Лекция 5

СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

§ 1. Декартовы системы координат

Определение 1. *Прямоугольной декартовой системой координат в пространстве называется упорядоченная четвёрка*

$$\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\},$$

в которой O — это некоторая фиксированная точка пространства, векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$ имеют единичную длину и являются взаимно перпендикулярными.

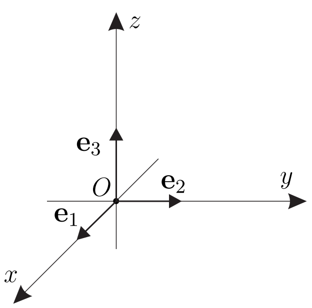

Рис. 1. Декартова система координат в пространстве и её орты.

Замечание 1. *Поскольку векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ не компланарны, то они линейно независимы и поэтому образуют базис в пространстве.*

Определение 2. *Осями координат Ox, Oy, Oz называются оси, проведённые через точку O параллельно векторам $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, причём положительные направления осей совпадают с направлениями этих векторов соответственно.*

Обозначение. Ox — ось абсцисс, Oy — ось ординат, Oz — ось аппликат.

Определение 3. *Радиусом–вектором $\mathbf{r}$ точки M пространства относительно фиксированной точки O называется направленный отрезок $\overrightarrow{OM}$.*

З а м е ч а н и е 2. Отметим, что при заданной точки O радиус–вектор $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$ взаимно однозначно соответствует точке M. Мы можем ввести *декартовы координаты произвольной точки пространства.*

О п р е д е л е н и е 4. *Координатами точки M пространства называются координаты радиуса–вектора этой точки в базисе* $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3, \tag{1.1}$$

где векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ *отложены от точки* O.

О б о з н а ч е н и е. $M(x, y, z)$.

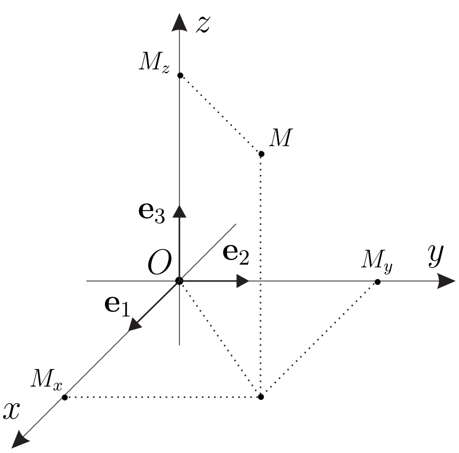

Рис. 2. Декартовы координаты точки M пространства.

По аналогии можно ввести декартову косоугольную систему координат.

О п р е д е л е н и е 5. *Косоугольной декартовой системой координат в пространстве называется упорядоченная четвёрка*

$$\{O, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\},$$

в которой O — это некоторая фиксированная точка пространства, векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *и* $\mathbf{c}$ *являются некомпланарными.*

Аналогичным образом вводятся декартовы системы координат на плоскости $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ и декартова система координат на прямой $\{O, \mathbf{e}_1\}$.

§ 2. Направляющие косинусы

Пусть рассматриваемая точка M имеет координаты (x, y, z) в прямоугольной декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Тогда

$$x = \mathrm{Pr}_{\mathbf{e}_1} \overrightarrow{OM} = \left|\overrightarrow{OM}\right| \cos\alpha, \tag{2.1}$$

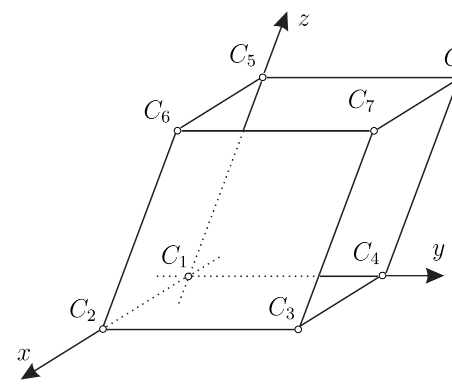

Рис. 3. Косоугольная система координат в пространстве, связанная с кристаллической решеткой.

$$y = \operatorname{Pr}_{\mathbf{e}_2} \overrightarrow{OM} = \left|\overrightarrow{OM}\right| \cos\beta, \tag{2.2}$$

$$z = \operatorname{Pr}_{\mathbf{e}_3} \overrightarrow{OM} = \left|\overrightarrow{OM}\right| \cos\gamma, \tag{2.3}$$

где $\alpha \in [0,\pi]$, $\beta \in [0,\pi]$ и $\gamma \in [0,\pi]$ — углы между радиус–вектором $\overrightarrow{OM}$ и векторами $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$, соответственно.

