Лекция 11

# ЭЛЛИПС, ГИПЕРБОЛА И ПАРАБОЛА

## § 1. Каноническое уравнение эллипса

Определение 1. *Эллипсом называется геометрическое место точек $M$ на плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух фиксированных точек $F_1$ и $F_2$, называемых фокусами эллипса, есть постоянная величина, которая больше расстояния между фокусами.*

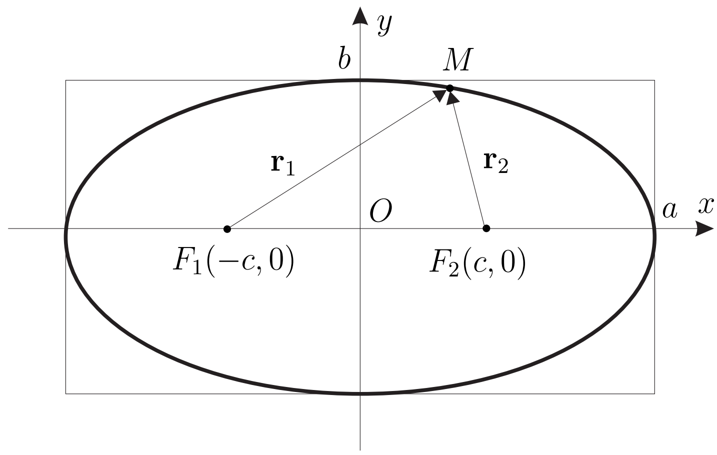


Рис. 1. Эллипс в канонической системе координат.

Замечание 1. Заметим из рисунка 1, что из треугольника $\triangle F_1MF_2$ вытекает, что эта сумма расстояний не может быть меньше расстояния между точками $F_1F_2$. С другой стороны, эта сумма расстояний может быть равна расстоянию между точками $F_1F_2$ — тогда точка $M$ лежит на отрезке $[F_1F_2]$.

Особенно просто уравнение эллипса записывается в так называемой правой ортогональной декартовой системе координат. Пусть $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ — это прямоугольная правая декартова система координат, полученная следующим образом: точка $O$ является серединой отрезка $F_1F_2$, образованного указанными в определении эллипса фокусами $F_1$ и $F_2$; в качестве орта $\mathbf{i}$ возьмём вектор

$$\mathbf{i} = \frac{\overrightarrow{F_1F_2}}{\left|\overrightarrow{F_1F_2}\right|},$$

а орт $\mathbf{j}$ ортогонален вектору $\mathbf{i}$ и такой, что на заданной плоскости базис $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ является правым.

Определение 2. *Построенная прямоугольная декартова система координат $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ называется канонической.*

Замечание 2. Таким образом, в канонической системе координат $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ ось $Ox$ проходит через фокусы $F_1F_2$ с положительным направлением, совпадающим с направлением вектора $\overrightarrow{F_1F_2}$. Ось $Oy$ перпендикулярна оси $Ox$ и получается на заданной ориентированной в пространстве плоскости (на которой лежит эллипс) поворотом оси $Ox$ на угол $\pi/2$ против часовой стрелки.

Вывод канонического уравнения эллипса в канонической системе координат. Пусть в канонической системе координат $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ фокусы $F_1$ и $F_2$ эллипса имеют следующие координаты $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$, а точка $M(x, y)$ — это точка принадлежащая эллипсу. Согласно определению эллипса имеем

$$\left|\overrightarrow{F_1M}\right| + \left|\overrightarrow{F_2M}\right| = 2a > 0, \tag{1.1}$$

где

$$\left|\overrightarrow{F_1M}\right| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad \left|\overrightarrow{F_2M}\right| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

причём по определению эллипса имеем $2a > 2c$. После избавления от радикалов мы получим такое уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1, \tag{1.2}$$

причём $a > c$.

□ Действительно, имеем следующую цепочку выражений:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Leftrightarrow xc = a^2 - a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (xc - a^2)^2 = a^2((x-c)^2 + y^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2y^2 + a^2x^2 + a^2c^2 - 2a^2xc \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2) \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1. \quad \boxtimes$$

Введём обозначение $b := \sqrt{a^2-c^2}$, тогда уравнение (1.2) примет окончательный вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad a>b>0. \tag{1.3}$$

Нам нужно теперь доказать, что все точки $M(x,y)$, удовлетворяющие уравнению (1.3), удовлетворяют уравнению (1.1).

$\square$ Действительно, введём эксцентриситет

$$\varepsilon := \frac{c}{a} < 1. \tag{1.4}$$

$$\left|\overrightarrow{F_1M}\right| = \sqrt{(x+c)^2+y^2} = \sqrt{x^2+2xc+c^2+b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)} = \\ = \sqrt{\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)x^2+2xc+c^2+b^2}.$$

$$b^2=a^2-c^2 \Rightarrow \frac{b^2}{a^2}=1-\frac{c^2}{a^2} \Rightarrow 1-\frac{b^2}{a^2}=\varepsilon^2,$$

$$\left|\overrightarrow{F_1M}\right| = \sqrt{\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)x^2+2xc+c^2+b^2} = \\ = \sqrt{\varepsilon^2x^2+2\varepsilon ax+a^2} = |\varepsilon x+a| = \varepsilon x+a>0, \tag{1.5}$$

поскольку $|x| \leqslant a$ и $0<\varepsilon<1$. Аналогичным образом получаем равенство

$$\left|\overrightarrow{F_2M}\right| = \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \sqrt{x^2-2xc+c^2+b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)} = \\ = \sqrt{\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)x^2-2xc+c^2+b^2} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2-2xc+a^2} = \\ = \sqrt{\varepsilon^2x^2+2a\varepsilon x+a^2} = |\varepsilon x-a| = a-\varepsilon x>0. \tag{1.6}$$

Поэтому

$$\left|\overrightarrow{F_1M}\right| + \left|\overrightarrow{F_2M}\right| = \varepsilon x+a+a-\varepsilon x=2a. \quad \boxtimes$$

Ф о р м а э л л и п с а. Заметим, что из уравнения (1.3) вытекает

$$|x| \leqslant a, \quad |y| \leqslant b.$$

☐ Действительно,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}\leqslant 1 \quad \text{и} \quad \frac{y^2}{b^2}\leqslant 1 \Rightarrow |x|\leqslant a \quad \text{и} \quad |y|\leqslant b. \quad \boxtimes$$

Следовательно, эллипс расположен в этом прямоугольнике.

Директориальное свойство эллипса. Из уравнений (1.5) и (1.6) вытекают равенства:

$$|\mathbf{r}_1| = \left|\overrightarrow{F_1M}\right| = a + x\varepsilon = \varepsilon\left(\frac{a}{\varepsilon}+x\right) = \varepsilon d_1 \Rightarrow \frac{|\mathbf{r}_1|}{d_1}=\varepsilon,$$

$$|\mathbf{r}_2| = \left|\overrightarrow{F_2M}\right| = a - x\varepsilon = \varepsilon\left(\frac{a}{\varepsilon}-x\right) = \varepsilon d_2 \Rightarrow \frac{|\mathbf{r}_2|}{d_2}=\varepsilon.$$

Докажем, что $d_1$ — это расстояние от точки $M(x,y)$ до прямой $x=-$ $-a/\varepsilon$, а $d_2$ — это расстояние от точки $M(x,y)$ до прямой $x=a/\varepsilon$.

