.11. Приведите пример функциональной последовательности, которая ограничена в каждой точке  $x \in X$ , но не является равномерно ограниченной на множестве  $X$ .

5.12. Докажите, что функциональная последовательность  $f_n(x) = \frac{n}{x+n}$  сходится равномерно на множестве  $[0, +\infty)$ , но предельная функция непрерывна на этом множестве.

5.13. Приведите пример функциональной последовательности  $\{f_n(x)\}$ , которая сходится неравномерно к функции  $f(x)$  на промежутке  $X$ , и при этом

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f_n(t) dt \neq \int_{x_0}^x f(t) dt, \text{ где } [x_0, x] \subset X.$$

5.14. Приведите пример функциональной последовательности  $\{f_n(x)\}$ , такой, что каждая функция  $f_n(x)$  равномерно непрерывна на сегменте  $[a, b]$ , но последовательность не является равностепенно непрерывной на этом сегменте.

## Тема 5. Несобственные интегралы.

### 1. Определения.

- 1.1. Сформулируйте определение несобственного интеграла I рода.
- 1.2. Сформулируйте определение несобственного интеграла II рода.

### 2. Основные теоремы и формулы (без доказательства).

- 2.1. Сформулируйте критерий Коши сходимости несобственного интеграла I рода.
- 2.2. Сформулируйте критерий Коши сходимости несобственного интеграла II рода.
- 2.3. Сформулируйте признак сравнения для несобственных интегралов I рода.
- 2.4. Сформулируйте признак сравнения для несобственных интегралов II рода.
- 2.5. Сформулируйте признак Дирихле-Абеля для несобственного интеграла I рода.

### 3. Теоремы с доказательством.

- 3.1. Докажите теорему о критерии Коши сходимости несобственного интеграла I рода.
- 3.2. Докажите теорему о критерии Коши сходимости несобственного интеграла II рода.
- 3.3. Докажите теорему о признаке сравнения для несобственных интегралов I рода.
- 3.4. Докажите теорему о признаке сравнения для несобственных интегралов II рода.
- 3.5. Докажите теорему о признаке Дирихле-Абеля для несобственного интеграла I рода.

#### 4. Вопросы и задачи.

4.1. Исследуйте интегралы на сходимость:

$$4.1.1. \int_0^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx;$$

$$4.1.2. \int_0^{+\infty} \frac{x^3 + 1}{x^4 + 1} dx;$$

$$4.1.3. \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + x^3)}{x^3 \sqrt{x}} dx;$$

$$4.1.4. \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + x^3)}{x^4 \sqrt{x}} dx;$$

$$4.1.5. \int_1^{+\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) dx;$$

$$4.1.6. \int_1^{+\infty} (\sqrt{x^3+1} - \sqrt{x^3-1}) dx;$$

$$4.1.7. \int_0^{+\infty} x \sin(x^3) dx.$$

4.2. Докажите, что интеграл сходится:

$$4.2.1. \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx;$$

$$4.2.2. \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx, n \in \mathbb{Z}, n > -1.$$

4.3. Докажите, что интеграл сходится, и вычислите его:

$$4.3.1. \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx;$$

$$4.3.2. \int_0^1 x \ln x dx;$$

$$4.3.3. \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x dx;$$

$$4.3.4. \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos x dx.$$

4.4. Исследуйте интеграл на сходимость и вычислите в случае сходимости.

$$4.4.1. \int_1^{+\infty} \sin(\ln x) dx;$$

$$4.4.2. \int_1^{+\infty} \frac{\sin(\ln x)}{x} dx;$$

$$4.4.3. \int_1^{+\infty} \frac{\sin(\ln x)}{x^2} dx.$$

4.5. Найдите, при каких значениях параметра  $p$  сходится интеграл:

$$4.5.1. \int_0^1 \frac{dx}{x^p};$$

$$4.5.2. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p};$$

$$4.5.3. \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p};$$

$$4.5.4. \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(ax) dx}{x^p}, a > 0.$$

4.6. Найдите, при каких значениях параметра  $p$  интеграл сходится абсолютно и при каких – условно:

$$4.6.1. \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx;$$

$$4.6.2. \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx.$$

#### 5. Задачи повышенной трудности.

5.1. Вычислите  $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ .

5.2. Пусть  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  сходится. Следует ли из этого, что  $f(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow +\infty$ ? Ответ обоснуйте.

5.3. Пусть  $f(x)$  - монотонная функция при  $x \in (a; +\infty)$ ,  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  сходится. Докажите, что  $f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$  при  $x \rightarrow +\infty$ .

## Тема 6. Интегралы, зависящие от параметра.

### 1. Определения.

- 1.1. Сформулируйте определение равномерной сходимости несобственного интеграла I рода, зависящего от параметра.
- 1.2. Сформулируйте определение равномерной сходимости несобственного интеграла II рода, зависящего от параметра.
- 1.3. Сформулируйте отрицание к определению равномерной сходимости несобственного интеграла I рода, зависящего от параметра.
- 1.4. Сформулируйте отрицание к определению равномерной сходимости несобственного интеграла II рода, зависящего от параметра.

