Лекция 6. Пространства обобщенных функций. Продолжение

Корпусов Максим Олегович, Панин Александр Анатольевич

Курс лекций по линейному функциональному анализу

28 марта 2012 г.

Теорема

Теорема

Пусть $f^* \in \mathcal{D}'\left(\mathbb{R}^N\right)$ *— это произвольное распределение. Тогда найдется такой компакт* $\mathrm{K} \subset \mathbb{R}^N$, *такой мультииндекс* $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ *и такая непрерывная функция* $f(x) \in \mathbb{C}\left(\mathbb{R}^N\right)$, *что имеет место представление*

$$\langle f^*, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x) \partial^\alpha \varphi(x)\, dx \quad \text{для всех} \quad \varphi \in (\mathcal{D}(\mathrm{K}), \tau_{\mathrm{K}}), \tag{1}$$

где $\alpha = (n+2, n+2, ..., n+2)$.

Доказательство-1

Без ограничения общности можно считать, что компакт $\mathbb{K} \subset \mathrm{Q}$, где

$$\mathrm{Q} \equiv \left\{x \in \mathbb{R}^N :\ 0 \leqslant x_k \leqslant 1,\ k = \overline{1, N}\right\}.$$

Для всякой функции $\psi(x) \in (\mathcal{D}(Q), \tau_{\mathrm{Q}})$ справедлива следующая формула среднего значения:

$$|\psi(x)| \leqslant \max_{x \in \mathrm{Q}} \left|\partial_{x_i} \psi(x)\right|. \tag{2}$$

Введем оператор:

$$\partial \equiv \partial_{x_1} \partial_{x_2} \cdots \partial_{x_N}.$$

Доказательство-2

Для любой функции $\psi(x) \in (\mathcal{D}(\mathrm{Q}), \tau_{\mathrm{Q}})$ имеет место следующее представление:

$$\psi(x) = \int\limits_0^{x_1} dy_1 \int\limits_0^{x_2} dy_2 \cdots \int\limits_0^{x_N} dy_N \partial_{y_1} \partial_{y_2} \cdots \partial_{y_N} \psi(y) =$$

$$= \int\limits_0^{x_1} dy_1 \int\limits_0^{x_2} dy_2 \cdots \int\limits_0^{x_N} dy_N \partial_y \psi(y). \quad (3)$$

Напомним, что на локально выпуклом пространстве $(\mathcal{D}(\mathrm{K}), \tau_{\mathrm{K}})$ топология τ_{K} определяется счетной системой норм:

$$\|\psi\|_n \equiv \max_{|\alpha| \leqslant n} \sup_{x \in \mathrm{K}} |\partial^\alpha \psi(x)| \, .$$

Доказательство-3

Из (3) вытекает равенство

$$\partial^\alpha \psi(x) = \int\limits_0^{x_1} dy_1 \int\limits_0^{x_2} dy_2 \cdots \int\limits_0^{x_N} dy_N \partial_y \partial_y^\alpha \psi(y)\, dy. \qquad (4)$$

Действительно, достаточно в формуле (3) взять вместо функции $\psi(y)$ функцию $\partial_y^\alpha \psi(y)$.
Отсюда и из формулы (2) получаем неравенство

$$\|\psi\|_n \leqslant \int\limits_{\mathrm{Q}} \left|\partial^{n+1}\psi(y)\right| dy, \qquad (5)$$

которое справедливо для всех $\psi(x) \in \mathcal{D}(\mathrm{Q})$. С другой стороны, для любого распределения $f^* \in \mathcal{D}^{'}$ найдется такое $n \in \mathbb{N}$ и такое число $\mathrm{M} > 0$, что имеет место неравенство

$$|\langle f^*, \varphi\rangle| \leqslant M\|\varphi\|_n \quad \text{для всех} \quad \varphi(x) \in (\mathcal{D}(\mathrm{K}), \tau_{\mathrm{K}})\,.$$

Поэтому отсюда и из (5) получим следующее неравенство:

$$|\langle f^*, \varphi\rangle| \leqslant \mathrm{M} \int\limits_{\mathrm{K}} \left|\partial^{n+1}\varphi(x)\right| \, dx \text{ для всех } \varphi(x) \in (\mathcal{D}(\mathrm{K}), \tau_{\mathrm{K}}) \subset (\mathcal{D}(\mathrm{Q}), \tau \tag{6}$$

