Лекция 10. Пространства С. Л. Соболева. Компактные вложения.

Корпусов Максим Олегович, Панин Александр Анатольевич

Курс лекций по линейному функциональному анализу

17 апреля 2012 г.

Теорема Релліха–Кондрашова

Теорема

Имеет место компактное вложение:

$$\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{L}^q(\Omega) \quad \textit{при} \quad p < N \tag{1}$$

для всех $q \in [1, p^*)$.

Достаточно доказать, что для всякой последовательности $\{u_m(x)\}$, ограниченной в $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$, найдется подпоследовательность $\{u_{m_m}(x)\}$, сходящаяся сильно в $\mathbb{L}^q(\Omega)$. Итак, пусть последовательность $\{u_m(x)\}$ ограничена в $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$. В частности, можно предположить, что

$$\sup_m \|u_m\|_{1,p} \leqslant c < +\infty.$$

Рассмотрим срезку последовательности $\{u_m(x)\}$:

$$u_m^\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^N} \int\limits_\Omega dy\, \omega\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) u_m(y)\, dy, \tag{2}$$

где $\omega(z)$ — это «шапочка». Без ограничения общности будем предполагать, что область Ω содержит шар единичного радиуса с центром в начале координат.

Доказательство-2

Докажем, что

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_q \leqslant c\varepsilon,$$

где $c > 0$ — не зависит от ε и от m. Для удобства сделаем в (2) замену переменной

$$z_i = \frac{x_i - y_i}{\varepsilon} \quad i = \overline{1, N}.$$

После этой подстановки мы придем к следующему равенству:

$$u_m^\varepsilon(x) = \int\limits_\Omega \mathrm{J}(|z|) u_m(x - \varepsilon z)\, dz.$$

Теперь учтем, что

$$\int\limits_\Omega \mathrm{J}(z)\, dz = 1.$$

Доказательство-3

Тогда сразу же получим следующая цепочка равенств:

$$u_m^\varepsilon(x) - u_m(x) = \int\limits_\Omega \mathrm{J}(z)\left[u_m(x-\varepsilon z) - u_m(x)\right] dz =$$

$$= \int\limits_\Omega dz \mathrm{J}(z) \int\limits_0^1 dt\, u_m'(x-\varepsilon tz) = -\varepsilon \int\limits_\Omega dz \mathrm{J}(z) \int\limits_0^1 dt\ (z,\nabla)\, u_m(x-\varepsilon zt).$$

Следовательно, справедлива следующая оценка:

$$\int\limits_\Omega \left|u_m^\varepsilon(x) - u_m(x)\right| dx \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \int\limits_\Omega dz \mathrm{J}(z) \int\limits_0^1 dt \int\limits_\Omega dx\, |x|\, |\nabla_x u_m(x)| \leqslant$$

$$\leqslant c\varepsilon |||\nabla u_m|||_1 \leqslant c\varepsilon |||\nabla u_m|||_p \leqslant c\varepsilon,$$

Доказательство-4

Теперь воспользуемся интерполяционным неравенством из леммы 6 второй главы. Справедливо неравенство,

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_q \leqslant \|u_m^\varepsilon - u_m\|_1^\theta \|u_m^\varepsilon - u_m\|_{p^*}^{1-\theta}, \quad \frac{1}{q} = \theta + \frac{1-\theta}{p^*}, \ \theta \in (0,1]. \tag{3}$$

Здесь остановимся. Условие, что $\theta > 0$ нам нужно для дальнейшего (случай $\theta = 0$ нам не подходит). Но это означает, что $q \in [1, p^*)$!!!

Доказательство-5

Теперь воспользуемся неравенством (??) и получим неравенства

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{p^*} \leqslant \||\nabla u_m^\varepsilon - \nabla u_m|\|_p \leqslant$$
$$\leqslant c \max\{\||\nabla u_m^\varepsilon|\|_p, \||\nabla u_m|\|_p\} \leqslant$$
$$\leqslant c\||\nabla u_m^\varepsilon|\|_p \leqslant c \sup_m \||\nabla u_m^\varepsilon|\|_p \leqslant c < +\infty.$$

Тогда из (3) получим неравенство

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_q \leqslant c\|u_m^\varepsilon - u_m\|_1^\theta \leqslant c\varepsilon, \tag{4}$$

где $c > 0$ не зависит от ε и от m.