### 2. Основные теоремы и формулы (без доказательства).

- 2.1. Сформулируйте теорему о непрерывности собственного интеграла, зависящего от параметра.
- 2.2. Сформулируйте теорему об интегрировании по параметру собственного интеграла, зависящего от параметра.
- 2.3. Сформулируйте теорему о дифференцировании по параметру собственного интеграла, зависящего от параметра.
- 2.4. Сформулируйте критерий Коши равномерной сходимости несобственного интеграла I рода, зависящего от параметра.
- 2.5. Сформулируйте критерий Коши равномерной сходимости несобственного интеграла II рода, зависящего от параметра.
- 2.6. Сформулируйте признак Вейерштрасса (мажорантный) равномерной сходимости несобственного интеграла I рода, зависящего от параметра.
- 2.7. Сформулируйте признак Дирихле-Абеля равномерной сходимости несобственного интеграла I рода, зависящего от параметра.
- 2.8. Сформулируйте теорему о непрерывности несобственного интеграла I рода, зависящего от параметра.
- 2.9. Сформулируйте теорему об интегрировании по параметру несобственного интеграла I рода, зависящего от параметра.
- 2.10. Сформулируйте теорему о дифференцировании по параметру несобственного интеграла I рода, зависящего от параметра.

### 3. Теоремы с доказательством.

- 3.1. Докажите теорему о критерии Коши равномерной сходимости несобственного интеграла I рода, зависящего от параметра.
- 3.2. Докажите теорему о непрерывности по параметру несобственного интеграла I рода, зависящего от параметра.
- 3.3. Докажите теорему об интегрировании по параметру несобственного интеграла I рода, зависящего от параметра.
- 3.4. Докажите теорему о дифференцировании по параметру несобственного интеграла I рода, зависящего от параметра.

### 4. Вопросы и задачи.

- 4.1. Запишите формулу для гамма-функции  $\Gamma(p)$  в виде несобственного интеграла. Укажите область сходимости.
- 4.2. Укажите области равномерной сходимости для гамма-функции  $\Gamma(p)$ .
- 4.3. Докажите, что гамма-функция  $\Gamma(p)$  непрерывна при  $p > 0$ .
- 4.4. Докажите, что гамма-функция  $\Gamma(p)$  при  $p > 0$  имеет производную любого порядка.
- 4.5. Докажите, что гамма-функция удовлетворяет тождеству  $\Gamma(p + 1) = p\Gamma(p)$  при  $p > 0$ .

4.6. Напишите формулу для бета-функции  $B(p, q)$  в виде несобственного интеграла.

Укажите область сходимости.

4.7. Напишите формулу, выражающую бета-функцию через гамма-функцию, и дока-  
жите, что  $B(p, q)$  непрерывна в области  $p > 0, q > 0$ .

4.8. Исследуйте интеграл на равномерную сходимость в указанном промежутке изме-  
нения параметра  $p$ , используя определение равномерной сходимости несобствен-  
ного интеграла.

$$4.8.1. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}, p \in (1; +\infty). \int_0^1 \frac{dx}{x^p}, p \in (0; 1);$$

$$4.8.2. \int_0^{+\infty} p e^{-px} dx, \text{ а) } p \in [a; b], 0 < a < b, \text{ б) } p \in [0; b], b > 0;$$

$$4.8.3. \int_0^{+\infty} e^{-px} \sin x dx, \text{ а) } p \in (0; +\infty), \text{ б) } p \in [a; +\infty), a > 0;$$

$$4.8.4. \int_0^{+\infty} e^{-px} dx \text{ а) } p \in (0; +\infty); \text{ б) } p \in [a; +\infty), a > 0.$$

4.9. Исследуйте интеграл на равномерную сходимость в указанном промежутке изме-  
нения параметра  $p$ , используя признаки равномерной сходимости интеграла.

$$4.9.1. \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx, \\ p \in [a; +\infty), a > 0;$$

$$4.9.3. \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} e^{-px} dx, \\ p \in [0; +\infty);$$

$$4.9.2. \int_0^1 \frac{x^p}{\sqrt{1-x}} dx, \\ p \in [0; +\infty):$$

4.10. Докажите, что функция  $f(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(px)}{1+x^2} dx$  непрерывна на промежутке  
 $p \in (-\infty; +\infty)$ .

4.11. Для каких значений  $p$  сходится интеграл  $\int_0^1 x^p (\ln x)^2 dx$ ? Вычислите его, диф-  
ференцируя по параметру интеграл  $\int_0^1 x^p dx$ . Обоснуйте возможность применения  
этого метода.

4.12. Вычислите:

$$4.12.1. \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx, \text{ дифференцируя по параметру интеграл } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-px^2} dx;$$

$$4.12.2. \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \text{ дважды дифференцируя по параметру интеграл} \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-px^2} dx.$$

$$4.12.3. \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-px} dx, p > 0, \text{ дифференцируя по параметру.}$$

4.13. Укажите область сходимости интеграла и выразите его через интегралы Эй-  
лера.

$$4.13.1. \int_0^{+\infty} t^{p-1} e^{-t^2} dt;$$

$$4.13.2. \int_0^{+\infty} e^{-x^p} dx;$$

$$4.13.3. \int_0^1 (-\ln t)^p dt;$$

$$4.13.5. \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x^q} dx \quad (q > 0);$$

$$4.13.4. \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{(1+x)^q} dx;$$

$$4.13.6. \int_0^1 (1-x^p)^{\left(\frac{-1}{p}\right)} dx, \quad p > 0.$$

### 5. Задачи повышенной трудности.

5.1. С помощью критерия Коши исследуйте интеграл  $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$  на равномерную сходимость на промежутке  $p \in (0; +\infty)$ .