Теперь заметим, что оператор дифференцирования ∂^β, как мы уже отмечали, действует инъективно из $(\mathcal{D}(\mathrm{K}), \tau_{\mathrm{K}})$ в $(\mathcal{D}(\mathrm{K}), \tau_{\mathrm{K}})$. Действительно, ядром оператора ∂^β являются полиномы по переменным $\{x_1, x_2, ..., x_N\}$, которые, очевидно, принадлежат пространству $(\mathcal{D}(\mathrm{K}), \tau_{\mathrm{K}})$ тогда и только тогда, когда это полиномы с нулевыми коэффициентами. Поэтому оператор

$$\partial^{n+1} : (\mathcal{D}(\mathrm{K}), \tau_{\mathrm{K}}) \to (\mathcal{D}(\mathrm{K}), \tau_{\mathrm{K}})$$

является инъективным.

Доказательство-5

Введем векторное пространство

$$\mathrm{X}_n \equiv \left\{\partial^{n+1}\mathcal{D}(\mathrm{K})\right\},$$

которое действительно векторное, как инъективный образ векторного пространства. Определим теперь на X_n линейный функционал:

$$\langle f_1^*, \psi_n\rangle_n \equiv \langle f^*, \varphi\rangle, \qquad (7)$$

где $\psi_n = \partial^{n+1}\varphi$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathrm{K})$. Причем из (6) вытекает, что для всех $\psi_n \in \mathrm{X}_n$ имеет место неравенство

$$|\langle f_1^*, \psi_n\rangle_n| \leqslant \mathrm{M} \int\limits_{\mathrm{K}} \left|\partial^{n+1}\varphi(x)\right| \, dx = \mathrm{M} \int\limits_{\mathrm{K}} |\psi_n(x)| \, dx.$$

Следовательно, по теореме Хана–Банаха линейный функционал f_1^* можно продолжить с X_n до линейного функционал над $\mathbb{L}^1(\mathrm{K})$.

Доказательство-6

Иначе говоря, найдется такая функция $g(x) \in \mathbb{L}^{\infty}(\mathrm{K})$, что имеет место равенство

$$\langle f_1^*, \psi_n \rangle_n = \int\limits_{\mathrm{K}} g(x) \psi_n(x)\, dx = \int\limits_{\mathrm{K}} g(x) \partial^{n+1} \varphi(x)\, dx.$$

Отсюда и из (7) мы пришли к равенству

$$\langle f^*, \varphi \rangle = \int\limits_{\mathrm{K}} g(x) \partial^{n+1} \varphi(x)\, dx \quad \text{для некоторой} \quad g(x) \in \mathbb{L}^{\infty}(\mathrm{K})\,. \tag{8}$$

Теперь продолжим функцию $g(x)$ нулем вне компакта K и, таким образом, получим, что $g(x) \in \mathbb{L}^{\infty}\left(\mathbb{R}^N\right)$.

Доказательство-7

Введем функцию

$$\overline{f}(x) = (-1)^N \int\limits_{-\infty}^{x_1} dy_1 \int\limits_{-\infty}^{x_2} dy_2 \cdots \int\limits_{-\infty}^{x_N} dy_N g(y)$$

и тогда, интегрируя по частям в (8), получим равенство

$$\langle f^*, \varphi \rangle = \int\limits_{\mathrm{R}^N} \overline{f}(x) \partial^{n+2} \varphi(x)\, dx =$$

$$= (-1)^{n+2} \int\limits_{\mathrm{R}^N} f(x) \partial^{n+2} \varphi(x)\, dx \quad \text{для всех} \quad \varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathrm{K}), \quad (9)$$

где по построению функция $f(x) = (-1)^{n+2} \overline{f}(x) \in \mathbb{C}\left(\mathbb{R}^N\right)$.

Доказательство-8

Теперь осталось положить $\alpha = (n+2, n+2, ..., n+2)$ и получить из (9) равенство

$$\langle f^*, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_{\mathrm{R}^N} f(x) \partial^\alpha \varphi(x)\, dx \quad \text{для всех} \quad \varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathrm{K}).$$

Замечание

Замечание 6. Из теоремы 11 вытекает, что локально каждая обобщенная функция $f^* \in \mathcal{D}'$ представима как производная конечного порядка от некоторой непрерывной функции. В следующей теореме мы докажем, что это, на самом деле, глобальный результат.

