4. Общая задача Коши. Функция Римана

1.Функция Римана

Рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} u_{xy} = f(x,y), \quad (x,y) \in D^{+}, & (1) \\ u(x,y) = \varphi(x,y), \quad (x,y) \in C, & (2) \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x,y) = \psi(x,y), \quad (x,y) \in \mathrm{C}. & (3) \end{cases}$$

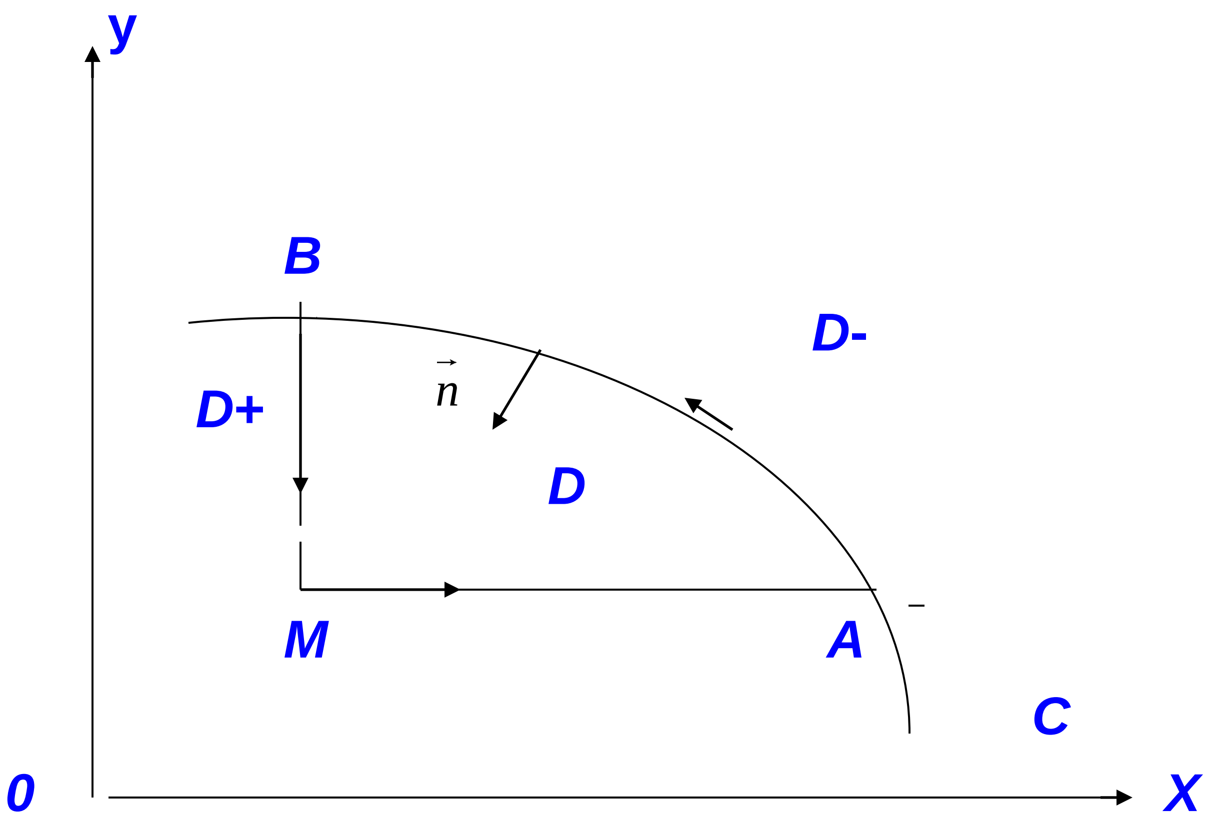
Кривая *C* – бесконечно гладкая кривая, делящая плоскость *(x,y)* на две криволинейные полуплоскости *D+* и *D-* и удовлетворяющая условиям:

а) кривая *C* не является характеристикой уравнения (1);

б) любая характеристика уравнения (1) пересекает кривую *C* только 1 раз.

в формуле (3) $\dfrac{\partial}{\partial n}$ - производная по нормали к кривой *C*, направленная внутрь области *D*+.

