Лекция 2. Пространство абсолютно непрерывных функций и пространства Гельдера.

Корпусов Максим Олегович,
Панин Александр Анатольевич

Курс лекций по линейному функциональному анализу

28 февраля 2012 г.

Определение 1. *Будем говорить, что функция* $f(x) \in \mathbb{AC}[a,b]$, *если для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, *что для любой системы непересекающихся интервалов* $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^{+\infty}$ *из отрезка* $[a,b]$ *и таких, что*

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(b_k - a_k) < \delta$$

имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{+\infty}|f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

Линейность

Заметим, что множество $\mathbb{AC}[a,b]$ является линейным. Действительно, возьмем произвольные функции $f_1(x), f_2(x) \in \mathbb{AC}[a,b]$ и произвольные постоянные $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^1$. Тогда для функции $f(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)$ имеет место неравенство

$$|f(b_k) - f(a_k)| \leqslant \alpha_1 \left|f_1(b_k) - f_1(a_k)\right| + \alpha_2 \left|f_2(b_k) - f_2(a_k)\right|,$$

откуда сразу же получаем неравенство

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |f(b_k) - f(a_k)| \leqslant \alpha_1 \sum_{k=1}^{+\infty} \left|f_1(b_k) - f_1(a_k)\right| + \alpha_2 \sum_{k=1}^{+\infty} \left|f_2(b_k) - f_2(a_k)\right|.$$

Из этого неравенства и вытекает линейность множества $\mathbb{AC}[a,b]$.

Эквивалентное определение

Можно дать другое определение множества абсолютно непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций.

Определение 2. *Будем говорить, что функция* $f(x) \in \mathbb{AC}[a,b]$, *если найдется функция* $g(x) \in \mathbb{L}^1(a,b)$ *и такая постоянная* $c \in \mathbb{R}^1$, *что имеет место представление*

$$f(x) = c + \int\limits_a^x g(y)\,dy. \tag{1}$$

Теорема

Определения 1 и 2 эквивалентны.

Связь пространств

Первый вопрос, который возникает: как связаны пространства $\mathbb{AC}[a,b]$ и $\mathbb{BV}[a,b]$? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема

Имеет место вложение $\mathbb{AC}[a,b] \subset \mathbb{BV}[a,b]$.

Доказательство

Пусть T — это произвольное разбиение отрезка $[a,b]$. Тогда в силу определения 5 абсолютно непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n}\left|\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} g(y)\,dy\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} |g(y)|\,dy \leqslant \int\limits_{a}^{b} |g(y)|\,dy < +\infty.$$

Формула интегрирования по частям

Теорема

Пусть функции $f_1(x)$ *и* $f_2(x)$ *из линейного пространства* $\mathbb{AC}[a,b]$, *тогда имеет место формула интегрирования по частям*

$$\int\limits_a^b f_1(x) f_2'(x)\,dx = f_1(b)f_2(b) - f_1(a)f_2(a) - \int\limits_a^b f_1(x)f_2'(x)\,dx. \tag{2}$$

Доказательство-1

Докажем сначала, что произведение двух абсолютно непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций является абсолютно непрерывной на отрезке $[a, b]$ функцией. Во-первых, в силу теоремы 1 имеем, что для $f_1(x), f_2(x) \in \mathbb{AC}[a, b] \subset \mathbb{BV}[a, b] \subset \mathbb{B}[a, b]$. Поэтому

$$c_1 \equiv \sup_{x \in [a,b]} |f_1(x)| < +\infty, \quad c_2 \equiv \sup_{x \in [a,b]} |f_2(x)| < +\infty.$$

Доказательство-2

Тогда согласно определению 4 абсолютно непрерывных функций для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что из условия

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(b_k - a_k) < \delta$$

вытекают неравенства

$$\sum_{k=1}^{+\infty}|f_1(b_k) - f_1(a_k)| < \frac{\varepsilon}{2c_2} \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{+\infty}|f_2(b_k) - f_2(a_k)| < \frac{\varepsilon}{2c_1}.$$