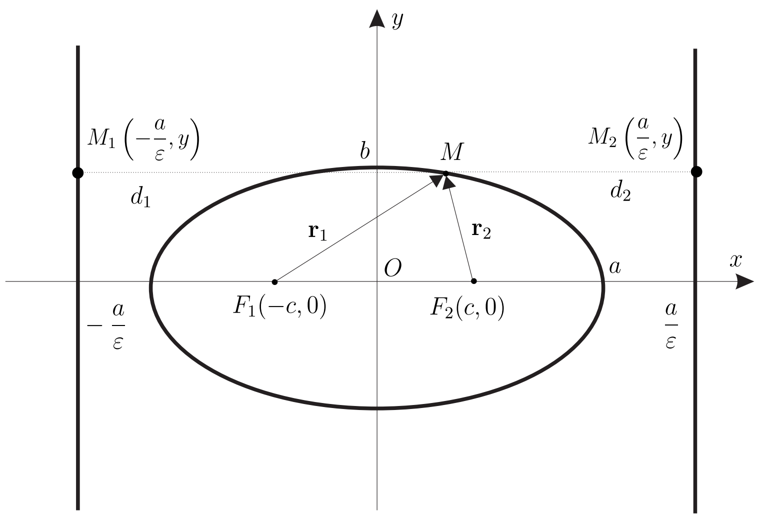


Рис. 2. Эллипс и его директрисы.

☐ Действительно, сначала найдём расстояние от произвольной точки $M(x,y)$ эллипса в канонической декартовой системе координат $\{O,\mathbf{i},\mathbf{j}\}$ до прямой $l_1$, заданной уравнением

$$x=-\frac{a}{\varepsilon}.$$

С этой целью опустим перпендикуляр из точки $M(x,y)$ на эту прямую. Точка $M_1$ пересечения прямой $l_1$ и этого перпендикуляра имеет координаты

$$M_1\left(-\frac{a}{\varepsilon},y\right).$$

Но тогда искомое расстояние равно

$$d_1 = \left|\overrightarrow{MM_1}\right| = \sqrt{\left(x + \frac{a}{\varepsilon}\right)^2 + (y-y)^2} = \left|x + \frac{a}{\varepsilon}\right| = \frac{a}{\varepsilon} + x,$$

поскольку для точек $M(x, y)$ эллипса имеем $|x| \leqslant 1$ и $\varepsilon \in (0, 1)$. Найдём теперь расстояние от точки $M(x, y)$ до прямой $l_2$, заданной уравнением

$$x = \frac{a}{\varepsilon}.$$

С этой целью опустим перпендикуляр из точки $M(x, y)$ на прямую $l_2$. Пусть $M_2$ — это точка пересечения перпендикуляра и прямой $l_2$. Тогда точка $M_2$ имеет следующие координаты:

$$M_2\left(\frac{a}{\varepsilon}, y\right).$$

Но тогда искомое расстояние равно

$$d_2 = \left|\overrightarrow{MM_1}\right| = \sqrt{\left(x - \frac{a}{\varepsilon}\right)^2 + (y-y)^2} = \left|x - \frac{a}{\varepsilon}\right| = \frac{a}{\varepsilon} - x,$$

поскольку для точек $M(x, y)$ эллипса имеем

$$|x| \leqslant a \quad \text{и} \quad \varepsilon \in (0, 1). \quad \boxtimes$$

Определение 3. *Прямые, в канонической системе координат имеющие уравнения $x = \pm a/\varepsilon$, называются директрисами.*

Теорема 1. *Отношение расстояния $|\mathbf{r}_j|$ от фокуса $F_j$ до точки $M(x, y)$ эллипса к расстоянию $d_j$ от этой точки до соответствующей директрисы при $j = 1, 2$ в канонической системе координат есть величина постоянная, равная $\varepsilon$.*

## § 2. Каноническое уравнение гиперболы

Определение 4. *Гиперболой называется геометрическое место точек $M$ на плоскости, модуль разности расстояний от которой до двух фиксированных точек $F_1$ и $F_2$, называемые полюсами, есть величина постоянная, меньшая расстояния между фокусами и не равная нулю.*

Замечание 3. Отметим, что геометрическое место точек $M$ таких, что

$$\left|\left|\overrightarrow{MF_1}\right| - \left|\overrightarrow{MF_2}\right|\right| = \left|\overrightarrow{F_1F_2}\right|$$

— это два непересекающихся луча прямой $(F_1F_2)$, исходящих из точек $F_1$ и $F_2$ и противоположно направленных. Кроме того, геометрическое место точек $M$ :

$$\left|\left|\overrightarrow{MF_1}\right| - \left|\overrightarrow{MF_2}\right|\right| = 0$$

— это прямая, проходящая через середину отрезка $[F_1F_2]$ и перпендикулярно этому отрезку.

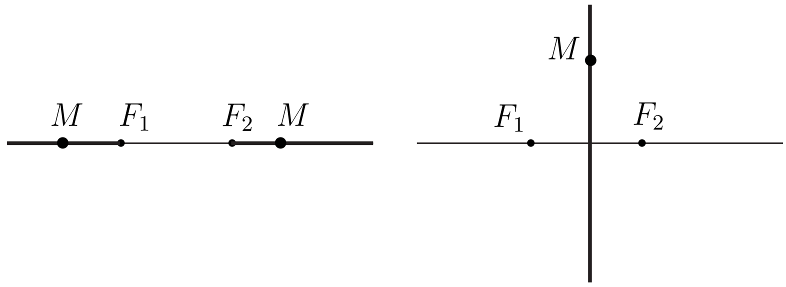


Рис. 3. Исключительные случаи.

Определение 5. *Канонической системой декартовых прямоугольных координат называется та же система координат* $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$, *что и в случае эллипса.*

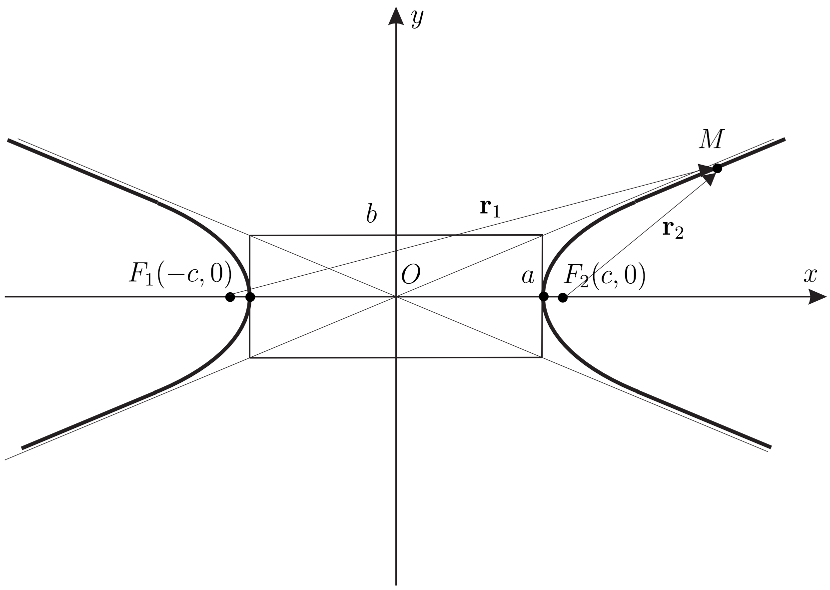


Рис. 4. Гипербола в канонической системе координат.