Теорема

Теорема

Пусть $f^* \in \mathcal{D}'\left(\mathbb{R}^N\right)$ *и носитель* $\operatorname{supp}\{f^*\} \subset \mathrm{K}$, *где* K *— это компакт в* $\mathbb{R}^N$. *Тогда существуют такие непрерывные функции* $f_\beta(x) \in \mathbb{C}_0\left(\mathbb{R}^N\right)$, *что*

$$\langle f^*, \varphi\rangle = \sum_{|\beta|\leqslant n+2} (-1)^{|\beta|} \int\limits_{\mathbb{R}^N} f_\beta(x) \partial^\beta \varphi(x)\, dx \quad \text{для всех} \quad \varphi \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^N\right).$$

Доказательство-1

Пусть $\mathrm{K} \subset \mathbb{R}^N$ компакт — носитель обобщенной функции $f^* \in \mathcal{D}'\left(\mathbb{R}^N\right)$. Пусть U — это открытое множество в $\mathbb{R}^N$ такое, что $\mathrm{K} \subset \mathrm{U}$ и $\overline{\mathrm{U}}$ компакт. Применим формулу (1) к компакту $\overline{\mathrm{U}}$:

$$\langle f^*, \psi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x) \partial^\alpha \psi(x) \, dx \quad \text{для всех} \quad \psi(x) \in \mathcal{D}\left(\overline{\mathrm{U}}\right).$$

Пусть теперь $\varphi(x) \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^N\right)$, а от функции $\psi(x)$ мы потребуем, чтобы она была равна 1 в окрестности компакта K.

Доказательство-2

Поскольку K — это носитель обобщенной функции f^*, то имеет место следующая цепочка равенств:

$$\langle f^*, \varphi \rangle = \langle f^*, \psi\varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x) \partial^\alpha \left(\varphi(x)\psi(x) \right) dx =$$

$$= (-1)^{|\alpha|} \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x) \sum_{\beta_i \leqslant \alpha_i = n+2} c_{\alpha\beta} \partial^{\alpha-\beta} \psi(x) \partial^\beta \varphi(x)\, dx =$$

$$= \sum_{\beta_i \leqslant n+2} (-1)^{|\beta|} \int\limits_{\mathbb{R}^N} f_\beta(x) \partial^\beta \varphi(x)\, dx,$$

где

$$f_\beta(x) = (-1)^{|\alpha|-|\beta|} c_{\alpha\beta} f(x) \partial^{\beta-\alpha} \psi(x) \in \mathbb{C}_0\left(\mathbb{R}^N\right).$$

Замечание 7. Тем самым мы пришли к следующему глобальному результату: каждая обобщенная функция с компактным носителем представима в виде

$$f^*(x) = \sum_{\alpha_i \leqslant n+2} \partial^\alpha f_\alpha(x),$$

где $f_\alpha(x) \in \mathbb{C}_0\left(\mathbb{R}^N\right)$.

Теорема

Теорема

Пусть носитель обобщенной функции $f^* \in \mathcal{D}'$ *состоит из одной точки —* $\operatorname{supp}\{f^*\} = \{0\}$, *тогда имеет место равенство:*

$$f^*(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} c_\alpha \partial_x^\alpha \delta(x).$$

Доказательство-1

Поскольку $f^* \in \mathcal{D}'\left(\mathbb{R}^N\right)$, то согласно лемме 1 найдется такое компактное множество $\mathrm{K} \subset \mathbb{R}^N$ и постоянная $\mathrm{M} > 0$, что

$$|\langle f^*, \varphi\rangle| \leqslant \mathrm{M} \max_{|\alpha| \leqslant m} \sup_{x \in \mathrm{K}} |\partial^\alpha \varphi(x)| \tag{10}$$

для всех $\varphi(x) \in (\mathcal{D}(\mathrm{K}), \tau_{\mathrm{K}})$. Рассмотрим следующую функцию

$$\varphi_\varepsilon = \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \varphi(x),$$

где функция $\eta(x)$ равна 1 при $|x| \leqslant 1/2$ и нулю при $|x| \geqslant 1$.