Доказательство-3

Теперь заметим, что имеет место цепочка неравенств

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |f_1(b_k)f_2(b_k) - f_1(a_k)f_2(a_k)| \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} |f_1(b_k) - f_1(a_k)|\,|f_2(b_k)| +$$

$$+ \sum_{k=1}^{+\infty} |f_2(b_k) - f_2(a_k)|\,|f_1(a_k)| \leqslant c_2 \sum_{k=1}^{+\infty} |f_1(b_k) - f_1(a_k)| +$$

$$+ c_1 \sum_{k=1}^{+\infty} |f_2(b_k) - f_2(a_k)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Доказательство-4

Стало быть, имеем $(f_1(x)f_2(x))' \in \mathbb{L}^1(a,b)$ и в силу определения 5, в котором нужно положить $g(x) = (f_1(x)f_2(x))'$, получим равенство

$$f_1(b)f_2(b) - f_1(a)f_2(a) = \int\limits_a^b (f_1(x)f_2(x))' \, dx.$$

Для окончания доказательства достаточно заметить, что

$$(f_1(x)f_2(x))' = f_1(x)f_2'(x) + f_1'(x)f_2(x).$$

Функция «шапочка»-1

Итак, пусть у нас задана функция — «шапочка»:

$$\omega(t) = c \begin{cases} \exp\left\{\frac{1}{|t|^2-1}\right\} & \text{при} \quad |t| < 1; \\ 0, & \text{при} \quad |t| \geqslant 1. \end{cases}, \tag{3}$$

причем постоянная $c > 0$ выбирается из условия нормировки «шапочки»:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^1} dt\omega(t) = 1.$$

Функция «шапочка»-2

Теперь рассмотрим функцию $u(x) \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^1)$ и введем срезку этой функции $u_\varepsilon(x)$:

$$u_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{\mathbb{R}^1} \omega\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) u(y)\, dy. \tag{4}$$

Функция $u_\varepsilon(x)$ обладает следующими свойствами:

(i) $u_\varepsilon(x) \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^1)$;

(ii) $\|u_\varepsilon\|_{\mathbb{L}^1} \leqslant \|u\|_{\mathbb{L}^1}$;

(iii) $\|u - u_\varepsilon\|_1 \to 0$ при $\varepsilon \to +0$.

Важная лемма

Лемма

Пусть $u(x) \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^1)$, *тогда справедливо следующее выражение*:

$$\sup_{h(x)\in\mathbb{C}_0^\infty(a,b),\ |h|\leqslant 1} \int\limits_a^b u(x)h(x)\,dx = \int\limits_a^b |u(x)|\,dx. \qquad (5)$$

Доказательство-1

Определим новую функцию

$$w(x) = \frac{u(x)}{|u(x)|} \quad \text{при} \quad u(x) \neq 0, \quad w(x) = 0 \quad \text{при} \quad u(x) = 0.$$

Теперь по этой функции построим функцию

$$v(x) = w(x) \quad \text{при} \quad x \in [a+\delta, b-\delta],$$
$$v(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in (a, a+\delta) \cup (b-\delta, b).$$

Доказательство-2

Понятно, что построенная функция $v(x)$ измерима на отрезке $[a,b]$ и удовлетворяет неравенству $|v(x)| \leqslant 1$, а стало быть, принадлежит пространству $\mathbb{L}^\infty(a,b) \subset \mathbb{L}^1(a,b)$. Поэтому для функции $v(x)$, которую можно продолжить нулем вне отрезка $[a,b]$, определена срезка

$$h_n(x) = v_\varepsilon(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(a,b), \quad \varepsilon = \frac{1}{n} < \delta.$$

Доказательство-3

Действительно, принадлежность построенной срезки пространству $\mathbb{C}_0^\infty(a,b)$ следует из формулы (4):

$$v_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{a+\delta}^{b-\delta} \omega\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) v(y)\,dy,$$

причем это выражение равно нулю при $x \geqslant b - \delta + \varepsilon$ и $x \leqslant a + \delta - \varepsilon$, значит это финитная функция вместе со всеми своими производными на интервале (a,b), поскольку по условию $\varepsilon < \delta$.

