Лекция 10

ПРОСТРАНСТВА С. Л. СОБОЛЕВА. ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЙ.

§ 1. Теорема вложений С. Л. Соболева

Теорема 1. *Имеют место непрерывные вложения*:

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega) \quad \textit{при} \quad N > p, \quad p^* = \frac{Np}{N-p},$$

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset \mathbb{C}\left(\overline{\Omega}\right) \quad \textit{при} \quad N < p.$$

В частности, место следующие неравенства: [1]

$$\|u\|_{p^*} \leqslant c\|D_x u\|_p \quad \textit{при} \quad N > p; \tag{1.1}$$

$$\sup_{x\in\Omega} |u(x)| \leqslant c\,(\operatorname{meas}\Omega)^{\frac{1}{N}-\frac{1}{p}}\,\|D_x u\|_p \quad \textit{при} \quad N < p. \tag{1.2}$$

Доказательство.

Шаг 1. Докажем неравенство (1.1) для функций $u(x) \in \mathbb{C}_0^1(\Omega)$. [2] Заметим, что эту функцию можно продолжить нулем вне области $\Omega \subset \subset \mathbb{R}^N$. Прежде всего справедливо неравенство

$$|u(x)| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{x_i} dy_i\, \left|\partial_{x_i} u(x_1, ..., x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, ..., x_N)\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |u(x)| \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^1} dy_i\, \left|D_x u(x_1, ..., x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, ..., x_N)\right|, \quad D_x = (\partial_{x_1}, ..., \partial_{x_N}).$$

$N-$раз перемножим это неравенство и получим следующее

$$|u(x)|^N \leqslant \prod_{i=1}^N \int\limits_{\mathbb{R}^1} dy_i\, \left|D_x u(x_1, ..., x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, ..., x_N)\right|.$$

---

[1] Следующие неравенства есть аналитическая запись свойства непрерывности указанных вложений.

[2] Индекс «0» внизу означает, что носитель произвольной функции из этого класса имеет компактный носитель, принадлежащий Ω.

Теперь возведем обе части этого неравенства в степень $(N-1)^{-1}$ и получим неравенство

$$|u(x)|^{N/(N-1)} \leqslant \left(\prod_{i=1}^{N} \int\limits_{\mathbb{R}^1} dy_i \; |D_x u(x_1, ..., x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, ..., x_N)|\right)^{1/(N-1)}. \tag{1.3}$$

Проинтегрируем обе части этого неравенства по переменной x_1 и тогда получим следующее неравенство:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^1} |u(x)|^{N/(N-1)} \; dx_1 \leqslant \left(\int\limits_{\mathbb{R}^1} dy_1 |D_x u(y_1, x_2, ..., x_N)|\right)^{1/(N-1)} \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^1} dx_1 \prod_{i=2}^{N} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^1} dy_i \; |D_x u(x_1, ..., x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, ..., x_N)|\right)^{1/(N-1)}. \tag{1.4}$$

Шаг 2. Сейчас воспользуемся обобщенным неравенством Гельдера. Действительно, справедливо следующее неравенство:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^1} |f_2(x) \cdots f_N(x)| \; dx_1 \leqslant \|f_2\|_{p_2} \|f_3\|_{p_3} \cdots \|f_N\|_{p_N}, \tag{1.5}$$

где

$$\|f_j\|_{p_j} := \left(\int\limits_{\mathbb{R}^1} |f_j|^{p_j} \; dx_1\right)^{1/p_1}, \quad \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \cdots \frac{1}{p_N} = 1. \tag{1.6}$$

Теперь воспользуемся этим неравенством для того чтобы оценить правую часть неравенства (1.4), положив в обобщенном неравенстве Гельдера (1.5)

$$p_2 = N-1, ..., p_N = N-1, \quad \underbrace{\frac{1}{N-1} + \frac{1}{N-1} + \cdots \frac{1}{N-1}}_{N-1} = 1,$$

а в качестве функций $f_k(x)$ возьмем следующие интегралы:

$$f_k(x_1, ..., x_{k-1}, x_{k+1}, ..., x_N) :=$$

$$= \left(\int\limits_{\mathbb{R}^1} dy_k \, |D_x u(x_1, ..., x_{k-1}, y_k, x_{k+1}, ..., x_N)|\right)^{1/(N-1)}, \quad k = \overline{2, N}.$$

Из выражения (1.4) и обобщенного неравенства Гельдера вытекает цепочка неравенств:

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathbb{R}^1} |u(x)|^{N/(N-1)}\, dx_1 \leqslant \\
&\qquad \leqslant \left(\int\limits_{\mathbb{R}^1} |D_x u(x)|\, dx_1 \right)^{1/(N-1)} \int\limits_{\mathbb{R}^1} f_2(x) f_3(x) \cdots f_N(x)\, dx_1 \leqslant \\
&\leqslant \left(\int\limits_{\mathbb{R}^1} |D_x u(x)|\, dx_1 \right)^{1/(N-1)} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} |D_x u(x)|\, dx_1 dx_2 \right)^{1/(N-1)} \times \cdots \times \\
&\qquad\qquad \times \left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} |D_x u(x)|\, dx_1 dx_N \right)^{1/(N-1)}
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