Уравнение гиперболы в канонической системе координат. Согласно определению 5 координаты фокусов имеют вид $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$. Тогда расстояния от произвольной точки $M(x, y)$ гиперболы до фокусов имеют следующий вид:

$$|\mathbf{r}_1| = \left|\overrightarrow{F_1M}\right| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\,, \quad |\mathbf{r}_2| = \left|\overrightarrow{F_2M}\right| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\,.$$

Тогда согласно определению 4 имеем

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right|=2a>0, \quad a<c. \tag{2.1}$$

Уничтожив радикалы мы получим равенство

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1. \tag{2.2}$$

□ Действительно, имеет место следующая цепочка равенств:

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right|=2a, \quad 2a<2c \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x+c)^2+y^2=4a^2\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4xc=4a^2\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \Rightarrow (xc-a^2)^2=a^2((x-c)^2+y^2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2c^2+a^4-2xca^2=a^2x^2+a^2y^2+a^2c^2-2xca^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2(c^2-a^2)-a^2y^2=a^2(c^2-a^2) \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1. \quad \boxtimes$$

Введём обозначение $b^2=c^2-a^2$ и получим искомое уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{2.3}$$

Обратно покажем, что из уравнения (2.3) вытекает уравнение (2.1).

□ Действительно, сначала введём эксцентриситет

$$\varepsilon := \frac{c}{a}>1.$$

$$\frac{b^2}{a^2}+1=\frac{c^2}{a^2} \Rightarrow \frac{b^2}{a^2}+1=\varepsilon^2.$$

$$|\mathbf{r}_1|^2=\left|\overrightarrow{F_1M}\right|^2=(x+c)^2+y^2=(x+c)^2+b^2\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right)=$$
$$=x^2+2xc+c^2+\frac{b^2}{a^2}x^2-b^2=\varepsilon^2x^2+2a\varepsilon x+a^2=|\varepsilon x+a|^2. \tag{2.4}$$

Аналогичным образом для фокуса $F_2(0,c)$ получаем следующую цепочку равенств:

$$|\mathbf{r}_2|^2=\left|\overrightarrow{F_2M}\right|^2=(x-c)^2+y^2=x^2-2xc+c^2+b^2\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right)=$$

$$= \left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)x^2 - 2xc + c^2 - b^2 = \varepsilon^2 x^2 - 2\varepsilon a x + a^2 = |\varepsilon x - a|^2. \quad (2.5)$$

Заметим, что $|\varepsilon x| > |x| \geqslant a$ и поэтому из формул (2.4) и (2.5) вытекают равенства

$$|\mathbf{r}_1| = \begin{cases} x\varepsilon + a, & \text{если} \quad x>0; \\ -x\varepsilon - a, & \text{если} \quad x<0, \end{cases} \quad |\mathbf{r}_2| = \begin{cases} x\varepsilon - a, & \text{если} \quad x>0; \\ -x\varepsilon + a, & \text{если} \quad x<0, \end{cases} \quad (2.6)$$

Таким образом, из равенств (2.6) имеем

$$|\mathbf{r}_1| - |\mathbf{r}_2| = 2a, \quad \text{если} \quad x > 0,$$
$$|\mathbf{r}_1| - |\mathbf{r}_2| = -2a, \quad \text{если} \quad x < 0.$$

Следовательно, во всех случаях

$$||\mathbf{r}_1| - |\mathbf{r}_2|| = 2a. \quad \boxtimes$$

А н а л и з ф о р м ы г и п е р б о л ы. Из уравнения гиперболы (2.3) вытекает равенство

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} \geqslant 1 \Rightarrow |x| \geqslant |a| \Rightarrow |x| \geqslant a.$$

Если $|x| \neq a$, то

$$y^2 = b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right) \Rightarrow |y| = b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} = b\frac{|x|}{a}\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} < \frac{b}{a}|x|.$$

Отсюда вытекает неравенство

$$-\frac{b}{a}x < y < \frac{b}{a}x \quad \text{при} \quad |x| > a,$$

а случаю $x = \pm a$ соответствует только $y = 0$. Обе ветви гиперболы лежат внутри области, заключённой между двумя прямыми

$$y = -\frac{b}{a}x, \quad y = \frac{b}{a}x \quad (2.7)$$

и вне полосы $|x| < a$. Эти прямые являются асимптотами гиперболы.

□ Действительно, имеем

$$|y| = b\frac{|x|}{a}\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} = b\frac{|x|}{a}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{a^2}{x^2} + \overline{\overline{o}}\left(\frac{1}{|x|^2}\right)\right) =$$
$$= b\frac{|x|}{a} - \frac{ab}{2}\frac{1}{|x|} + \overline{\overline{o}}\left(\frac{1}{|x|}\right). \quad \boxtimes$$

Д и р е к т о р и а л ь н о е с в о й с т в о г и п е р б о л ы. Заметим, что формулы (2.6) можно объединить следующим образом:

$$\begin{cases} |\mathbf{r}_1| = \varepsilon\,(x + a/\varepsilon) \\ |\mathbf{r}_2| = \varepsilon\,(x - a/\varepsilon) \end{cases} \quad \text{при} \quad x > 0, \quad (2.8)$$

$$\begin{cases} |\mathbf{r}_1| = \varepsilon\,(-x - a/\varepsilon) \\ |\mathbf{r}_2| = \varepsilon\,(-x + a/\varepsilon) \end{cases} \quad \text{при} \quad x < 0. \tag{2.9}$$

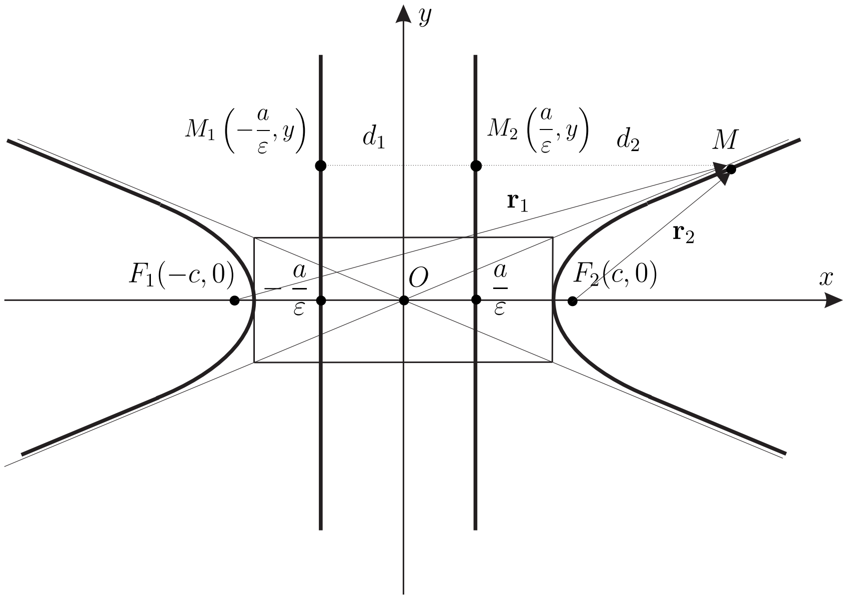


Рис. 5. Гипербола и её директрисы.

Дадим определение.

Определение 6. *Прямые, заданные в канонической системе координат* $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ *уравнениями*

$$x = \pm\frac{a}{\varepsilon},$$

*называются директрисами.*

Справедлива следующая теорема:

Теорема 2. *Отношение расстояния* $|\mathbf{r}_j|$ *от фокуса* $F_j$ *до точки* $M(x, y)$ *гиперболы к расстоянию* $d_j$ *от этой точки до соответствующей директрисы при* $j = 1, 2$ *есть величина постоянная, равная* $\varepsilon$.

Доказательство.