Доказательство-4

По построению последовательность $\{h_n(x)\}$ обладает следующими свойствами:

$$|h_n(x)| \leqslant 1, \quad h_n(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(a, b),$$

таким образом, построенная последовательность является допустимой, т. е. принадлежит классу, по которому берется supremum в выражении (5), причем из вида левой части этого выражения следует, что она не превышает выражение

$$\int\limits_a^b |u(x)|\,dx.$$

Доказательство-5

Кроме того, для построенной последовательности имеет место предельное равенство.

$$h_n(x) \to v(x) \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{L}^1(a,b) \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

а значит, найдется такая подпоследовательность $\{h_{n_k}(x)\} \subset \{h_n(x)\}$

$$h_{n_k}(x)u(x) \to |u(x)| \quad \text{п.в. в} \quad x \in [a+\delta, b-\delta] \quad \text{при} \quad k \to +\infty,$$

и

$$h_{n_k}(x)u(x) \to 0 \quad \text{п.в. в} \quad x \in (a, a+\delta) \cup (b-\delta, b) \quad \text{при} \quad k \to +\infty.$$

Доказательство-6

Поэтому имеет место равенство

$$\sup_{h(x)\in\{h_{n_k}(x)\}} \int\limits_a^b u(x)h(x)\,dx = \int\limits_{a+\delta}^{b-\delta} |u(x)|\,dx.$$

В силу произвольности $\delta > 0$ приходим к утверждению леммы.

Одна лемма

Теорема

Для всех функций $f(x)$ *из линейного пространства* $\mathbb{AC}[a,b]$ *имеет место равенство*

$$\mathrm{V}_a^b(f) = \hat{\mathrm{V}}_a^b(f) = \int\limits_a^b \left|f'(x)\right| dx. \tag{6}$$

Доказательство-1

Заметим, что $\mathbb{AC}[a, b] \subset \mathbb{C}[a, b]$, а значит, в силу теоремы 8 имеет место вложение

$$\mathbb{AC}[a, b] \subset \mathbb{C}[a, b] \cap \mathbb{BV}[a, b].$$

Но в силу теоремы 6 $\mathbb{C}[a, b] \cap \mathbb{BV}[a, b] = \mathbb{C}[a, b] \cap \mathbb{B}\hat{\mathbb{V}}[a, b]$, а значит, из этой же теоремы вытекает, что на линейном пространстве $\mathbb{C}[a, b] \cap \mathbb{BV}[a, b]$

$$\mathrm{V}_a^b(f) = \hat{\mathrm{V}}_a^b(f).$$

Доказательство-2

Рассмотрим подробно правую часть этого равенства. Действительно,

$$\hat{\mathrm{V}}_a^b(f) = \sup_{h(x)\in\mathbb{C}_0^\infty(a,b)\ |h(x)|\leqslant 1} \left| \int\limits_a^b f(x)\,dh(x) \right| =$$

$$= \sup_{h(x)\in\mathbb{C}_0^\infty(a,b)\ |h(x)|\leqslant 1} \left| \int\limits_a^b h(x)\,df(x) \right| =$$

$$= \sup_{h(x)\in\mathbb{C}_0^\infty(a,b)\ |h(x)|\leqslant 1} \left| \int\limits_a^b h(x)f'(x)\,dx \right|.$$

Доказательство-3

Здесь мы, во-первых, воспользовались теоремой 9 об интегрировании по частям для абсолютно непрерывных функций, поскольку как можно убедиться $h(x) \in \mathbb{AC}[a, b]$, а внеинтегральные слагаемые равны нулю, поскольку $h(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(a, b)$. Теперь заметим, что $f^{'}(x) \in \mathbb{L}^1(a, b)$ и, стало быть, можно воспользоваться леммой 2, и получить требуемое равенство.

