

## 2. Самоорганизация и образование структур. Синергетика

### 1. Диссипативные структуры

Рассмотрим распределенные системы, в которых в результате развития неустойчивости в однородной диссипативной среде могут возникать устойчивые пространственно-неоднородные структуры. **Такие структуры называются диссипативными.** Основы их теории заложил в 1952 году Алан М. Тьюринг, а сам термин предложил И.Р.Пригожин.

Общим условием развития процессов самоорганизации (самопроизвольного возникновения волн и структур) является **появление неустойчивости**, возникающее, если отклонение от состояния равновесия превышает критическое.

Диссипативная структура поддерживается за счет постоянного притока энергии и вещества – **открытые системы.**

Уравнения, описывающие процессы в системе, должны быть **нелинейными**.

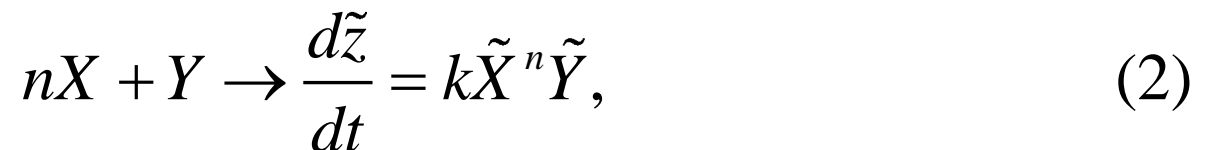
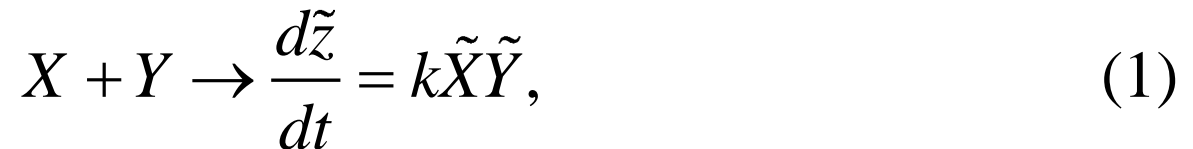
Процессы в среде должны протекать **согласованно**

**Синергетика изучает процессы образования структур в сложных самоорганизующихся системах.**

## 2. Модель брюсселятора.

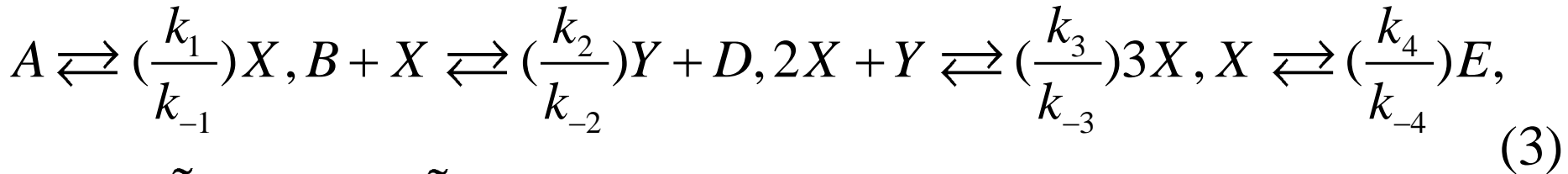
Базовая модель синергетики, предложенная в 1968 году Пригожиным и Лефевром. Позволяет выявить условия возникновения типов самоорганизации в химических и биологических системах. Представляет собой схему гипотетических химических реакций, происходящих в тонком и длинном (одномерном) сосуде-реакторе длиной  $L$ .

**Закон действующих масс:**



где  $k$  - постоянная реакции,  $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}$  — концентрации.

**Схема реакции:**



где  $\tilde{A} = const, \tilde{B} = const$ , вещества  $X$  и  $Y$  остаются в реакторе, вещества  $D$  и  $E$  удаляются (система открытая),

$$k_{-i} \ll k_i, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Из формул (1)-(3) следует:

$$\tilde{X}_t = k_1 \tilde{A} - (k_2 \tilde{B} + k_4) \tilde{X} + k_3 \tilde{X}^2 \tilde{Y} + \bar{D}_1 \tilde{X}_{xx}, \quad (4)$$

$$\tilde{Y}_t = k_2 \tilde{B} \tilde{X} - k_3 \tilde{X}^2 \tilde{Y} + \bar{D}_2 \tilde{Y}_{xx}, \quad (5)$$

где  $\bar{D}_1$  и  $\bar{D}_2$  — коэффициенты диффузии.

**Замена переменных:**

$$k_4 t \rightarrow t, X = \left( \frac{k_3}{k_4} \right)^{\frac{1}{2}} \tilde{X}, Y = \left( \frac{k_3}{k_4} \right)^{\frac{1}{2}} \tilde{Y}, A = \left( \frac{k_1^2 k_3}{k_4^3} \right) \tilde{A},$$
$$B = \tilde{B} \frac{k_2}{k_4}, \bar{\bar{D}}_1 = \frac{\bar{D}_1}{k_4}, \bar{\bar{D}}_2 = \frac{\bar{D}_2}{k_4}. \quad (6)$$