Найдём расстояние от точки $M(x, y)$ гиперболы в канонической декартовой системе координат $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ до прямой

$$l_1 : \quad x = -\frac{a}{\varepsilon}.$$

Опустим перпендикуляр из точки $M(x, y)$ на эту прямую. Пусть $M_1$ — это основание этого перпендикуляра. Эта точка имеет следующие координаты:

$$M_1 = \left(-\frac{a}{\varepsilon}, y\right),$$

а расстояние от точки $M$ до прямой $l_1$ равно

$$|\overrightarrow{MM_1}| = \sqrt{\left(x+\frac{a}{\varepsilon}\right)^2 + (y-y)^2} = \left|x+\frac{a}{\varepsilon}\right| = \begin{cases} x+\dfrac{a}{\varepsilon}, & \text{если} \quad x>0; \\ -x-\dfrac{a}{\varepsilon}, & \text{если} \quad x<0, \end{cases}$$

поскольку если $x>0$, то

$$x+\frac{a}{\varepsilon}>0.$$

Если же $x<0$, то для точек гиперболы имеем $-x \geqslant a$ и при этом

$$-x-\frac{a}{\varepsilon} \geqslant a-\frac{a}{\varepsilon} = a\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right) \geqslant 0,$$

поскольку $\varepsilon>1$.

Найдём теперь расстояние от точки $M(x,y)$ гиперболы до прямой

$$l_2: \quad x=\frac{a}{\varepsilon}.$$

С этой целью опустим перпендикуляр из точки $M(x,y)$ перпендикуляр на прямую $l_2$. Пусть $M_2$ — это основание этого перпендикуляра. Это точка имеет следующие координаты:

$$M_2 = \left(\frac{a}{\varepsilon}, y\right).$$

Искомое расстояние от точки $M(x,y)$ до прямой $l_2$ равно

$$|\overrightarrow{MM_2}| = \sqrt{\left(x-\frac{a}{\varepsilon}\right)^2 + (y-y)^2} = \left|x-\frac{a}{\varepsilon}\right| = \begin{cases} x-\dfrac{a}{\varepsilon}, & \text{если} \quad x>0; \\ -x+\dfrac{a}{\varepsilon}, & \text{если} \quad x<0, \end{cases}$$

поскольку при $x>0$ для точек гиперболы имеем $x>a$ и поэтому

$$x-\frac{a}{\varepsilon} \geqslant a-\frac{a}{\varepsilon} = a\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right) > 0, \quad \varepsilon>1.$$

Если же $x<0$, то для точек гиперболы имеем $x \leqslant -a$ при этом имеем

$$-x+\frac{a}{\varepsilon} \geqslant a+\frac{a}{\varepsilon} > 0.$$

Теорема доказана.

Взаимно сопряжённые гиперболы.

Определение 7. *Две гиперболы*

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1, \quad c=\sqrt{a^2+b^2}$$

*называются взаимно сопряжёнными.*

Нетрудно заметить, что фокусы сопряженных гипербол лежат на окружности

$$|x| = c = \sqrt{a^2+b^2}\,.$$

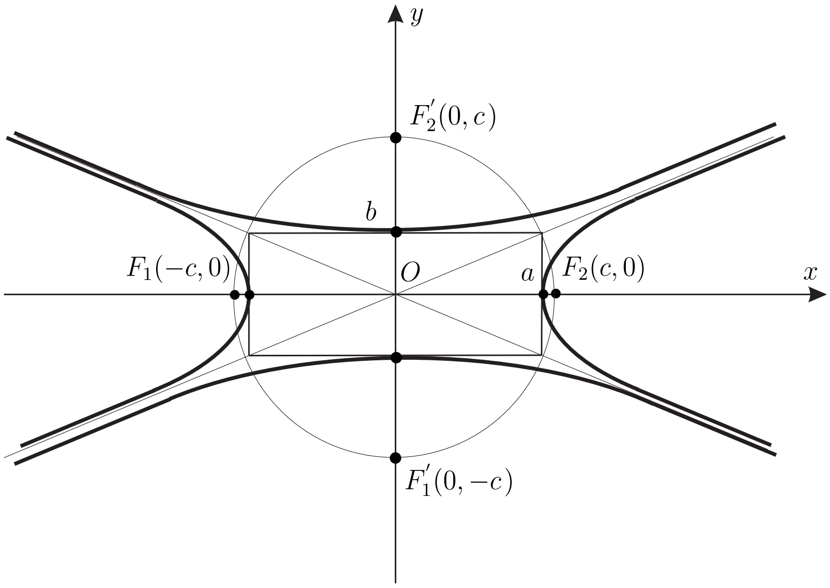


Рис. 6. Взаимно сопряжённые гиперболы.

## § 3. Каноническое уравнение параболы

Определение 8. *Параболой называется геометрическое множество точек $M$ на плоскости, расстояние от каждой из которых до некоторой точки $F$, называемой фокусом, равно расстоянию до некоторой прямой, называемой директрисой.*

Замечание 4. Опустим из точки $F$ перпендикуляр на директрису. Пусть $F_1$ — это основание перпендикуляра. Пусть точка $O$ — это середина отрезка $[F_1F]$, а вектор

$$\mathbf{i} := \frac{\overrightarrow{F_1F}}{|\overrightarrow{F_1F}|}. \tag{3.1}$$

Единичный вектор $\mathbf{j}$ выберем ортогональным вектору $\mathbf{i}$ таким образом, чтобы упорядоченная двойка $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ была правой на заданной ориентированной плоскости.

Определение 9. *Канонической декартовой прямоугольной системой координат называется система координат $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$.*

Уравнение параболы в канонической системе координат. Из определения 9 вытекает, что в канонической системе координат

$$F(p/2, 0) \text{ – фокус}, \quad x = -\frac{p}{2} \text{ – уравнение директрисы.}$$

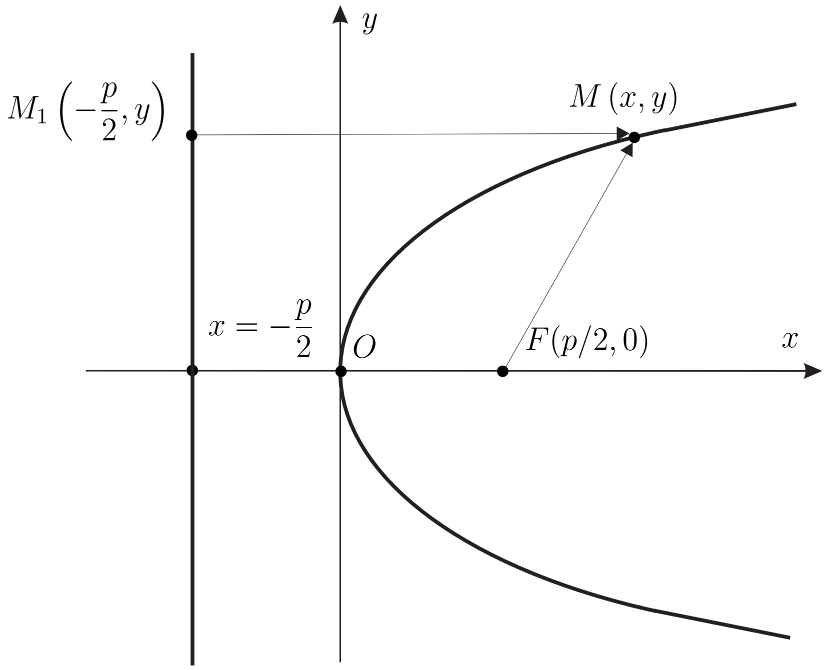


Рис. 7. Парабола в канонической системе координат.

Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка параболы. Тогда

$$\left|\overrightarrow{FM}\right| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}\,.$$

Найдём расстояние от произвольной точки $M(x, y)$ параболы до директрисы

$$x = -\frac{p}{2}.$$

Пусть $M_1$ — это основание перпендикуляра, опущенного из точки $M(x, y)$ на директрису. Тогда точка $M_1$ имеет координаты

$$M_1 = \left(-\frac{p}{2}, y\right).$$

Расстояние от точки $M(x, y)$ до директрисы равно

$$\left|\overrightarrow{M_1M}\right| = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + (y - y)^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|.$$

Согласно определению 8 параболы её уравнение имеет следующий вид:

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|, \tag{3.2}$$

из которого вытекает уравнение

$$y^2 = 2px. \tag{3.3}$$

Обратно из уравнения (3.3) имеем

$$y^2 = 2px = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{p}{2}\right)^2,$$

$$\left|x + \frac{p}{2}\right| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}\,.$$

## § 4. Касательные к эллипсу, гиперболе и параболе

Определение 10. *Касательной к эллипсу называется прямая, имеющая с эллипсом единственную общую точку.*

Вывод уравнения касательной к эллипсу. Необходимо и достаточно найти условия существования единственного решения следующей системы уравнений:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = x_0 + lt; \\ y = y_0 + mt, \end{cases} \tag{4.1}$$

Справедливо следующее равенство:

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + 2t\left(\frac{x_0 l}{a^2} + \frac{y_0 m}{b^2}\right) + t^2\left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right) = 1. \tag{4.2}$$

Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ лежит на эллипсе, тогда приходим к следующему условию

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1. \tag{4.3}$$

Кроме того, тогда число $t = 0$ должно быть единственным решением квадратного уравнения (4.2). Следовательно, приходим к равенству

$$\frac{x_0 l}{a^2} + \frac{y_0 m}{b^2} = 0. \tag{4.4}$$

В качестве направляющего вектора искомой касательной можно взять числа

$$l = \frac{y_0}{b^2}, \quad m = -\frac{x_0}{a^2}.$$

Тогда уравнение касательной имеет следующий вид:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} \Leftrightarrow \frac{x - x_0}{y_0/b^2} = \frac{y - y_0}{-x_0/a^2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{y_0}{b^2}(y - y_0) = 0. \tag{4.5}$$

В силу первого равенства из (4.3) приходим к искомому уравнению (в канонической системе координат)

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1. \tag{4.6}$$

Определение 11. *Касательной к гиперболе называется прямая, имеющая с гиперболой единственную общую точку и не параллельная асимптотам гиперболы.*

Уравнение касательной к гиперболе. Уравнение касательной к точке $M_0(x_0, y_0)$ гиперболы в канонической системе координат имеет следующий вид:

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1. \tag{4.7}$$

□ Действительно, имеют место следующие уравнения

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{и} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + lt; \\ y = y_0 + mt, \end{array} \right. \tag{4.8}$$

После подстановки уравнения прямой в уравнение гиперболы получим следующее равенство:

$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} + 2t\left(\frac{lx_0}{a^2} - \frac{my_0}{b^2}\right) + \left(\frac{l^2}{a^2} - \frac{m^2}{b^2}\right)t^2 = 1. \tag{4.9}$$

Потребуем, чтобы точка $M_0(x_0, y_0)$ принадлежала гиперболе, тогда получим равенство

$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1,$$

в силу которого имеем из (4.9) получим следующее уравнение:

$$2Bt + At^2 = 0, \tag{4.10}$$

где

$$A := \frac{l^2}{a^2} - \frac{m^2}{b^2}, \quad B := \frac{lx_0}{a^2} - \frac{my_0}{b^2}. \tag{4.11}$$

Согласно определению 11 касательная к гиперболе непараллельна асимптотам, поэтому векторы

$$\mathbf{a}_1 = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}, \quad \mathbf{a}_2 = a\mathbf{i} - b\mathbf{j}$$

не коллинеарны направляющему вектору касательной

$$\mathbf{a} = l\mathbf{i} + m\mathbf{j}.$$

Следовательно,

$$A \neq 0.$$

Поэтому необходимым и достаточным условием, чтобы система уравнений (4.8) имела единственное решение $t = 0$ — это условие, чтобы

$$B = \frac{lx_0}{a^2} - \frac{my_0}{b^2} = 0. \tag{4.12}$$

В качестве координат $\{l, m\}$ направляющего вектора касательной можно взять следующие

$$l = \frac{y_0}{b^2}, \quad m = \frac{x_0}{a^2}. \tag{4.13}$$

Итак, уравнение касательной имеет следующий вид:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} \Leftrightarrow \frac{x - x_0}{y_0/b^2} = \frac{y - y_0}{x_0/a^2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{x_0}{a^2}(x - x_0) - \frac{y_0}{b^2}(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1. \quad \boxtimes \tag{4.14}$$

О п р е д е л е н и е 12. *Касательной к параболе называется прямая, имеющая с параболой единственную точку и не параллельная оси параболы.*

У р а в н е н и е к а с а т е л ь н о й к п а р а б о л е. Уравнение касательной к точке $M_0(x_0, y_0)$ параболы в канонической системе координат имеет следующий вид:

$$yy_0 = p(x + x_0). \tag{4.15}$$

□ Действительно, будем искать единственное решение системы уравнений

$$y^2 = 2px \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = x_0 + lt; \\ y = y_0 + mt, \end{cases} \tag{4.16}$$

После подстановки уравнения прямой в уравнение параболы получим следующее уравнение:

$$y_0^2 + 2my_0 t + m^2 t^2 = 2px_0 + 2plt. \tag{4.17}$$

Потребуем, чтобы

$$y_0^2 = 2px_0. \tag{4.18}$$

Согласно определению 12 имеем направляющий вектор искомой касательной

$$\mathbf{a} = l\mathbf{i} + m\mathbf{j}$$

не должен быть коллинеарен вектору

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{i},$$

который сонаправлен с осью параболы. Следовательно, $m \neq 0$. Итак, с учётом (4.18) из (4.17) получим уравнение

$$m^2 t^2 + (my_0 - pl)t = 0. \tag{4.19}$$

Поскольку $m \neq 0$, то для существования единственного решения $t = 0$ последнего квадратного уравнения, необходимо и достаточно, чтобы

$$my_0 - pl = 0.$$

Тогда в качестве координат направляющего вектора искомой касательной можно взять

$$l = \frac{y_0}{p}, \quad m = 1.$$

Итак, уравнение касательной имеет следующий вид:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} \Leftrightarrow \frac{x - x_0}{y_0/p} = \frac{y - y_0}{1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{y_0}{p}(y - y_0) = x - x_0 \Leftrightarrow \frac{yy_0}{p} = x - x_0 + \frac{y_0^2}{p} = x - x_0 + 2x_0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow yy_0 = p(x + x_0). \quad \boxtimes \tag{4.20}$$

## § 5. Оптические свойства эллипса, гиперболы и параболы

О п т и ч е с к о е с в о й с т в о э л л и п с а.

Т е о р е м а 3. *Фокальные радиусы произвольной точки $M_0$ эллипса составляют равные углы с касательной к эллипсу в точке $M_0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о.

