Лекция 9

ТРАНСПОНИРОВАННЫЙ ОПЕРАТОР

В этой лекции мы рассмотрим важное понятие транспонированного оператора и докажем важную теорему о равенстве скобок двойственности.

§ 1. Обозначения

Пусть заданы два банаховых пространства $\mathbb{E}$ и $\mathbb{F}$ с нормами

$$\|\cdot\|_e \quad \text{и} \quad \|\cdot\|_f$$

и с соответствующими сопряжёнными $\mathbb{E}^*$ и $\mathbb{F}^*$ относительно скобок двойственности:

$$\langle e^*, e\rangle_e \quad \text{для всех} \quad e \in \mathbb{E} \quad \text{и} \quad e^* \in \mathbb{E}^*$$

и

$$\langle f^*, f\rangle_f \quad \text{для всех} \quad f \in \mathbb{F} \quad \text{и} \quad f^* \in \mathbb{F}^*.$$

Введём стандартным образом скобки двойственности между парами банаховых пространств $\mathbb{E}^*$ и $\mathbb{E}^{**}$, а также $\mathbb{F}^*$ и $\mathbb{F}^{**}$:

$$\langle e^{**}, e^*\rangle_{e^*} \quad \text{для всех} \quad e^* \in \mathbb{E}^* \quad \text{и} \quad e^{**} \in \mathbb{E}^{**}$$

и

$$\langle f^{**}, f^*\rangle_{f^*} \quad \text{для всех} \quad f^* \in \mathbb{F}^* \quad \text{и} \quad f^{**} \in \mathbb{F}^{**}.$$

§ 2. Транспонированный оператор и его норма

Пусть $T \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$. Это пространство является банаховым относительно следующей нормы:

$$\|T\|_{e\to f} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\|e\|_e=1} \|Te\|_f .$$

Напомним следующее утверждение, фактически уже доказанное выше (формула (**??**) лекции 7).

Лемма 1. *Для произвольного оператора* $T \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ *имеет место неравенство*:

$$\|Te\|_f \leqslant \|T\|_{e\to f}\|e\|_e \quad \textit{для всех} \quad e \in \mathbb{E}.$$

Замечание 1. В силу леммы 1 имеем, в частности

$$|\langle e^*, e\rangle_e| \leqslant \|e^*\|_{e^*}\|e\|_e \quad \text{для всех} \quad e \in \mathbb{E}, e^* \in \mathbb{E}^*.$$

Определение 1. *Оператором, транспонированным к T, называется оператор*

$$T^t : \mathbb{F}^* \to \mathbb{E}^*, \tag{2.1}$$

определяемый следующим образом:

$$\left\langle T^t f^*, e\right\rangle_e \overset{\text{def}}{=} \langle f^*, Te\rangle_f \quad \forall e \in \mathbb{E}, \forall f^* \in \mathbb{F}^*. \tag{2.2}$$

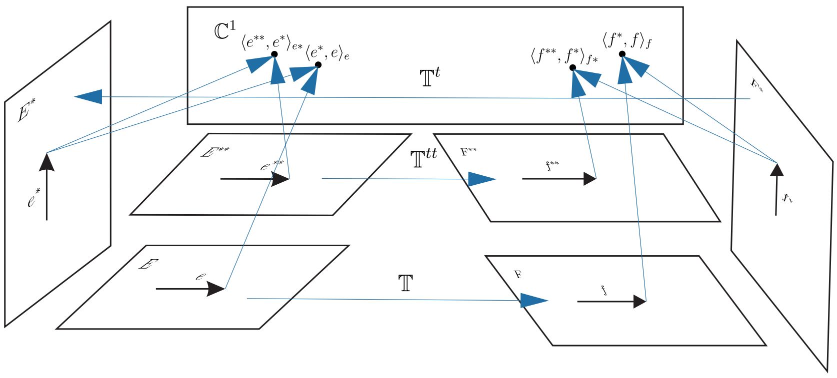

Рис. 1. Транспонированный и дважды транспонированный оператор.

Справедлива следующая теорема:

Теорема 1. *Если $T \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$, то $T^t \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^*, \mathbb{E}^*)$. Причём*

$$\|T\|_{e\to f} = \|T^t\|_{f^*\to e^*}.$$

Доказательство.

Прежде всего опишем, как определяется норма в пространстве $\mathcal{L}(\mathbb{F}^*, \mathbb{E}^*)$ — очевидно, банаховом, поскольку $\mathbb{E}^*$ — это банахово пространство.

Шаг 1. Имеем

$$\|A\|_{f^*\to e^*} \overset{\text{def}}{=} \sup_{\|f^*\|_{f^*}=1} \|Af^*\|_{e^*},$$

где нормы в сопряжённых пространствах $\mathbb{E}^*$ и $\mathbb{F}^*$ определяются стандартным образом:

$$\|e^*\|_{e^*} \overset{\text{def}}{=} \sup_{\|e\|_e=1} |\langle e^*, e\rangle_e| \quad \text{и} \quad \|f^*\|_{f^*} \overset{\text{def}}{=} \sup_{\|f\|_f=1} |\langle f^*, f\rangle_f|.$$