Теперь проинтегрируем неравенство (1.7) по переменной x_2 и получим следующее неравенство:

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathbb{R}^2} |u(x)|^{N/(N-1)}\, dx_1\, dx_2 \leqslant \left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} |D_x u(x)|\, dx_1 dx_2 \right)^{1/(N-1)} \times \\
&\times \int\limits_{\mathbb{R}^1} dx_2 \left(\int\limits_{\mathbb{R}^1} |D_x u(x)|\, dx_1 \right)^{1/(N-1)} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^1} |D_x u(x)|\, dx_1\, dx_3 \right)^{1/(N-1)} \times \cdots \times \\
&\qquad\qquad \times \left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} |D_x u(x)|\, dx_1 dx_N \right)^{1/(N-1)}.
\end{aligned}
$$

Воспользовавшись опять обобщенным неравенством Гельдера, конкретный вид которого аналогичен неравенству (1.5), получим отсюда неравенство

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathbb{R}^2} |u(x)|^{N/(N-1)}\, dx_1\, dx_2 \leqslant \left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} |D_x u(x)|\, dx_1 dx_2 \right)^{1/(N-1)} \times \\
&\times \left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} |D_x u(x)|\, dx_1 dx_2 \right)^{1/(N-1)} \times \left(\int\limits_{\mathbb{R}^3} |D_x u(x)|\, dx_1 dx_2 dx_3 \right)^{1/(N-1)} \times \cdots \times \\
&\qquad\qquad \times \left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} |D_x u(x)|\, dx_1 dx_2 dx_N \right)^{1/(N-1)}.
\end{aligned}
$$

Продолжая дальше интегрирование по следующей переменной с последующим применением обобщенного неравенства Гельдера, мы в итоге получим следующее неравенство:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{N/(N-1)}\, dx \leqslant \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} dx\, |D_x u(x)| \right)^{N/(N-1)}.$$

Отсюда приходим к следующему неравенству:

$$\|u\|_{N/(N-1)} \leqslant \int\limits_{\Omega} |D_x u|\, dx. \tag{1.8}$$

Следовательно, неравенство (1.1) при $p = 1$ доказано.

Шаг 3. Для доказательства этого неравенства при $p > 1$ вместо функции u в (1.8) надо подставить функцию $|u|^\beta$. Тогда получим неравенство [1])

$$\||u|^\beta\|_{N/(N-1)} \leqslant \beta \int\limits_{\mathbb{R}^N} |u|^{\beta-1}\, |D_x u|\, dx \leqslant$$
$$\leqslant \beta \left\||u|^{\beta-1}\right\|_{p'} \|D_x u\|_p, \quad p' = \frac{p}{p-1}. \tag{1.9}$$

Относительно $\beta > 1$ потребуем, чтобы

$$\beta \frac{N}{N-1} = (\beta - 1)\, \frac{p}{p-1} \Rightarrow \beta = \frac{p(N-1)}{N-p}.$$

Можно доказать, что при $p > 1$ величина $\beta > 1$. Кроме того, для

$$\beta = \frac{p(N-1)}{N-p}$$

имеет место выражения:

$$\beta \frac{N}{N-1} = (\beta - 1)\, \frac{p}{p-1} = p^* := \frac{Np}{N-p} \quad \text{при} \quad N > p.$$

Следовательно, из (1.9) приходим к неравенству:

$$\left(\int\limits_{\Omega} |u(x)|^{p^*}\, dx \right)^{(N-1)/N} \leqslant \beta \left(\int\limits_{\Omega} |u(x)|^{p^*}\, dx \right)^{(p-1)/p} \|D_x u\|_p,$$

из которого сразу же вытекает неравенство (1.1).

[1]) Заметим, что в слабом смысле имеет место равенство $D_x|u|^\beta = \beta|u|^{\beta-2} u D_x u$ при $\beta > 1$.

Шаг 4. Приступим теперь к доказательству неравенства (1.2). Область Ω будем считать ограниченной. В неравенстве (1.9) перейдем от функции $u(x)$ к функции $\overline{u}(x)$, связанной с $u(x)$ выражением

$$\overline{u}(x) = \frac{u(x)}{\|D_x u\|_p}. \tag{1.10}$$

После подстановки получим следующее неравенство:

$$\||D_x u\|_p^\beta \||\overline{u}|^\beta\|_{N'} \leqslant \beta \||D_x u|\|_p \|D_x u\|_p^{\beta-1} \||\overline{u}|^{\beta-1}\|_{p'}, \quad N' = \frac{N}{N-1}.$$

Откуда сразу же приходим к неравенству

$$\||\overline{u}|^\beta\|_{N'} \leqslant \beta \||\overline{u}|^{\beta-1}\|_{p'}, \tag{1.11}$$