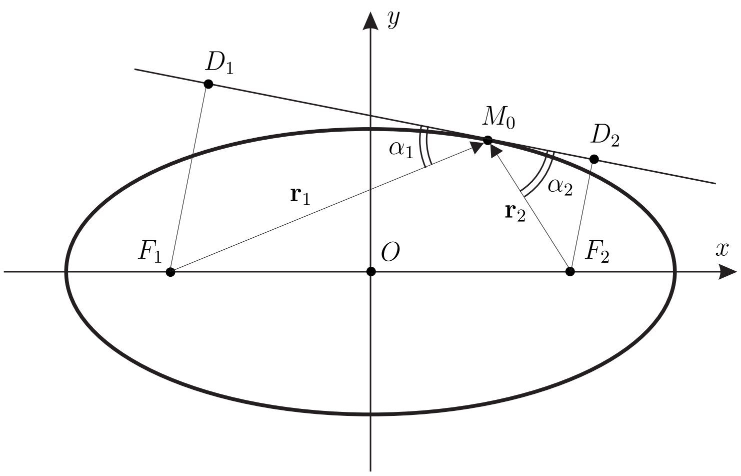


Рис. 8. Оптическое свойство эллипса.

Вычисли расстояние от фокусов $F_1$ и $F_2$ до касательной в точке $M_0(x_0, y_0)$. Поскольку уравнение касательной в канонической системе координат имеет вид

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1,$$

а фокусы имеют координаты $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$ имеют место равенства

$$\left|\overrightarrow{F_1D_1}\right| = \frac{\left|(-c)\cdot x_0/a^2 + 0\cdot y_0/b^2 - 1\right|}{\sqrt{x_0^2/a^4 + y_0^2/b^4}} = \frac{|\varepsilon x_0 + a|}{a\sqrt{x_0^2/a^4 + y_0^2/b^4}} =$$
$$= \frac{\varepsilon x_0 + a}{a\sqrt{x_0^2/a^4 + y_0^2/b^4}} = \frac{|\mathbf{r}_1|}{a\sqrt{x_0^2/a^4 + y_0^2/b^4}}.$$

Отсюда

$$\sin\alpha_1 = \frac{\left|\overrightarrow{F_1D_1}\right|}{\left|\overrightarrow{F_1M_0}\right|} = \frac{\left|\overrightarrow{F_1D_1}\right|}{|\mathbf{r}_1|} = \frac{1}{a\sqrt{x_0^2/a^4 + y_0^2/b^4}}.$$

Аналогичным образом получаем равенство

$$\left|\overrightarrow{F_2D_2}\right| = \frac{\left|c\cdot x_0/a^2 + 0\cdot y_0/b^2 - 1\right|}{\sqrt{x_0^2/a^4 + y_0^2/b^4}} = \frac{|\varepsilon x_0 - a|}{a\sqrt{x_0^2/a^4 + y_0^2/b^4}} =$$
$$= \frac{a - \varepsilon x_0}{a\sqrt{x_0^2/a^4 + y_0^2/b^4}} = \frac{|\mathbf{r}_2|}{a\sqrt{x_0^2/a^4 + y_0^2/b^4}}.$$

Отсюда вытекает равенство

$$\sin\alpha_2 = \frac{\left|\overrightarrow{F_2D_2}\right|}{\left|\overrightarrow{F_2M_0}\right|} = \frac{\left|\overrightarrow{F_2D_2}\right|}{|\mathbf{r}_2|} = \frac{1}{a\sqrt{x_0^2/a^4 + y_0^2/b^4}}.$$

Из равенства синусов углов вытекает равенство углов.

Теорема доказана.

Оптическое свойство гиперболы.

Теорема 4. *Фокальные радиусы произвольной точки $M_0$ гиперболы составляют равные углы с касательной к гиперболе, проведенной через точку $M_0$.*

Доказательство. Уравнение касательной к точке $M_0(x_0, y_0)$ гиперболы имеет следующий вид:

$$\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1.$$

Поэтому расстояние от фокуса $F_1(-c,0)$ до этой касательной равно

$$\left|\overrightarrow{F_1D_1}\right| = \frac{\left|-\dfrac{x_0c}{a^2} - 1\right|}{\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}}} = \frac{1}{a\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}}}\,|\varepsilon x_0 + a| = \frac{1}{a\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}}}\left|\overrightarrow{F_1M_0}\right|,$$

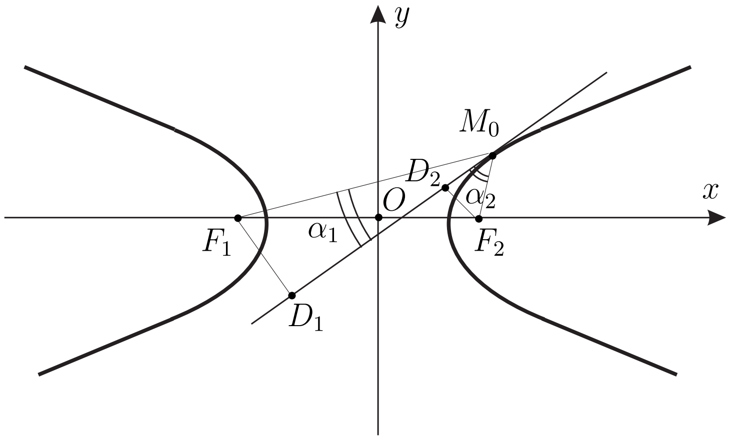


Рис. 9. Оптическое свойство гиперболы.

а расстояние от фокуса $F_2(c, 0)$ до указанной касательной равно

$$\left|\overrightarrow{F_2D_2}\right| = \frac{\left|\dfrac{x_0c}{a^2} - 1\right|}{\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}}} = \frac{1}{a\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}}} |\varepsilon x_0 - a| = \frac{1}{a\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}}} \left|\overrightarrow{F_2M_0}\right|.$$

Таким образом, приходим к следующей цепочке равенств:

$$\sin\alpha_1 = \frac{\left|\overrightarrow{F_1D_1}\right|}{\left|\overrightarrow{F_1M_0}\right|} = \frac{\left|\overrightarrow{F_2D_2}\right|}{\left|\overrightarrow{F_2M_0}\right|} = \sin\alpha_2.$$

Теорема доказана.

Оптическое свойство параболы.

Теорема 5. *Фокальный радиус произвольной точки $M_0$ параболы и ось параболы составляют равные углы с касательной к параболе, проведённой через точку $M_0$.*

Доказательство. Из уравнения касательной

$$yy_0 = p(x + x_0)$$

к параболе в точке $M_0(x_0, y_0)$ вытекает, что касательная пересекает ось абсцисс $Ox$ в точке $A(-x_0, 0)$.

Следовательно, с одной стороны,

$$|AO| = x_0, \quad |AF| = |AO| + |OF| = x_0 + \frac{p}{2}.$$

С другой стороны, имеем согласно определению параболы

$$|M_0F| = |M_0D| = |M_0C| + |CD| = x_0 + \frac{p}{2}.$$

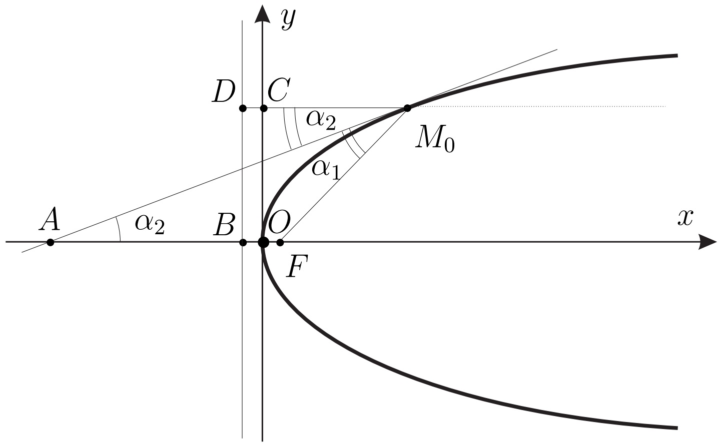


Рис. 10. Оптическое свойство параболы.