Докажем сначала линейность оператора T^t. Имеем

$$\left\langle T^t\left(\alpha_1 f_1^*+\alpha_2 f_2^*\right), e\right\rangle_e \stackrel{\text{def}}{=} \left\langle\left(\alpha_1 f_1^*+\alpha_2 f_2^*\right), Te\right\rangle_f = \\ = \alpha_1\left\langle f_1^*, Te\right\rangle_f+\alpha_2\left\langle f_2^*, Te\right\rangle_f = \alpha_1\left\langle T^t f_1^*, e\right\rangle_e+\alpha_2\left\langle T^t f_2^*, e\right\rangle_e = \\ = \left\langle\alpha_1 T^t f_1^*+\alpha_2 T^t f_2^*, e\right\rangle_e \quad \text{для всех} \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^1 \quad \text{и} \quad f_1^*, f_2^* \in \mathbb{F}.$$

Шаг 2. Докажем теперь ограниченность оператора T^t. В силу леммы 1 и замечания после неё имеем

$$\left|\left\langle T^t f^*, e\right\rangle_e\right| = \left|\left\langle f^*, Te\right\rangle_f\right| \leqslant \|f^*\|_{f^*}\|Te\|_f \leqslant \|f^*\|_{f^*}\|T\|_{e\to f}\|e\|_e. \tag{2.3}$$

Из определения нормы линейного оператора (в частности, линейного функционала) следует, что

$$\|T^t\|_{f^*\to e^*} = \sup_{\|f^*\|_{f^*}=1}\|T^t f^*\|_{e^*} = \sup_{\|f^*\|_{f^*}=1}\sup_{\|e\|_e=1}\left|\left\langle T^t f^*, e\right\rangle_e\right|. \tag{2.4}$$

Без ограничения общности можно считать, что в неравенстве (2.3) $f^* \neq \vartheta$ и $e \neq \vartheta$. Тогда из (2.3) получим неравенство

$$\left|\left\langle T^t \frac{f^*}{\|f^*\|_{f^*}}, \frac{e}{\|e\|_e}\right\rangle_e\right| \leqslant \|T\|_{e\to f}.$$

Отсюда и из (2.4) вытекает неравенство

$$\|T^t\|_{f^*\to e^*} \leqslant \|T\|_{e\to f}. \tag{2.5}$$

Следовательно, оператор T^t ограничен, $T^t \in \mathcal{L}\left(\mathbb{F}^*, \mathbb{E}^*\right)$.

Шаг 3. Докажем теперь, что имеет место неравенство

$$\|T\|_{e\to f} \leqslant \|T^t\|_{f^*\to e^*}. \tag{2.6}$$

Поскольку $T^t \in \mathcal{L}\left(\mathbb{F}^*, \mathbb{E}^*\right)$, то в силу леммы 1 и замечания после неё имеет место цепочка выражений

$$\left|\left\langle f^*, Te\right\rangle_f\right| = \left|\left\langle T^t f^*, e\right\rangle_e\right| \leqslant \|T^t f^*\|_{e^*}\|e\|_e \leqslant \|T^t\|_{f^*\to e^*}\|f^*\|_{f^*}\|e\|_e. \tag{2.7}$$

Теперь по определению нормы в пространстве $\mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ с учётом следствия из теоремы 5 лекции 7 имеем цепочку равенств

$$\|T\|_{e\to f} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\|e\|_e=1}\|Te\|_f = \sup_{\|e\|_e=1}\sup_{\|f^*\|_{f^*}=1}\left|\left\langle f^*, Te\right\rangle_f\right|. \tag{2.8}$$

Без ограничения общности можно считать, что $e \neq \vartheta$ и $f^* \neq \vartheta$.

Тогда из (2.7) получим неравенство

$$\left|\left\langle \frac{f^*}{\|f^*\|_{f^*}}, T\frac{e}{\|e\|_e}\right\rangle_f\right| \leqslant \|T^t\|_{f^*\to e^*}.$$

Отсюда и из равенства (2.8) получим неравенство (2.6), из которого и из (2.5) получаем второе утверждение теоремы.

Теорема доказана.

Утверждение 1. Если

$$\mathbb{E} \xrightarrow{T_1} \mathbb{F} \xrightarrow{T_2} \mathbb{G},$$

то для соответствующих транспонированных операторов верно

$$(T_2 T_1)^t = T_1^t T_2^t.$$

(Доказать самостоятельно!)

§ 3. Инъективные и неинъективные операторы

Определение 2. *Оператор $T : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ называется инъективным, если из условия $Te = \vartheta_f$ вытекает, что $e = \vartheta_e$.*

Оператор T является неинъективным в том случае, если существует такой элемент $\overline{e} \neq \vartheta_e$, что $T\overline{e} = \vartheta_f$. По определению оператора T^t в этом случае имеет место равенство

$$\left\langle T^t f^*, \overline{e} \right\rangle_e = \langle f^*, T\overline{e} \rangle_f = 0 \quad \text{для всех} \quad f^* \in \mathbb{F}^*. \tag{3.1}$$

Определение 3. *Множество $\mathrm{A}^* \subset \mathbb{E}^*$ называется ортогональным ко множеству $\mathrm{A} \subset \mathbb{E}$ относительно скобок двойственности между этими банаховыми пространствами, если*

$$\langle a^*, a \rangle = 0 \quad \textit{для всех} \quad a \in \mathrm{A} \quad \textit{и} \quad a^* \in \mathrm{A}^*.$$

Пусть теперь $\{T f_n^*\} \subset \mathbb{E}^*$ — это сильно сходящаяся к некоторому элементу $e^* \in \mathbb{E}^*$ последовательность, т. е.

$$\|T f_n^* - e^*\|_{e^*} = \sup_{\|e\|_e = 1} |\langle T f_n^* - e^*, e \rangle_e| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Тогда из равенства (3.1) получим, что

$$0 = \left\langle T^t f_n^*, \overline{e} \right\rangle_e \to \langle e^*, \overline{e} \rangle_e = 0, \quad \overline{e} \neq \vartheta_e.$$