которое для удобства перепишем в следующем виде:

$$\left(\int\limits_\Omega |\overline{u}|^{\beta N'}\,dx\right)^{1/N'} \leqslant \beta \left(\int\limits_\Omega |\overline{u}|^{p'(\beta-1)}\,dx\right)^{1/p'}.$$

Следовательно, получим следующее неравенство:

$$\|\overline{u}\|_{\beta N'}^\beta \leqslant \beta \|\overline{u}\|_{p'(\beta-1)}^{\beta-1} \Rightarrow \|\overline{u}\|_{\beta N'} \leqslant \beta^{1/\beta} \|\overline{u}\|_{p'(\beta-1)}^{1-1/\beta}. \tag{1.12}$$

Шаг 5. Теперь сделаем важное предположение, от которого мы затем в конце доказательства избавимся — пусть

$$|\Omega| = 1. \text{ [1]}$$

Полезность этого предположения заключается в том, что если $p_1 > p_2$, то справедливо неравенство

$$\|v\|_{p_2} \leqslant \|v\|_{p_1} \quad \text{для всех} \quad v(x) \in L^{p_1}(\Omega).$$

□ Действительно, справедлива цепочка неравенств:

$$\left(\int\limits_\Omega |u|^{p_2}\,dx\right)^{1/p_2} = \left(\int\limits_\Omega 1 \cdot |u|^{p_2}\,dx\right)^{1/p_2} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\left(\int\limits_\Omega 1^{q'}\,dx\right)^{1/q'} \left(\int\limits_\Omega |u|^{p_1}\,dx\right)^{p_2/p_1}\right)^{1/p_2} = \left(\int\limits_\Omega |u|^{p_1}\,dx\right)^{1/p_1},$$

где

$$q' = \frac{q}{q-1}, \quad q = \frac{p_1}{p_2}.$$

[1] Символом $|\Omega|$ мы обозначили меру Лебега множества Ω.

С учетом этого предположения из неравенства (1.12) получим

$$\|\overline{u}\|_{\beta N'} \leqslant \beta^{1/\beta} \|\overline{u}\|^{1-1/\beta}_{p'\beta}, \tag{1.13}$$

здесь мы воспользовались очевидным неравенством $p^{'}(\beta - 1) \leqslant p^{'}\beta$.

Шаг 7. Теперь введем обозначение:

$$\varepsilon := \frac{N^{'}}{p^{'}} > 1, \quad \beta = \varepsilon^m,$$

поскольку $p > N$. Отсюда сразу же приходим к равенству.

$$\beta p^{'} = \varepsilon^{m-1} N^{'}.$$

Из (1.13) вытекает неравенство следующее:

$$\|\overline{u}\|_{\varepsilon^m N'} \leqslant \varepsilon^{m/\varepsilon^m} \|\overline{u}\|^{1-1/\varepsilon^m}_{\varepsilon^{m-1}N'} \quad \text{при} \quad m = 1, 2, ... \tag{1.14}$$

Возьмем в этом неравенстве $m = 1$ и получим оценку

$$\|\overline{u}\|_{N'\varepsilon} \leqslant \varepsilon^{1/\varepsilon} \|\overline{u}\|^{1-1/\varepsilon}_{N'}. \tag{1.15}$$

Шаг 8. С другой стороны, из неравенства (1.8) и нашего предположения, что $|\Omega| = 1$, получим неравенства

$$\|u\|_{N'} \leqslant \|Du\|_1 \leqslant \|Du\|_p.$$

Отсюда с учетом (1.10) сразу же приходим к неравенству

$$\|\overline{u}\|_{N'} \leqslant 1.$$

Значит из (1.15) приходим к неравенству:

$$\|\overline{u}\|_{N'\varepsilon} \leqslant \varepsilon^{1/\varepsilon}. \tag{1.16}$$

Тогда после подстановки этого неравенства в (1.14) при $m = 2$ получим

$$\|\overline{u}\|_{N'\varepsilon^2} \leqslant \varepsilon^{2/\varepsilon^2} \left(\varepsilon^{1/\varepsilon}\right)^{1-1/\varepsilon^2} \leqslant \varepsilon^{2/\varepsilon^2 + 1/\varepsilon}, \quad \varepsilon > 1.$$

Тогда после подстановки этого неравенства в (1.14) при $m = 3$ получим

$$\|\overline{u}\|_{N'\varepsilon^3} \leqslant \varepsilon^{3/\varepsilon^3} \left(\varepsilon^{2/\varepsilon^2 + 1/\varepsilon}\right)^{1-1/\varepsilon^2} \leqslant \varepsilon^{3/\varepsilon^3 + 2/\varepsilon^2 + 1/\varepsilon}.$$

Следовательно, на m—том шаге мы получим неравенство

$$\|\overline{u}\|_{N'\varepsilon^m} \leqslant \varepsilon^{\sum\limits_{k=1}^{m} k/\varepsilon^k} \leqslant a := \varepsilon^{\sum\limits_{k=1}^{+\infty} k/\varepsilon^k}, \quad \varepsilon > 1.$$