Построим формулу, выражающую решение задачи (1) – (3) в любой точке *M* области *D*+.



Рассмотрим выражение

$$Vu_{xy} - uV_{xy} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right\}, \qquad \textbf{(4)}$$

где

$$P[u,V] = V_x u - Vu_x,$$

$$Q[u,V] = Vu_y - V_y u. \qquad \textbf{(5)}$$

Формула Грина:

$$\int_D \left(Vu_{xy} - uV_{xy}\right) dxdy = \frac{1}{2}\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_\Gamma Pdx + Qdy, \qquad \textbf{(6)}$$

где

$$\overline{D} = D \cup \Gamma.$$

Рассмотрим интегралы вдоль характеристик *MA* и *BM*:

$$\int_M^A P\,dx = \int_M^A \left(V_x u - V u_x\right)dx = \left(Vu\right)_M - \left(Vu\right)_A + 2\int_M^A V_x u\,dx \tag{7}$$

$$\int_B^M Q\,dy = \int_B^M \left(u_y V - u V_y\right)dy = \left(Vu\right)_M - \left(Vu\right)_B - 2\int_B^M u V_y\,dy \tag{8}$$

Из формул (6)-(8) получаем:

$$\int_D \left(Vu_{xy} - uV_{xy}\right)dxdy = \left(Vu\right)_M - \frac{\left(Vu\right)_A + \left(Vu\right)_B}{2} +$$

$$+\frac{1}{2}\int_A^B P\,dx + Q\,dy + \int_M^A V_x u\,dx - \int_B^M u V_y\,dy \tag{9}$$

Пусть *u(x,y)*-решение задачи (1)-(3), а *V(x,y)*-решение задачи (10) с данными на характеристиках (задача Гурса):

$$\begin{cases} V_{xy} = 0, \ (x, y) \in D, \\ V_x \big|_{AM} = 0, \ V_y \big|_{BM} = 0, \ V(M) = 1. \end{cases} \tag{10}$$

Функция V=1 в области *D* удовлетворяет всем условиям задачи (10) и представляет собой частный случай функции Римана.

Подставляя *V*=1 в формулу (9), получим

$$\int\limits_D u_{xy} dxdy = u(M) - \frac{u(A)+u(B)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_A^B \left(-u_x dx + u_y dy\right),$$

откуда, учитывая формулы (1)-(3), получим:

$$u(M) = \frac{\varphi(A)+\varphi(B)}{2} + \tfrac{1}{2}\int\limits_A^B \left(-u_x dx + u_y dy\right) + \int\limits_{D^+} f(x, y) dxdy \tag{11}$$

На дуге *AB* известны выражения

$$u_x = u_\tau \cos(\tau, x) + u_n \cos(n, x), \ u_y = u_\tau \sin(\tau, x) + u_n \sin(n, x).$$

Формула (11) даёт решение задачи (1)- (3) через входные данные.

Замечание. Из формулы (11) следует:

1)Теорема единственности решения задачи (1)-(3);

2)Теорема устойчивости решения задачи (1)-(3);

3)Теорема существования решения задачи (1)-(3) (при выполнении условия гладкости входных данных).

Рассмотрим более общую задачу:

$$L[u] \equiv u_{xy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = f(x,y),(x,y) \in D^+ \tag{12}$$

$$u(x,y) = \varphi(x,y), \ (x,y) \in C, \tag{13}$$

$$\tfrac{\partial u}{\partial n}(x,y) = \psi(x,y), \ (x,y) \in C. \tag{14}$$

Определение. Два дифференциальных оператора *L* и *K* называются сопряженными, если разность $VL[u]-uK[V]$ является разностью первых частных производных по X и У от некоторых выражений *P* и *Q*:

$$VL[u] - uK[V] = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right), \tag{15}$$

причем *P* не содержит производной *Uy*, а *Q* не содержит производной *Ux*.