Доказательство-6

Докажем теперь, что последовательность $\{u^\varepsilon_m\}$ для каждого фиксированного $\varepsilon > 0$ является равномерно ограниченной и равностепенно непрерывной. Действительно, имеют место следующие неравенства:

$$|u^\varepsilon_m(x)| \leqslant \frac{1}{\varepsilon^N} \int\limits_\Omega dy \left|\omega\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)\right| |u_m(y)| \leqslant \frac{1}{\varepsilon^N} \|\omega(z)\|_\infty \|u_m\|_1 \leqslant \frac{c}{\varepsilon^N},$$

$$|\nabla u^\varepsilon_m| \leqslant \frac{1}{\varepsilon^N} \int\limits_\Omega dy \left|\omega\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)\right| |\nabla u_m| \leqslant \frac{1}{\varepsilon^N} \|\omega(z)\|_\infty \||\nabla u_m|\|_1 \leqslant \frac{c}{\varepsilon^N}.$$

Доказательство-7

Из этих неравенств вытекают следующие свойства последовательности $\{u_m^\varepsilon\}$:

$$\sup_{x\in\Omega} |u_m^\varepsilon(x)| \leqslant \frac{c}{\varepsilon^N}, \quad |u_m^\varepsilon(x) - u_m^\varepsilon(y)| \leqslant \sup_{x\in\Omega} |\nabla u_m^\varepsilon| \, |x-y| \leqslant \frac{c}{\varepsilon^N} |x-y|, \tag{5}$$

где $c > 0$ не зависит от m. Неравенства (5) означают, что для каждого фиксированного $\varepsilon > 0$ последовательность $\{u_m^\varepsilon(x)\}$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна в пространстве $\mathbb{C}(\overline{\Omega})$, следовательно, согласно теореме Асколи–Арцела существует равномерно на $\overline{\Omega}$ сходящаяся подпоследовательность $\left\{u_{m_n}^\varepsilon(x)\right\}$.

Доказательство-8

Пусть теперь $\delta > 0$ — это произвольное фиксированное число. Тогда подберем $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы в неравенстве (4)

$$c\varepsilon < \frac{\delta}{3},$$

т. е. чтобы имело место неравенство

$$\|u^{\varepsilon}_{m_n} - u_{m_n}\|_q \leqslant \frac{\delta}{3}. \qquad (6)$$

В силу равномерной сходимости последовательности $\{u_{m_n}(x)\}$ на $\overline{\Omega}$ — эта последовательность равномерно фундаментальна:

$$\sup_{x\in\Omega} \left| u^{\varepsilon}_{m_i}(x) - u^{\varepsilon}_{m_j}(x) \right| \leqslant \frac{1}{c}\frac{\delta}{3}$$

при достаточно больших $i, j \in \mathbb{N}$.

Доказательство-9

Но тогда отсюда мы приходим к неравенству

$$\|u^{\varepsilon}_{m_i}(x) - u^{\varepsilon}_{m_j}(x)\|_q \leqslant c \sup_{x \in \Omega} \left| u^{\varepsilon}_{m_i}(x) - u^{\varepsilon}_{m_j}(x) \right| \leqslant \frac{\delta}{3}. \qquad (7)$$

Следовательно, из неравенств (6) и (7) вытекает цепочка неравенств:

$$\|u_{m_i} - u_{m_j}\|_q \leqslant \|u_{m_i} - u^{\varepsilon}_{m_i}\|_q + \|u_{m_j} - u^{\varepsilon}_{m_j}\|_q + \\ + \|u^{\varepsilon}_{m_i} - u^{\varepsilon}_{m_j}\|_q \leqslant \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} = \delta. \qquad (8)$$

Доказательство-10

Теперь возьмем в неравенстве (8) величину δ как

$$\delta = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...$$

и выберем такую подпоследовательность $\{u_{m_m}(x)\}$, что для нее

$$\lim_{l,n \to +\infty} \|u_{m_l} - u_{m_n}\|_q = 0,$$

т. е. построим фундаментальную последовательность в $\mathbb{L}^q(\Omega)$, которая в силу полноты этого пространства сходится.