Теперь введем на линейном пространстве $\mathbb{AC}[a, b]$ норму:

$$\|u\|_{ac} \equiv \|u\|_{\mathbb{L}^1} + \left\|\frac{du}{dx}\right\|_{\mathbb{L}^1}. \tag{7}$$

Справедливо следующее основное утверждение этого параграфа.

Теорема

Линейное пространство $\mathbb{AC}[a, b]$ является банаховым относительно нормы (7).

Основная лемма вариационного исчисления

Основная лемма вариационного исчисления. *Пусть* $f(x) \in \mathbb{L}^1(a,b)$ *и для каждой функции* $h(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(a,b)$ *имеет место равенство*:

$$\int\limits_a^b f(x)h(x)\,dx = 0,$$

тогда $f(x) = 0$ *для почти всех* $x \in (a,b)$.

Доказательство

В силу условий леммы имеем

$$\sup_{h(x)\in\mathbb{C}_0^\infty(a,b)\ |h(x)|\leqslant 1} \int\limits_a^b f(x)h(x)\,dx = 0.$$

Тогда в силу результата леммы 2 имеем

$$\int\limits_a^b |f(x)|\,dx = 0,$$

откуда сразу же получаем требуемый результат.

$$|f(x) - f(y)| \leqslant c_\alpha \, |x-y|^\alpha \,, \quad \text{для всех} \quad x, y \in [a,b], \tag{8}$$

$$\left|f^{'}(x)\right| = \left|\lim_{y\to x} \frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \leqslant \lim_{y\to x} \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \leqslant$$
$$\leqslant c_1 \lim_{y\to x} |x-y|^{\alpha-1} = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in [a,b].$$

$$|f(x) - f(y)| \leqslant c_1 \, |x-y| \,, \quad \text{для всех} \quad x, y \in [a,b]. \tag{9}$$

Выберем постоянную $c_\alpha \equiv c_1|b-a|^{1-\alpha}$, тогда сразу же из (9) получим цепочку неравенств

$$|f(x) - f(y)| \leqslant c_1 \, |x-y|^{1-\alpha} \, |x-y|^\alpha \leqslant$$
$$\leqslant c_1|b-a|^{1-\alpha} \, |x-y|^\alpha = c_\alpha \, |x-y|^\alpha \,, \quad \text{для всех} \quad x, y \in [a,b], \tag{10}$$

Обозначения

Пусть Ω — область пространства $\mathbb{R}^N$,

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N) \in \mathbb{Z}_+^N$$

— мультииндекс длины N с целыми неотрицательными координатами,

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_N$$

— длина мультииндекса,

$$\partial^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \cdots \partial_{x_N}^{\alpha_N}$$

— композиция частных производных по соответствующим переменным и соответствующие мультииндексу

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N)\,, \quad x = (x_1, ..., x_N) \in \Omega, \quad \delta \in (0, 1].$$

$\mathbb{C}^k(\overline{\Omega})$

Определение 6. *Посредством* $\mathbb{C}^k(\overline{\Omega})$ *обозначим пространство функций, имеющих все частные производные* $\partial^\alpha f(x)$ *до порядка* $|\alpha| \leqslant k$, *которые непрерывны в* $\overline{\Omega}$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема

Линейное пространство $\mathbb{C}^k(\overline{\Omega})$ *является банаховым относительно следующей нормы:*

$$\|f\|_{\mathbb{C}^k} \equiv \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant k} \sup_{x \in \Omega} |\partial^\alpha f(x)| \,. \tag{11}$$

Определение 7. *Будем говорить, что функция* $f(x)$ *удовлетворяет условию Гельдера с показателем* $\delta \in (0,1]$, *если конечна следующая величина*:

$$[f]_\delta \equiv \sup_{x,y\in\Omega,\, x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\delta}. \tag{12}$$

Пространство Гельдера

Дадим определение пространства $\mathbb{C}^{k,\delta}(\overline{\Omega})$.