Сопряженным к оператору *L* будет оператор *K*:

$$K\left[V\right]=V_{xy}-\left(aV\right)_x-\left(bV\right)_y+cV \qquad \textbf{(16)}$$

Для операторов *L* и *K* выполняется (15) при

$$P\left[u,V\right]=uV_x-u_xV-2buV,\ Q\left[u,V\right]=Vu_y-V_yu+2auV \qquad \textbf{(17)}$$

Используя формулу Грина и интегрируя по частям, получим:

$$\int\limits_{D^+}\left\{VL\left[u\right]-uK\left[V\right]\right\}dxdy=\tfrac{1}{2}\int\limits_{D^+}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma}Pdx+Qdy=\frac{1}{2}\int\limits_{M}^{A}Pdx+\frac{1}{2}\int\limits_{AB}Pdx+Qdy+\frac{1}{2}\int\limits_{B}^{M}Qdy, \qquad \textbf{(18)}$$

$$\int\limits_{M}^{A}Pdx=u\left(M\right)V\left(M\right)-u\left(A\right)V\left(A\right)+2\int\limits_{M}^{A}P\left[V\right]udx,$$

$$\int\limits_{B}^{M}Qdy=u\left(M\right)V\left(M\right)-u\left(B\right)V\left(B\right)-2\int\limits_{B}^{M}Q\left[V\right]udx, \qquad \textbf{(19)}$$

где $$P[V]=V_x-bV,\quad Q[V]=V_y-aV$$

(20)

Рассмотрим задачу с данными на характеристиках (задачу Гурса):

$$\begin{cases} K[V]=0, \quad (x,y)\in D, \\ \tilde{P}[V]=0 \quad \text{на } MA, \quad \tilde{Q}[V]=0 \quad \text{на } BM, \quad V\big|_M=1. \end{cases} \qquad (21)$$

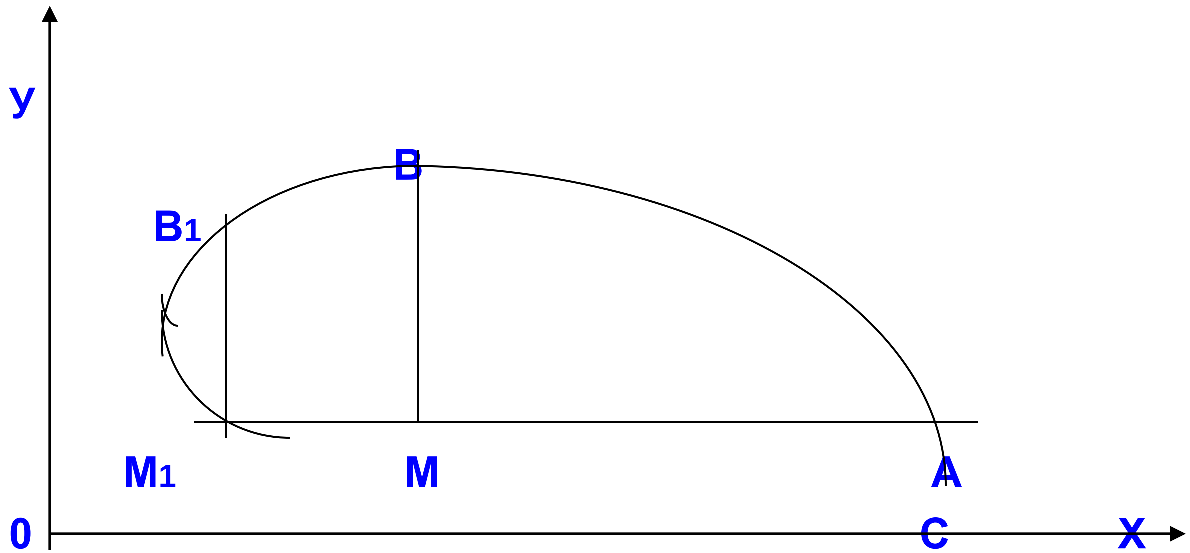
Можно показать, что решение задачи (21) всегда существует. Оно называется функцией Римана. Функция V(M,M1) удовлетворяет по координатам точки M1 задаче (21) и зависит от точки M как от параметра.