Теорема-1

Теорема

Пусть область $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *ограничена и выполнены следующие условия*:

$$k > m, \quad N > (k-m)p \quad \textit{и} \quad 1 \leqslant q < \frac{Np}{N-(k-m)p}. \tag{9}$$

Тогда имеет место компактное вложение:

$$\mathbb{W}_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{W}_0^{m,q}(\Omega). \tag{10}$$

Доказательство-1

Действовать будем опять при помощи метода математической индукции. Сначала докажем, что имеет место следующее компактное вложение:

$$\mathbb{W}_0^{m+1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{W}_0^{m,q}(\Omega) \quad \text{при} \quad N > p, \quad 1 \leqslant q < p^*. \qquad (11)$$

Действительно, заметим, что для всех $u(x) \in \mathbb{W}_0^{m+1,p}(\Omega)$ в силу теоремы Реллиха–Кондрашова имеет место вложение

$$\partial^\beta u(x) \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{L}^q(\Omega) \quad \text{для всех} \quad |\beta| \leqslant m.$$

Пусть $\{u_n\}$ ограниченная последовательность в $\mathbb{W}_0^{m+1,p}(\Omega)$, тогда для каждого мультииндекса β длины $|\beta| \leqslant m$ последовательность

$$\left\{\partial^\beta u_n(x)\right\}$$

ограничена в $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$. Поэтому эта последовательность является *предкомпактной* в $\mathbb{L}^q(\Omega)$ при $1 \leqslant q < p^*$.

Доказательство-2

Следовательно, найдется такая подпоследовательность

$$\{u_{n_n}(x)\}$$

такая, что

$$\partial^\beta u_{n_n} \to \partial^\beta u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{L}^q(\Omega), \quad \text{для всех} \quad |\beta| \leqslant m.$$

Но это означает, что

$$u_{n_n} \to u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{W}_0^{m,q}(\Omega).$$

Следовательно, (11) доказано.

Доказательство-3

Предположим теперь, что мы уже доказали компактность вложения

$$\mathbb{W}_0^{m+n-1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{W}_0^{n,q}(\Omega) \qquad (12)$$

при условиях

$$N > (m-1)p, \quad 1 \leqslant q < \frac{Np}{N-(m-1)p}.$$

Докажем, что отсюда вытекает утверждение, что

$$\mathbb{W}_0^{m+n,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{W}_0^{n,q}(\Omega)$$

при условиях

$$N > mp, \quad 1 \leqslant q < \frac{Np}{N-mp}.$$

Доказательство-4

Но это следует, из того, что оператор вложения T

$$\mathrm{T} : \mathbb{W}_0^{m+n,p}(\Omega) \to \mathbb{W}_0^{m+n-1,p}(\Omega)$$

является ограниченным, а композиция ограниченного и компактного оператора является компактным оператором.

Теорема-2

Теорема

Пусть область $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *является ограниченной. Тогда имеет место компактное вложение*:

$$\mathbb{W}_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{L}^q(\Omega) \quad \textit{при} \quad 1 \leqslant q < \frac{Np}{N-kp}, \quad N > kp. \qquad (13)$$

Доказательство-1

При $k = 1$ вложение (13) имеет место в силу теоремы Реллиха–Кондрашова. Воспользуемся методом математической индукции. Предположим, что мы доказали утверждение теоремы при $k = n - 1 \geqslant 1$ докажем тогда, что оно имеет место и при $k = n$. Действительно, пусть

$$\{u_m(x)\}$$

— это ограниченная последовательность пространства $\mathbb{W}_0^{n,p}(\Omega)$.