Перейдя к пределу при $m \to +\infty$, получим неравенство

$$\|\overline{u}\|_{\infty} \leqslant a.$$

Отсюда с учетом определения функции $\overline{u}(x)$ получим неравенство:

$$\sup_{x\in\Omega} |u(x)| \leqslant a\|D_x u\|_p.$$

Шаг 9. Теперь избавимся от требования $|\Omega| = 1$. Сделаем замену переменной

$$y_i = |\Omega|^{1/N} x_i \quad i = \overline{1, N}.$$

Справедлива следующая цепочка выражений:

$$\sup_{x\in\Omega} |u(x)| \leqslant a \left(\int\limits_{\Omega} |D_x u|^p \, dx \right)^{1/p} =$$

$$= a \left(\int\limits_{\Omega} \frac{|\Omega|^{p/N}}{|\Omega|} \, |D_y u|^p \; dy \right)^{1/p} =$$

$$= a|\Omega|^{1/N-1/p}\|D_x u\|_p.$$

Шаг 10. Мы доказали наши неравенства для случая функции $u(x) \in \mathbb{C}^1_0(\Omega)$. Теперь нужно продолжить эти результаты для функций из $W_0^{1,p}(\Omega)$. Рассмотрим неравенство (1.1), поскольку неравенство (1.2) рассматривается аналогичным образом.

Пусть последовательность

$$\{u_m\} \subset \mathbb{C}^1_0(\Omega)$$

такова, что она сходится сильно к $u(x)$ в $W_0^{1,p}(\Omega)$. Возьмем $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ и применим неравенство (1.1) к разности $u_{m_1} - u_{m_2}$ и получим

$$\|u_{m_1} - u_{m_2}\|_{p^*} \leqslant c \left\| D_x u_{m_1} - D_x u_{m_2} \right\|_p , \quad p^* = \frac{Np}{N-p}. \tag{1.17}$$

Поскольку последовательность $\{u_m\}$ сходится в $W_0^{1,p}(\Omega)$, то она фундаментальна в этом пространстве, следовательно, из неравенства (1.17) вытекает, что эта последовательность фундаментальна и в $L^{p^*}(\Omega)$ и в силу полноты этого пространства сходится сильно к тому же элементу $u(x) \in L^{p^*}(\Omega)$.

Таким образом, мы можем перейти к пределу при $m_1 \to +\infty$ в неравенстве (1.17) и получить следующее неравенство:

$$\|u - u_{m_2}\|_{p^*} \leqslant c \left\| D_x u - D_x u_{m_2} \right\|_p . \tag{1.18}$$

Тем самым, отсюда вытекает неравенство

$$\|u\|_{p^*} \leqslant \|u_{m_2}\|_{p^*} + \|u - u_{m_2}\|_{p^*} \leqslant c\|D_x u_{m_2}\|_p + c\|D_x u - D_x u_{m_2}\|_p,$$

в котором можно перейти к пределу при $m_2 \to +\infty$ и, воспользовавшись очевидным неравенством

$$|\|D_x u_{m_2}\|_p - \|D_x u\|_p| \leqslant \|D_x u - D_x u_{m_2}\|_p,$$

получить следующее неравенство:

$$\|u\|_{p^*} \leqslant c\|D_x u\|_p \quad \text{для всех} \quad u(x) \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Как мы уже говорили, неравенство (1.2) распространяется на функции из $W_0^{1,p}(\Omega)$ аналогичным образом.

Теорема доказана.

§ 2. Теорема Реллиха–Кондрашова

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — это ограниченная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$.

Теорема 2. *Имеет место вполне непрерывное вложение*: [1)]

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \textit{при} \quad p < N \tag{2.1}$$

для всех $q \in [1, p^*)$.

Доказательство.

Шаг 1. Заметим, что в силу неравенства (1.1) теоремы вложения 1 в случае $p < N$ и ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ имеет место непрерывное вложение $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ при $q \in [1, p^*)$.

Шаг 2. В силу неравенства (1.1) нам достаточно доказать, что для всякой последовательности $\{u_m(x)\}$, ограниченной в $W_0^{1,p}(\Omega)$, найдется подпоследовательность $\{u_{m_m}(x)\}$, сходящаяся сильно в $L^q(\Omega)$. Причем в предположении гладкости границы $\partial\Omega$ можно построить продолжение функций $\{u_m\}$ нулем на все пространство $\mathbb{R}^N$ таким образом, чтобы при этом

$$\{u_m(x)\} \subset W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Продолженные функции будем обозначать также через $u_m(x)$.

Шаг 3. Итак, пусть последовательность $\{u_m(x)\}$ ограничена в $W_0^{1,p}(\Omega)$. В частности, можно предположить, что

$$\sup_m \|D_x u_m\|_p \leqslant c < +\infty. \tag{2.2}$$

Рассмотрим срезку последовательности $\{u_m(x)\}$:

$$u_m^\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^N} \int\limits_\Omega dy\, \omega\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) u_m(y)\, dy, \tag{2.3}$$

[1)] Непрерывное и компактное вложение (линейный инъективный оператор) называется вполне непрерывным.