5.2. Докажите, что функция  $f(p)$  непрерывна на указанном промежутке

$$5.2.1. \quad f(p) = \int_0^{+\infty} e^{-(x-p)^2} dx, \quad p \in (0; +\infty);$$

$$5.2.2. \quad f(p) = \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^p} dx, \quad p \in (2; +\infty).$$

5.3. Для каких значений  $q$  сходится интеграл  $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} \sin q x dx$ ? Вычислите его, дифференцируя по параметру интеграл  $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos q x dx$ . Обоснуйте возможность применения этого метода.

## Тема 7. Кратные несобственные интегралы, зависящие от параметра.

### 1. Определения.

1.1. Сформулируйте определение равномерной сходимости в точке  $M_0$  несобственного интеграла вида  $\int \int \int_G f(M, P) g(P) dV_P$ .

### 2. Основные теоремы и формулы (без доказательства).

2.1. Сформулируйте теорему о достаточных условиях равномерной сходимости в точке  $M_0$  несобственного интеграла  $\int \int \int_G f(M, P) g(P) dV_P$ .

### 3. Теоремы с доказательством.

3.1. Докажите теорему о достаточных условиях равномерной сходимости в точке  $M_0$  несобственного интеграла  $\int \int \int_G f(M, P) g(P) dV_P$ .

3.2. Докажите, что если несобственный интеграл  $u(M) = \int \int \int_G f(M, P) g(P) dV_P$  сходится равномерно относительно  $M$  в точке  $M_0$ , то функция  $u(M)$  непрерывна в точке  $M_0$ .

### 4. Вопросы и задачи.

4.1. Напишите выражение для ньютонова потенциала.

4.2. Напишите формулы для частных производных первого порядка ньютонова потенциала.

### 5. Задачи повышенной трудности.

5.1. Докажите, что ньютонов потенциал является непрерывной функцией.



## Тема 8. Ряды Фурье.

### 1. Определения.

- 1.1. Сформулируйте определение кусочно-непрерывной функции на отрезке  $[a, b]$ .
- 1.2. Сформулируйте определение кусочно-гладкой функции на отрезке  $[a, b]$ .
- 1.3. Что такое тригонометрическая система функций на отрезке  $[-l, l]$ ?
- 1.4. Какой ряд называют рядом Фурье функции  $f(x)$  по тригонометрической системе функций на отрезке  $[-l, l]$ ?
- 1.5. Сформулируйте определение бесконечномерного евклидова пространства.
- 1.6. Что такое евклидово пространство кусочно-непрерывных функций  $Q[a, b]$ ?
- 1.7. Сформулируйте определение нормированного пространства.
- 1.8. Сформулируйте определения ортогональной и ортонормированной систем в бесконечномерном евклидовом пространстве.
- 1.9. Что такое ряд Фурье элемента  $f$  бесконечномерного евклидова пространства по ортогональной системе  $\{\psi_n\}$ ? Напишите выражение для коэффициентов Фурье элемента  $f$ .
- 1.10. Сформулируйте определение сходимости ряда Фурье элемента  $f$  к этому элементу по норме данного пространства.
- 1.11. Сформулируйте определение замкнутой системы в бесконечномерном евклидовом пространстве.
- 1.12. Сформулируйте определение полной системы в бесконечномерном евклидовом пространстве.

### 2. Основные теоремы и формулы (без доказательства).

- 2.1. Запишите ряд Фурье функции  $f(x)$  по тригонометрической системе функций на отрезке  $[-\pi; \pi]$  и выражения для коэффициентов этого ряда.
- 2.2. Запишите ряд Фурье функции  $f(x)$  по тригонометрической системе функций на отрезке  $[-l; l]$  и выражения для коэффициентов этого ряда.
- 2.3. Запишите тригонометрический ряд Фурье функции  $f(x)$  в комплексной форме на отрезке  $[-l; l]$  и выражения для коэффициентов этого ряда.
- 2.4. Сформулируйте теорему о поточечной сходимости и сумме тригонометрического ряда Фурье
- 2.5. Запишите ряд Фурье элемента  $f$  бесконечномерного евклидова пространства по ортогональной системе элементов этого пространства и выражения для коэффициентов этого ряда.
- 2.6. Сформулируйте теорему об экстремальном свойстве частичных сумм ряда Фурье элемента  $f$  бесконечномерного евклидова пространства по ортонормированной системе элементов этого пространства.
- 2.7. Запишите тождество Бесселя для элемента  $f$  бесконечномерного евклидова пространства.
- 2.8. Запишите неравенство Бесселя для элемента  $f$  бесконечномерного евклидова пространства.
- 2.9. Запишите неравенство Бесселя для коэффициентов ряда Фурье функции  $f(x)$  по тригонометрической системе функций на отрезке  $[-\pi; \pi]$ .
- 2.10. Сформулируйте теорему о необходимом и достаточном условии замкнутости ортонормированной системы в бесконечномерном евклидовом пространстве.
- 2.11. Сформулируйте теорему о связи замкнутости и полноты ортонормированной системы в бесконечномерном евклидовом пространстве.