Доказательство-2

Но поскольку оператор дифференцирования

$$\partial^\beta : \mathbb{W}_0^{n,p}(\Omega) \to \mathbb{W}_0^{n-1,p}(\Omega) \quad \text{при} \quad |\beta| \leqslant 1$$

является ограниченным, то последовательность

$$\left\{\partial^\beta u_n(x)\right\}$$

является ограниченной в

$$\mathbb{W}_0^{n-1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{L}^{q^*_{n-1}}(\Omega), \quad q^*_{n-1} = \frac{Np}{N-(n-1)p}, \quad N > (n-1)p.$$

Следовательно, последовательность $\{u_n(x)\}$ является ограниченной в

$$\mathbb{W}_0^{1,q^*_{n-1}}(\Omega) \quad q^*_{n-1} = \frac{Np}{N-(n-1)p}.$$

Доказательство-3

Но в силу теоремы Реллиха–Кондрашова эта последовательность является предкомпактной в $\mathbb{L}^q(\Omega)$ при

$$1 \leqslant q < q_n^* = \frac{N q_{n-1}^*}{N - q_{n-1}^*}.$$

Займемся арифметикой.

$$q_n^* = \frac{N q_{n-1}^*}{N - q_{n-1}^*} = \frac{N^2 p}{N - (n-1)p} \frac{1}{N - Np/(N-(n-1)p)} =$$
$$= \frac{N^2 p}{N^2 - N(n-1)p - Np} = \frac{N^2 p}{N^2 - npN} = \frac{Np}{N - np}.$$

Доказательство-4

Значит, произвольная ограниченная в $\mathbb{W}_0^{n,p}(\Omega)$ оказалась предкомпактной в $\mathbb{L}^q(\Omega)$ при

$$1 \leqslant q < \frac{Np}{N - np}.$$

Стало быть, соответствующий оператор вложения $\mathbb{W}_0^{n,p}(\Omega)$ в $\mathbb{L}^q(\Omega)$ является компактным.

Неравенство Морри

Теорема

Для функций $u(x) \in \mathbb{W}^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$ *имеет место неравенство:*

$$\|u\|_{0,\lambda} \leqslant c\|u\|_{1,p} \quad \textit{при} \quad N < p \quad \textit{и} \quad \lambda = 1 - \frac{N}{p}. \tag{14}$$

Доказательство-1

Сначала докажем неравенство Мори для функций из $\mathbb{C}^1(\mathbb{R}^N) \cap \mathbb{W}^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$. И прежде всего докажем следующее неравенство:

$$\frac{1}{R^N} \int\limits_{\mathrm{B}(R,x)} |u(x) - u(y)| \, dy \leqslant c \int\limits_{\mathrm{B}(R,x)} \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{N-1}} \, dy, \tag{15}$$

где

$$\mathrm{B}(R,x) \equiv \left\{ y \in \mathbb{R}^N : \ |y-x| \leqslant R \right\}.$$

Доказательство-2

☐ Итак, рассмотрим произвольную точку на границе единичного с центром в начале координат:

$$z \in \partial \mathrm{B}(0,1).$$

Для каждой такой точки справедливо следующее равенство:

$$u(x+rz)-u(x)=\int\limits_0^r dt\frac{d}{dt}u(x+tz),$$

из которого вытекает неравенство

$$|u(x+rz)-u(x)| \leqslant \int\limits_0^r dt\,|(z,\nabla)\,u(x+tz)| \leqslant \int\limits_0^r dt\,|\nabla u(x+tz)|\,.$$

Доказательство-3

Теперь проинтегрируем по $z \in \partial\mathrm{B}(0,1)$ последнее неравенство и получим

$$\int\limits_{\partial\mathrm{B}(0,1)} |u(x+rz)-u(x)|\,dS \leqslant \int\limits_0^r \int\limits_{\partial\mathrm{B}(0,1)} dtdS\,|\nabla u(x+tz)|\,.$$

Введем точку $y = x + tz$, тогда $t = |x-y|$. Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\int\limits_{\partial\mathrm{B}(0,1)} |u(x+rz)-u(x)|\,dS \leqslant \int\limits_0^r \int\limits_{\partial\mathrm{B}(0,1)} dt\,dS\frac{t^{N-1}}{t^{N-1}}\,|\nabla u(x+tz)| \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{\mathrm{B}(x,r)} dy\frac{1}{|x-y|^{N-1}}\,|\nabla u(y)| \leqslant \int\limits_{\mathrm{B}(x,R)} dy\frac{1}{|x-y|^{N-1}}\,|\nabla u(y)|\,. \tag{16}$$

