ЛЕКЦИЯ 1А

Свойства измеримых множеств. Примеры вычисления меры. Отношение эквивалентности

0. Тождества теории множеств (продолжение)

Обсудим ещё некоторые утверждения теории множеств. Пусть $A \subset P$, $B \subset P$. Тогда

$$A \setminus B = A \cap (P \setminus B), \tag{1}$$

$$A \triangle B = (P \setminus A) \triangle (P \setminus B), \tag{2}$$

$$P \setminus (P \setminus A) = A. \tag{3}$$

Также нам понадобится, что

$$A \subset B \quad \Longrightarrow \quad (P \setminus B) \subset (P \setminus A). \tag{4}$$

Докажем для примера формулы (1) и (4). Имеем для (1): если $x \in A \setminus B$, это означает, что $x \in A$ (и, тем самым, $x \in P$), но $x \notin B$. Следовательно, $x \in A$ и $x \in P \setminus B$, откуда следует вложение $A \setminus B \subset A \cap (P \setminus B)$. Для доказательства обратного вложения заметим, что при $x \in A \cap (P \setminus B)$ имеем, в частности, $x \in A$, $x \notin B$.

Несложно доказать и (4). Воспользуемся методом «от противного». Пусть

$$x \in P \setminus B, \tag{5}$$

но

$$x \notin P \setminus A. \tag{6}$$

Из (5) получаем, что $x \in P$. Но тогда из (6) следует, что $x \in A$, откуда по условию $x \in B$, что противоречит (6).

Верно вложение

$$(A_1 \cup A_2) \triangle (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2). \tag{7}$$

В самом деле, пусть $x \in (A_1 \cup A_2) \triangle (B_1 \cup B_2)$, т. е. x принадлежит ровно одному из множеств $A_1 \cup A_2$, $B_1 \cup B_2$. Предположим для определённости, что $x \in A_1 \cup A_2$, $x \notin B_1 \cup B_2$. Тогда x не является элементом ни одного из множеств B_1, B_2, но является элементом хотя бы одного из множеств A_1, A_2. Но в этом случае x содержится хотя бы в одном из множеств $A_1 \triangle B_1$, $A_2 \triangle B_2$, а следовательно, содержится в их объединении.

Нам требуется и такое утверждение: если $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, то

$$B_1 \cap B_2 \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2). \tag{8}$$

В самом деле, если $B_1 \cap B_2 = \varnothing$, то вложение (8) имеет место просто в силу соглашения о том, что пустое множество считается подмножеством любого множества (в том числе пустого). Ранее и в дальнейшем это замечание опущено. Если же это пересечение непусто, рассмотрим произвольный его элемент x. Возможны два случая: либо x не принадлежит ни одному из множеств A_1, A_2, либо он принадлежит ровно одному из них. В обоих случаях, очевидно, $x \in (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$. Случай $x \in A_1$, $x \in A_2$ невозможен, потому что эти множества по условию не пересекаются.

Кроме того,

$$A \subset B \cup (A \triangle B),$$

что предлагается доказать читателю.

1. Основные свойства меры Лебега

Мера Лебега обладает следующими важнейшими свойствами, которыми мы будем пользоваться:

1) семейство измеримых множеств замкнуто относительно операций разности, симметрической разности, счётного объединения, счётного пересечения и дополнения (допускается мера, равная $+\infty$);

2) мера Лебега является счётно-аддитивной на этом множестве;

3) мера Лебега полна, т. е. всякое множество, внешняя мера которого равна 0, измеримо, и его мера Лебега равна 0;

4) мера Лебега непрерывна относительно монотонного предельного перехода (это утверждение, не доказанное на основной лекции, будет доказано здесь).

