ЛЕКЦИЯ 7Б

Линейные функционалы (продолжение).

Некоторые следствия из теорем Банаха—Штейнгауза и Хана—Банаха.

Нерефлексивность некоторых функциональных пространств

1. Некоторые общие свойства линейных функционалов в банаховых пространствах

1. Доказать, что линейный функционал в банаховом пространстве непрерывен тогда и только тогда, когда его ядро замкнуто.

Необходимость условия $\ker f = \overline{\ker f}$ очевидна, поскольку из непрерывности функционала f сразу следует, что прообраз $\ker f$ замкнутого множества $\{0\}$ при отображении f должен быть замкнут. (Можно рассуждать и в терминах последовательностей: при $x_n \to x_0$, $\langle f, x_0\rangle = 0$ верно $\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x_0\rangle = 0$, т. е. точка, являющаяся предельной для ядра, принадлежит ядру. Но такое рассуждение не годится для более общего случая линейного топологического пространства.)

Осталось доказать, что из замкнутости ядра линейного функционала следует ограниченность этого линейного функционала.

Пусть $\ker f = \overline{\ker f}$. Как известно, непрерывность функционала равносильна его непрерывности в нуле, поэтому для разрывного (или, что равносильно, неограниченного) функционала найдётся такая последовательность элементов $x_n \to \theta$, что $|\langle f, x_n\rangle| > C$ при некотором $C > 0$. Но тогда и $y_n \equiv \frac{Cx_n}{\langle f, x_n\rangle} \to \theta$ и $\langle f, y_n\rangle = C$. При этом $z_n \equiv y_n - y_1 \to -y_1$ и, как нетрудно проверить, $z_n \in \ker f$. Но $y_1 \notin \ker f$, поскольку $\langle f, y_1\rangle = C \neq 0$, т. е. $\ker f$ незамкнуто. Полученное противоречие доказывает требуемое утверждение.

2. Доказать, что если два линейных функционала имеют одно и то же ядро: $\ker f_1 = \ker f_2$, то они пропорциональны.

Действительно, если оба ядра совпадают со всем пространством, то утверждение тривиально. В противном случае рассмотрим фиксированный элемент $x_0 \notin \ker f_1 = \ker f_2$ и произвольный элемент x. Наша задача установить, что

$$\langle f_2, x\rangle = \lambda\langle f_1, x\rangle \tag{1}$$

при некотором λ, не зависящем от x.

Заметим, что существует $\mu \neq 0$, при котором

$$\mu\langle f_1, x_0\rangle + \langle f_1, x\rangle = 0:$$

достаточно положить $\mu = \frac{-\langle f_1, x\rangle}{\langle f_1, x_0\rangle}$, поскольку числитель и знаменатель отличны от 0. Но тогда

$$\langle f_1, \mu x_0 + x\rangle = 0,$$

т. е. $\mu x_0 + x \in \ker f_1 = \ker f_2$. Следовательно,

$$\langle f_2, \mu x_0 + x\rangle = 0,$$

или

$$\mu\langle f_2, x_0\rangle + \langle f_2, x\rangle = 0.$$

Таким образом,

$$\langle f_2, x\rangle = -\mu\langle f_2, x_0\rangle = -\frac{-\langle f_1, x\rangle}{\langle f_1, x_0\rangle}\langle f_2, x_0\rangle = \frac{\langle f_2, x_0\rangle}{\langle f_1, x_0\rangle}\langle f_1, x\rangle,$$

что совпадает с (1), причём

$$\lambda = \frac{\langle f_2, x_0\rangle}{\langle f_1, x_0\rangle}.$$

Замечание. Мы существенно использовали (где?) тот факт, что размерность образа линейного функционала равна 1. Поэтому для произвольного линейного оператора приведённое доказательство не проходит. Рекомендуется обобщить рассуждение на случай линейных операторов с *общим* одномерным образом. Обратите внимание, что положить $\mu = \frac{A_1 x}{A_1 x_0}$ уже нельзя (это не числа!).

2. Конкретные сопряжённые пространства: $(l^p)^* \sim l^q$

3. Докажем один полезный факт.