где $\omega(z)$ — это «шапочка». Без ограничения общности будем предполагать, что область Ω содержит шар единичного радиуса с центром в начале координат.

Шаг 4. Докажем, что

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_q \leqslant c\varepsilon,$$

где $c > 0$ — не зависит от ε и от m. Для удобства сделаем в (2.3) замену переменной

$$z_i = \frac{x_i - y_i}{\varepsilon} \quad i = \overline{1, N}.$$

После этой подстановки мы придем к следующему равенству:

$$u_m^\varepsilon(x) = \int\limits_\Omega \omega(z) u_m(x - \varepsilon z)\, dz.$$

Теперь учтем, что

$$\int\limits_\Omega \omega(z)\, dz = 1, \quad \operatorname{supp}\{\omega(z)\} = \{|z| \leqslant 1\} \subset \Omega.$$

Заметим, что справедливо следующее равенство:

$$\frac{d}{dt} u(y_1, ..., y_N) = \\ = \frac{\partial u_m(y)}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial t} + \cdots + \frac{\partial u_m(y)}{\partial y_N}\frac{\partial y_N}{\partial t} = -\varepsilon(z, D_y) u_m(y), \quad (2.4)$$

где

$$y = (y_1, ..., y_N), \quad y_k = x_k - \varepsilon t z_k.$$

Тогда сразу же получим следующая цепочка равенств:

$$u_m^\varepsilon(x) - u_m(x) = \int\limits_{|z|\leqslant 1} \omega(z)\left[u_m(x - \varepsilon z) - u_m(x)\right]\, dz = \\ = \int\limits_{|z|\leqslant 1} dz \omega(z) \int\limits_0^1 dt\, \frac{du_m(x - \varepsilon t z)}{dt} = \\ = -\varepsilon \int\limits_{|z|\leqslant 1} dz \omega(z) \int\limits_0^1 dt\ (z, D_y)\, u_m(x - \varepsilon z t),$$

где в конце цепочки равенств мы воспользовались полученным выше равенством (2.4). Следовательно, справедлива следующая оценка:

$$\int\limits_{\Omega} |u_m^\varepsilon(x) - u_m(x)|\, dx \leqslant \varepsilon \int\limits_{|z|\leqslant 1} dz \omega(z)|z| \int\limits_0^1 dt \int\limits_{\Omega} dx\, |D_y u_m(y)| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon c_1 \int\limits_{\mathbb{R}^N} dx\, |D_y u_m(y)| = \varepsilon c_1 \int\limits_{\mathbb{R}^N} dy\, |D_y u_m(y)| =$$

$$= c_1 \varepsilon \|D_x u_m\|_1 \leqslant c_2 \varepsilon \|D_x u_m\|_p \leqslant c_3 \varepsilon, \quad (2.5)$$

поскольку выполнено неравенство (2.2).

Шаг 5. Теперь воспользуемся интерполяционным неравенством для пространств Лебега. Справедливо неравенство,

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_q \leqslant \|u_m^\varepsilon - u_m\|_1^\vartheta \|u_m^\varepsilon - u_m\|_{p^*}^{1-\vartheta}, \quad \frac{1}{q} = \vartheta + \frac{1-\vartheta}{p^*} \quad (2.6)$$

при $\vartheta \in (0,1]$. Здесь остановимся. Условие, что $\vartheta > 0$ нам нужно для дальнейшего (случай $\vartheta = 0$ нам не подходит). Но это означает, что $q \in [1, p^*)$!!! Теперь воспользуемся неравенством (1.1) и получим неравенства

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{p^*} \leqslant \|D_x u_m^\varepsilon - D_x u_m\|_p \leqslant$$

$$\leqslant c_4 \max\{\|D_x u_m^\varepsilon\|_p, \|D_x u_m\|_p\} \leqslant$$

$$\leqslant c_5 \|D_x u_m\|_p \leqslant c_5 \sup_m \|D_x u_m\|_p \leqslant c_6 < +\infty.$$

Тогда из (2.6) и (2.5) получим неравенство

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_q \leqslant c_6^{1-\vartheta} \|u_m^\varepsilon - u_m\|_1^\vartheta \leqslant c_7 \varepsilon^\vartheta, \quad (2.7)$$

где $c_7 > 0$ не зависит от ε и от m.

Шаг 6. Докажем теперь, что последовательность $\{u_m^\varepsilon\}$ для каждого фиксированного $\varepsilon > 0$ является *равномерно ограниченной* и *равностепенно непрерывной*. Действительно, имеют место следующие неравенства:

$$|u_m^\varepsilon(x)| \leqslant \frac{1}{\varepsilon^N} \int\limits_{\Omega} dy \left|\omega\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)\right| |u_m(y)| \leqslant \frac{1}{\varepsilon^N} \|\omega(z)\|_\infty \|u_m\|_1 \leqslant \frac{c_8}{\varepsilon^N},$$

$$|D_x u_m^\varepsilon| \leqslant \frac{1}{\varepsilon^N} \int\limits_{\Omega} dy \left|\omega\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)\right| |D_x u_m| \leqslant \frac{1}{\varepsilon^N} \|\omega(z)\|_\infty \|D_x u_m\|_1 \leqslant \frac{c_9}{\varepsilon^N},$$