- 2.12. Сформулируйте теорему о равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье функции  $f(x)$  на отрезке  $[-\pi; \pi]$ .
- 2.13. Сформулируйте теорему об  $m$  – кратном почленном дифференцировании тригонометрического ряда Фурье функции  $f(x)$  на отрезке  $[-\pi; \pi]$ .
- 2.14. Сформулируйте теорему об аппроксимации непрерывной на сегменте  $[-l; l]$  функции тригонометрическим многочленом.
- 2.15. Сформулируйте теорему об аппроксимации непрерывной на сегменте  $[a; b]$  функции алгебраическим многочленом.
- 2.16. Сформулируйте теорему о замкнутости тригонометрической системы функций.
- 3. Теоремы с доказательством.**
- 3.1. Докажите теорему об аппроксимации непрерывной на сегменте функции непрерывной кусочно-гладкой функцией.
- 3.2. Докажите, что если  $f(x)$  – кусочно-непрерывная на сегменте  $[a; b]$  функция, то
- $$\int_a^b f(x) \cos \lambda x dx \rightarrow 0 \text{ при } \lambda \rightarrow \infty \text{ и } \int_a^b f(x) \sin \lambda x dx \rightarrow 0 \text{ при } \lambda \rightarrow \infty.$$
- 3.3. Докажите теорему о поточечной сходимости тригонометрического ряда Фурье.
- 3.4. Докажите теорему об экстремальном свойстве частичных сумм ряда Фурье элемента  $f$  бесконечномерного евклидова пространства по ортонормированной системе элементов этого пространства. Обоснуйте тождество Бесселя и неравенство Бесселя.
- 3.5. Докажите теорему о необходимом и достаточном условии замкнутости ортонормированной системы в бесконечномерном евклидовом пространстве.
- 3.6. Докажите, что если ортонормированная система в бесконечномерном евклидовом пространстве замкнута, то любой элемент пространства можно разложить в ряд Фурье по этой системе, сходящийся к данному элементу по норме пространства. Докажите единственность такого разложения.
- 3.7. Докажите теорему о связи замкнутости и полноты ортонормированной системы в бесконечномерном евклидовом пространстве.
- 3.8. Докажите теорему о равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье функции  $f(x)$  на отрезке  $[-\pi; \pi]$ .
- 3.9. Докажите теорему об  $m$  – кратном почленном дифференцировании тригонометрического ряда Фурье функции  $f(x)$  на отрезке  $[-\pi; \pi]$ .
- 3.10. Докажите теорему об аппроксимации непрерывной на сегменте  $[-\pi; \pi]$  функции тригонометрическим многочленом.
- 3.11. Докажите теорему об аппроксимации непрерывной на сегменте  $[a; b]$  функции алгебраическим многочленом.
- 3.12. Докажите теорему о замкнутости тригонометрической системы функций в пространстве  $Q[-\pi; \pi]$ .
- 4. Вопросы и задачи.**
- 4.1. Приведите пример бесконечной ортогональной системы функций на отрезке  $[-\pi; \pi]$ , каждый элемент которой ортогонален всем функциям  $\sin nx$ ,  $n \geq 1$ . Является ли эта система полной?
- 4.2. Приведите пример бесконечной системы функций на отрезке  $[-\pi; \pi]$ , которая не является замкнутой в пространстве  $Q[-\pi; \pi]$ , но если к ней добавить еще одну функцию, то она станет замкнутой.
- 4.3. Приведите пример бесконечной системы функций на отрезке  $[-\pi; \pi]$ , которая не является замкнутой в пространстве  $Q[-\pi; \pi]$ , но является замкнутой в подпро-