Теорема. Пусть $p \in (1; +\infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда пространство $(l^p)^*$ изометрически изоморфно пространству l^q, т. е. существует такое взаимно однозначное линейное отображение $J : l^q \to (l^p)^*$, что для любого $y \in l^q$ верно $\|Jy\|_{(l^p)^*} = \|y\|_q$.

Доказательство.

Построим отображение J следующим образом. Если

$$y = (y_1, y_2, \ldots) \in l^q,$$

то положим для всех $x \in l^p$

$$\langle Jy, x\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} y_n x_n. \tag{2}$$

Требуется проверить следующие утверждения.

1) Выражение в правой части (2) имеет смысл при всех $x \in l^p$.

2) Функционал Jy, заданный формулой (2), является линейным.

3) Функционал Jy является ограниченным, и его норма равна $\|y\|_q$.

4) Отображение J является линейным.

5) Отображение J является обратимым, т. е. при $\tilde{y} \neq \tilde{\tilde{y}}$ функционалы $J\tilde{y}$ и $J\tilde{\tilde{y}}$ различны.

6) Отображение J является сюръективным, т. е. для любого $f \in (l^p)^*$ существует такое $y \in l^q$, что $Jy = f$.

Перейдём к доказательству этих утверждений.

1) В силу арифметического неравенства Гёльдера при любом $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$\sum_{n=1}^{k} |y_n x_n| \leqslant \left(\sum_{n=1}^{k} |y_n|^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{n=1}^{k} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \equiv \|y\|_q \|x\|_p,$$

поэтому в силу произвольности k верно неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} |y_n x_n| \leqslant \|y\|_q \|x\|_p, \tag{3}$$

откуда следует абсолютная сходимость ряда в правой части (2).

2) В силу теорем об арифметических действиях со сходящимися числовыми рядами при любых $\tilde{x}$, $\tilde{\tilde{x}} \in l^p$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ имеем

$$\langle Jy, \lambda\tilde{x} + \mu\tilde{\tilde{x}}\rangle \equiv \sum_{n=1}^{\infty} y_n(\lambda\tilde{x}_n + \mu\tilde{\tilde{x}}_n) = \lambda\sum_{n=1}^{\infty} y_n\tilde{x}_n + \mu\sum_{n=1}^{\infty} y_n\tilde{\tilde{x}}_n \equiv \lambda\langle Jy, \tilde{x}\rangle + \mu\langle Jy, \tilde{\tilde{x}}\rangle. \tag{4}$$

3) Ограниченность функционала Jy, а также оценка нормы $\|Jy\|_{(l^p)^*} \leqslant \|y\|_q$ следуют из неравенства (3). Покажем, что выполняется обратное неравенство. Для этого фиксируем $y \in l^q$ и положим

$$x = (|y_1|^{q-1} \operatorname{sgn} y_1, \ldots, |y_n|^{q-1} \operatorname{sgn} y_n, \ldots).$$

Заметим, что $x \in l^p$. В самом деле, при любом $k \in \mathbb{N}$ верно равенство

$$\sum_{n=1}^{k} |x_n|^p = \left\{q = \frac{p}{p-1}\right\} = \sum_{n=1}^{k} |y_n|^{\left(\frac{p}{p-1}-1\right)p} = \sum_{n=1}^{k} |y_n|^{\frac{p}{p-1}} = \sum_{n=1}^{k} |y_n|^q \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q \equiv \|y\|_q^q.$$

В силу произвольности k отсюда вытекает сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p$ и оценка

$$\|x\|_p^p \equiv \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \leqslant \|y\|_q^q. \tag{5}$$

Теперь заметим:

$$\langle Jy, x\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} y_n |y_n|^{q-1} \operatorname{sgn} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q = \|y\|_q^q. \tag{6}$$

Из (5) и (6) имеем

$$\frac{\langle Jy, x\rangle}{\|x\|_p} \geqslant \frac{\|y\|_q^q}{\|y\|_q^{\frac{q}{p}}} = \|y\|_q^{q\left(1-\frac{1}{p}\right)} = \|y\|^{q\frac{p-1}{p}} = \|y\|_q^{q\cdot\frac{1}{q}} = \|y\|_q, \tag{7}$$

что и доказывает неравенство $\|Jy\|_{(l^p)^*} \geqslant \|y\|_q$. Поскольку обратное неравенство уже установлено, получаем требуемое равенство $\|Jy\|_{(l^p)^*} = \|y\|_q$.