Доказательство-2

Поскольку носитель обобщенной функции f^* состоит из точки $\{0\}$, то имеет место равенство

$$\langle f^*, \varphi \rangle = \langle f^*, \varphi_\varepsilon \rangle =$$
$$= \left\langle f^*, \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)[\varphi(x) - \mathcal{P}_{2m+1}(\varphi)] \right\rangle + \left\langle f^*, \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \mathcal{P}_{2m+1}(\varphi) \right\rangle, \tag{11}$$

где

$$\mathcal{P}_{2m+1}(\varphi) \equiv \sum_{|\beta| \leqslant 2m+1} \frac{\partial_x^\beta \varphi(x)}{\beta!}\bigg|_{x=0} x^\beta.$$

Прежде всего заметим, что последнее слагаемое в неравенстве (11) не зависит от $\varepsilon > 0$.

Доказательство-3

Действительно, поскольку в окрестности точки $x = 0$ функции $\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = 1 = \eta(x)$, то имеет место цепочка равенств

$$\left\langle f^*, \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \mathcal{P}_{2m+1}(\varphi) \right\rangle =$$

$$= \langle f^*, \eta(x)\mathcal{P}_{2m+1}(\varphi)\rangle = \sum_{|\beta| \leqslant 2m+1} c_\beta \partial_x^\beta \varphi(0) =$$

$$= \left\langle \sum_{|\beta| \leqslant 2m+1} c_\beta \partial_x^\beta \delta(x), \varphi \right\rangle, \quad c_\beta \equiv \frac{\langle f^*, \eta(x) x^\beta \rangle}{\beta!}. \quad (12)$$

Доказательство-4

Теперь воспользуемся неравенством (10) для величины

$$\left\langle f^*, \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)[\varphi(x) - \mathcal{P}_{2m+1}(\varphi)]\right\rangle.$$

Действительно, справедлива следующая цепочка неравенств

$$\left|\left\langle f^*, \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)[\varphi(x) - \mathcal{P}_{2m+1}(\varphi)]\right\rangle\right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{|\alpha|\leqslant m} \sup_{x\in \mathrm{K}} \left|\partial^\alpha\left[\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)[\varphi(x) - \mathcal{P}_{2m+1}(\varphi)]\right]\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\varepsilon^m} \max_{|\alpha|\leqslant m} \sup_{|x|\leqslant\varepsilon} |\partial^\alpha[\varphi(x) - \mathcal{P}_{2m+1}(\varphi)]| \leqslant c\varepsilon,$$

Доказательство-5

поскольку имеет место цепочка выражений:

$$\partial^\alpha \varphi(x) - \partial^\alpha \mathcal{P}_{2m+1}(\varphi) =$$

$$= \sum_{2m+2 \leqslant |\beta| \leqslant n} \frac{\partial^\beta \varphi(0)}{\beta!} \frac{(\beta)!}{(\beta - \alpha - 1)!} x^{\beta-\alpha} + \bar{\bar{o}}(|x|^{n+1})$$

при достаточно большом $n \in \mathbb{N}$.
Отсюда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ из (11) и (12) вытекает утверждение теоремы.

Свертка-1

Сначала введем операцию свертки основных функций. Действительно, пусть $\varphi(x), \psi(x) \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^N\right)$ тогда рассмотрим следующее выражение:

$$\varphi * \psi \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^N} \varphi(x-y)\psi(y)\,dy. \tag{13}$$

Прежде всего отметим, что интеграл в правой части равенства (13) определен для всех $x \in \mathbb{R}^N$, поскольку обе функции из $\mathcal{D}$.

Свертка-2

Кроме того, можно ввести оператор сдвига с отражением $\mathcal{T}_z$:

$$\mathcal{T}_z u(x) \equiv u(z-x),$$

с помощью которого легко преобразовать выражение (13):

$$\varphi * \psi = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{T}_y \varphi(x) \psi(y) \, dy.$$

Свертка-3

Теперь попробуем определить свертку основной и обобщенной функций. Пусть сначала обобщенная функция $f^* \in \mathcal{D}'$ является регулярной с представителем $f(x) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Тогда ее свертку с произвольной основной функцией $\varphi(x) \in \mathcal{D}$ можно представить в следующем виде:

$$f^* * \varphi = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \varphi(x-y) f(y)\, dy = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(y) \mathcal{T}_y \varphi(x)\, dy.$$

Свертка-4

Но это выражение нам подсказывает, как определить свертку произвольной обобщенной функции с основной функцией. Дадим следующее определение.

Определение 14. *Сверткой обобщенной функции* $f^* \in \mathcal{D}'$ *с основной функцией* $\varphi(x) \in \mathcal{D}$ *называется следующая конструкция*:

$$f^* * \varphi \equiv \langle f^*(y), \mathcal{T}_y \varphi(x) \rangle .$$