□ Действительно, пусть

$$\overrightarrow{OM} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3. \tag{2.4}$$

Тогда имеем

$$x = \left(\overrightarrow{OM}, \mathbf{e}_1\right) = |\mathbf{e}_1| \operatorname{Pr}_{\mathbf{e}_1} \overrightarrow{OM} = \left|\overrightarrow{OM}\right| \cos\alpha, \tag{2.5}$$

$$y = \left(\overrightarrow{OM}, \mathbf{e}_2\right) = |\mathbf{e}_2| \operatorname{Pr}_{\mathbf{e}_2} \overrightarrow{OM} = \left|\overrightarrow{OM}\right| \cos\beta, \tag{2.6}$$

$$z = \left(\overrightarrow{OM}, \mathbf{e}_3\right) = |\mathbf{e}_3| \operatorname{Pr}_{\mathbf{e}_3} \overrightarrow{OM} = \left|\overrightarrow{OM}\right| \cos\gamma. \quad \boxtimes \tag{2.7}$$

Поскольку

$$\left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,, \tag{2.8}$$

то

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \tag{2.9}$$

$$\cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \tag{2.10}$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \tag{2.11}$$

Определение 6. *Числа* $\cos\alpha$, $\cos\beta$ *и* $\cos\gamma$ *называются направляющими косинусами радиус–вектора* $\overrightarrow{OM}$.

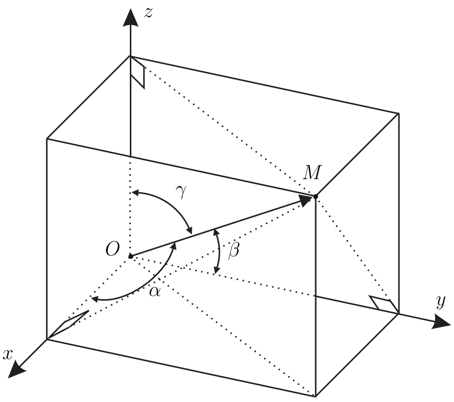

Рис. 4. Углы между радиус–вектором $\overline{OM}$ и осями координат.

Очевидно, что

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{2.12}$$

З а м е ч а н и е 4. С одной стороны, для того чтобы однозначно определить точку M пространства достаточно задать длину радиус–вектора $\overrightarrow{OM}$ и его направляющие косинусы. С другой стороны, задание двух из трёх направляющих косинуса и длины радиус–вектора $\overrightarrow{OM}$ определяет не одну, а две точки! Действительно, пусть задана длина $r = |\overrightarrow{OM}|$ и направляющие косинусы $\cos\alpha$ и $\cos\beta$, тогда мы из равенства (2.12) получим равенство

$$|\cos\gamma| = 1 \Leftrightarrow \cos\gamma = \pm 1.$$

Итак, мы имеем две точки, лежащие на одно прямой

$$M_1(r, \cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) \quad \text{и} \quad M_2(r, \cos\alpha, \cos\beta, -\cos\gamma),$$

причём угол между векторами $\overrightarrow{OM}_1$ и $\overrightarrow{OM}_2$ равен π.

§ 3. Полярная система координат

О п р е д е л е н и е 7. *Плоскость называется ориентированной, если фиксирован вектор нормали* $\mathbf{n}$ *к этой плоскости.*

О п р е д е л е н и е 8. *Полярной системой координат на заданной ориентированной плоскости называется упорядоченная двойка* $\{O, \mathbf{e}\}$, *где* O *— это некоторая фиксированная точка, называемая полюсом, а* $\mathbf{e}$ *— это ненулевой вектор компланарный данной плоскости.*

О п р е д е л е н и е 9. *Ось, проходящая через точку* O *параллельно вектору* $\mathbf{e}$ *и сонаправленная этому вектору, называется полярной осью.*