Теперь умножим обе части последнего неравенства на r^{N-1} и проинтегрируем его по $r \in (0, R)$, тогда получим неравенство

$$\int\limits_0^R dr\, r^{N-1} \int\limits_{\partial \mathrm{B}(0,1)} |u(x+rz) - u(x)|\, dS \leqslant \frac{R^N}{N} \int\limits_{\mathrm{B}(x,R)} dy \frac{1}{|x-y|^{N-1}} |\nabla u($$

Итак, неравенство (15) доказано. ☒

Справедливо неравенство

$$|u(x)| \leqslant |u(x) - u(y)| + |u(y)|.$$

Проинтегрируем по шару $\mathrm{B}(x, 1)$ это неравенство, тогда получим неравенство

$$|u(x)| \leqslant c \int\limits_{\mathrm{B}(x,1)} \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{N-1}}\, dy + \int\limits_{\mathrm{B}(x,1)} |u(y)|\, dy.$$

Доказательство-5

Теперь заметим, что справедливы следующие неравенства:

$$\int\limits_{\mathrm{B}(x,1)} |u(y)|\,dy \leqslant c\|u\|_p,$$

$$\int\limits_{\mathrm{B}(x,1)} \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{N-1}}\,dy \leqslant \left(\int\limits_{\mathrm{B}(x,1)} |\nabla u(y)|^p\,dy\right)^{1/p} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{\mathrm{B}(x,1)} \frac{1}{|x-y|^{(N-1)p'}}\,dy\right)^{1/p'}.$$

Доказательство-6

Оценим последний интеграл:

$$\int\limits_{B(x,1)} \frac{1}{|x-y|^{(N-1)p'}}\,dy \leqslant c\int\limits_0^1 \frac{r^{N-1}}{r^{(N-1)p'}}\,dr =$$

$$= c\int\limits_0^1 \frac{1}{r^{\alpha}}\,dr < +\infty \quad \alpha = (N-1)(p'-1)\frac{N-1}{p-1} < 1,$$

поскольку $N < p$. Следовательно, мы пришли к неравенству

$$|u(x)| \leqslant c\|u\|_{1,p}$$

и отсюда сразу же получаем

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^N} |u(x)| \leqslant c\||\nabla u|\|_p. \tag{17}$$

Доказательство-7

Теперь пусть $x, y \in \mathbb{R}^N$ — это произвольные точки и рассмотрим шары радиуса $R = |x - y|$ с центрами в этих точках:

$$\mathrm{B}(x, R) \quad \text{и} \quad \mathrm{B}(y, R).$$

Очевидно, они пересекаются. Введем множество

$$\mathrm{U} = \mathrm{B}(x, R) \cap \mathrm{B}(y, R).$$

Имеет место неравенство треугольника:

$$|u(x) - u(y)| \leqslant |u(x) - u(z)| + |u(y) - u(z)|.$$

Доказательство-8

Умножим обе части этого равенства на $[\mathrm{meas}\{\mathrm{U}\}]^{-1}$ и проинтегрируем по U. Получим неравенство

$$|u(x)-u(y)| \leqslant \frac{1}{\mathrm{meas}\{\mathrm{U}\}} \int\limits_{\mathrm{U}} |u(x)-u(z)|\, dz + \frac{1}{\mathrm{meas}\{\mathrm{U}\}} \int\limits_{\mathrm{U}} |u(y)-u(z)|\, dz \tag{18}$$

Воспользуемся теперь равенством

$$\mathrm{meas}\{\mathrm{U}\} = cR^N,$$

где $c > 0$ и не зависит от R и, кроме того, от $x, y \in \mathbb{R}^N$. И тогда из (18) получим следующее неравенство:

$$|u(x) - u(y)| \leqslant \frac{c}{\mathrm{meas}\{\mathrm{B}(x,R)\}} \int\limits_{\mathrm{B}(x,R)} |u(x) - u(z)|\, dz +$$
$$+ \frac{c}{\mathrm{meas}\{\mathrm{B}(y,R)\}} \int\limits_{\mathrm{B}(y,R)} |u(y) - u(z)|\, dz. \tag{19}$$