2. Обоснование необходимости «сужения» внешней меры до меры Лебега. Существование неизмеримых множеств

Как показывает пример (см. Колмогоров, Фомин «Элементы теории функций и функционального анализа», гл. V, § 1, окончание, или Гелбаум, Олмстед «Контрпримеры в анализе», гл. 8, § 11), существуют множества, предположение об измеримости которых противоречит требованию 2) из предыдущего параграфа. Значит, внешняя мера, будучи определена для всех множеств, не является счётно-аддитивной, и её необходимо «ограничить» на семейство измеримых по Лебегу множеств.

3. Некоторые классы измеримых множеств

0. Любое конечное или счётное множество точек (на плоскости, прямой, в пространстве…) измеримо и имеет меру 0. В самом деле, конечное или счётное множество точек на плоскости $\{x_n\}$ может быть покрыто системой квадратов (отрезков, кубов…) $\{Q_n\}$, где $m(Q_n) = \frac{1}{2^n}\varepsilon$.

Таким образом, с учётом произвольности ε, $\mu^*(\{A_n\}) = 0$, откуда в силу полноты меры Лебега и вытекает сформулированное утверждение. Следствие: множество с положительной (ненулевой) лебеговой мерой несчётно (ВНИМАНИЕ! обратное неверно: см. задачи 6, 7).

1. Все открытые и замкнутые множества измеримы. (См. задачу 9.)

2. Назовём борелевскими множествами (на прямой или плоскости) все множества, которые можно получить из открытых и замкнутых множеств конечными или счётными применениями операций объединения, пересечения, разности. Очевидно, борелевские множества измеримы. (Можно доказать, что ими все измеримые множества не исчерпываются.)

4. Пример множества, измеримого по Лебегу и неизмеримого по Жордану

Приведём лишь одну из многочисленных возможных иллюстраций того факта, что мера Лебега — понятие гораздо более общее, чем мера Жордана. Мера Жордана — это обычное «школьное» понятие площади, которое аккуратно вводится так. Сначала вводится площадь прямоугольника, затем — с помощью «разрезаний», т. е. понятия равносоставленности, — треугольника и любого многоугольника (с помощью разрезания на треугольники). Рассмотрим для множества A все многоугольники, вписанные в A (т. е. такие, внутренность которых вместе с границей вложена в A), и описанные вокруг A (т. е. такие, что их внутренность вместе с границей содержит A). Если точная верхняя грань площадей вписанных многоугольников равна точной нижней грани площадей описанных, то это общее значение и считается *площадью*, или *мерой Жордана*, множества A.

Положим теперь A равным множеству всех рациональных точек единичного квадрата Q. Тогда в силу результатов лекции 0а множество A счётно и имеет меру Лебега, равную нулю (см. § 3). С другой стороны, оно всюду плотно заполняет квадрат (это означает, что любой круг, вложенный в Q, пересекается с A). Следовательно, все описанные многоугольники содержат квадрат Q. С другой стороны, в A можно вписать лишь пустой многоугольник (т. к. все прочие содержат хотя бы одну точку, не являющуюся рациональной). Следовательно, упомянутые точные грани равны 0 и 1 и мера Жордана множества A не определена.

5. Некоторые измеримые множества и их мера. Множество Кантора

1. Множество Кантора замкнуто, имеет меру 0, равномощно отрезку. (См. задачу 6.) Таким образом, *любое счётное множество точек имеет лебегову меру 0, но обратное неверно.*

2. Отрезок и прямая имеет плоскую меру 0. (См. § 6.)

3. Доказать, что A борелево, и вычислить его меру, если

а) $A = \cup_{n=1}^{\infty}(n - \frac{1}{3^n}; n + \frac{1}{3^n}]$;

б) $A = \cup_{n=1}^{\infty}[n^n; n^n + \frac{1}{\ln(n+1)}]$;

в) $A = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{R}$;

г) $A = ((0; 3] \otimes [1; 2)) \setminus (\mathbb{Q} \otimes \mathbb{Q})$;

д) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos x \in \mathbb{Q}\} \otimes (0; +\infty)$.