4) Линейность отображения J проверяется аналогично п. 2: при любом $x \in l^p$ имеем

$$\langle J(\lambda\tilde{y} + \mu\tilde{\tilde{y}}), x\rangle \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda\tilde{y}_n + \mu\tilde{\tilde{y}}_n\right) x_n = \lambda\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{y}_n x_n + \mu\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\tilde{y}}_n x_n \equiv \lambda\langle J\tilde{y}, x\rangle + \mu\langle J\tilde{\tilde{y}}, x\rangle,$$

т. е. $J(\lambda\tilde{y} + \mu\tilde{\tilde{y}}) = \lambda J\tilde{y} + \mu J\tilde{\tilde{y}}$.

5) Обратимость отображения J следует из его линейности и изометричности. В самом деле,

$$\|J\tilde{y} - J\tilde{\tilde{y}}\|_{(l^p)^*} = \|J(\tilde{y} - \tilde{\tilde{y}})\|_{(l^p)^*} = \|\tilde{y} - \tilde{\tilde{y}}\|_{l^q} > 0 \quad \text{при} \quad \tilde{y} \neq \tilde{\tilde{y}}.$$

Значит, $J\tilde{y} \neq J\tilde{\tilde{y}}$ в силу первого свойства нормы. Однако этот же результат легко получить и непосредственно. В самом деле, если $\tilde{y} \neq \tilde{\tilde{y}}$, существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $\tilde{y}_n \neq \tilde{\tilde{y}}_n$. Положим

$$x = e_n = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1}, 1, 0, \ldots) \in l^p. \tag{8}$$

Тогда в силу (2) получаем

$$\langle J\tilde{y}, x\rangle = \tilde{y}_n \neq \tilde{\tilde{y}}_n = \langle J\tilde{\tilde{y}}, x\rangle,$$

т. е. $J\tilde{y}$ и $J\tilde{\tilde{y}}$ суть заведомо разные функционалы.

6) Пусть $f \in (l^p)^*$. Положим

$$y_f = (y_1^f, y_2^f, \ldots), \quad y_n^f = \langle f, e_n\rangle, \tag{9}$$

где e_n задано формулой (8). Основную сложность представляет доказательство того факта, что элемент y, определённый формулой (9), действительно принадлежит l^q. Как только это будет доказано, в силу пп. 1—4 мы автоматически получим, что y_f задаёт линейный функционал Jy_f. При этом $Jy_f = f$. В самом деле, для $x = e_n$, $n \in \mathbb{N}$ равенство

$$\langle Jy_f, x\rangle = \langle f, x\rangle, \tag{10}$$

очевидно, выполняется в силу (9). Но тогда в силу линейности функционалов Jy_f и f равенство (10) верно и для всех *конечных* линейных комбинаций

$$\sum_{n=1}^{N} c_n e_n \tag{11}$$

элементов e_n. Наконец, поскольку любой элемент $x \in l^p$ может быть с произвольной точностью приближен элементами вида (11), то равенство (10) гарантируется непрерывностью обоих функционалов (см. задачу 5).

Итак, осталось лишь доказать, что $y_f \in l^q$. Поступим аналогично доказательству второй части п. 3. Именно, положим

$$x^{(k)} = (|y_1^f|^{q-1} \operatorname{sgn} y_1^f, \ldots, |y_k^f|^{q-1} \operatorname{sgn} y_k^f, 0, 0, \ldots).$$

Очевидно, $x^{(k)} \in l^p$ (в силу финитности). Имеем тогда:

$$\langle f, x^{(k)}\rangle = \sum_{n=1}^{k} (x^{(k)})_n \langle f, e_n\rangle = \sum_{n=1}^{k} |y_n^f|^{q-1} \operatorname{sgn} y_n^f \cdot y_n^f = \sum_{n=1}^{k} |y_n^f|^q. \tag{12}$$