что выполнено в силу следующей цепочки неравенств (см. (2.2)):

$$\|u_m\|_1 \leqslant c_1 \|u_m\|_{p^*} \leqslant c_2 c_3 \|D_x u_m\|_p \leqslant c_2 c_3 \sup_m \|D_x u_m\|_p \leqslant c_4 < +\infty,$$

$$\|D_x u_m\|_1 \leqslant c_5 \|D_x u_m\|_p \leqslant c_5 \sup_m \|D_x u_m\|_p \leqslant c_6.$$

Из этих неравенств вытекают следующие свойства последовательности $\{u^\varepsilon_m\}$:

$$\sup_{x\in\Omega}|u^\varepsilon_m(x)| \leqslant \frac{c_8}{\varepsilon^N}, \tag{2.8}$$

$$|u^\varepsilon_m(x) - u^\varepsilon_m(y)| \leqslant \sup_{x\in\Omega}|D_x u^\varepsilon_m|\,|x-y| \leqslant \frac{c_9}{\varepsilon^N}|x-y|, \tag{2.9}$$

где $c_8, c_9 > 0$ не зависят от m. Неравенства (2.8) и (2.9) означают, что для каждого фиксированного $\varepsilon > 0$ последовательность $\{u^\varepsilon_m(x)\}$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна в пространстве $\mathbb{C}(\overline{\Omega})$, следовательно, согласно теореме Асколи–Арцела существует равномерно на $\overline{\Omega}$ сходящаяся подпоследовательность $\left\{u^\varepsilon_{m_n}(x)\right\}$.

Шаг 7. Пусть теперь $\delta > 0$ — это произвольное фиксированное число. Тогда подберем $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы в (2.7)

$$c_7\varepsilon < \frac{\delta}{3},$$

т. е. чтобы имело место неравенство

$$\|u^\varepsilon_{m_n} - u_{m_n}\|_q \leqslant \frac{\delta}{3}. \tag{2.10}$$

В силу равномерной сходимости последовательности $\{u^\varepsilon_{m_n}(x)\}$ на $\overline{\Omega}$ — эта последовательность равномерно фундаментальна:

$$\sup_{x\in\Omega}\left|u^\varepsilon_{m_i}(x) - u^\varepsilon_{m_j}(x)\right| \leqslant \frac{1}{c_{10}}\frac{\delta}{3}$$

при достаточно больших $i, j \in \mathbb{N}$. Но тогда отсюда мы приходим к неравенству

$$\|u^\varepsilon_{m_i}(x) - u^\varepsilon_{m_j}(x)\|_q \leqslant c_{10}\sup_{x\in\Omega}\left|u^\varepsilon_{m_i}(x) - u^\varepsilon_{m_j}(x)\right| \leqslant \frac{\delta}{3}. \tag{2.11}$$

Следовательно, из неравенств (2.10) и (2.11) вытекает цепочка неравенств:

$$\begin{aligned}\|u_{m_i} - u_{m_j}\|_q \leqslant \|u_{m_i} - u^\varepsilon_{m_i}\|_q + \|u_{m_j} - u^\varepsilon_{m_j}\|_q +\\ + \|u^\varepsilon_{m_i} - u^\varepsilon_{m_j}\|_q \leqslant \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} = \delta.\end{aligned} \tag{2.12}$$

Шаг 8. Теперь возьмем в неравенстве (2.12) величину δ как

$$\delta = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...$$

и выберем такую подпоследовательность $\{u_{m_m}(x)\}$, что для нее

$$\lim_{l,n\to+\infty}\|u_{m_l} - u_{m_n}\|_q = 0,$$

т. е. построим фундаментальную последовательность в $L^q(\Omega)$, которая в силу полноты этого пространства сходится сильно в нем.

Теорема доказана.

§ 3. Неравенство Морри

Теорема 3. *Для функций* $u(x) \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$ *имеет место неравенство*: [1])

$$|u|_\lambda \leqslant c\|u\|_{1,p} \quad \text{при} \quad N < p \quad \text{и} \quad \lambda = 1 - \frac{N}{p}. \tag{3.1}$$

Доказательство.