- пространстве пространства  $Q[-\pi; \pi]$ , состоящем из всех четных кусочно-непрерывных функций.
- 4.4. Приведите пример бесконечной ортогональной системы функций на отрезке  $[-\pi; \pi]$ , которая не является полной в пространстве  $Q[-\pi; \pi]$ .
  - 4.5. Приведите пример бесконечной ортогональной системы функций на отрезке  $[-\pi; \pi]$ , которая не является замкнутой в пространстве  $Q[-\pi; \pi]$ .
  - 4.6. Верно ли, что для любой кусочно-непрерывной на отрезке  $[-\pi; \pi]$  функции  $f(x)$ , её ряд Фурье по тригонометрической системе сходится в среднем на указанном отрезке? Ответ обоснуйте ссылкой на теорему.
  - 4.7. Верно ли, что для любой  $2\pi$  – периодической непрерывно дифференцируемой на всей числовой оси функции  $f(x)$  её ряд Фурье по тригонометрической системе сходится к  $f(x)$  равномерно на всей числовой оси? Ответ обоснуйте ссылкой на теорему.
  - 4.8. Верно ли, что для любой  $2\pi$  – периодической дважды непрерывно дифференцируемой на всей числовой оси функции  $f(x)$  её ряд Фурье по тригонометрической системе можно дифференцировать почленно и ряд из производных сходится к  $f'(x)$  равномерно на отрезке  $[-\pi; \pi]$ ? Ответ обоснуйте ссылкой на теорему.
  - 4.9. Верно ли, что для любой кусочно-непрерывной на отрезке  $[-\pi; \pi]$  функции  $f(x)$  её ряд Фурье по тригонометрической системе можно интегрировать почленно и ряд из интегралов сходится к интегралу от функции  $f(x)$  равномерно на отрезке  $[-\pi; \pi]$ ? Ответ обоснуйте ссылкой на теорему.
  - 4.10. Сформулируйте достаточные условия того, что ряд Фурье функции  $f(x)$ , заданной на отрезке  $[0; \pi]$ , по системе функций  $\{\sin nx, n \geq 1\}$ , сходится в каждой точке числовой оси. Чему равна при этом сумма указанного ряда Фурье?
  - 4.11. Сформулируйте достаточные условия того, что ряд Фурье функции  $f(x)$ , заданной на отрезке  $[0; \pi]$ , по системе функций  $\{\cos nx, n \geq 0\}$ , сходится в каждой точке числовой оси. Чему равна при этом сумма указанного ряда Фурье?
  - 4.12. Пусть  $f(x)$  – непрерывная кусочно-гладкая функция на отрезке  $[-\pi; \pi]$ ,  $f(-\pi) = f(\pi)$ ,  $a_n, b_n$  – коэффициенты ряда Фурье функции  $f(x)$  по тригонометрической системе. При каких  $p$  справедливы равенства  $a_n = o(n^{-p})$ ,  $b_n = o(n^{-p})$ ?
  - 4.13. Найдите разложение в ряд Фурье функции  $f(x) = x, x \in (-\pi; \pi]$  по тригонометрической системе функций и нарисуйте график его суммы на отрезке  $[-2\pi; 2\pi]$ .
  - 4.14. Найдите разложение в ряд Фурье функции  $f(x) = 1, x \in (0; \pi)$ , по системе функций  $\{\sin nx, n \geq 1\}$  и нарисуйте график его суммы на отрезке  $[-2\pi; 2\pi]$ .
  - 4.15. Найдите разложение в ряд Фурье функции  $f(x) = 1, x \in (0; \pi)$ , по системе функций  $\{\cos nx, n \geq 0\}$  и нарисуйте график его суммы на отрезке  $[-2\pi; 2\pi]$ .
  - 4.16. Найдите разложение в ряд Фурье функции  $f(x) = x, x \in (0; \pi)$ , по системе функций  $\{\sin nx, n \geq 1\}$  и нарисуйте график его суммы на отрезке  $[-2\pi; 2\pi]$ .
  - 4.17. Найдите разложение в ряд Фурье функции  $f(x) = x, x \in (0; \pi)$ , по системе функций  $\{\cos nx, n \geq 0\}$  и нарисуйте график его суммы на отрезке  $[-2\pi; 2\pi]$ .

4.18. Пусть  $S(x)$  – сумма тригонометрического ряда Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}. \text{ Найдите } S(\pi).$$

4.19. Пусть  $S(x)$  – сумма тригонометрического ряда Фурье функции  $f(x) = x$ ,

$0 \leq x < 2\pi$ , продолженной на всю числовую ось с периодом  $2\pi$ . Найдите  $S(0)$ .

4.20. Пусть  $S(x)$  – сумма тригонометрического ряда Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < \pi \\ 2, & \pi \leq x < 2\pi \end{cases}, \text{ продолженной на всю числовую ось с периодом } 2\pi. \text{ Найдите } S(0).$$

4.21. Пусть  $S(x)$  – сумма тригонометрического ряда Фурье функции  $f(x) = x^2$ ,

$0 \leq x < 2\pi$ , продолженной на всю числовую ось с периодом  $2\pi$ . Найдите  $S(0)$ .

4.22. Пусть  $f(x)$  – кусочно-непрерывная на  $[a; b]$  функция,  $\{\varphi_k(x)\}$  – ортогональная система функций в пространстве  $Q[a; b]$ ,  $f_k$  – коэффициенты Фурье функции  $f(x)$  по системе  $\{\varphi_k(x)\}$ . Чему равно наименьшее значение функции

$$F(C_1, C_2, \dots, C_n) = \int_a^b \left( f(x) - \sum_{k=1}^n C_k \varphi_k(x) \right)^2 dx ?$$

4.23. Пусть  $f(x)$  – интегрируемая на отрезке  $[a; b]$  функция,  $\{\varphi_k(x)\}$  – ортогональная система функций на отрезке  $[a; b]$ ,  $C_k$  – произвольные числа. При каких значениях

$C_k$  функция  $F(C_1, C_2, \dots, C_n) = \int_a^b \left( f(x) - \sum_{k=1}^n C_k \varphi_k(x) \right)^2 dx$  принимает наименьшее значение?

4.24. Пусть  $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ , причем ряд сходится равномерно на всей числовой оси,  $C_k$  – произвольные числа. Чему равно наименьшее значение

функции  $F(C_1, C_2, \dots, C_n) = \int_{-\pi}^{\pi} \left( f(x) - \sum_{k=1}^n C_k \sin kx \right)^2 dx$ ? Выразите ответ только через числовые величины  $a_k, b_k$ .

4.25. Пусть  $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ , причем ряд сходится равномерно на всей числовой оси,  $C_k$  – произвольные числа. Чему равно наименьшее значение

функции  $F(C_0, C_1, C_2, \dots, C_n) = \int_{-\pi}^{\pi} \left( f(x) - \frac{C_0}{2} - \sum_{k=1}^n C_k \cos kx \right)^2 dx$ ? Выразите ответ только через известные величины  $a_k, b_k$ .