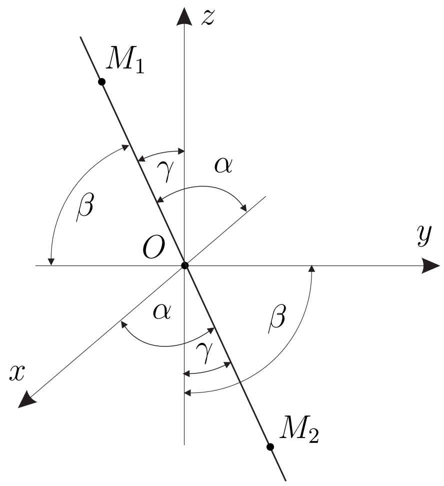

Рис. 5. Точки M_1 и M_2.

О п р е д е л е н и е 10. *Полярными координатами точки M на ориентированной плоскости называется упорядоченная двойка (ρ, φ), где*

$$\rho = |\overrightarrow{OM}|, \tag{3.1}$$

а φ — это угол между полярной осью и радиус–вектором $\overrightarrow{OM}$, отсчитываемый от полярной оси против часовой стрелки, если смотреть с конца направленного вектора нормали $\mathbf{n}$ к ориентированной плоскости, отложенного от произвольной точки плоскости.

З а м е ч а н и е 5. По своему определению $0 \leqslant \rho < +\infty$ и $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Для полюса O не определён угол φ, но полюс вполне определяется равенством $\rho = 0$. Иногда удобно отсчитывать угол по часовой стрелки.

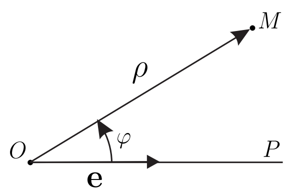

Рис. 6. Полярная система координат на плоскости и полярные координаты (ρ, φ) точки M.

Тогда отсчитываемый угол считается отрицательным.

Можно указать формулы перехода от полярных координат (ρ, φ) на плоскости π к декартовым координатам (x, y) точки M в случае специальным образом выбранной прямоугольной декартовой системы координат Oxy на ориентированной плоскости π.

Пусть $\{O, \mathbf{e}\}$ — это фиксированная полярная система координат.

1. Выберем в качестве оси абсцисс Ox — полярную ось OP.

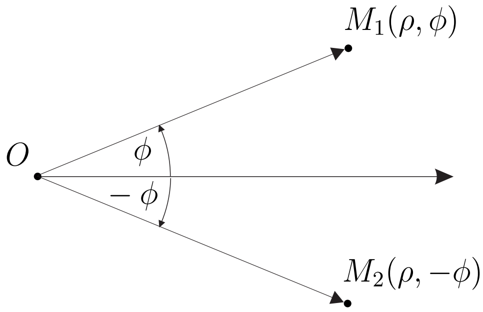

Рис. 7. Отрицательный угол.

2. Ось ординат Oy выберем таким образом, чтобы ось абсцисс Ox поворотом против часовой стрелки на угол $\pi/2$ (если смотреть с конца вектора нормали $\mathbf{n}$, отложенного от произвольной точки плоскости) совмещалась с осью Oy с учётом их направления. Заметим, что такая система координат Oxy называется правой.

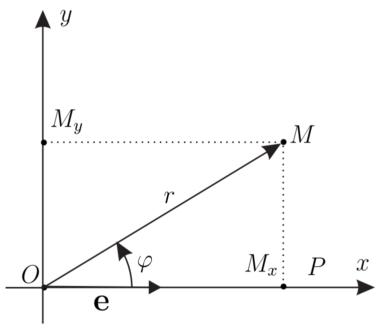

Рис. 8. Полярная система координат на плоскости и специальная прямоугольная система координат.

Мы ввели вспомогательные точки $M_x(x, 0)$ и $M_y(0, y)$ — ортогональные проекции точки $M(x, y)$ на соответствующие оси декартовой системы координат Oxy. Итак, имеем

$$\overrightarrow{OM} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y.$$

Пусть $\alpha \in [0, \pi]$ и $\beta \in [0, \pi]$ — углы между радиус–вектором $\overrightarrow{OM}$ и векторами $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, соответственно. Тогда справедливы следующие равенства:

$$x = \mathrm{Pr}_{\mathbf{e}_1} \overrightarrow{OM} = |\overrightarrow{OM}| \cos\alpha, \qquad (3.2)$$

$$y = \mathrm{Pr}_{\mathbf{e}_2} \overrightarrow{OM} = |\overrightarrow{OM}| \cos\beta. \qquad (3.3)$$