Определение 8. *Определим пространство* $\mathbb{C}^{k,\delta}(\overline{\Omega})$ *как подпространство пространства функций* $f(x) \in \mathbb{C}^{k}(\overline{\Omega})$ *таких, что* $\partial^{\alpha} f(x)$ *удовлетворяет условию Гельдера* (12) *для всех мультииндексов* α *длины* $k : |\alpha| = k$.

Теперь введем норму на линейном пространстве $\mathbb{C}^{k,\delta}(\overline{\Omega})$ (проверьте линейность этого пространства!):

$$\|f\|_{k,\delta} \equiv \sum_{|\alpha| \leqslant k} \sup_{x \in \Omega} |\partial^{\alpha} f(x)| + \sum_{|\alpha| = k} [\partial^{\alpha} f]_{\delta} \,. \tag{13}$$

Теорема

Теорема

Линейное пространство $\mathbb{C}^{k,\delta}(\overline{\Omega})$ *является банаховым относительно нормы* (13).

Доказательство-1

Итак, пусть $\{f_n\} \subset \mathbb{C}^{k,\delta}(\overline{\Omega})$ фундаментальная последовательность относительно нормы (13). Поскольку пространство $\mathbb{C}^k(\overline{\Omega})$ банахово относительно нормы (11) в силу теоремы 12, то последовательность $\{f_n\}$ фундаментальна также относительно нормы (11) и, значит, в силу теоремы 12 имеем

$$\partial^\alpha f_n(x) \rightrightarrows \partial^\alpha f(x) \quad \text{равномерно по} \quad x \in \overline{\Omega} \quad \text{при} \quad n \to +\infty$$

для всех мультииндексов α длины $|\alpha| \leqslant k$.

Доказательство-2

Теперь для любого $\varepsilon > 0$ в силу фундаментальности последовательности $\{f_n\}$ найдется такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что при всех $n, m \geqslant n_0$ имеет место неравенство

$$[\partial^\alpha f_n - \partial^\alpha f_m]_\delta \leqslant \varepsilon \quad \text{для всех мультииндексов} \quad |\alpha| = k. \quad (14)$$

Отсюда имеет место неравенство

$$|[\partial^\alpha f_n(x) - \partial^\alpha f_m(x)] - [\partial^\alpha f_n(y) - \partial^\alpha f_m(y)]| \leqslant$$
$$\leqslant |x-y|^\delta [\partial^\alpha f_n - \partial^\alpha f_m]_\delta \leqslant \varepsilon |x-y|^\delta.$$

Перейдем в получившемся неравенстве к по точечному пределу при $m \to +\infty$ и получим неравенство

$$|[\partial^\alpha f_n(x) - \partial^\alpha f(x)] - [\partial^\alpha f_n(y) - \partial^\alpha f(y)]| \leqslant \varepsilon |x-y|^\delta.$$

Отсюда сразу же получим

$$[\partial^\alpha f_n - \partial^\alpha f]_\delta \leqslant \varepsilon.$$

Отсюда, во-первых, в силу неравенства треугольника получаем неравенство

$$[\partial^\alpha f]_\delta \leqslant [\partial^\alpha f_n - \partial^\alpha f]_\delta + [\partial^\alpha f_n]_\delta,$$

которое означает, что $f(x) \in \mathbb{C}^{k,\delta}(\overline{\Omega})$, а во-вторых, получаем, что

$$f_n(x) \to f(x) \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{C}^{k,\delta}(\overline{\Omega}).$$

Интерполяционное неравенство

Лемма

Справедливо следующее неравенство:

$$[f]_\delta \leqslant M[f]_{\delta_1}^{1-\nu}[f]_{\delta_2}^{\nu}, \tag{15}$$

где

$$\delta = (1-\nu)\delta_1 + \nu\delta_2, \quad \nu \in [0,1], \quad 0 \leqslant \delta_1 \leqslant \delta \leqslant \delta_2 \leqslant 1,$$

причем константа $M = 1$ в том случае, если $\delta_1 > 0$, и $M = 2$, если $\delta_1 = 0$.