Доказательство-9

Рассмотрим, например, первый интеграл в правой части этого неравенства:

$$\frac{1}{\operatorname{meas}\{\mathrm{B}(x,R)\}}\int\limits_{\mathrm{B}(x,R)}|u(x)-u(z)|\,dz \leqslant \frac{c}{R^N}\int\limits_{\mathrm{B}(x,R)}|u(x)-u(z)|\,dz \leqslant$$

$$\leqslant c\int\limits_{\mathrm{B}(x,R)}\frac{|\nabla u(z)|}{|x-z|^{N-1}}\,dz \leqslant c\left(\int\limits_{\mathrm{B}(x,R)}|\nabla u(z)|^p\,dz\right)^{1/p}\times$$

$$\times\left(\int\limits_{\mathrm{B}(x,R)}\frac{1}{|x-z|^{(N-1)p'}}\,dz\right)^{1/p'}\leqslant c|||\nabla u|||_p\left(\int\limits_0^R\frac{r^{N-1}}{r^{(N-1)p'}}\,dr\right)\leqslant$$

$$\leqslant cR^{\frac{N}{p'}-N+1}|||\nabla u|||_p \leqslant c|x-y|^{\lambda}|||\nabla u|||_p \quad \lambda = 1-\frac{N}{p}.$$

Доказательство-10

Таким образом, из (19) получим неравенство

$$|u(x) - u(y)| \leqslant c|x-y|^{\lambda} |||\nabla u|||_p \quad \lambda = 1 - \frac{N}{p}, \qquad (20)$$

т.е.

$$[u]_{\lambda} \equiv \sup_{x,y \in \mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^{\lambda}} \leqslant c|||\nabla u|||_p.$$

Отсюда и из (17) вытекает утверждение теоремы для функций $u(x) \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R}^N) \cap \mathbb{W}^{1,p}(\Omega)$.

Доказательство-11

Продолжим неравенство Морри на функции из класса $\mathbb{W}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Множество $\mathbb{C}^1(\mathbb{R}^N)\bigcap\mathbb{W}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ плотно в $\mathbb{W}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Поэтому для любого $u\in\mathbb{W}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ найдется сходящаяся в $\mathbb{W}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ последовательность $\{u_m\}\subset\mathbb{C}^1(\mathbb{R}^N)\bigcap\mathbb{W}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Возьмем произвольные натуральные числа $m_1,m_2\in\mathbb{N}$ и применим неравенство Морри к разности $u_{m_1}-u_{m_2}$:

$$\|u_{m_1}-u_{m_2}\|_{0,\lambda}\leqslant c\|u_{m_1}-u_{m_2}\|_{1,p}. \tag{21}$$

Доказательство-12

Отсюда сразу же получаем, что последовательность $\{u_m\} \subset \mathbb{C}^{0,\lambda}(\mathbb{R}^N)$ является фундаментальной в $\mathbb{C}^{0,\lambda}(\mathbb{R}^N)$. Следовательно,

$$u_m \to u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{C}^{0,\lambda}(\mathbb{R}^N).$$

Теперь перейдем в неравенстве (21) к пределу при $m_1 \to +\infty$ и получим неравенство

$$\|u - u_{m_2}\|_{0,\lambda} \leqslant c\|u - u_{m_2}\|_{1,p}.$$

Но тогда имеет место неравенство

$$\|u\|_{0,\lambda} \leqslant \|u - u_{m_2}\|_{0,\lambda} + \|u_{m_2}\|_{0,\lambda} \leqslant c\|u - u_{m_2}\|_{1,p} + c\|u_{m_2}\|_{1,p}.$$

Теперь перейдем к пределу при $m_2 \to +\infty$ и получим неравенство Морри, но уже для функций из $\mathbb{W}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Теорема-2