## 5. Задачи повышенной трудности.

5.1. Пусть  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin 2nx$ ,  $x \in (-\infty; +\infty)$ , и  $f(x) = x$ ,  $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ . Нарисуйте график функции  $f(x)$  на отрезке  $[-\pi; \pi]$ . Является ли указанный ряд Фурье равномерно сходящимся на отрезке  $[-\pi; \pi]$ ? Ответ обоснуйте.

- 5.2. Пусть  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin(2n+1)x$ ,  $x \in (-\infty; +\infty)$ , и  $f(x) = x$ ,  $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ . Нарисуйте график функции  $f(x)$  на отрезке  $[-\pi; \pi]$ . Является ли указанный ряд Фурье равномерно сходящимся на отрезке  $[-\pi; \pi]$ ? Ответ обоснуйте.
- 5.3. Пусть  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos 2nx$ ,  $x \in (-\infty; +\infty)$ , и  $f(x) = x$ ,  $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ . Нарисуйте график функции  $f(x)$  на отрезке  $[-\pi; \pi]$ . Является ли указанный ряд Фурье равномерно сходящимся на отрезке  $[-\pi; \pi]$ ? Ответ обоснуйте.
- 5.4. Пусть  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos(2n+1)x$ ,  $x \in (-\infty; +\infty)$ , и  $f(x) = x$ ,  $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ . Нарисуйте график функции  $f(x)$  на отрезке  $[-\pi; \pi]$ . Является ли указанный ряд Фурье равномерно сходящимся на отрезке  $[-\pi; \pi]$ ? Ответ обоснуйте.
- 5.5. Пусть  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin 2nx$ ,  $x \in (-\infty; +\infty)$ , и  $f(x) = 1$ ,  $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ . Нарисуйте график функции  $f(x)$  на отрезке  $[-\pi; \pi]$ . Является ли указанный ряд Фурье равномерно сходящимся на отрезке  $[-\pi; \pi]$ ? Ответ обоснуйте.
- 5.6. Пусть  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos(2n+1)x$ ,  $x \in (-\infty; +\infty)$ , и  $f(x) = 1$ ,  $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ . Нарисуйте график функции  $f(x)$  на отрезке  $[-\pi; \pi]$ . Является ли указанный ряд Фурье равномерно сходящимся на отрезке  $[-\pi; \pi]$ ? Ответ обоснуйте.
- 5.7. Пусть  $f(x)$  – кусочно-непрерывная четная функция на промежутке  $[-\pi; \pi]$ ,  $C_k$  – произвольные числа. Чему равно значение  $\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n$ , если  $Z_n = \min F(C_1, C_2, \dots, C_n)$ , где  $F(C_1, C_2, \dots, C_n) = \int_{-\pi}^{\pi} \left( f(x) - \sum_{k=1}^n C_k \cos kx \right)^2 dx$ ?
- 5.8. Пусть  $f(x)$  – кусочно-непрерывная нечетная функция на отрезке  $[-\pi; \pi]$ ,  $C_k$  – произвольные числа. Чему равно значение  $\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n$ , если  $Z_n = \min F(C_1, C_2, \dots, C_n)$ , где  $F(C_1, C_2, \dots, C_n) = \int_{-\pi}^{\pi} \left( f(x) - \sum_{k=1}^n C_k \sin kx \right)^2 dx$ ?
- 5.9. Пусть  $f(x)$  – кусочно-непрерывная на отрезке  $[-\pi; \pi]$  нечетная функция,  $a_k$  и  $b_k$  – коэффициенты тригонометрического ряда Фурье функции  $f(x)$ ,  $C_k$  – произвольные числа. Чему равно наименьшее значение функции  $F(C_1, C_2, \dots, C_n) = \int_{-\pi}^{\pi} \left( f(x) - \sum_{k=1}^n C_k \sin kx \right)^2 dx$ ?
- 5.10. Пусть  $f(x)$  – кусочно-непрерывная на отрезке  $[-\pi; \pi]$  нечетная функция,  $a_k$  и  $b_k$  – коэффициенты тригонометрического ряда Фурье функции  $f(x)$ ,  $C_k$  – произвольные числа. Чему равно наименьшее значение функции  $F(C_0, C_1, C_2, \dots, C_n) = \int_{-\pi}^{\pi} \left( f(x) - \frac{C_0}{2} - \sum_{k=1}^n C_k \cos kx \right)^2 dx$ ?
- 5.11. Пусть  $f(x)$  – кусочно-непрерывная на отрезке  $[-\pi; \pi]$  четная функция,  $a_k$  и  $b_k$  – коэффициенты тригонометрического ряда Фурье функции  $f(x)$ ,  $C_k$  – произволь-

ные числа. Чему равно наименьшее значение функции

$$F(C_1, C_2, \dots, C_n) = \int_{-\pi}^{\pi} \left( f(x) - \sum_{k=1}^n C_k \sin kx \right)^2 dx ?$$

5.12. Докажите, что если производная  $f'(x)$  существует в правой полукрестности точки  $x_0$ , и существует  $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f'(x) = f'(x_0 + 0)$ , то существует

$$\lim_{\xi \rightarrow +0} \frac{f(x_0 + \xi) - f(x_0 + 0)}{\xi} = f'(x_0 + 0).$$

5.13. Докажите, что для любой кусочно-непрерывной на отрезке  $[-\pi, \pi]$  функции  $f(x)$  коэффициенты тригонометрического ряда Фурье  $a_n$  и  $b_n$  удовлетворяют условиям:

- $a_n \rightarrow 0, b_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ ;
- ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$  сходится.