С другой стороны,

$$\langle f, x^{(k)}\rangle \leqslant \|f\|_{(l^p)^*} \|x^{(k)}\|_p, \tag{13}$$

где

$$\|x^{(k)}\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |(x^{(k)})_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{n=1}^{k} |(x^{(k)})_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{n=1}^{k} |y_n^f|^{(q-1)p}\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left\{p(q-1) = p\left(\frac{p}{p-1} - 1\right) = p\frac{1}{p-1} = \frac{p}{p-1} = q\right\} = \left(\sum_{n=1}^{k} |y_n^f|^q\right)^{\frac{1}{p}},$$

или

$$\|x^{(k)}\|_p = \left(\sum_{n=1}^{k} |y_n^f|^q\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{14}$$

Из (12)—(14) получаем:

$$\sum_{n=1}^{k} |y_n^f|^q \leqslant \|f\|_{(l^p)^*} \left(\sum_{n=1}^{k} |y_n^f|^q\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{15}$$

Деля обе части неравенства (15) на $\left(\sum_{n=1}^{k} |y_n^f|^q\right)^{\frac{1}{p}}$, с учётом равенства $1-\frac{1}{p} = \frac{p-1}{p} = \frac{1}{q}$ получаем:

$$\left(\sum_{n=1}^{k} |y_n^f|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \|f\|_{(l^p)^*}. \tag{16}$$

Поскольку (16) верно для всех $k \in \mathbb{N}$, получаем:

$$\|y\|_q \equiv \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n^f|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \|f\|_{(l^p)^*} < +\infty.$$

В силу рассуждений в начале п. 6 это завершает доказательство теоремы.

Теорема доказана.

3. Следствие из теоремы Банаха—Штейнгауза

4. В лекции 7 была доказана теорема о поточечном пределе ограниченных линейных операторов («вторая теорема Банаха—Штейнгауза»). Однако часто в анализе удобнее «проследить» что-то на всюду плотном подмножестве банахова пространства. Поэтому полезно и такое утверждение.

Теорема (следствие из теоремы Банаха—Штейнгауза). Пусть:
1) T_n, $n \in \mathbb{N}$, — линейные операторы, действующие из банахова пространства X_1 в банахово пространство X_2, причём $\exists C > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ \|T_n\| \leqslant C$;
2) счётное множество $\{x_j\} \subset X_1$ таково, что его линейная оболочка $L\{x_j\}$ плотна в X_1 (иными словами, для любого $x \in X_1$ и любого $\varepsilon > 0$ найдётся такая конечная линейная комбинация y элементов x_j, что $\|x - y\| < \varepsilon$);
3) $\forall j \in \mathbb{N}$ существует предел $\lim_{n\to\infty} T_n x_j$, который мы обозначим через $T(x_j)$.

Тогда:

0) Оператор $T(x)$ однозначно продолжается с $\{x_j\}$ на $L\{x_j\}$, см. задачу 6.

1) для любого $x \in X_1$ существует предел $\lim_{n\to\infty} T_n x$, который мы обозначим через $\widetilde{T}(x)$; при этом на $L(\{x_j\})$ оператор $\widetilde{T}(x)$ совпадает с продолжением оператора $T(x)$ на $L(\{x_j\})$;

2) $\widetilde{T}(x)$ — линейный оператор;

3) оператор $\widetilde{T}$ непрерывен, причём $\left\|\widetilde{T}\right\| \leqslant C$.

Доказательство. 1) Докажем, что для любого $x \in X_1$ последовательность $\{T_n x\}$ фундаментальна. Для этого воспользуемся так называемым «$\frac{\varepsilon}{3}$-приёмом». Заметим сначала, что для произвольных $x \in X_1$, y из линейной оболочки x_j и любых $n, p \in \mathbb{N}$ верно

$$\|T_{n+p}x - T_n x\| \leqslant \|T_{n+p}x - T_{n+p}y\| + \|T_{n+p}y - T_n y\| + \|T_n y - T_n x\|. \tag{17}$$