Теорема

Пусть область $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *является ограниченной и* $N < kp$, *тогда имеют место вложения*:

$$\mathbb{W}_0^{k,p}(\Omega) \subset \mathbb{C}^{k-[N/p]-1,\gamma}(\overline{\Omega}), \quad \gamma = \left[\frac{N}{p}\right] - \frac{N}{p} + 1, \quad \frac{N}{p} \notin \mathbb{Z}_+; \tag{22}$$

$$\mathbb{W}_0^{k,p}(\Omega) \subset \mathbb{C}^{k-[N/p]-1,\gamma}(\overline{\Omega}), \quad \gamma \in (0,1), \quad \frac{N}{p} \in \mathbb{Z}_+. \tag{23}$$

Доказательство-1

Докажем сначала (22). Пусть

$$\frac{N}{p} \notin \mathbb{Z}_+.$$

Тогда согласно следствию из теоремы 15 имеет место вложение

$$\mathbb{W}_0^{k,p}(\Omega) \subset \mathbb{W}_0^{k-m,q}(\Omega) \quad \text{при} \quad N > mp \quad \text{и} \quad q = \frac{Np}{N - mp}. \tag{24}$$

Выберем теперь $m \in \mathbb{Z}_+$ таким образом, чтобы

$$m + 1 > \frac{N}{p} > m.$$

Докажем, что при этом $q > N$.

Доказательство-2

Действительно, справедлива цепочка неравенств:

$$\frac{Np}{N-mp} > N \Rightarrow Np > N^2 - mpN \Rightarrow p > N - mp \Rightarrow \frac{N}{p} < m+1.$$

Из вложения (24) вытекает, что для любого мультииндекса α длины $|\alpha| \leqslant k-m-1$ имеем

$$\partial^\alpha u(x) \in \mathbb{W}_0^{1,q}(\Omega).$$

Теперь поскольку $q > N$ можно применить теорему 19 и получить вложение:

$$\partial^\alpha u(x) \in \mathbb{W}_0^{1,q}(\Omega) \subset \mathbb{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega}),$$

где

$$\gamma = 1 - \frac{N}{q} = 1 - \frac{N}{p} + m = 1 - \frac{N}{p} + \left[\frac{N}{p}\right].$$

Доказательство-3

Стало быть, приходим к выводу, что

$$u(x) \in \mathbb{C}^{k-[N/p]-1,\gamma}(\overline{\Omega}) \quad \text{при} \quad \gamma = 1 - \frac{N}{p} + \left[\frac{N}{p}\right].$$

Тем самым, вложение (22) доказано.
Докажем теперь вложение (23). Действительно, пусть

$$\frac{N}{p} \in \mathbb{Z}_{+}.$$

Положим

$$m = \left[\frac{N}{p}\right] - 1 = \frac{N}{p} - 1.$$

Тогда имеет место вложение

$$\mathbb{W}_0^{k,p}(\Omega) \subset \mathbb{W}_0^{k-m,q}(\Omega) \quad \text{при} \quad q = \frac{Np}{N-mp}.$$

Доказательство-4

С другой стороны,

$$q = \frac{Np}{N - mp} = \frac{Np}{N - N + p} = N.$$

Ниже мы докажем, что в этом случае имеет место вложение:

$$\mathbb{W}_0^{1,q}(\Omega) \subset \mathbb{L}^r(\Omega) \quad \text{при} \quad N \leqslant r < +\infty$$

Значит, имеем

$$\partial^\alpha u(x) \in \mathbb{L}^r(\Omega) \quad \text{при} \quad |\alpha| \leqslant k - m - 1 = k - \frac{N}{p}.$$

$$\partial^\beta u(x) \in \mathbb{W}_0^{1,r}(\Omega) \quad \text{при} \quad |\beta| \leqslant k - \frac{N}{p} - 1$$

Доказательство-5

Теперь можно воспользоваться неравенством Морри и получить, что

$$\partial^\alpha u(x) \in \mathbb{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega}) \quad \text{при} \quad \gamma \in (0,1) \quad \text{и} \quad |\alpha| \leqslant k - \frac{N}{p} - 1.$$

Следовательно,

$$u(x) \in \mathbb{C}^{k-\frac{N}{p}-1,\gamma}(\overline{\Omega}) \quad \text{при} \quad \gamma \in (0,1).$$