Имеет место следующая связь углов α и β:

$$\beta = \begin{cases} \pi/2 - \alpha, & \text{если} \quad y > 0; \\ \pi/2 + \alpha, & \text{если} \quad y < 0; \\ \pi/2, & \text{если} \quad y = 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

Поэтому из (3.3) и (3.4) вытекают следующие равенства:

$$y = |\overrightarrow{OM}| \begin{cases} \sin\alpha, & \text{если} \quad y \geqslant 0; \\ -\sin\alpha, & \text{если} \quad y \leqslant 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

Формулы (3.2) и (3.5) можно записать единообразно, если ввести угол $\varphi \in [0, 2\pi)$ между осью Ox и радиус–вектором $\overrightarrow{OM}$, отсчитываемый против часовой стрелки на ориентированной плоскости. Тогда имеем

$$\alpha = \begin{cases} \varphi, & \text{если} \quad y > 0; \\ 2\pi - \varphi, & \text{если} \quad y < 0; \\ 0, & \text{если} \quad y = 0. \end{cases} \tag{3.6}$$

Заметим, что

$$\cos\alpha = \cos\varphi, \tag{3.7}$$

$$\sin\alpha = \begin{cases} \sin\varphi, & \text{если} \quad y > 0; \\ -\sin\varphi, & \text{если} \quad y < 0; \\ 0, & \text{если} \quad y = 0. \end{cases} \tag{3.8}$$

Таким образом, из (3.7), (3.8) и (3.2), (3.5) приходим к следующим формулам:

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad \rho = |\overrightarrow{OM}|, \quad \varphi \in [0, 2\pi). \tag{3.9}$$

Имеют место обратные формулы

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{3.10}$$

З а м е ч а н и е 6. Соответствие точек ориентированной плоскости и их полярных координат не являются взаимно однозначным.

§ 4. Цилиндрическая система координат

О п р е д е л е н и е 11. *Цилиндрической системой координат называется упорядоченная четвёрка* $\{\pi, O, \mathbf{n}, \mathbf{e}\}$, *где* π *— это некоторая фиксированная плоскость в пространстве*, O *— это некоторая фиксированная точка на плоскости* π, $\mathbf{n}$ *— это некоторый фиксированный ненулевой вектор*, *ортогональный плоскости и*, *наконец*, $\mathbf{e}$ *— это ненулевой вектор*, *лежащий в плоскости* π.

З а м е ч а н и е 7. Таким образом, плоскость π с учетом выбора вектора нормали π является ориентированной.

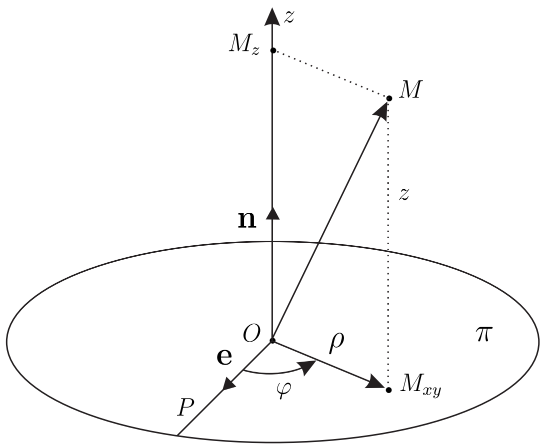

Рис. 9. Цилиндрическая система координат.

Через точку O в направлении вектора $\mathbf{n}$ проведём ось Oz, которая называется *зенитной осью*. Отметим, что плоскость π называется *экваториальной плоскостью*.

Определение 12. *Цилиндрическими координатами точки M в цилиндрической системе координат $\{\pi, O, \mathbf{n}, \mathbf{e}\}$ называется упорядоченная тройка чисел (ρ, φ, z), где (ρ, φ) — это полярные координаты ортогональной проекции M_{xy} точки M на плоскость π в полярной системе координат $\{O, \mathbf{e}\}$, причём $\varphi \in [0, 2\pi)$ — угол между полярной осью и радиус-вектором $\overrightarrow{OM_{xy}}$ на ориентированной плоскости π, а z — это координата ортогональной проекции M_z точки M на ось Oz, т. е. $\overrightarrow{OM}_z = z\mathbf{n}$.*

Замечание 8. Отметим, что точки лежащие на оси Oz вполне определяются своей декартовой координатой z и равенством $\rho = 0$ и не имеют угловой координаты φ.