Из формул (12), (18)-(21) получаем:

$$u(M)=\frac{(\varphi V)_A+(\varphi V)_B}{2}+\int_{D^+} V(M,M_1)\,f(M_1)\,d\sigma_1-\frac{1}{2}\int_{AB} Pdx+Qdy \qquad (22)$$

Интеграл по дуге *AB* легко вычисляется, поскольку функции V,φ,ψ **известны.**

Замечание. Любая характеристика уравнения (12) должна пересекать кривую С не более одного раза. Если характеристика пересекает кривую С в двух точках *A* и *M1*, то значение *U(M1)* не может быть задано произвольно, а определяется по формуле:



Если характеристика пересекает кривую C в двух точках A и M_1, то значение $u(M_1)$ не может быть задано произвольно, а определяется по формуле:

$$u(M_1) = \frac{u(A)V(A) + u(B_1)V(B_1)}{2} + \iint_{D_1} Vf\,dx\,dy - \frac{1}{2}\int_A^{B_1} P\,dx + Q\,dy \qquad (23)$$

с начальным значением, заданным на дуге AB_1 и функцией f(x,y), заданной в области D_1 – криволинейном треугольнике M_1B_1A.

2. Физический смысл функции Римана

Рассмотрим задачу:

$$L[u] = f,\ (x,y) \in D^+,\quad u\big|_C = 0,\quad u_n\big|_C = 0.$$

Из формулы (22) получаем, что

$$u(M) = \int\limits_{D^+} V(M, M_1) f(M_1) d\sigma_{M_1} \qquad (24)$$

Пусть $f_\varepsilon(M)$ **- локальная функция точки *M*1:** $f_\varepsilon(M) = 0, M \notin S^\varepsilon_{M_1},$

где $S^\varepsilon_{M_1}$ **- окрестность точки *M*1, удовлетворяющая условиям нормировки:**

$$\int\limits_{S^\varepsilon_{M_1}} f_\varepsilon(M_1) d\sigma_{M_1} = 1,\quad \forall \varepsilon > 0. \qquad (25)$$

$$(24),\ (25) \Rightarrow u_\varepsilon(M) = \int\limits_{S^\varepsilon_{M_1}} V(M, M_1) f_\varepsilon(M_1) d\sigma_{M_1} =$$

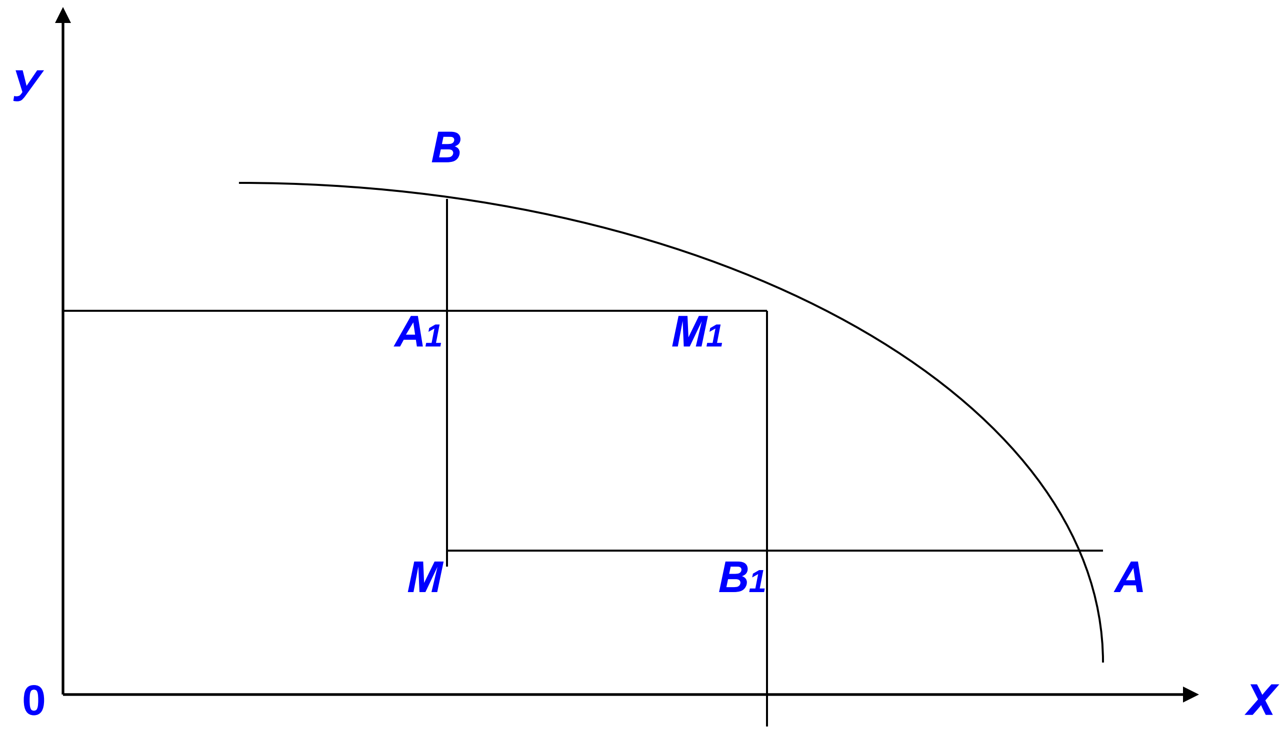
$$= V(M, M^*) \int\limits_{s^\varepsilon_{M_1}} f_\varepsilon(M_1) d\sigma_{M_1}, \quad M* \in S^\varepsilon_{M_1}. \qquad (26)$$