Тем самым мы получаем, что замыкание множества $T^t \mathbb{F}^*$ обладает тем свойством, что

$$\forall e^* \in \overline{T^t \mathbb{F}^*} \quad \langle e^*, \overline{e} \rangle_e = 0.$$

С другой стороны (см. теорему 5 лекции 7), в $\mathbb{E}^*$ найдётся функционал, значение которого на <u>ненулевом</u> элементе $\overline{e}$ отлично от нуля. Следовательно, в случае неинъективного оператора T имеем

$$\overline{T^t \mathbb{F}^*} \subsetneq \mathbb{E}^*,$$

т. е. множество $\{T^t \mathbb{F}^*\}$ не плотно в $\mathbb{E}^*$.

Заметим, что имеет место и такое утверждение: если множество $\{T^t \mathbb{F}^*\}$ плотно в $\mathbb{E}^*$, то оператор T инъективен. Действительно, бы оператор T не был инъективен, то по выше доказанному $\{T^t \mathbb{F}^*\}$ не было бы плотно в $\mathbb{E}^*$.

§ 4. Операторы топологического вложения

Теперь рассмотрим частный случай операторов из банахова пространства $\mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$, а именно линейный, непрерывный и инъективный оператор
$$J_{ef} : \mathbb{E} \to \mathbb{F}.$$

Во-первых, этот оператор линейный, т. е.
$$J_{ef}(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) = \alpha_1 J_{ef} e_1 + \alpha_2 J_{ef} e_2 \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^1 \text{ и } \forall e_1, e_2 \in \mathbb{E}.$$

Во-вторых, этот оператор непрерывный, т. е. в силу линейности — ограниченный
$$\|J_{ef} e\|_f \leqslant c_1 \|e\|_e.$$

Далее мы будем использовать следующее обозначение, когда банахово пространство $\mathbb{E}$ плотно в банаховом пространстве $\mathbb{F}$:
$$\mathbb{E} \overset{ds}{\subset} \mathbb{F}.$$

Теорема 2. *Пусть $\mathbb{E}$ и $\mathbb{F}$ — это два банаховых пространства и $T \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$. Тогда имеют место следующие утверждения:*

(i) $T(\mathbb{E}) \overset{ds}{\subset} \mathbb{F} \Leftrightarrow T^t$ *является инъективным*;

(ii) $T^t(\mathbb{F}^*) \overset{ds}{\subset} \mathbb{E}^* \Rightarrow T$ *является инъективным, причём имеет место обратное утверждение при условии, что $\mathbb{E}$ рефлексивно.*

Доказательство.

Шаг 1. Доказательство (i).

1. Надо доказать, что если $T^t f^* = \vartheta_e^*$, то $f^* = \vartheta_f^*$.

Итак, пусть $T^t f^* = \vartheta_e^*$, тогда для всех $e \in \mathbb{E}$ имеем равенства
$$0 = \left\langle T^t f^*, e \right\rangle_e = \langle f^*, Te \rangle_f \quad \text{для всех} \quad e \in \mathbb{E}.$$

Поскольку $T(\mathbb{E}) \overset{ds}{\subset} \mathbb{F}$, то для любого $f \in \mathbb{F}$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $e_\varepsilon \in \mathbb{E}$, что
$$\|f - Te_\varepsilon\|_f \leqslant \varepsilon,$$
поэтому
$$\langle f^*, Te_\varepsilon \rangle_f = 0 \Rightarrow \langle f^*, f \rangle_f + \langle f^*, Te_\varepsilon - f \rangle_f = 0.$$

Следовательно, справедлива следующая цепочка:
$$|\langle f^*, f \rangle_f| = |-\langle f^*, Te_\varepsilon - f \rangle_f| \leqslant \|f^*\|_* \|Te_\varepsilon - f\|_f \leqslant \varepsilon \|f^*\|_{f^*},$$
но число $\varepsilon > 0$ не зависит от $f \in \mathbb{F}$ и от $f^* \in \mathbb{F}^*$. Поэтому в пределе при $\varepsilon \to +0$ получим, что
$$|\langle f^*, f \rangle_f| = 0 \quad \text{для всех} \quad f \in \mathbb{F} \Rightarrow f^* = \vartheta_f^*.$$

2. Докажем теперь утверждение в другую сторону. Пусть T^t инъективен, но предположим, что $T(\mathbb{E})$ не плотно в $\mathbb{F}$. Значит, найдётся элемент

$$f \in \mathbb{F} \backslash \overline{T(\mathbb{E})}.$$

По следствию к теореме Хана—Банаха о разделяющем функционале (теорема 6 лекции 7) найдётся функционал $f^* \in \mathbb{F}^*$ такой, что

$$\langle f^*, Te\rangle_f = 0 \quad \text{для всех} \quad e \in \mathbb{E} \quad \text{и} \quad \langle f^*, f\rangle_f \neq 0.$$

Но тогда

$$0 = \langle f^*, Te\rangle_f = \langle T^t f^*, e\rangle_e \quad \text{для всех} \quad e \in \mathbb{E}.$$

Следовательно,

$$T^t f^* = \vartheta_e^* \Rightarrow f^* = \vartheta_f^*,$$

но последнее равенство противоречит свойству $\langle f^*, f\rangle_f \neq 0$.

Полученное противоречие доказывает вторую часть (i).

Шаг 2. Доказательство (ii).