Таким образом, $|AF| = |M_0F|$. Значит,

$$\angle FAM_0 = \angle AM_0F,$$

но

$$\angle FAM_0 = \angle DM_0A \Rightarrow \angle DM_0A = \angle AM_0F.$$

Теорема доказана.

## § 6. Полярные уравнения эллипса, гиперболы и параболы

Полярное уравнение параболы. Введём полярную систему координат $\{F, \mathbf{i}\}$, где $F$ — это фокус параболы, а полярная ось определяется вектором $\mathbf{i}$ из равенства (3.1) и, в частности, совпадает с осью абсцисс $Ox$ соответствующей канонической прямоугольной декартовой системы координат $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$.

Тогда справедливы следующие формулы, связывающие декартовы координаты в канонической системе координат $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ с полярными координатами в полярной системе координат $\{F, \mathbf{i}\}$ точек плоскости:

$$\left\{ \begin{aligned} x - p/2 &= r\cos\varphi, \\ y &= r\sin\varphi. \end{aligned} \right. \tag{6.1}$$

Согласно определению параболы имеет место равенство

$$r = x + \frac{p}{2}. \tag{6.2}$$

Из формул (6.1) и (6.2) вытекает равенство

$$r = p + r\cos\varphi,$$

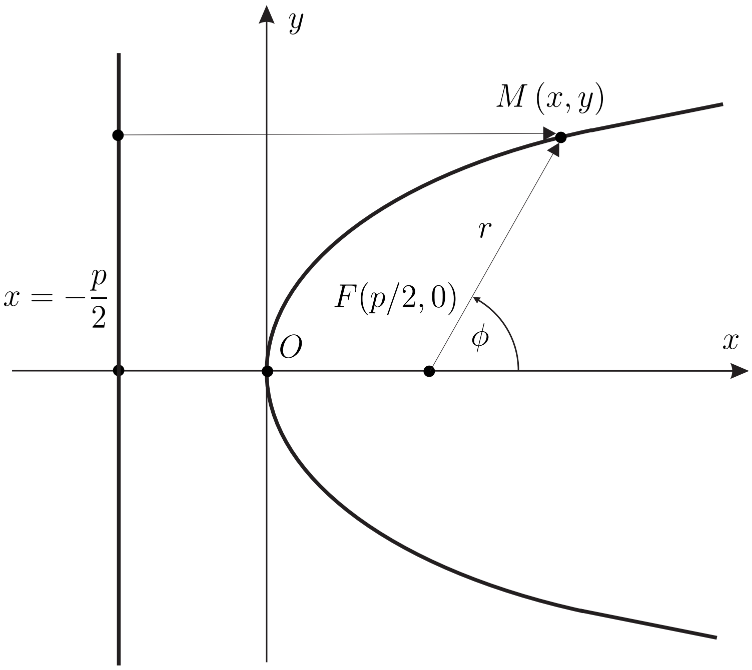


Рис. 11. Парабола в полярной системе координат.

из которого получаем полярное уравнение параболы

$$r = \frac{p}{1 - \cos\varphi}. \tag{6.3}$$

З а м е ч а н и е 5. Отметим, что углам $\varphi = 0$ и $\varphi = 2\pi$ не отвечает ни одна точка параболы. Поэтому знаменатель в полярном уравнении параболы не обращается в ноль.

П о л я р н о е  у р а в н е н и е  э л л и п с а - I. Выберем полярную систему координат $\{F_1, \mathbf{i}\}$, где

$$\mathbf{i} = \frac{\overrightarrow{F_1F_2}}{\left|\overrightarrow{F_1F_2}\right|},$$

т. е. в качестве полюса выберем левый фокус $F_1$, а в качестве полярной оси выберем ось абсцисс соответствующей канонической декартовой системы координат $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$.

Справедливы следующие формулы, связывающие декартовы $(x, y)$ и полярные координаты $(r, \varphi)$ точек плоскости

$$\left\{ \begin{array}{l} x + c = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{array} \right. \tag{6.4}$$

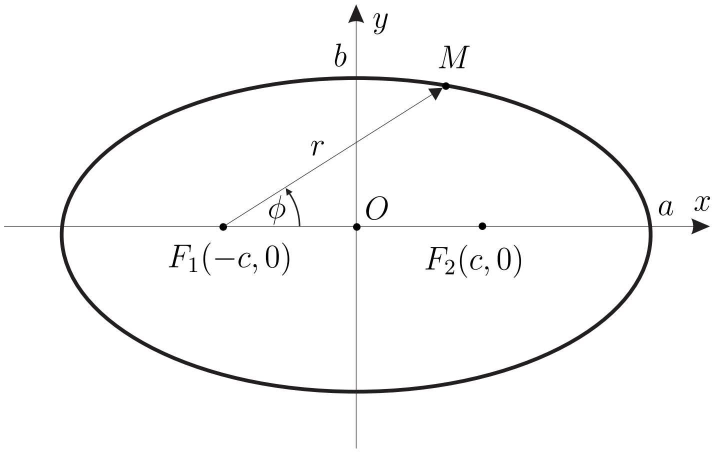


Рис. 12. Эллипс в полярной системе координат $\{F_1, \mathbf{i}\}$.

в канонической декартовой системе координат $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ и в выбранной полярной системе координат $\{F_1, \mathbf{i}\}$.

Кроме того, справедливо следующее равенство для эллипса

$$r = \varepsilon x + a. \tag{6.5}$$

Из уравнений (6.7) и (6.5) вытекает следующая цепочка равенств:

$$r = \varepsilon\,(-c + r\cos\varphi) + a \Rightarrow r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi},$$

где

$$\varepsilon = \frac{c}{a} < 1, \quad p := -\varepsilon c + a = \frac{a^2 - c^2}{a} = \frac{b^2}{a}.$$

Таким образом, получили полярное уравнение эллипса

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}, \quad p = \frac{b^2}{a}, \quad \varepsilon = \frac{c}{a} < 1, \quad \varphi \in [0, 2\pi) \tag{6.6}$$

в полярной системе координат $\{F_1, \mathbf{i}\}$.

Замечание 6. Поскольку $\varepsilon \in (0, 1)$, то знаменатель в полярном уравнении (6.6) эллипса никогда не обращается в ноль.

Полярное уравнение эллипса-II. Выберем полярную систему координат $\{F_2, \mathbf{i}\}$.

Справедливы следующие формулы, связывающие декартовы $(x, y)$ и полярные координаты $(r, \varphi)$ точек плоскости

$$\begin{cases} x - c = r\cos\varphi, \\ \quad y = r\sin\varphi. \end{cases} \tag{6.7}$$

в канонической декартовой системе координат $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ и в выбранной полярной системе координат $\{F_2, \mathbf{i}\}$.

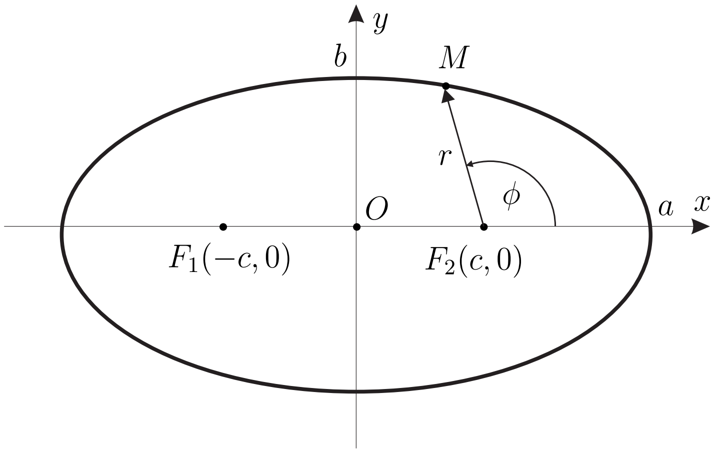


Рис. 13. Эллипс в полярной системе координат $\{F_2, \mathbf{i}\}$.