$$(26) \Rightarrow u_0(M) = \lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(M) = V(M, M_1) \Rightarrow$$

V(M,M$_1$)- **функция влияния единичного точечного импульса, приложенного в точке *M$_1$.***

Рассмотрим функцию *U=U(M,M$_1$)*, зависящую от точки *M$_1$* как от параметра и удовлетворяющую по координатам точки *M* следующей задаче Гурса:

$$\begin{cases} L[u] = 0, \\ u_x + bu = 0 \quad (x, y) \in M_1A_1, \\ u_y + au = 0 \quad (x, y) \in B_1M_1, \\ u\big|_{M_1} = 1. \end{cases} \qquad (27)$$



Задача (27) полностью определяет функцию U в четырехугольнике $MB_1M_1A_1$, образованном отрезками характеристик.

Проинтегрируем формулу Грина (18) по четырехугольнику $MB_1M_1A_1$, учитывая формулы (21) и (27).

$$(18),(21),(27) \Rightarrow$$

$$\int\limits_{MB_1M_1A_1} (VL[u] - uK[V])dxdy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{M}^{B_1} Pdx + \frac{1}{2}\int\limits_{A_1}^{M} Qdy + \frac{1}{2}\int\limits_{M_1}^{A_1} \left(uV_x - Vu_x - 2buV\right)dx + \qquad (28)$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{B_1}^{M_1} \left(Vu_y - uV_y + 2auV\right)dy = \left(uV\right)_M - \left(uV\right)_{M_1} = 0.$$

$$V\big|_M = 1,\ \ u\big|_{M_1} = 1 \ \Rightarrow\ u(M, M_1) = V(M, M_1) \quad (29)$$

3. Уравнения с постоянными коэффициентами

1. Функция Римана для уравнения $u_{xy} + cu = 0.$

Так как оператор $L[u] \equiv u_{xy} + cu \equiv K[u]$ **- самосопряженный, то из формулы (21) задачу (30), которую можно записать в виде (31):**

$$\begin{cases} V_{xy} + CV = 0 \quad (x, y) \in D, \\ V_x = 0 \ (x, y) \in M_0 A, \\ V_y = 0 \ (x, y) \in BM_0, \\ V\big|_{M_0} = 1, \end{cases} \tag{30}$$

$$\begin{cases} V_{xy} + CV = 0 \quad (x, y) \in D, \\ V = 1 \ (x, y) \in M_0 A, \ (x, y) \in BM_0. \end{cases} \tag{31}$$

Ищем функцию Римана в виде $V = V(z)$**, где**

$$z = \sqrt{(x - x_0)(y - y_0)},\ M_0 = \{x_0, y_0\},\ M = \{x, y\}.$$

$$(31)\ \Rightarrow \qquad V(0)=1 \qquad (32)$$

$$V_x = V' \frac{y-y_0}{2z},\ V_{xy} = \tfrac{1}{4}V'' + \tfrac{1}{4z}V' \ \Rightarrow\ V'' + \tfrac{1}{z}V' + 4CV = 0 \quad (33)$$

$$V(M, M_0) = V(x, y, x_0, y_0) = J_0(2\sqrt{C(x - x_0)(y - y_0)}) \quad (34)$$

2. Задача Коши для уравнения колебаний.

Рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{zz} + au_t + bu_z + gu = 0,\ \ -\infty < z < \infty,\ t > 0, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(z),\ \ u_t\big|_{t=0} = \psi(z),\ \ -\infty < z < \infty. \end{cases} \quad (35)$$

Замена:

$$u = Ue^{-\frac{a}{2}t + \frac{b}{2}z} \quad (36)$$

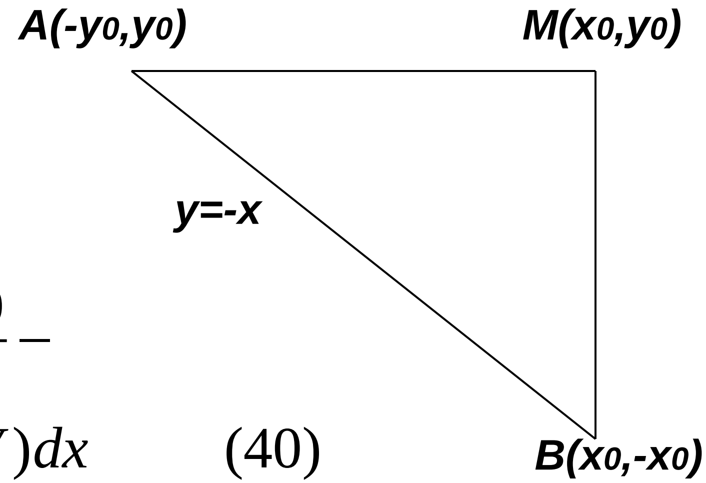
$$\begin{cases} U_{tt} - U_{zz} + CU = 0, \quad -\infty < z < \infty,\ t > 0, \\ U\Big|_{t=0} = \varphi(z) e^{-\frac{b}{2}z} = \varphi_1(z), \\ U_t\Big|_{t=0} = (\psi(z) + \frac{a}{2}\varphi(z)) e^{-\frac{b}{2}z} = \psi_1(z), \quad -\infty < z < \infty, \end{cases} \tag{37}$$

$$C = -\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + g.$$

Перейдем к переменным *Х и У*:

$$x = t + z,\ y = t - z \ \Rightarrow\ t = \frac{x+y}{2},\ z = \frac{x-y}{2}. \tag{38}$$

$$\begin{cases} W_{xy} + \frac{C}{4} W = 0, \\ W\Big|_{x+y=0} = \varphi_1(\frac{x-y}{2}), \\ (W_x + W_{y)}\Big|_{x+y=0} = \psi_1(\frac{x-y}{2}) \end{cases} \tag{39}$$



$$t=0 \;\Rightarrow\; y=-x,\; dx=dz,\; dy=-dz$$

$$(22) \;\Rightarrow\; W(x_0,y_0)=\frac{\varphi_1(-y_0)+\varphi_1(x_0)}{2}-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{AB}(VW_y-WV_y)dy+(WV_x-W_xV)dx \qquad (40)$$

$$W_x=\tfrac{1}{2}(U_t+U_z),\quad W_y=\tfrac{1}{2}(U_t-U_z) \qquad (41)$$

$$(34),(40),(41) \;\Rightarrow\; U(z_0,t_0)=\frac{\varphi_1(z_0+t_0)+\varphi_1(z_0-t_0)}{2}+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{z_0-t_0}^{z_0+t_0}\left\{\psi_1(z)J_0\left(\sqrt{C}\,\sqrt{t_0^2-(z-z_0)^2}\right)-\varphi_1(z)\frac{J_1\left(\sqrt{C}\sqrt{t_0^2-(z-z_0)^2}\right)}{\sqrt{t_0^2-(z-z_0)^2}}\sqrt{C}t_0\right\}\mathrm{d}z \quad (42)$$

При C=0 из (42) получаем формулу Даламбера:

$$U(z_0,t_0)=\frac{\varphi_1(z_0+t_0)+\varphi_1(z_0-t_0)}{2}+\frac{1}{2}\int\limits_{z_0-t_0}^{z_0+t_0}\psi_1(z)dz \qquad (43)$$