1. Первая часть утверждения (ii) уже доказана в § 3 этой лекции.

2. Пусть теперь T является инъективным. Попробуем доказать требуемое утверждение как и в случае (i). Итак, надо доказать, что функционал $e^{**} \in \mathbb{E}^{**}$, равный нулю на $T^t\mathbb{F}^*$, равен нулю и на всём $\mathbb{E}^*$, откуда в силу теоремы Хана–Банаха получим требуемый результат.

Пусть имеет место равенство

$$\left\langle e^{**}, e^*\right\rangle_{e^*} = 0 \quad \text{для всех} \quad e^* \in T^t\mathbb{F}^*,$$

которое эквивалентно

$$\left\langle e^{**}, T^t f^*\right\rangle_{e^*} = 0 \quad \text{для всех} \quad f^* \in \mathbb{F}^*.$$

Но последнее выражение равно

$$\left\langle T^{tt} e^{**}, f^*\right\rangle_{f^*} = 0 \quad \text{для всех} \quad f^* \in \mathbb{F}^*,$$

где T^{tt} — транспонированный к T^t оператор. Из последнего равенства сразу же получаем, что

$$T^{tt} e^{**} = \vartheta.$$

И тут мы сталкиваемся с трудностью: **из инъективности оператора T, вообще говоря, не следует инъективность оператора T^{tt}.**

Поэтому нужно изучить явное представление оператора T^{tt} через оператор T.

Рассмотрим транспонированный оператор T^{tt} к оператору T^t. По определению имеем

$$\left\langle T^{tt} e^{**}, f^*\right\rangle_{f^*} = \left\langle e^{**}, T^t f^*\right\rangle_{e^*} \quad \forall e^{**} \in \mathbb{E}^{**} \quad \text{и} \quad \forall f^* \in \mathbb{F}^*. \tag{4.1}$$

С учётом того, что имеют место изометрические вложения

$$J_e : \mathbb{E} \to \mathbb{E}^{**} \quad \text{и} \quad J_f : \mathbb{F} \to \mathbb{F}^{**},$$

причём $J_e\mathbb{E} = \mathbb{E}^{**}$ в силу рефлексивности $\mathbb{E}$, мы можем переписать (4.1) в следующем виде:

$$\left\langle T^{tt} J_e e, f^* \right\rangle_{f^*} = \left\langle J_e e, T^t f^* \right\rangle_{e^*} \quad \forall e \in \mathbb{E} \quad \text{и} \quad \forall f^* \in \mathbb{F}^*. \tag{4.2}$$

С другой стороны, имеем равенства

$$\left\langle J_e e, T^t f^* \right\rangle_{e^*} = \left\langle T^t f^*, e \right\rangle_e = \left\langle f^*, Te \right\rangle_f = \left\langle J_f T e, f^* \right\rangle_{f^*} \quad \forall e \in \mathbb{E}, \quad \forall f^* \in \mathbb{F}^*.$$

Отсюда и из (4.2) получим равенство

$$T^{tt} J_e = J_f T.$$

В силу рефлексивности пространства $\mathbb{E}$ существует обратный оператор J_e^{-1} и поэтому получаем равенство

$$T^{tt} = J_f T J_e^{-1}.$$

Отсюда и из инъективности T вытекает инъективность оператора T^{tt}, а стало быть, получаем, что

$$T^t(\mathbb{F}^*) \overset{ds}{\subset} \mathbb{E}^*.$$

Теорема доказана.

Теперь можно применить общий результат теоремы к важному частному случаю оператора инъективного и непрерывного вложения

$$J_{ef} : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$$

и транспонированного оператора

$$J_{ef}^t : \mathbb{F}^* \to \mathbb{E}^*.$$

Теорема 3. *Пусть $\mathbb{E}$ и $\mathbb{F}$ — это два банаховых пространства и $\mathbb{E} \subset \mathbb{F}$. Тогда имеют место следующие утверждения*

(i) $\mathbb{E} \overset{ds}{\subset} \mathbb{F} \Leftrightarrow J_{ef}^t$ *является инъективным*;

(ii) $\mathbb{F}^* \overset{ds}{\subset} \mathbb{E}^* \Rightarrow J_{ef}$ *является инъективным, причём имеет место обратное утверждение при условии, что $\mathbb{E}$ рефлексивно.*

§ 5. Сумма, пересечение и декартово произведение банаховых пространств

Пусть у нас имеются два банаховых пространства $\mathbb{E}$ и $\mathbb{F}$ такие, что их пересечение $\mathbb{E} \cap \mathbb{F}$ и их сумма $\mathbb{E} + \mathbb{F}$ — тоже банаховы пространства относительно некоторых норм.

Что можно сказать о соответствующих сопряжённых пространствах $(\mathbb{E} \cap \mathbb{F})^*$ и $(\mathbb{E} + \mathbb{F})^*$?

Для ответа на эти вопросы начнём с аккуратного построения банаховых пространств $\mathbb{E} \cap \mathbb{F}$ и $\mathbb{E} + \mathbb{F}$.

1. Пересечение банаховых пространств.

Лемма 2. *Пусть банаховы пространства* $\mathbb{E}$ *и* $\mathbb{F}$ *непрерывно вложены в одно и тоже локально выпуклое пространство* $\mathbb{V}$, *тогда множество* $\mathbb{E}\cap\mathbb{F}$ *является банаховым относительно нормы*

$$\|u\|_{\mathbb{E}\cap\mathbb{F}} \stackrel{\text{def}}{=} \|u\|_e + \|u\|_f. \tag{5.1}$$

Доказательство.