С выбранной системой цилиндрических координат можно как и ранее связать специальную прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$ в пространстве Π, выбрав на плоскости π как и ранее прямоугольную систему декартовых координат Oxy.

Формулы связывающие цилиндрические координаты (ρ, φ, z) с декартовыми координатами (x, y, z) в специальной декартовой системе координат, в которой имеют следующий вид:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z. \tag{4.1}$$

ПРИМЕР 1. Уравнение кругового параболоида в декартовой прямоугольной системе координат с координатами (x, y, z) имеем следующий вид:

$$z = x^2 + y^2,$$

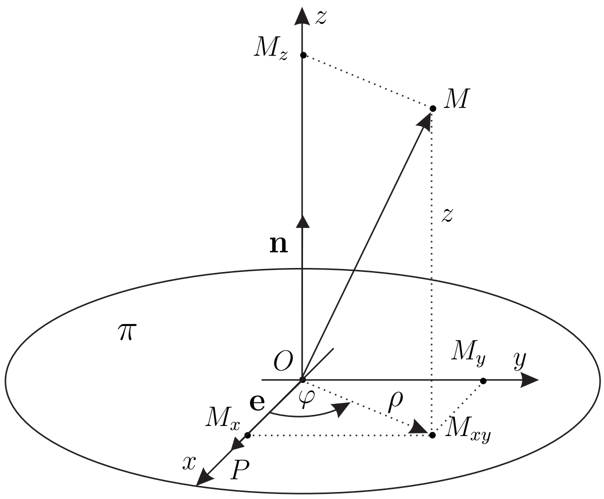

Рис. 10. Цилиндрическая система координат и специальная декартова система координат $Oxyz$.

а в связанной с этой декартовой системы координат цилиндрической системе координат $\{Oxy, O, \mathbf{e}_z, \mathbf{e}_x\}$ с координатами (ρ, φ, z) уравнение кругового параболоида имеет следующий вид:

$$z = \rho^2,$$

где

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad \rho \geqslant 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

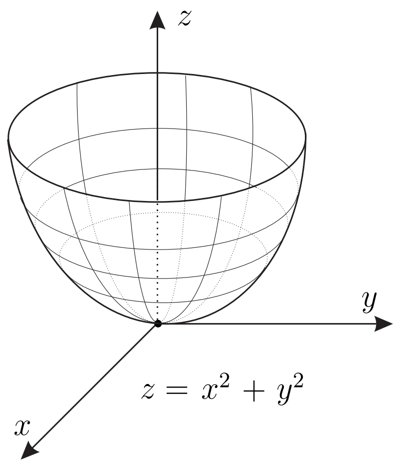

Рис. 11. Эллиптический параболоид.

П Р И М Е Р 2. Уравнение кругового конуса в некоторой прямоугольной декартовой системе координат с координатами (x, y, z) имеет следующий вид:

$$z^2 = x^2 + y^2,$$

а в связанной цилиндрической системе координат $\{Oxy, O, \mathbf{e}_z, \mathbf{e}_x\}$ с координатами (ρ, φ, z) имеет следующий вид:

$$|z| = \rho,$$

где

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad \rho \geqslant 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

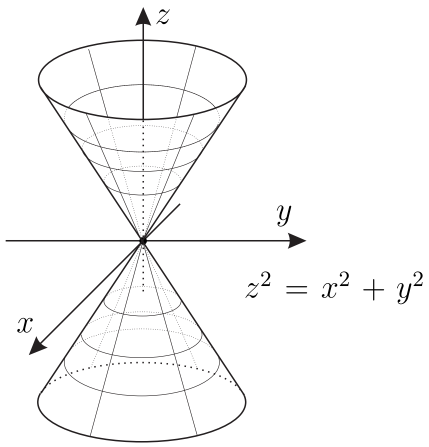

Рис. 12. Эллиптический конус.