Рассмотрим сначала пункты а) и б). Тот факт, что рассмотренные в них множества суть борелевы, очевидным образом следует из их конструкции: в обоих случаях речь идёт о счётных объединениях промежутков. Для вычисления меры достаточно воспользоваться счётной аддитивностью меры и значением меры (длины) промежутка: $\mu([a; b]) = b - a$ при $a \leqslant b$ (аналогично для остальных типов промежутков). Поскольку в каждом случае промежутки не пересекаются, достаточно найти сумму их мер (длин). В п. а) получаем: $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} = 1$, во втором же случае имеет расходящийся ряд и $\mu(A) = +\infty$. В следующем примере рассматриваемое множество получается исключением из плоскости объединения счётного числа прямых. Поскольку каждая прямая имеет плоскую меру 0 (см. ниже раздел 6), а в силу счётной аддитивности то же можно сказать об их объединении, получаем, что $\mu(A) = \mu(\mathbb{R}^2) - 0 = +\infty$. По аналогичным причинам мера множества, рассмотренного в п. г), равна 3. В самом деле, из прямоугольника удаляются все рациональные пары чисел, а таких пар счётное множество (оно получается как счётное множество счётных множеств: при любом $r_1 \in \mathbb{Q}$ множество пар вида (r_1, r_2) счётно). Осталось лишь учесть, что счётное множество имеет лебегову меру 0, как указано выше в § 3. Для решения п. д) достаточно заметить, что рассматриваемое множество представляет собой счётное объединение полупрямых. В самом деле, при каждом $r \in \mathbb{Q}$ множество $\{x \in \mathbb{R} \mid \cos x = r\}$ счётно, а поэтому $\{x \in \mathbb{R} \mid \cos x \in \mathbb{Q}\}$ счётно как объединение счётного семейства счётных множеств. Следовательно, искомая мера равна 0.

4. Доказать, что множество A измеримо, и найти его меру, если $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0, 0 < y < e^{-x}|\sin$

Для решения этой задачи достаточно учесть счётную аддитивность меры и результат задачи 3 (ниже, в задачах для самостоятельного решения). Тогда имеем:

$$\mu(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\pi k}^{\pi(k+1)} e^{-x} |\sin x| \, dx = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\pi k} \int_0^{\pi} e^{-x} \sin x \, dx =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\pi k} \frac{1 + e^{-\pi}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}}.$$

6. Связь лебеговых мер в евклидовых пространствах разной размерности

1. Пусть P — $(n-1)$-мерная координатная плоскость в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Тогда любое её подмножество имеет нулевую μ_n-меру.

В самом деле, рассмотрим координатную плоскость $P = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_n = c\}$. Оценим внешнюю меру множества P. В качестве покрытия возьмём «слои», представляющие собой параллелепипеды $\Pi_k = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid |x_i| \leqslant k, i = 1, 2, \dots, n-1, |x_n - c| \leqslant \frac{\varepsilon}{(2k)^{n-1} 2^k}\}$. Легко видеть, что мера (объём) каждого такого параллелепипеда равна $\varepsilon / 2^k$, откуда $\mu^*(P) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m(\Pi_k) = \varepsilon$. В силу произвольности ε заключаем, что $\mu^*(P) = 0$. А тогда в силу полноты меры Лебега (см. лекцию 1) P измеримо и $\mu(P) = 0$.

Отсюда следует, что и любое подмножество P' указанной плоскости имеет меру 0. В самом деле, любое покрытие плоскости есть покрытие любого её подмножества, поэтому рассуждение применимо и к P'. Так, например, плоская мера Лебега отрезка равна 0.

2. Доказать, что существует μ_2-измеримое подмножество $\mathbb{R}^2$, проекции которого на координатные оси μ_1-неизмеримы.