Шаг 1. Проверим, что (5.1) является нормой. Пусть

$$\|u\|_{\mathbb{E}\cap\mathbb{F}} = 0.$$

Тогда $\|u\|_e = 0$ и $\|u\|_f = 0$. Отсюда приходим к выводу, что, с одной стороны, $u = \vartheta_e$ — нуль пространства $\mathbb{E}$, с другой стороны, $u = \vartheta_f$ — нуль пространства $\mathbb{F}$.

Но поскольку оба пространства вложены в одно и тоже локально выпуклое пространство $\mathbb{V}$, то приходим к выводу, что $u = \vartheta_e = \vartheta_f = \vartheta \in \mathbb{V}$.

Шаг 2. Пусть последовательность $\{u_n\} \subset \mathbb{E}\cap\mathbb{F}$ фундаментальна по введённой норме. Тогда, очевидно, она фундаментальна по каждой из норм пространств $\mathbb{E}$ и $\mathbb{F}$ в отдельности. В силу полноты этих пространств приходим к выводу, что

$$u_n \to u_e \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{E}$$

и

$$u_n \to u_f \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{F}.$$

Но поскольку банаховы пространства $\mathbb{E}$ и $\mathbb{F}$ непрерывно вложены в локально выпуклое пространство $\mathbb{V}$, то приходим к выводу, что последовательность $\{u_n\}$ сходится в $\mathbb{V}$ к пределу $u_0 = u_e = u_f$.

Лемма доказана.

2. Сумма банаховых пространств.

Лемма 3. *Пусть банаховы пространства* $\mathbb{E}$ *и* $\mathbb{F}$ *непрерывно вложены в одно и тоже локально выпуклое пространство* $\mathbb{V}$. *Тогда множество*

$$\mathbb{E}+\mathbb{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{u+v \mid u\in\mathbb{E}, v\in\mathbb{F}\}$$

можно превратить в банахово пространство, введя норму

$$\|w\|_{\mathbb{E}+\mathbb{F}} \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{u\in\mathbb{E}, v\in\mathbb{F},\ u+v=w} \max\left(\|u\|_e, \|v\|_f\right). \tag{5.2}$$

Доказательство.

Шаг 1. Пусть

$$\|w\|_{\mathbb{E}+\mathbb{F}} = 0.$$

Тогда из определения (5.2) вытекает, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдутся такие элементы $u_n \in \mathbb{E}$ и $v_n \in \mathbb{F}$, что

$$w = u_n + v_n, \quad \|u_n\|_e < \frac{1}{n} \quad \text{и} \quad \|v_n\|_f < \frac{1}{n}.$$

Отсюда приходим к выводу, что $u_n \to \vartheta_e$ сильно в $\mathbb{E}$, а $v_n \to \vartheta_f$ сильно в $\mathbb{F}$. Но поскольку оба банаховых пространства вложены в одно и тоже локально выпуклое пространство, то $u_n + v_n \to \vartheta = \vartheta_e = \vartheta_f$ в $\mathbb{V}$. Значит, $w = \vartheta$.

Шаг 2. Остальные свойства нормы докажите самостоятельно!

Шаг 3. Докажем теперь полноту пространства $\mathbb{E} + \mathbb{F}$.

Пусть последовательность $\{w_n\} \subset \mathbb{E} + \mathbb{F}$ фундаментальна относительно введённой нормы. Тогда из неё можно выделить такую подпоследовательность $\{w_{n_k}\} \subset \{w_n\}$, что

$$\|w_{n_k} - w_{n_{k-1}}\|_{\mathbb{E}+\mathbb{F}} < 2^{-k} \quad \text{для} \quad k \in \mathbb{N}.$$

По определению нормы найдутся такие последовательности $\{u_k\} \subset \mathbb{E}$ и $\{v_k\} \subset \mathbb{F}$, что

$$w_{n_k} - w_{n_{k-1}} = u_k + v_k, \quad \|u_k\|_e < 2^{1-k}, \quad \|v_k\|_f < 2^{1-k},$$
$$w_{n_0} = u_0 + v_0 \quad \text{для} \quad u_0 \in \mathbb{E}, \quad v_0 \in \mathbb{F}.$$

По построению имеем

$$\sum_{k=1}^{n} u_k \to u = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{E} \quad \text{при} \quad n \to +\infty$$

и

$$\sum_{k=1}^{n} v_k \to v = \sum_{k=1}^{+\infty} v_k \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{F} \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Действительно, имеют место оценки

$$\left\| u - \sum_{k=1}^{n} u_k \right\|_e \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} 2^{1-k} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty$$

и

$$\left\| v - \sum_{k=1}^{n} v_k \right\|_f \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} 2^{1-k} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Положим

$$w = u + v,$$

тогда имеем

$$\|w - w_{n_k}\|_{\mathbb{E}+\mathbb{F}} \leqslant \max\left(\|u - u_{n_k}\|_e, \|v - v_{n_k}\|_f\right) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

т. е. $w_{n_k} \to w$ в $\mathbb{E} + \mathbb{F}$. Осталось воспользоваться результатом задачи 3 дополнительной лекции 1.

Лемма доказана.

3. Декартово произведение банаховых пространств.

Пусть $\mathbb{E}$ и $\mathbb{F}$ — банаховы пространства. Тогда их декартово произведение $\mathbb{E}\times\mathbb{F}$ можно сделать банаховым пространством относительно следующей нормы:

$$\|(u,v)\|_{\mathbb{E}\times\mathbb{F}} := \|u\|_e + \|v\|_f. \tag{5.3}$$

И здесь не нужно условия вложения банаховых пространств $\mathbb{E}$ и $\mathbb{F}$ в локально выпуклое пространство! Проверьте сами.