§ 5. Сферическая система координат

О п р е д е л е н и е 13. *Сферической системой координат называется упорядоченная четвёрка* $\{\pi, O, \mathbf{n}, \mathbf{e}\}$, *где* π *— это некоторая фиксированная плоскость в пространстве,* O *— это некоторая фиксированная точка на плоскости* π, $\mathbf{n}$ *— это некоторый фиксированный ненулевой вектор, ортогональный плоскости и, наконец,* $\mathbf{e}$ *— это ненулевой вектор, лежащий в плоскости* π.

З а м е ч а н и е 9. Определения 13 и 11 совпадают. Различие сферической системы координат от цилиндрической системы координат заключается в записи координат точки.

Сначала проведём через точку $O \in \pi$ ось, сонаправленную вектору $\mathbf{n}$. Полученную *зенитную ось* Oz.

Пусть M — произвольная точка пространства. Обозначим через r длину радиус–вектора $\overrightarrow{OM}$, через $\vartheta \in [0, \pi]$ — угол между вектором $\mathbf{n}$ и радиус–вектором $\overrightarrow{OM}$; через $\varphi \in [0, 2\pi)$ — обозначим угол между на-

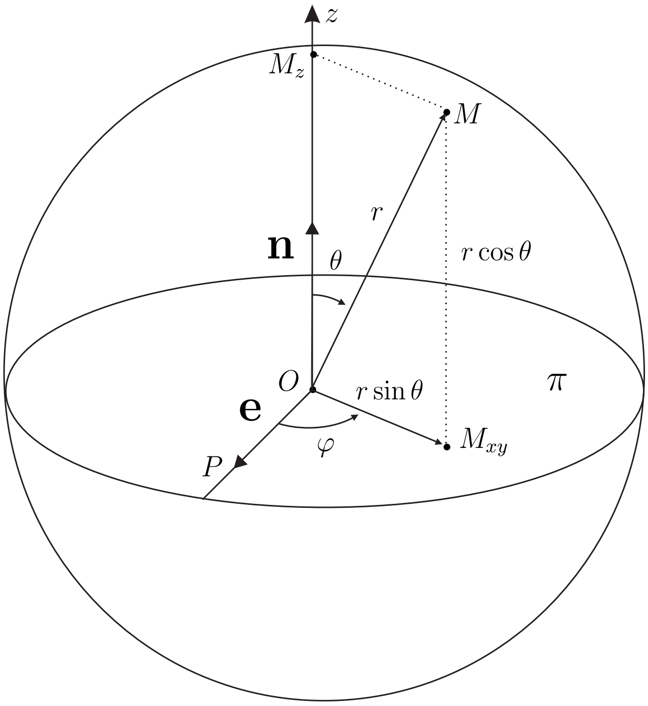

Рис. 13. Сферическая система координат в пространстве.

правленным отрезком $\overrightarrow{OM_{xy}}$ (M_{xy} — ортогональная проекция точки M на плоскость π) и полярной осью OP, отсчитываемый от полярной оси против часовой стрелки. При этом угол φ называется *азимутальным углом*, а угол ϑ — *зенитным углом*.

Определение 14. *Упорядоченная тройка* (r, ϑ, φ) *называется сферическими координатами точки* M *в сферической системе координат* $\{\pi, O, \mathbf{n}, \mathbf{e}\}$.

Заключение 10. Отметим, что полюс O сферической системы координат не имеет угловых координат (ϑ, φ), но вполне определяется равенством $r = 0$.

Формулы связи декартовых и сферических координат.

Пусть на плоскости π введена специальная декартова система координат Oxy. Тогда с учётом выбранной ранее оси Oz мы можем получить связь координат произвольной точки (r, ϑ, φ) в выбранной сферической системе координат $\{\pi, O, \mathbf{n}, \mathbf{e}\}$ с соответствующими координатами (x, y, z) в связанной декартовой системе координат.