5.14. Докажите, что для любой кусочно-непрерывной на отрезке  $[-\pi, \pi]$  функции  $f(x)$  ее тригонометрический ряд Фурье можно интегрировать почленно.

5.15. Сколько раз можно почленно дифференцировать на отрезке  $[-\pi, \pi]$  тригонометрический ряд Фурье функции

- $f(x) = (x^2 - \pi^2)^2$
- $f(x) = e^{\sin x}$
- $f(x) = \sin(\cos x)$
- $f(x) = e^{\cos x}$

## Тема 9. Интеграл Фурье.

### 1. Определения.

### 2. Основные теоремы и формулы (без доказательства).

- 2.1. Запишите представление функции  $f(x)$  в виде интеграла Фурье. При каких условиях оно имеет место?
- 2.2. Запишите интеграл Фурье функции  $f(x)$  в комплексной форме.
- 2.3. Запишите формулу преобразования Фурье функции  $f(x)$ .
- 2.4. Запишите формулу синус - преобразования Фурье функции  $f(x)$ .
- 2.5. Запишите формулу косинус - преобразования Фурье функции  $f(x)$ .
- 2.6. Запишите формулу обратного преобразования Фурье функции  $f(x)$ .
- 2.7. Запишите формулу обратного синус - преобразования Фурье функции  $f(x)$ .
- 2.8. Запишите формулу обратного косинус - преобразования Фурье функции  $f(x)$ .

### 3. Теоремы с доказательством.

- 3.1. Докажите теорему о представлении функции в виде интеграла Фурье.

### 4. Вопросы и задачи.

4.1. Представьте в виде интеграла Фурье следующие функции:

$$4.1.1. \quad f(x) = \begin{cases} \cos x, & |x| \leq \frac{\pi}{2}; \\ 0, & |x| \geq \frac{\pi}{2}; \end{cases} \quad 4.1.2. \quad f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} x, & |x| < 1; \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

4.2. Найдите образ Фурье следующих функций:

$$4.2.1. \quad f(x) = e^{-p|x|}, \quad p > 0; \quad 4.2.2. \quad f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}};$$

4.2.3.  $f(x) = e^{-p|x|} \sin \beta x, p > 0;$

4.2.4.  $f(x) = 1, x \in [-p; p] f(x) = 0, x \notin [-p; p].$

4.3. Найдите косинус - образ Фурье четной функции  $f(x)$ .

4.3.1.  $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < p, \\ 0, & |x| \geq p, \end{cases} p > 0.$  Чему равно значение интеграла Фурье в точках

$x = 0, x = \frac{p}{2}, x = -p?$

4.3.2.  $f(x) = e^{-p|x|}, p > 0;$

4.3.3.  $f(x) = x^2 e^{-p|x|}, p > 0;$

4.3.4.  $f(x) = e^{-p|x|} \cos qx, p > 0,$   
 $q > 0;$

4.3.5.  $f(x) = \frac{1}{p^2 + x^2}, p > 0;$

4.3.6.  $f(x) = \frac{\cos qx}{p^2 + x^2}, p > 0,$

$q > 0;$

4.3.7.  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \sigma > 0.$

4.4. Найдите синус - образ Фурье нечетной функции  $f(x)$ .

4.4.1.  $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < p, \\ 0, & x \geq p, \end{cases} f(-x) = -f(x), p > 0.$  Чему равно значение инте-

грала Фурье в точках  $x = 0, x = \frac{p}{2}, x = -p?$

4.4.2.  $f(x) = \text{sign } x \cdot e^{-p|x|}, p > 0;$

4.4.3.  $f(x) = x e^{-p|x|}, p > 0;$

4.4.4.  $f(x) = e^{-p|x|} \sin qx, p > 0,$   
 $q > 0;$

4.4.5.  $f(x) = \frac{x}{p^2 + x^2}, p > 0;$

4.4.7.  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \sigma > 0.$  При решении этой задачи можно использовать дифференцирование по параметру образа Фурье четной функции

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$

4.4.6.  $f(x) = \frac{x \sin qx}{p^2 + x^2}, p > 0,$

$q > 0;$

4.5. Приведите пример отличной от нуля функции, которая совпадает со своим образом Фурье.

4.6. Восстановите функцию  $f(x)$  по её образу Фурье  $\hat{f}(\lambda)$ .

4.6.1.  $\hat{f}_c(\lambda) = \frac{p}{\lambda^2 + p^2}, p > 0;$

4.6.3.  $\hat{f}(\lambda) = e^{-\frac{\lambda^2}{2}}.$

4.6.2.  $\hat{f}_s(\lambda) = \frac{\lambda}{\lambda^2 + p^2}, p > 0;$

## Тема 10. Обобщенные функции.

### 1. Определения.

1.1. Какие функции входят в множество основных функций? Что такое носитель основной функции?