§ 6. Сопряжённое к пересечению банаховых пространств

Теорема 4. *Пусть банаховы пространства $\mathbb{E}$ и $\mathbb{F}$ непрерывно вложены в локально выпуклое пространство $\mathbb{V}$. Пусть банахово относительно нормы* (5.1) *пространство $\mathbb{E}\cap\mathbb{F}$ плотно вложено в $\mathbb{E}$ и $\mathbb{F}$* (*относительно норм $\mathbb{E}$ и $\mathbb{E}$ соответственно*). *Тогда имеем*

$$(\mathbb{E}\cap\mathbb{F})^* = \mathbb{E}^* + \mathbb{F}^*.$$

Причём равенство понимается в том смысле, что это одно и то же банахово пространство.

Доказательство.

Шаг 1. Сначала докажем, что равенство

$$(\mathbb{E}\cap\mathbb{F})^* = \mathbb{E}^* + \mathbb{F}^*$$

имеет место в смысле равенства множеств.

1. Итак, докажем, что $\mathbb{E}^* + \mathbb{F}^* \subset (\mathbb{E}\cap\mathbb{F})^*$.

□ Действительно, в силу условия теоремы банахово пространство $\mathbb{E}\cap\mathbb{F}$ плотно как в $\mathbb{E}$, так и в $\mathbb{F}$. Поэтому из результата (i) теоремы 3 приходим к выводу, что имеют место вложения

$$\mathbb{E}^* \subset (\mathbb{E}\cap\mathbb{F})^* \quad \text{и} \quad \mathbb{F}^* \subset (\mathbb{E}\cap\mathbb{F})^*,$$

а значит,

$$\mathbb{E}^* + \mathbb{F}^* \subset (\mathbb{E}\cap\mathbb{F})^*. \quad \boxtimes$$

2. Докажем теперь обратное включение:

$$(\mathbb{E}\cap\mathbb{F})^* \subset \mathbb{E}^* + \mathbb{F}^*.$$

□ Введём ряд обозначений. Рассмотрим скобки двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{E}\cap\mathbb{F}$ и $(\mathbb{E}\cap\mathbb{F})^*$

$$\langle f,u\rangle_{e\cap f} \quad \text{для всех} \quad f\in(\mathbb{E}\cap\mathbb{F})^* \quad \text{и} \quad u\in\mathbb{E}\cap\mathbb{F}. \tag{6.1}$$

Заметим, что тогда сопряжённое пространство $(\mathbb{E}\cap\mathbb{F})^*$ — банахово относительно нормы

$$\|f\|_{(\mathbb{E}\cap\mathbb{F})^*} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\|u\|_{\mathbb{E}\cap\mathbb{F}}=1} |\langle f,u\rangle_{e\cap f}|.$$

Теперь рассмотрим декартово произведение банаховых пространств $\mathbb{E} \times \times \mathbb{F}$ и сопряжённое к нему $(\mathbb{E} \times \mathbb{F})^*$ относительно скобок двойственности

$$\langle \mathcal{F}, \mathcal{U} \rangle_{e \times f} \quad \text{для всех} \quad \mathcal{F} \in (\mathbb{E} \times \mathbb{F})^* \quad \text{и} \quad \mathcal{U} \in \mathbb{E} \times \mathbb{F}.$$

Рассмотрим следующее подпространство в декартовом произведении банаховых пространств $\mathbb{E} \times \mathbb{F}$:

$$\mathbb{W} = \{(u, u) \mid u \in \mathbb{E} \cap \mathbb{F}\}.$$

Для заданного $f \in (\mathbb{E} \cap \mathbb{F})^*$ определим функционал $\mathcal{F}$ на $\mathbb{W}$ соотношением

$$\langle \mathcal{F}, \mathcal{U} \rangle_{e \times f} := \langle f, u \rangle_{e \cap f},$$

где $u \in \mathbb{E} \cap \mathbb{F}$ и $\mathcal{U} = (u, u)$.

Проверим, что так введённый функционал $\mathcal{F}$ на подпространстве $\mathbb{W}$ действительно является линейным и непрерывным. Проверим линейность. Справедлива цепочка равенств:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}, \alpha_1 \mathcal{U}_1 + \alpha_2 \mathcal{U}_2 \rangle_{e \times f} &= \langle f, \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \rangle_{e \cap f} = \\ &= \alpha_1 \langle f, u_1 \rangle_{e \cap f} + \alpha_2 \langle f, u_2 \rangle_{e \cap f} = \\ &= \alpha_1 \langle \mathcal{F}, \mathcal{U}_1 \rangle_{e \times f} + \alpha_2 \langle \mathcal{F}, \mathcal{U}_2 \rangle_{e \times f} \quad \forall u_1, u_2 \in \mathbb{E} \cap \mathbb{F} \quad \text{и} \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^1. \end{aligned}$$

Теперь мы должны доказать непрерывность так введённого функционала $\mathcal{F}$. Для этого, как мы знаем (см. лемму 1 лекции 7), достаточно доказать его ограниченность. Поскольку в силу (5.1) и (5.3) норма, индуцированная на $\mathbb{W}$ нормой $\mathbb{E} \times \mathbb{F}$, и норма $\mathbb{E} \cap \mathbb{F}$ в точности совпадают, имеет место цепочка равенств