Пусть теперь задано $\varepsilon > 0$. Выберем такое y из линейной оболочки x_j, что $\|x - y\| \leqslant \frac{\varepsilon}{3C}$. В силу условия 3), линейности операторов T_n и теоремы о пределе суммы существует предел $\lim_{n\to\infty} T_n y$. Следовательно, последовательность $\{T_n y\}$ фундаментальна, а поэтому существует такое $N \in \mathbb{N}$, что при всех $n > N$, $p \in \mathbb{N}$ верно неравенство $\|T_{n+p}y - T_n y\| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Итак, мы можем оценить сверху каждое из слагаемых в правой части (17) числом $\varepsilon/3$ (для первого и третьего слагаемых понадобится оценки нормы операторов $\|T_n\| \leqslant C$). Таким образом, при всех n, больших выбранного N, имеем $\|T_{n+p}x - T_n x\| < \varepsilon$, что и требовалось. Утверждение о том, что на линейной оболочке элементов x_j операторы T и $\widetilde{T}$ совпадают, очевидно. Далее, п. 2) и первая часть п. 3) теоремы следуют из второй теоремы Банаха—Штейнгауза, поскольку теперь мы имеем дело с поточечным пределом непрерывных линейных операторов. Оценка $\left\|\widetilde{T}\right\| \leqslant C$ следует из цепочки

$$\left\|\widetilde{T}\right\| = \sup_{\|x\|=1} \left\|\widetilde{T}x\right\| = \sup_{\|x\|=1} \left\|\lim_{n\to\infty} T_n x\right\|,$$

в которой в силу п. 1) $\|T_n x\| \leqslant C$.

Теорема доказана.

Замечание. Полезно сравнить доказательство 1) с другими примера применения «$\frac{\varepsilon}{3}$-приёма», например доказательством непрерывности равномерного предела непрерывных функций или заключительной частью доказательства теоремы Арцела (см. III семестр).

4. Применение теоремы Хана—Банаха и её следствий для доказательства нерефлексивности некоторых пространств

Сформулируем два следствия из теоремы Хана—Банаха, которые будут использованы в этом параграфе.

Следствие 1. Пусть $x \in X$, $x \neq \theta$. Тогда существует линейный функционал $f \in X^*$ такой, что $\|f\| = 1$, $\langle f, x\rangle = \|x\|$. (См. второе следствие, лекция 7.)

Следствие 2. Пусть X — банахово пространство. Тогда из сепарабельности X^* следует сепарабельность X. Иными словами, сопряжённое к несепарабельному банахову пространство не может быть сепарабельным. (См. четвёртое следствие, лекция 7.)

5. Установим нерефлексивность пространства l^1.

1) Легко установить сепарабельность пространства l^1 (см. задачу 18 из лекции 4а).

2) Пространство $m \equiv l^\infty$, являющееся сопряжённым к пространству l^1 (см. задачу 2), несепарабельно (см. лекцию 4).

Итак, в силу следствия 2 получаем, что $m^* \neq l^1$.

6. Нерефлексивность пространства $C[-1;1]$ мы покажем другим способом. Прежде всего заметим, что если пространство B рефлексивно, то для любого линейного функционала $f \in B^*$ найдётся элемент $x \in B$, для которого $\langle f, x\rangle = \|f\|_* \|x\|$ (здесь мы для большей ясности явно указали на норму в сопряжённом пространстве). Действительно, в силу следствия 1 из теоремы Хана — Банаха (см. начало этого параграфа), применённого к B^* и $(B^*)^* = B^{**}$, для каждого линейного функционала $f \in B^*$ существует линейный функционал $F \in B^{**}$ такой, что $\langle F, f\rangle_* = \|F\|_{**}\|f\|_*$. Но тогда в силу рефлексивности пространства B можно положить $x = J^{-1}F$, причём в силу изометричности отображения $J : B \to B^{**}$ верно $\|x\| = \|F\|_{**}$.