Для эллипса в выбранной полярной системе координат $\{F_2, \mathbf{i}\}$ справедливо следующее равенство:

$$r = a - \varepsilon x \Rightarrow r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos\varphi}, \quad p = \frac{b^2}{a}. \tag{6.8}$$

Полярное уравнение гиперболы-I. Выберем полярную систему координат $\{F_2, \mathbf{i}\}$, где

$$\mathbf{i} := \frac{\overrightarrow{F_1F_2}}{\left|\overrightarrow{F_1F_2}\right|},$$

т. е. полюс полярной системы координат совпадает с фокусом $F_2$, а полярная ось совпадает с осью абсцисс $Ox$ канонической декартовой системы координат $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$.

Связь декартовых и полярных координат точек плоскости имеет следующий вид:

$$\begin{cases} x - c = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases} \tag{6.9}$$

Для правой ветви гиперболы ($x > 0$)

$$r = \varepsilon x - a. \tag{6.10}$$

Из уравнений (6.9) и (6.10) приходим к полярному уравнению правой ветви гиперболы

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}, \quad p = \frac{b^2}{a}, \quad \varepsilon = \frac{c}{a} > 1 \tag{6.11}$$

в полярной системе координат $\{F_2, \mathbf{i}\}$.

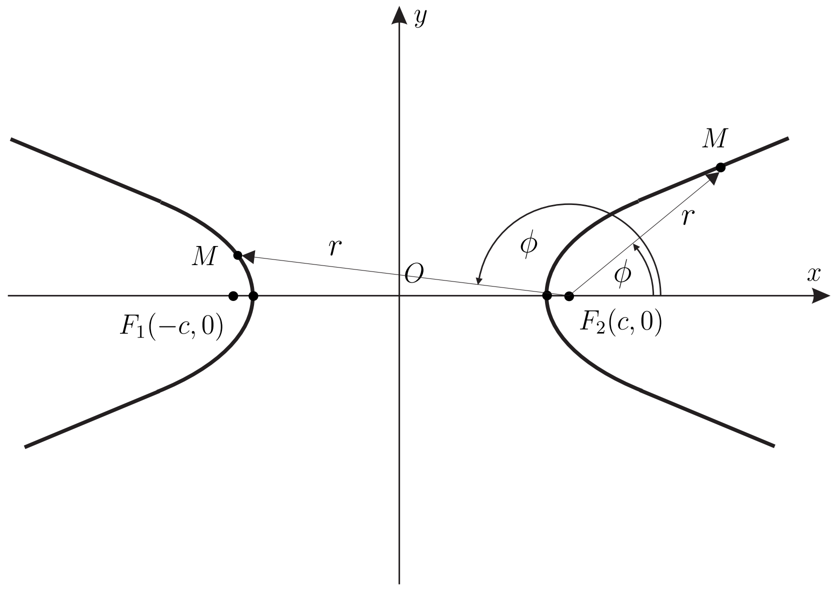


Рис. 14. Гипербола в полярной системе координат $\{F_2, \mathbf{i}\}$.

З а м е ч а н и е 7. Отметим, что в полярной системе координат $\{F_2, \mathbf{i}\}$ уравнение правой ветви гиперболы корректно при

$$\cos\varphi < \frac{1}{\varepsilon} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} =: \cos\vartheta,$$

т. е. когда

$$\vartheta < \varphi < 2\pi - \vartheta,$$

но именно таким углам $\varphi$ соответствуют точки правой ветви гиперболы в полярной системе координат $\{F_2, \mathbf{i}\}$.

Для левой ветви гиперболы ($x < 0$) имеем равенство

$$r = -\varepsilon x + a. \tag{6.12}$$

Поэтом из равенств (6.9) и (6.12) получим следующее <u>полярное уравнение левой ветви гиперболы</u>:

$$r = -\frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}, \quad p = \frac{b^2}{a}. \tag{6.13}$$

З а м е ч а н и е 8. Уравнение (6.13) левой ветви гиперболы в полярной системе координат $\{F_2, \mathbf{i}\}$ корректно при условии, что

$$\cos\varphi < -\frac{1}{\varepsilon},$$

но именно этим углам соответствуют точки левой ветви гиперболы.

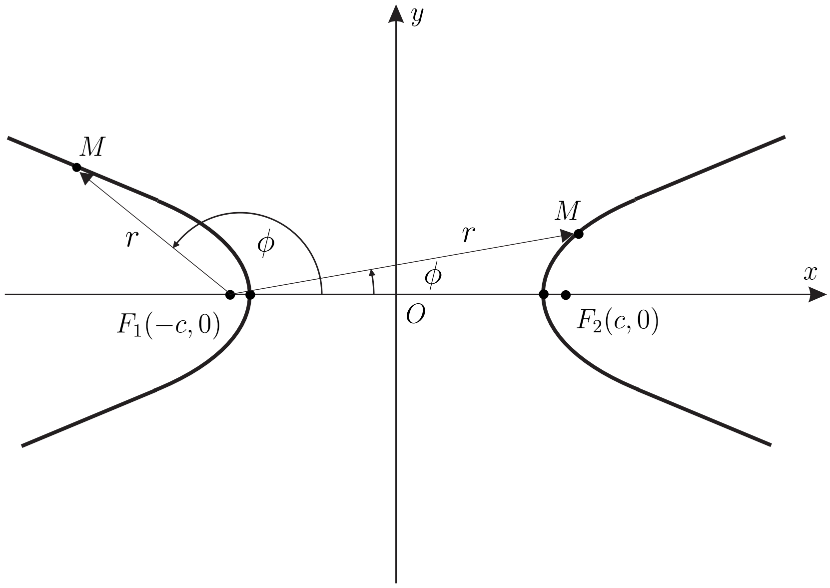


Рис. 15. Гипербола в полярной системе координат $\{F_1, \mathbf{i}\}$.

Полярное уравнение гиперболы-II. Выберем полярную систему координат $\{F_1, \mathbf{i}\}$, т. е. полюс полярной системы координат совпадает с фокусом $F_1$, а полярная ось совпадает с осью абсцисс $Ox$ канонической декартовой системы координат $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$. Связь декартовых и полярных координат точек плоскости имеет следующий вид:

$$\begin{cases} x + c = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases} \tag{6.14}$$

Рассмотрим сначала правую ветвь $x > 0$. Тогда имеет место следующее равенство:

$$r = \varepsilon x + a \Rightarrow r = -\frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}, \quad p = \frac{b^2}{a}. \tag{6.15}$$

Замечание 9. Это уравнение правой ветви гиперболы корректно при условии, что

$$\cos\varphi > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \varphi \in (-\vartheta, \vartheta), \quad \cos\vartheta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

но именно этим углам соответствуют точки правой ветви гиперболы.

Рассмотрим теперь левую ветвь гиперболы ($x < 0$). Для левой ветви справедливо следующее равенство:

$$r = -\varepsilon x - a \Rightarrow r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}. \tag{6.16}$$

Замечание 10. Это уравнение корректно при условии, что

$$\cos\varphi > -\frac{1}{\varepsilon},$$

но именно этим углам соответствуют точки левой ветви гиперболы.