Шаг 1. Сначала докажем неравенство Мори для функций из

$$\mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R}^N) \cap W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right).$$

И прежде всего докажем следующее неравенство:

$$\frac{1}{R^N} \int\limits_{B(R,x)} |u(x) - u(y)|\, dy \leqslant c \int\limits_{B(R,x)} \frac{|D_y u(y)|}{|x-y|^{N-1}}\, dy, \tag{3.2}$$

где

$$B(R,x) \equiv \left\{y \in \mathbb{R}^N : \ |y - x| \leqslant R\right\}.$$

□ Итак, рассмотрим произвольную точку на границе единичного с центром в начале координат:

$$z \in \partial B(0,1) \Rightarrow |z| = 1.$$

Для каждой такой точки справедливо следующее равенство:

$$u(x + rz) - u(x) = \int\limits_0^r dt \frac{d}{dt} u(x + tz) \quad \text{при} \quad 0 \leqslant r \leqslant R,$$

из которого вытекает неравенство (при $y = x + tz$)

$$|u(x + rz) - u(x)| \leqslant \int\limits_0^r dt\, |(z, D_y)\, u(x + tz)| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^r dt |z|\, |D_y u(x + tz)| = \int\limits_0^r dt\, |D_y u(x + tz)|.$$

Теперь проинтегрируем по $z \in \partial B(0,1)$ последнее неравенство и получим

$$\int\limits_{\partial B(0,1)} |u(x + rz) - u(x)|\, dS_z \leqslant \int\limits_0^r \int\limits_{\partial B(0,1)} dt dS_z\, |D_y u(x + tz)|.$$

[1]) По поводу используемых обозначений смотри вторую лекцию.

Введем точку $y = x + tz$ при $t \geqslant 0$. Очевидно, что тогда $t = |x - y|$. Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\int\limits_{\partial B(0,1)} |u(x+rz) - u(x)|\, dS_z \leqslant \int\limits_0^r \int\limits_{\partial B(0,1)} dt\, dS_z \frac{t^{N-1}}{t^{N-1}} |D_y u(x+tz)| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{B(x,r)} dy \frac{1}{|x-y|^{N-1}} |D_y u(y)| \leqslant \int\limits_{B(x,R)} dy \frac{1}{|x-y|^{N-1}} |D_y u(y)|\,. \quad (3.3)$$

Теперь умножим обе части последнего неравенства на r^{N-1} и проинтегрируем его по $r \in (0, R)$, тогда получим неравенство

$$\int\limits_0^R dr\, r^{N-1} \int\limits_{\partial B(0,1)} |u(x+rz) - u(x)|\, dS_z \leqslant$$

$$\leqslant \frac{R^N}{N} \int\limits_{B(x,R)} dy \frac{1}{|x-y|^{N-1}} |D_y u(y)|\,. \quad (3.4)$$

Итак, неравенство (3.2) доказано. ⊠

Шаг 2. Справедливо неравенство

$$|u(x)| \leqslant |u(x) - u(y)| + |u(y)|. \quad (3.5)$$

Из неравенства (3.4) вытекает следующее неравенство:

$$\frac{1}{|B(x,1)|} \int\limits_{B(x,1)} |u(y) - u(x)|\, dy \leqslant c \int\limits_{B(x,1)} \frac{|D_y u(y)|}{|x-y|^{N-1}}\, dy \quad (3.6)$$

Проинтегрируем по шару $B(x, 1)$ неравенство (3.5), тогда с учетом (3.6) получим неравенство

$$|u(x)| \leqslant c \int\limits_{B(x,1)} \frac{|D_y u(y)|}{|x-y|^{N-1}}\, dy + \frac{1}{|B(x,1)|} \int\limits_{B(x,1)} |u(y)|\, dy. \quad (3.7)$$

С одной стороны, в силу неравенства Гельдера справедливы следующие неравенства:

$$\frac{1}{|B(x,1)|} \int\limits_{B(x,1)} |u(y)|\, dy \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{|B(x,1)|} |B(x,1)|^{1/p'} \left(\int\limits_{B(x,1)} |u|^p\, dy \right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{|B(x,1)|^{1/p}}\|u\|_p = c\|u\|_p, \quad (3.8)$$

где постоянная $c > 0$ не зависит от $x \in \mathbb{R}^N$. С другой стороны, в силу неравенства Гельдера имеем

$$\int\limits_{B(x,1)} \frac{|D_y u(y)|}{|x-y|^{N-1}}\,dy \leqslant \left(\int\limits_{B(x,1)} |D_y u(y)|^p\,dy\right)^{1/p} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{B(x,1)} \frac{1}{|x-y|^{(N-1)p'}}\,dy\right)^{1/p'}.$$

Оценим последний интеграл:

$$\int\limits_{B(x,1)} \frac{1}{|x-y|^{(N-1)p'}}\,dy = c\int\limits_0^1 \frac{r^{N-1}}{r^{(N-1)p'}}\,dr =$$

$$= c\int\limits_0^1 \frac{1}{r^{\alpha}}\,dr < +\infty, \quad \alpha = (N-1)(p^{'}-1) = \frac{N-1}{p-1} < 1,$$

поскольку $N < p$. Следовательно, мы пришли к неравенству

$$\int\limits_{B(x,1)} \frac{|D_y u(y)|}{|x-y|^{N-1}}\,dy \leqslant c\|D_x u\|_p. \quad (3.9)$$

Из неравенств (3.7), (3.8) и (3.9) получим следующее неравенство:

$$|u(x)| \leqslant c\|u\|_{1,p}$$

и в силу неравенства (1.3) отсюда сразу же получаем

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^N} |u(x)| \leqslant c\|u\|_{1,p}. \quad (3.10)$$