Доказательство

Справедливо следующее соотношение:

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\delta}} = \frac{|f(x)-f(y)|^{1-\nu}}{|x-y|^{(1-\nu)\delta_1}} \frac{|f(x)-f(y)|^{\nu}}{|x-y|^{\nu\delta_2}} \leqslant M[f]_{\delta_1}^{1-\nu}[f]_{\delta_2}^{\nu},$$

где

$$\delta = (1-\nu)\delta_1 + \nu\delta_2, \quad 0 \leqslant \delta_1 \leqslant \delta \leqslant \delta_2 \leqslant 1, \quad \nu \in [0,1].$$

Взяв supremum по $x, y \in \Omega$ от обеих частей указанного соотношения получим требуемое неравенство.

Теорема вложения

Теорема

Имеет место вложение банаховых пространств:

$$\mathbb{C}^{k,\delta}(\overline{\Omega}) \supset \mathbb{C}^{k,\delta_1}(\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}^{k,\delta_2}(\overline{\Omega}), \tag{16}$$

где

$$\delta = (1-\nu)\delta_1 + \nu\delta_2, \quad 0 \leqslant \delta_1 \leqslant \delta \leqslant \delta_2 \leqslant 1, \quad \nu \in [0,1].$$

Доказательство

Утверждение теоремы вытекает из следующей цепочки несложных рассуждений. Пусть

$$f(x) \in \mathbb{C}^{k,\delta_1}(\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}^{k,\delta_2}(\overline{\Omega}),$$

тогда, во-первых, $f(x) \in \mathbb{C}^{k}(\overline{\Omega})$, а во-вторых, для каждого мультииндекса α длины $|\alpha| = k$ имеем

$$[\partial^\alpha f]_{\delta_1} \leqslant c_1 < +\infty, \quad [\partial^\alpha f]_{\delta_2} \leqslant c_2 < +\infty,$$

поэтому в силу интерполяционного неравенства (15) получаем

$$[\partial^\alpha f]_{\delta} \leqslant c_3 < +\infty.$$

Отсюда приходим к утверждению теоремы.

Параболические пространства Гельдера

Пусть Q — область пространства $\mathbb{R}^{N+1}$. Точки этого пространства будем записывать как $z = (t, x)$, где $t \in \mathbb{R}^1$ и $x \in \mathbb{R}^N$. Введем расстояние между различными точками $z_1 = (t_1, x_1)$ и $z_2 = (t_2, x_2)$ как

$$\rho(z_1, z_2) = |t_1 - t_2|^{1/2} + |x_1 - x_2|.$$

Дадим следующее определение.

Определение 9. *Назовем параболическим пространством Гельдера множество всех функций, для которых конечна следующая величина:*

$$[f]_{\delta/2,\delta} \equiv \sup_{z_1, z_2 \in Q,\, z_1 \neq z_2} \frac{|f(z_1) - f(z_2)|}{\rho^\delta(z_1, z_2)} \tag{17}$$

при некотором $\delta \in (0, 1]$.

Пространство $\mathbb{C}^{1,2}(\overline{Q})$

Определение 10. *Посредством* $\mathbb{C}^{1,2}(\overline{Q})$ *мы обозначаем класс функций, которые один раз непрерывно дифференцируемы по* t *и два раза непрерывно дифференцируемы по* x *в области* $\overline{Q}$.
Введем на линейном пространстве $\mathbb{C}^{1,2}(\overline{Q})$ норму следующим образом

$$\|f\|_{1,2} \equiv \sup_{(t,x)\in Q} |f(t,x)| + \sup_{(t,x)\in Q} |f_t(t,x)| + \\ + \sum_{i=1}^{N} \sup_{(t,x)\in Q} |f_{x_i}(t,x)| + \sum_{i=1}^{N} \sup_{(t,x)\in Q} |f_{x_i x_i}(t,x)|. \quad (18)$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема

Линейное пространство $\mathbb{C}^{1,2}(\overline{Q})$ *является банаховым относительно нормы* (18).