Справедливы следующие формулы:

$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = r\sin\vartheta\sin\varphi, \quad z = r\cos\vartheta, \tag{5.1}$$

$$0 \leqslant r < +\infty, \quad 0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi.$$

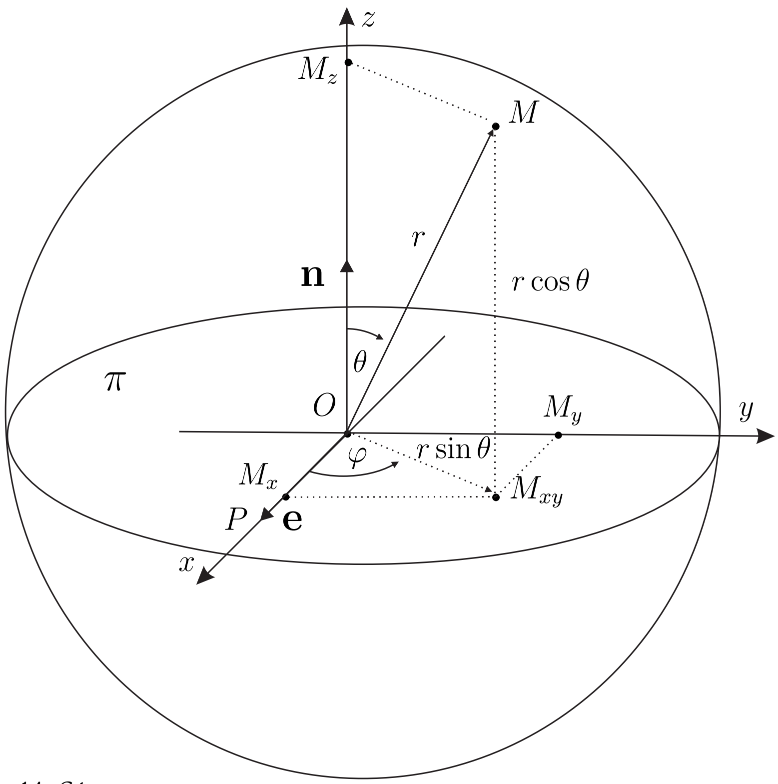

Рис. 14. Сферическая система координат в пространстве и согласованная с ней декартова система координат $Oxyz$.

□ Действительно,

1. Отметим, что $\overrightarrow{OM}_z = z\mathbf{n}$. Поэтому

$$z = \operatorname{Pr}_{\mathbf{n}} \overrightarrow{OM} = |\overrightarrow{OM}| \cos\vartheta = r\cos\vartheta;$$

2. Кроме того,

$$|\overrightarrow{OM}_{xy}| = |\overrightarrow{OM}| \sin\vartheta,$$

поэтому

$$x = \operatorname{Pr}_{\mathbf{e}_1} \overrightarrow{OM}_{xy} = |\overrightarrow{OM}_{xy}| \cos\varphi = r\sin\vartheta\cos\varphi,$$

$$y = \operatorname{Pr}_{\mathbf{e}_2} \overrightarrow{OM}_{xy} = |\overrightarrow{OM}_{xy}| \sin\varphi = |\overrightarrow{OM}_{xy}| \sin\varphi = r\sin\vartheta\sin\varphi. \quad \boxtimes$$

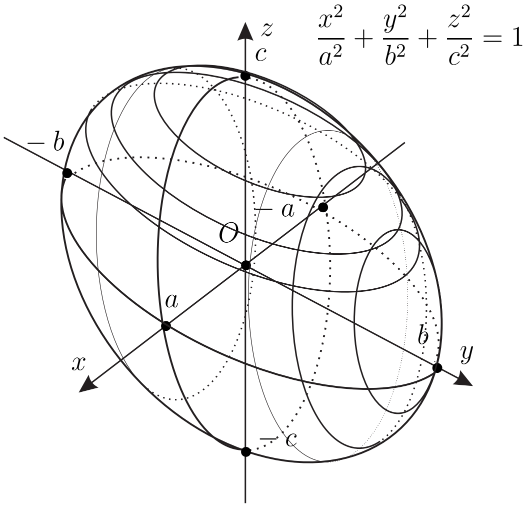

Рис. 15. Эллипсоид.

ПРИМЕР 3. Уравнение эллипсоида в некоторой декартовой прямоугольной системе координат имеет следующий вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Мы рассмотрим один важный частный случай, когда $a = b = c = 1$. Тогда уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

— это уравнение сферы единичного радиуса с центром в начале системы координат. Тогда в связанной сферической системе координат $\{Oxy, O, \mathbf{e}_z, \mathbf{e}_x\}$ уравнение окружности примет очень простой вид

$$r = 1,$$

где

$$x = \sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = \sin\vartheta\sin\varphi, \quad z = \cos\vartheta, \quad \vartheta \in [0, \pi], \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$