Шаг 3. Теперь пусть $x, y \in \mathbb{R}^N$ — это произвольные фиксированные точки и рассмотрим шары радиуса $R = |x-y|$ с центрами в этих точках:

$$B(x,R) \quad \text{и} \quad B(y,R).$$

Очевидно, они пересекаются. Введем множество

$$U := B(x,R) \cap B(y,R).$$

Справедливо очевидное неравенство

$$|u(x) - u(y)| \leqslant |u(x) - u(z)| + |u(y) - u(z)|.$$

Умножим обе части этого равенства на $|U|^{-1}$ и проинтегрируем по переменной $z \in U$. Получим неравенство

$$|u(x) - u(y)| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{|U|} \int\limits_U |u(x) - u(z)|\, dz + \frac{1}{|U|} \int\limits_U |u(y) - u(z)|\, dz. \quad (3.11)$$

Воспользуемся теперь равенством

$$|U| = c_1 R^N,$$

где постоянная $c_1 > 0$ зависит от R и от $x, y \in \mathbb{R}^N$. И тогда из (3.11) получим следующее неравенство:

$$|u(x) - u(y)| \leqslant \frac{1}{c_2\,|B(x,R)|} \int\limits_{B(x,R)} |u(x) - u(z)|\, dz +$$
$$+ \frac{1}{c_2\,|B(y,R)|} \int\limits_{B(y,R)} |u(y) - u(z)|\, dz. \quad (3.12)$$

Шаг 4. Рассмотрим, например, первое слагаемое в правой части неравенства (3.12). В силу оценки (3.2) справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\frac{1}{|B(x,R)|} \int\limits_{B(x,R)} |u(x) - u(z)|\, dz \leqslant \frac{c}{R^N} \int\limits_{B(x,R)} |u(x) - u(z)|\, dz \leqslant$$
$$\leqslant c \int\limits_{B(x,R)} \frac{|D_z u(z)|}{|x - z|^{N-1}}\, dz \leqslant c \left(\int\limits_{B(x,R)} |D_z u(z)|^p\, dz \right)^{1/p} \times$$
$$\times \left(\int\limits_{B(x,R)} \frac{1}{|x - z|^{(N-1)p'}}\, dz \right)^{1/p'} \leqslant c \|D_z u\|_p \left(\int\limits_0^R \frac{r^{N-1}}{r^{(N-1)p'}}\, dr \right)^{1/p'} \leqslant$$
$$\leqslant c R^\lambda \|D_z u\|_p \leqslant c|x - y|^\lambda \|D_z u\|_p \quad \lambda = 1 - \frac{N}{p}.$$

Шаг 5. Таким образом, из (3.12) получим неравенство

$$|u(x) - u(y)| \leqslant c|x - y|^\lambda \|D_z u\|_p \quad \lambda = 1 - \frac{N}{p}, \quad (3.13)$$

т.е.

$$[u]_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x,y \in \mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\lambda} \leqslant c\|D_z u\|_p.$$

Отсюда и из (3.10) вытекает утверждение теоремы для функций $u(x) \in \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R}^N) \cap W^{1,p}(\Omega)$.

Шаг 6. Продолжим неравенство Морри на функции из класса $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Пересечение $\mathbb{C}^1(\mathbb{R}^N) \bigcap W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ плотно в $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Поэтому для любого $u(\text{ч}) \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ найдется сходящаяся в $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ последовательность $\{u_m\} \subset \mathbb{C}^1(\mathbb{R}^N) \bigcap W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Возьмем произвольные натуральные числа $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ и применим неравенство Морри к разности $u_{m_1} - u_{m_2}$:

$$|u_{m_1} - u_{m_2}|_\lambda \leqslant c\|u_{m_1} - u_{m_2}\|_{1,p}. \tag{3.14}$$

Отсюда сразу же получаем, что последовательность $\{u_m\} \subset \mathbb{C}^\lambda(\mathbb{R}^N)$ является фундаментальной в $\mathbb{C}^\lambda(\mathbb{R}^N)$. Следовательно,

$$u_m \to u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{C}^\lambda(\mathbb{R}^N).$$

Теперь перейдем в неравенстве (3.14) к пределу при $m_1 \to +\infty$ и получим неравенство

$$|u - u_{m_2}|_\lambda \leqslant c\|u - u_{m_2}\|_{1,p}.$$

Но тогда имеет место неравенство

$$|u|_\lambda \leqslant |u - u_{m_2}|_\lambda + |u_{m_2}|_\lambda \leqslant c\|u - u_{m_2}\|_{1,p} + c\|u_{m_2}\|_{1,p}.$$

Заметим, что

$$|\|u_{m_2}\|_{1,p} - \|u\|_{1,p}| \leqslant \|u - u_{m_2}\|_{1,p}.$$

Отсюда получаем, что

$$\|u_{m_2}\|_{1,p} \to \|u\|_{1,p} \quad \text{при} \quad m_2 \to +\infty.$$

Теперь перейдем к пределу при $m_2 \to +\infty$ и получим неравенство Морри, но уже для функций из $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Теорема доказана.