На практике необходимость введения параболических пространств Гельдера обусловлена рассмотрением квазилинейных параболических уравнений в цилиндрических областях вида $Q = (0, \mathrm{T}) \times \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — некоторая область. В связи с чем необходимо рассматривать следующий класс функций — $\mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(\overline{Q})$. Дадим определение.

Определение 11. *Линейное пространство* $\mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(\overline{Q})$ *определяется как класс функций* $f(t, x)$, *которые один раз непрерывно дифференцируемы по* t, *два раза непрерывно дифференцируемы по* x, *причем соответствующие частные производные* f_t *и* $f_{x_i x_i}$ *принадлежат параболическому классу Гельдера с соответствующим* $\delta \in (0, 1]$.

Норма пространства $\mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(\overline{Q})$

Теперь введем на линейном пространстве $\mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(\overline{Q})$ норму следующим образом

$$\|f\|_{1+\delta/2,2+\delta} \equiv \sup_{(t,x)\in Q} |f(t,x)| + \sup_{(t,x)\in Q} |f_t(t,x)| + \\ + \sum_{i=1}^{N} \sup_{(t,x)\in Q} |f_{x_i}(t,x)| + \sum_{i=1}^{N} \sup_{(t,x)\in Q} |f_{x_i x_i}(t,x)| + \\ + [f_t]_{\delta/2,\delta} + \sum_{i=1}^{N} [f_{x_i x_i}]_{\delta/2,\delta} . \quad (19)$$

Теорема

Линейное пространство $\mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(\overline{Q})$ является банаховым относительно нормы (19).

Доказательство-1

Итак, пусть $\{f_n\} \in \mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(\overline{Q})$ фундаментальная последовательность относительно нормы (19). Тогда она является фундаментальной последовательностью банахова пространства $\mathbb{C}^{1,2}(\overline{Q})$ относительно нормы (18). Значит, она сходится сильно в $\mathbb{C}^{1,2}(\overline{Q})$. В частности, имеем

$$f_{nt}(t,x) \rightrightarrows f_t(t,x) \quad \text{равномерно по} \quad (t,x) \in \overline{Q},$$

$$f_{nx_ix_i}(t,x) \rightrightarrows f_{x_ix_i}(t,x) \quad \text{равномерно по} \quad (t,x) \in \overline{Q}.$$

Доказательство-2

Поскольку f_{nt} и $f_{nx_ix_i}$ принадлежат параболическому пространству Гельдера, то в силу фундаментальности последовательности $\{f_n\}$ для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $n, m \geqslant n_0$ имеют место следующие оценки

$$\left[f'_{nt} - f'_{mt}\right]_{\delta/2,\delta} \leqslant \varepsilon, \tag{20}$$

$$[f_{nx_ix_i} - f_{mx_ix_i}]_{\delta/2,\delta} \leqslant \varepsilon. \tag{21}$$

Доказательство-3

Стало быть, имеют место следующие неравенства

$$\left|\left[f'_{nt}(z_1)-f'_{mt}(z_1)\right]-\left[f'_{nt}(z_2)-f'_{mt}(z_2)\right]\right|\leqslant$$
$$\leqslant\rho^{\delta}(z_1,z_2)\left[f'_{nt}-f'_{mt}\right]_{\delta/2,\delta}\leqslant\varepsilon\rho^{\delta}(z_1,z_2),\quad(22)$$

$$|[f_{nx_ix_i}(z_1)-f_{mx_ix_i}(z_1)]-[f_{nx_ix_i}(z_2)-f_{mx_ix_i}(z_2)]|\leqslant$$
$$\leqslant\rho^{\delta}(z_1,z_2)\left[f_{nx_ix_i}-f_{mx_ix_i}\right]_{\delta/2,\delta}\leqslant\varepsilon\rho^{\delta}(z_1,z_2).\quad(23)$$