Рассмотрим теперь функционал $\langle f, x\rangle = \int_{-1}^{1} \operatorname{sgn} t\, x(t)\, dt$. Легко видеть, что $\|f\| = 2$. Действительно,

$$|\langle f, x\rangle| \leqslant \int_{-1}^{1} |x(t)|\, dt \leqslant 2\|x\|.$$

С другой стороны, для последовательности функций из $C[-1;1]$, заданной формулой

$$x_n(t) = \begin{cases} -1, & t \in [-1; -\frac{1}{n}]; \\ nt, & t \in [-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}]; \\ 1, & t \in [\frac{1}{n}; 1], \end{cases}$$

имеем $\langle f, x_n\rangle \to 2$ (проверить!). Далее, в силу тождества

$$\langle f, x\rangle = -\int_{-1}^{0} x(t)\, dt + \int_{0}^{1} x(t)\, dt,$$

теоремы об устойчивости знака непрерывной функции и очевидных оценок интегралов ясно, что равенство $\langle f, x\rangle = 2$ может достигаться при $\|x\| \leqslant 1$ только в случае, когда $x(t) = \operatorname{sgn} t$ (при $t \neq 0$), что невозможно в силу непрерывности функции $x(t) \in C[-1;1]$. С учётом доказанного в предыдущем абзаце утверждения это гарантирует нерефлексивность пространства $C[-1;1]$.

Отметим, что в примере -, в отличие от примера 5, мы даже не пытались описать пространство, сопряжённое к $C[-1;1]$ (не говоря уже о втором сопряжённом) и получили результат о нерефлексивности пространства $C[-1;1]$ лишь из общей теории. В следующем примере мы поступим «наиболее конструктивно», построив некоторый функционал из второго сопряжённого пространства X^{**} и доказав, что он не порождается никаким элементом исходного пространства X.

7. Вспомним, что $(L^1(-1;1))^* = L^\infty(-1;1)$, и установим, что $(L^\infty(-1;1))^* \supsetneq L^1(-1;1)$, т. е. пространство $L^1(-1;1)$ не является рефлексивным. Для этого мы построим пример функционала из $(L^\infty(-1;1))^*$, не порождаемого ни одним элементом $L^1(-1;1)$. Для этого построим для $L^\infty(-1;1)$ некоторый аналог дельта-функции.

1) Очевидно, $C[-1;1] \subset L^\infty(-1;1)$. Уточним, что́ именно здесь можно утверждать. Нам важно, что если некоторый элемент $f \in L^\infty(-1;1)$ имеет непрерывный представитель $f_0(x) \in$ $\in C[-1;1]$, то он не может иметь никакого другого непрерывного представителя. В самом деле, если бы существовал другой непрерывный представитель $f_1(x) \not\equiv f_0(x)$, то в силу теоремы об устойчивости знака непрерывной функции, применённой к $f_1(x) - f_0(x)$, мы бы получили, что $f_1(x)$ отличается от $f_0(x)$ на некотором интервале, т. е. множестве заведомо положительной меры. Следовательно, $f_0(x)$ и $f_1(x)$ не эквивалентны и поэтому не могут быть представителями одного элемента из $L^\infty(-1;1)$.

2) Из доказанного выше следует, что на подпространстве $C[-1;1] \subset L^\infty(-1;1)$ корректно определён функционал

$$\langle F, f\rangle = f_0(0),$$

где f_0 — непрерывный представитель элемента f. Очевидно, такой функционал является линейным и непрерывным на подпространстве $C[-1;1]$ (его норма равна единице). Следовательно, *в силу теоремы Хана—Банаха* он может быть продолжен на всё пространство $L^\infty(-1;1)$ с сохранением нормы.

3) Докажем, что не существует $g \in L^1(-1;1)$ такого, что

$$\forall f \in L^\infty(-1;1) \quad \langle F, f\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,d\mu.$$

Достаточно доказать, что такое представление функционала F невозможно даже на подпространстве $C[-1;1]$. Для доказательства от противного рассмотрим последовательность

$$f_n(x) = \begin{cases} nx+1, & x \in \left[-\frac{1}{n}; 0\right], \\ -nx+1, & x \in \left[0; \frac{1}{n}\right], \\ 0, & x \in [-1;1] \setminus \left[-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right]. \end{cases}$$

Очевидно, что $f_n \in C[-1;1]$ и что при всех n верно $\langle F, f_n\rangle = 1$. Заметим также, что при всех n имеют место неравенства $0 \leqslant f_n(x) \leqslant 1$.