- 1.2. Сформулируйте определение сходящейся последовательности основных функций.
- 1.3. Сформулируйте определение пространства  $D$  основных функций.
- 1.4. Сформулируйте определение функционала и линейного функционала на пространстве  $D$  основных функций.
- 1.5. Сформулируйте определение непрерывного функционала на пространстве  $D$ .
- 1.6. Сформулируйте определение обобщенной функции.
- 1.7. Сформулируйте определение суммы двух обобщенных функций и произведения обобщенной функции на число.
- 1.8. Сформулируйте определение сходящейся последовательности обобщенных функций.
- 1.9. Что такое пространство  $D'$  обобщенных функций?
- 1.10. Какие обобщенные функции называются регулярными и какие сингулярными?
- 1.11. Что такое  $\delta$ -функция?
- 1.12. Сформулируйте определение произведения обобщенной функции и бесконечно дифференцируемой функции.
- 1.13. Как определяется линейная замена переменных в обобщенных функциях?
- 1.14. Сформулируйте определение производной обобщенной функции.
- 1.15. Сформулируйте определение производной  $k$ -го порядка обобщенной функции.
- 1.16. Что такое носитель обобщенной функции?

### 2-3. Основные теоремы и формулы.

- 2-3.1. Докажите, что  $\delta$ -функция является непрерывным линейным функционалом.
- 2-3.2. Докажите, что  $\delta$ -функция является сингулярной обобщенной функцией.
- 2-3.3. Докажите, что  $\delta$ -функцию можно представить как предел последовательности регулярных обобщенных функций.
- 2-3.4. Напишите формулу, определяющую произведение обобщенной функции и бесконечно дифференцируемой функции. Обоснуйте эту формулу для регулярных обобщенных функций.
- 2-3.5. Напишите формулу, определяющую линейную замену переменных в обобщенных функциях. Обоснуйте эту формулу для регулярных обобщенных функций.
- 2-3.6. Напишите формулу, определяющую производную обобщенной функции. Обоснуйте эту формулу для регулярных обобщенных функций.
- 2-3.7. Докажите, что любая обобщенная функция имеет производные всех порядков.

### 4-5. Вопросы и задачи.

- 4-5.1. Приведите пример функции из пространства  $D$ .
- 4-5.2. Приведите пример сходящейся последовательности функций в пространстве  $D$ .
- 4-5.3. Приведите примеры линейного и нелинейного функционалов.
- 4-5.4. Пусть  $\hat{f}_\varepsilon, \hat{g}_\varepsilon$  и  $\hat{h}_\varepsilon$  - регулярные обобщенные функции, порожденные локально интегрируемыми функциями

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}, g_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi x} \sin \frac{x}{\varepsilon}, h_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + x^2}.$$

Докажите, что

- $\hat{f}_\varepsilon(x) \rightarrow \delta(x)$  при  $\varepsilon \rightarrow +0$  в  $D'$ ;
- $\hat{g}_\varepsilon(x) \rightarrow \delta(x)$  при  $\varepsilon \rightarrow +0$  в  $D'$ ;
- $\hat{h}_\varepsilon(x) \rightarrow \delta(x)$  при  $\varepsilon \rightarrow +0$  в  $D'$ ,

где  $\delta(x)$  есть  $\delta$ -функция.



- 4-5.5. Найдите носитель  $\delta$ -функции.
- 4-5.6. Приведите пример обобщенной функции, носителем которой является вся числовая прямая.
- 4-5.7. Докажите, что
- $\delta(-x) = \delta(x)$ ;
  - $(\delta(x - x_0), \varphi(x)) = \varphi(x_0)$ .

- 4-5.8. Пусть  $\hat{\theta}(x)$  есть обобщенная функция, порожденная функцией Хевисайда
- $$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}.$$
- Докажите, что производная  $D\hat{\theta}$  обобщенной функции  $\hat{\theta}$

выражается формулой  $D\hat{\theta} = \delta(x)$ , где  $\delta(x)$  есть  $\delta$ -функция.

- 4-5.9. Выведите формулу для производной  $\delta$ -функции.
- 4-5.10. Выведите формулу для производной  $k$ -го порядка  $\delta$ -функции.
- 4-5.11. Пусть  $\widehat{\text{sgn } x}$  -регулярная обобщенная функция, порожденная функцией

$$\text{sgn } x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}.$$

Докажите, что  $D(\widehat{\text{sgn } x}) = 2\delta(x)$ .

- 4-5.12. Пусть  $\widehat{\sin x}$  и  $\widehat{\cos x}$  - регулярные обобщенные функции, порожденные функциями  $\sin x$  и  $\cos x$ . Докажите, что  $D(\widehat{\sin x}) = \widehat{\cos x}$ ,
- $$D(\widehat{\cos x}) = -\widehat{\sin x}.$$

- 4-5.13. Пусть функция  $f(x)$  имеет в точке  $x_0$  разрыв первого рода, а в остальных точках числовой прямой  $f(x)$  и  $f'(x)$  непрерывны; пусть  $\hat{f}$  и  $\hat{f}'$  - регулярные обобщенные функции, порожденные функциями  $f(x)$  и  $f'(x)$ . Докажите, что для производной  $D\hat{f}$  обобщенной функции  $\hat{f}$  справедливо равенство
- $$D\hat{f} = \hat{f}' + [f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)]\delta(x - x_0).$$