Теперь перейдем к поточечным пределам в неравенствах (22) и (23) при $m\to+\infty$. Затем разделим обе части получившихся предельных неравенств на

$$\rho^{\delta}(z_1,z_2)$$

и перейдем к supremum от обеих частей неравенств по всем $z_1,z_2\in Q$ и $z_1\neq z_2$.

Доказательство-4

В результате получим неравенства

$$\left[f'_{nt} - f'_t\right]_{\delta/2,\delta} \leqslant \varepsilon,$$

$$[f_{nx_ix_i} - f_{x_ix_i}]_{\delta/2,\delta} \leqslant \varepsilon.$$

Из которых, во-первых, в силу неравенства треугольника получим

$$\left[f'_t\right]_{\delta/2,\delta} \leqslant \left[f'_{nt} - f'_t\right]_{\delta/2,\delta} + \left[f'_{nt}\right]_{\delta/2,\delta},$$

$$[f_{x_ix_i}]_{\delta/2,\delta} \leqslant [f_{nx_ix_i} - f_{x_ix_i}]_{\delta/2,\delta} + [f_{nx_ix_i}]_{\delta/2,\delta},$$

откуда вытекает, что предельные функция $f_t(t,x)$ и $f_{x_ix_i}(t,x)$ принадлежат к классу параболических пространств Гельдера. А во-вторых, получим, что

$$f_n(t,x) \to f(t,x) \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(\overline{Q}).$$

Интерполяционное неравенство

Лемма

Справедливо следующее неравенство:

$$[f]_{\delta/2,\delta} \leqslant M[f]^{1-\nu}_{\delta_1/2,\delta_1}[f]^{\nu}_{\delta_2/2,\delta_2}, \tag{24}$$

где

$$\delta = (1-\nu)\delta_1 + \nu\delta_2, \quad \nu \in [0,1], \quad 0 \leqslant \delta_1 \leqslant \delta \leqslant \delta_2 \leqslant 1,$$

причем константа $M = 1$ *в том случае, если* $\delta_1 > 0$ *и* $M = 2$*, если* $\delta_1 = 0$.

Доказательство

Справедливы следующие соотношения:

$$\frac{|f(z_1)-f(z_2)|}{\rho^{\delta}(z_1,z_2)} =$$
$$= \frac{|f(z_1)-f(z_2)|^{1-\nu}}{\rho^{(1-\nu\delta_1)}(z_1,z_2)}\frac{|f(z_1)-f(z_2)|^{\nu}}{\rho^{\nu\delta_2}(z_1,z_2)} \leqslant M[f]^{1-\nu}_{\delta_1/2,\delta_1}[f]^{\nu}_{\delta_2/2,\delta_2},$$

где

$$\delta=(1-\nu)\delta_1+\nu\delta_2, \quad 0\leqslant\delta_1\leqslant\delta\leqslant\delta_2\leqslant 1, \quad \nu\in[0,1].$$

Взяв supremum по $z_1, z_2 \in Q$ от обеих частей указанного соотношения получим требуемое неравенство.

Теорема об интерполяции

Теорема

Имеет место следующее вложение:

$$\mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(\overline{Q}) \supset \mathbb{C}^{1+\delta_1/2,2+\delta_1}(\overline{Q}) \cap \mathbb{C}^{1+\delta_2/2,2+\delta_2}(\overline{Q}), \qquad (25)$$

где

$$\delta = (1-\nu)\delta_1 + \nu\delta_2, \quad \nu \in [0,1], \quad 0 \leqslant \delta_1 \leqslant \delta \leqslant \delta_2 \leqslant 1.$$