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}\|_{\mathbb{W}^*} &\stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\|\mathcal{U}\|_{\mathbb{W}}=1} \left| \langle \mathcal{F}, \mathcal{U} \rangle_{e \times f} \right| = \sup_{\|\mathcal{U}\|_{\mathbb{W}}=1} \left| \langle f, u \rangle_{e \cap f} \right| = \\ &= \{\|u\|_{\mathbb{W}} = \|u\|_{\mathbb{E} \cap \mathbb{F}}\} = \sup_{\|u\|_{\mathbb{E} \cap \mathbb{F}}=1} \left| \langle f, u \rangle_{e \cap f} \right| \stackrel{\text{def}}{=} \|f\|_{(\mathbb{E} \cap \mathbb{F})^*} < +\infty. \end{aligned}$$

Таким образом, непрерывность $\mathcal{F}$ доказана. Стало быть, $\mathcal{F} \in \mathbb{W}^*$.

По теореме Хана–Банаха функционал $\mathcal{F}$ можно продолжить с подпространства $\mathbb{W} \subset \mathbb{E} \times \mathbb{F}$ на всё банахово пространство $\mathbb{E} \times \mathbb{F}$ с сохранением нормы. Для удобства продолженный функционал будем обозначать также через $\mathcal{F}$. Причём имеют место равенства

$$\|\mathcal{F}\|_{(\mathbb{E} \times \mathbb{F})^*} = \|\mathcal{F}\|_{\mathbb{W}^*} = \|f\|_{(\mathbb{E} \cap \mathbb{F})^*}.$$

Теперь введём функционалы $g \in \mathbb{E}^*$ и $h \in \mathbb{F}^*$ следующим образом:

$$\langle g, u \rangle_e = \langle \mathcal{F}, (u, \vartheta_f) \rangle_{e \times f}, \quad \langle h, v \rangle_f = \langle \mathcal{F}, (\vartheta_e, v) \rangle_{e \times f} \ \forall u \in \mathbb{E}, v \in \mathbb{F}, \quad (6.2)$$

где ϑ_e — это нулевой элемент банахова пространства $\mathbb{E}$, а ϑ_f — нулевой элемент из $\mathbb{F}$.

Можно проверить, что так определенные функционалы g и h линейны и непрерывны. Заметим, что из определения функционалов g и h (6.2) вытекает цепочка соотношений:

$$\|g\|_{e^*} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\|u\|_e=1} |\langle g, u\rangle_e| = \sup_{\|u\|_e=1} \left|\langle \mathcal{F}, (u, \vartheta_f)\rangle_{e\times f}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\|(u,v)\|_{\mathbb{E}\times\mathbb{F}}=1} \left|\langle \mathcal{F}, (u, v)\rangle_{e\times f}\right| \stackrel{\text{def}}{=} \|\mathcal{F}\|_{(\mathbb{E}\times\mathbb{F})^*} = \|f\|_{(\mathbb{E}\cap\mathbb{F})^*}$$

И аналогичные соотношения для $h \in \mathbb{F}^*$

$$\|h\|_{f^*} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\|v\|_f=1} |\langle h, v\rangle_f| = \sup_{\|v\|_f=1} \left|\langle \mathcal{F}, (\vartheta_e, v)\rangle_{e\times f}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\|(u,v)\|_{\mathbb{E}\times\mathbb{F}}=1} \left|\langle \mathcal{F}, (u, v)\rangle_{e\times f}\right| \stackrel{\text{def}}{=} \|\mathcal{F}\|_{(\mathbb{E}\times\mathbb{F})^*} = \|f\|_{(\mathbb{E}\cap\mathbb{F})^*} .$$

Из этих двух цепочек неравенств получаем, что

$$\max\{\|g\|_{e^*}, \|h\|_{f^*}\} \leqslant \|f\|_{(\mathbb{E}\cap\mathbb{F})^*} .$$

В силу определения функционалов $g \in \mathbb{E}^*$ и $h \in \mathbb{F}^*$ (6.2) получаем, что

$$\langle g, u\rangle_e + \langle h, u\rangle_f = \langle \mathcal{F}, (u, \vartheta_f)\rangle_{e\times f} + \langle \mathcal{F}, (\vartheta_e, u)\rangle_{e\times f} =$$

$$= \langle \mathcal{F}, (u, u)\rangle_{e\times f} = \langle f, u\rangle_{e\cap f} \quad \text{для всех} \quad u \in \mathbb{E}\cap\mathbb{F},$$

но отсюда сразу же получаем, что $f = g + h \in \mathbb{E}^* + \mathbb{F}^*$.

Отсюда, в частности, вытекает неравенство

$$\|f\|_{\mathbb{E}^*+\mathbb{F}^*} \leqslant \max\{\|g\|_{e^*}, \|h\|_{f^*}\} \leqslant \|f\|_{(\mathbb{E}\cap\mathbb{F})^*} . \tag{6.3}$$

Ну и конечно, мы доказали включение

$$(\mathbb{E}\cap\mathbb{F})^* \subset \mathbb{E}^* + \mathbb{F}^*. \quad \boxtimes$$

Шаг 2. Нам осталось доказать, что множества совпадают и как топологические пространства. Для этого нужно доказать, что

$$\|f\|_{\mathbb{E}^*+\mathbb{F}^*} = \|f\|_{(\mathbb{E}\cap\mathbb{F})^*} .$$

В силу (6.3) осталось доказать, что

$$\|f\|_{\mathbb{E}^*+\mathbb{F}^*} \geqslant \|f\|_{(\mathbb{E}\cap\mathbb{F})^*} . \tag{6.4}$$

Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\|f\|_{(\mathbb{E}\cap\mathbb{F})^*} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\|u\|_{\mathbb{E}\cap\mathbb{F}}=1} \left|\langle f, u\rangle_{e\cap f}\right| = \sup_{\|u\|_e+\|u\|_f=1} \left|\langle f, u\rangle_{e\cap f}\right| =$$

$$= \sup_{\|u\|_e+\|u\|_f=1} |\langle g, u\rangle_e + \langle h, u\rangle_f| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\|u\|_e+\|u\|_f=1} [\|g\|_{e^*}\|u\|_e + \|h\|_{f^*}\|u\|_f] \leqslant$$

$$\leqslant \max\left\{\|g\|_{e^*}, \|h\|_{f^*}\right\}.$$

Таким образом, получили неравенство

$$\|f\|_{(\mathbb{E}\cap\mathbb{F})^*} \leqslant \max\left\{\|g\|_{e^*}, \|h\|_{f^*}\right\}.$$

Возьмем от обеих частей этого неравенства infimum по всевозможным $g \in \mathbb{E}^*$, $h \in \mathbb{F}^*$ таким, что $f = g + h$. Тогда получим неравенство

$$\|f\|_{(\mathbb{E}\cap\mathbb{F})^*} \leqslant \inf_{g\in\mathbb{E}^*, h\in\mathbb{F}^*,\ f=g+h} \max\left\{\|g\|_{e^*}, \|h\|_{f^*}\right\} \stackrel{\text{def}}{=} \|f\|_{\mathbb{E}^*+\mathbb{F}^*}.$$

Таким образом, (6.4) доказано. Из (6.3) и (6.4) вытекает равенство норм пространств $\mathbb{E}^* + \mathbb{F}^*$ и $(\mathbb{E} \cap \mathbb{F})^*$. Значит, в силу равенства их как множеств получаем, что они — одно и тоже банахово пространство.

Теорема доказана.

§ 7. Сопряжённое к сумме банаховых пространств

Аналогичный результат справедлив и для $(\mathbb{E} + \mathbb{F})^*$. Именно, справедлива следующая теорема:

Теорема 5. *Пусть банаховы пространства $\mathbb{E}$ и $\mathbb{F}$ непрерывно вложены в локально выпуклое пространство $\mathbb{V}$. Пусть банахово относительно нормы* (5.1) *пространство $\mathbb{E} \cap \mathbb{F}$ плотно вложено в $\mathbb{E}$ и $\mathbb{F}$. Тогда имеем*

$$(\mathbb{E} + \mathbb{F})^* = \mathbb{E}^* \cap \mathbb{F}^*.$$

Причём равенство понимается в том смысле, что это одно и то же банахово пространство.

§ 8. Теорема о равенстве скобок двойственности

Пусть $\mathbb{E}$ и $\mathbb{F}$ — два банаховых пространства и $\mathbb{E}$ рефлексивно, причём $\mathbb{E} \stackrel{ds}{\subset} \mathbb{F}$, т. е. существует такой линейный, инъективный и непрерывный оператор вложения

$$J_{ef} : \mathbb{E} \to \mathbb{F},$$

что $J_{ef}\mathbb{E}$ плотно в $\mathbb{F}$. Таким образом, каждому элементу $u \in \mathbb{E}$ сопоставляется некоторый элемент $v = J_{ef}u$. С другой стороны, для оператора J_{ef} определен транспонированный оператор

$$J_{ef}^t : \mathbb{F}^* \to \mathbb{E}^*,$$

причём в силу теоремы 3 оператор J_{ef}^t является линейным, непрерывным, инъективным, причём $J_{ef}^t\mathbb{F}^*$ плотно в $\mathbb{E}^*$.

Таким образом, каждому элементу $f \in \mathbb{F}^*$ соответствует некоторый элемент $J_{ef}^t f \in \mathbb{E}^*$. По определению транспонированного оператора выполнено равенство:

$$\left\langle J_{ef}^t f, u \right\rangle_e = \langle f, J_{ef} u \rangle_f \quad \text{для всех} \quad u \in \mathbb{E} \quad \text{и} \quad f \in \mathbb{F}^*. \tag{8.1}$$

Однако если мы отождествим $\mathbb{E}$ с его образом в $\mathbb{F}$, т. е. с $J_{ef}\mathbb{E}$, а $\mathbb{F}^*$ отождествим с его образом в $\mathbb{E}^*$, т. е. с $J_{ef}^t \mathbb{F}^*$, то (8.1) можно переписать в более простом виде, как это всегда и делается:

$$\langle f, u \rangle_e = \langle f, u \rangle_f \quad \text{для всех} \quad u \in \mathbb{E} \quad \text{и} \quad f \in \mathbb{F}^*, \tag{8.2}$$

причём имеют место плотные вложения

$$\mathbb{E} \overset{ds}{\subset} \mathbb{F} \quad \text{и} \quad \mathbb{F}^* \overset{ds}{\subset} \mathbb{E}^*. \tag{8.3}$$

Итак, справедлива теорема о равенстве скобок двойственности.

Теорема 6. *Пусть рефлексивное банахово пространство* $\mathbb{E}$ *непрерывно и плотно вложено в банахово пространство* $\mathbb{F}$, *тогда имеет место равенство*

$$\langle f, u \rangle_e = \langle f, u \rangle_f \quad \textit{для всех} \quad u \in \mathbb{E} \quad \textit{и} \quad f \in \mathbb{F}^*. \tag{8.4}$$