**Из формул (4)-(6) получаем:**

$$X_t = A - (B + 1)X + X^2 Y + \bar{\bar{D}}_1 X_{xx}, \quad (7)$$

$$Y_t = BX - X^2 Y + \bar{\bar{D}}_2 Y_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (8)$$

$$X(x, 0) = X_0(x), \quad Y(x, 0) = Y_0(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (9)$$

$$X_x(0, t) = X_x(L, t) = 0, \quad Y_x(0, t) = Y_x(L, t) = 0. \quad (10)$$

**Начально-краевая задача (7)-(10) является моделью брюсселятора.**

**Исследуем стационарные однородные по пространству решения.**

Из формул (7) и (8) следует система:

$$A - (B + 1)X + X^2Y = 0, \quad (11)$$

$$BX - X^2Y = 0. \quad (12)$$

Единственное решение имеет вид:

$$X = A, \quad Y = \frac{B}{A}. \quad (13)$$

Будем менять  $X_0(x), Y_0(x), B$ . **Если  $B$  невелико**, то независимо от начальных данных через определённое время установятся концентрации:

$$X(x, t) = A, \quad Y(x, t) = \frac{B}{A}. \quad (14)$$

Устойчивые стационарные решения, на которые независимо от начальных данных выходят распределения параметров при небольших внешних воздействиях, называется **термодинамической ветвью**.

Зафиксируем  $X_0(x)$  и  $Y_0(x)$  и будем увеличивать  $B$ . Начиная с критического  $B_c$  происходит выход на немонотонные стационарные распределения концентраций, возникающие **вне термодинамической ветви** и названные Пригожиным **диссипативными структурами**.

Стационарные решения (13) удовлетворяют задаче при любом  $B$ . При  $B > B_c$  появляется несколько нестационарных решений, то есть происходит **ветвление решений или бифуркация**.

Зафиксируем  $B > B_c$  и будем менять  $X_0(x), Y_0(x)$ . При некоторых значениях  $B$  с разных классов начальных данных в одной и той же нелинейной среде происходит выход на разные стационары.

**Причиной возникновения структур являются внутренние свойства системы, а поводом – вносимые флуктуации.**

Для учёта флуктуаций в правые части (7) и (8) добавляют случайные функции.

**Резонансные воздействия на систему** в окрестности  $B_c$  : слабые воздействия вызывают сильный эффект.

**Определение  $B_c$**  . Линеаризуем уравнения (7), (8):

$$X = A + \bar{X}, \quad Y = \frac{B}{A} + \bar{Y}, \quad (15)$$

где  $|\bar{X}| \leq A, \quad |\bar{Y}| \leq \frac{B}{A}.$

Подставим (15) и (7), (8) и отбросим члены второго порядка и выше:

$$\begin{cases} \bar{X}_t = (B-1)\bar{X} + A^2\bar{Y} + \bar{D}_1\bar{X}_{xx}, & (16) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{Y}_t = -B\bar{X} - A^2\bar{Y} + \bar{D}_2\bar{Y}_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, & (17) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{X}(x,0) = X_0(x) - A, \quad \bar{Y}(x,0) = Y_0(x) - \frac{B}{A}, \quad 0 \leq x \leq L, & (18) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{X}_x(0,t) = \bar{X}_x(L,t) = 0, \quad \bar{Y}_x(0,t) = \bar{Y}_x(L,t) = 0, \quad t \geq 0. & (19) \end{cases}$$

Найдём частные решения вида  $g(x) \cdot f(x)$

$$\bar{X}_m = p_m e^{\lambda_m t} \cos \frac{\pi m x}{L},$$

$$\bar{Y}_m = q_m e^{\lambda_m t} \cos \frac{\pi m x}{L}, m = 0, 1, 2, \dots \quad (20)$$

Для определения  $\lambda = \lambda_m$  из (16), (17), (20) получаем уравнение:

$$\lambda^2 + \lambda \left[ A^2 - B + 1 + \left( \bar{D}_1 + \bar{D}_2 \right) \left( \frac{m^2 \pi^2}{L^2} \right) \right] + \left[ A^2 B - \left( A^2 + \bar{D}_2 \frac{m^2 \pi^2}{L^2} \right) \left( B - 1 - \bar{D}_1 \frac{m^2 \pi^2}{L^2} \right) \right] = 0, m=0, 1, \dots \quad (21)$$



Если  $\operatorname{Re} \lambda_{m_1} < 0, \operatorname{Re} \lambda_{m_2} < 0$  для всех  $m$ , то термодинамическая ветвь (14) устойчива (малые  $B$ ).

Если при  $B = B_c$   $\lambda_{m_1} = 0, \lambda_{m_2} < 0$ , то при  $B > B_c$  возникают структуры.

Если при  $B = B_c$  для некоторого  $m$   $\operatorname{Re} \lambda_{m_1} = \operatorname{Re} \lambda_{m_2} = 0$ ,  $\operatorname{Im} \lambda_{m_1} = -\operatorname{Im} \lambda_{m_2}$ , то функции  $\bar{X}_m$  и  $\bar{Y}_m$  периодические и в системе возникают колебания.

При этом обычно  $\bar{D}_1 \approx \bar{D}_2$

**Модель брюсселятора отражает общие черты многих систем, где возникают структуры и возможно явление самоорганизации:**

- 1) Система является термодинамически открытой, то есть в ней возможен обмен энергией, веществом и т.д. с окружающей средой.**
- 2) Макроскопические процессы происходят согласованно (кооперативно, когерентно). В рассмотренном нами случае такое согласование обеспечивают диффузионные процессы.**
- 3) Отклонения от равновесия превышают критическое значение то есть рассматриваются состояния, лежащие вне термодинамической ветви.**
- 4) Процессы рассматриваются в таком диапазоне параметров, когда для описания этих процессов необходимы нелинейные математические модели.**

**Отметим, что образование диссипативных структур лежит в основе дифференцирования тканей при морфогенезе.**