Тогда в силу свойств интеграла Лебега имеем

$$1 = |1| = \left|\int_{-1}^{1} f_n(x)g(x)\,d\mu\right| = \left|\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f_n(x)g(x)\,d\mu\right| \leqslant \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} |f_n(x)g(x)|\,d\mu \leqslant \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} |g(x)|\,d\mu \to 0, \quad (18)$$

где предельное соотношение вытекает из абсолютной непрерывности интеграла Лебега.

Полученное противоречие доказывает невозможность существования $g(x) \in L^1(-1;1)$ с указанным свойством.

4. Пример неэквивалентности слабой и *-слабой сходимости

8. Очевидно, нам потребуется рассмотреть некоторое нерефлексивное пространство. Для этого придётся лишь слегка дополнить рассуждения из предыдущего примера. Действительно, соотношение (18), верное для всякой функции $g(x) \in L^1(-1;1)$, показывает, что имеет место *-слабая сходимость

$$f_n(x) \overset{*}{\rightharpoonup} 0 \quad \text{в} \quad L^\infty(-1;1).$$

Однако в силу полученного ранее соотношения $\langle F, f_n \rangle = 1$ получаем, что

$$f_n(x) \not\rightharpoonup 0 \quad \text{в} \quad L^\infty(-1;1).$$

Более того, поскольку слабая сходимость влечёт *-слабую, то предположение о том, что $f_n(x) \rightharpoonup f(x) \neq 0$ в $L^\infty(-1;1)$, влечёт $f_n(x) \overset{*}{\rightharpoonup} f(x) \in L^\infty(-1;1)$, где $f(x) \neq 0$. Но последовательность не может иметь более одного *-слабого предела (см. следующий пример), а следовательно, предположение о слабой сходимости последовательности $\{f_n(x)\}$ приводит нас к противоречию.

9. Отделимость *-слабой топологии (единственность *-слабого предела). Докажем, что если

$$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f, \quad f_n \overset{*}{\rightharpoonup} \tilde{f},$$

где все рассматриваемые функционалы принадлежат пространству X, X — банахово пространство, то $\tilde{f} = f$.

Действительно, для всякого $x \in X$ имеем

$$\langle f_n, x \rangle \to \langle f, x \rangle, \quad \langle f_n, x \rangle \to \left\langle \tilde{f}, x \right\rangle.$$

Следовательно (в силу отделимости метрической топологии в пространстве чисел $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) для всякого $x \in X$ верно равенство $\langle f, x \rangle = \left\langle \tilde{f}, x \right\rangle$, но это и означает не что иное, как равенство функционалов f и $\tilde{f}$.

Замечание. В лекции 4б мы установили отделимость метрической топологии в произвольном метрическом пространстве, что эквивалентно (см. задачу 3 к лекции 5а) единственности предела последовательности в произвольном метрическом пространстве. Как мы видели в лекции 5в, для топологического пространства ситуация, вообще говоря, совершенно иная. Поэтому в данном случае мы не могли сослаться на единственность предела, доказанную для метрических пространств.

Задачи для самостоятельного решения

0. Ответить на вопросы по тексту.
1. Привести пример «неколлинеарных» линейных операторов, ядра которых совпадают.
2. Доказать, что $(l^1)^*$ изометрически изоморфно l^∞.
3. Доказать отделимость слабой топологии (единственность слабого предела).

4. В каком месте не пройдут рассуждения п. 7, если вместо пространств L^1, L^∞ рассматривать L^p, L^q, $p > 1$?

5. Пусть $f, g \in C(M_1, M_2)$ — непрерывные отображения метрического пространства M_1 в метрическое пространство M_2 (с областью определения M_1), и пусть их значения совпадают на некотором всюду плотном в M_1 множестве. Доказать, что f и g совпадают всюду на M_1.

6*. Доказать, что оператор $T(x)$, первоначально заданный на $\{x_j\}$ в условии следствия из теоремы Банаха—Штейнгауза, однозначно продолжается на совокупность $L\{x_j\}$ всех линейных комбинаций элементов x_j. (*Предостережение.* Если среди элементов системы $\{x_j\}$ есть линейно зависимые, то проверка корректности такого продолжения не тривиальна.)