Ранее было указано, что неизмеримые множества существуют. В частности, существует хотя бы одно неизмеримое множество на прямой. Обозначим одно из таких множеств символом A и построим множества $B_1 = \{(x, y) \mid x \in A, y = 0\}$ и $B_2 = \{(x, y) \mid y \in A, x = 0\}$. Тогда множество $B = B_1 \cup B_2$ удовлетворяет условию. В самом деле, само множество B измеримо как множество на плоскости, т. к. представляет собой объединение двух подмножеств координатных «плоскостей». В то же время, каждая из проекций, имеющая вид $A \cup \{0\}$, представляет собой, очевидно, неизмеримое (линейной мерой Лебега) множество.

7. Непрерывность меры Лебега

Теорема 1. Пусть A_1, A_2, A_3 — измеримые множества, причём

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots \quad \text{и} \quad A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Тогда A измеримо и

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n). \tag{9}$$

Доказательство. Измеримость множества A (где допускается $\mu(A) = +\infty$) следует из п. 1) § 1. Осталось проверить равенство (9).

Поскольку до сих пор у нас не было никакой теоремы про недизъюнктное объединение, попытаемся свести ситуацию к дизъюнктному объединению. (Более того, это нередко применяемый подход.) Положим $A_0 = \varnothing$ и введём в рассмотрение множества

$$\widetilde{A_k} = A_k \setminus A_{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{10}$$

Докажем следующие 3 факта:
1) $\widetilde{A_n} \cap \widetilde{A_{n+p}} = \varnothing$, $n, p \in \mathbb{N}$;
2) $A_n = \sqcup_{k=1}^{n} \widetilde{A_k}$, $n \in \mathbb{N}$;
3) $A = \sqcup_{k=1}^{\infty} \widetilde{A_k}$.
Первый факт следует из того, что

$$\widetilde{A_{n+p}} = A_{n+p} \setminus A_{n+p-1} \quad \text{и} \quad A_{n+p-1} \supset A_n \supset \widetilde{A_n},$$

где при $p = 1$ первое вложение после слова «и» обращается в равенство. Рассмотрим второй факт. Сразу заметим, что дизъюнктность объединения следует из 1). Далее, вложение «справа налево» следует из цепочки

$$\widetilde{A_k} \subset A_k \subset A_n, \quad k = 1, \dots, n.$$

Осталось доказать, что

$$A_n \subset \sqcup_{k=1}^{n} \widetilde{A_k}. \tag{11}$$

Но при $x \in A_n$ существует такое $k \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, что $x \in A_k$, $x \notin A_{k-1}$. (Действительно, в этом случае среди множеств $A_1, \ldots, A_n$ найдётся хотя бы одно, содержащее x, а значит, найдётся и множество с наименьшим номером, содержащее x. Здесь возможно $k-1=0$.) Тогда $x \in \widetilde{A_k}$ и поэтому выполнено (11).

Теперь легко видеть, что 3) следует из соотношений $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ и 2) (а дизъюнктность попрежнему следует из 1)). Тогда из 2) и 3) с использованием конечной и счётной аддитивности меры Лебега имеем

$$\mu(A_n) = \sum_{k=1}^{n} \mu(\widetilde{A_k}), \quad \mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\widetilde{A_k}),$$

и требуемый результат вытекает из определения суммы ряда.

Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть B_1, B_2, B_3 — измеримые множества, причём

$$B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \ldots \quad \text{и} \quad B = \cap_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Тогда B измеримо и

$$\mu(B) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n). \tag{12}$$

Доказательство. Перейдём к дополнениям, положив $A = B^c \equiv P \setminus B$, $A_n = B_n^c$. Тогда, как следует из (4) и формул де Моргана, для множеств $A_1, \ldots, A$ выполняются условия теоремы 1. Следовательно, имеем

$$\mu(B^c) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n^c), \tag{13}$$

причём в силу конечной аддитивности меры *при условии* $\mu(P) < +\infty$ имеем

$$\mu(B) = \mu(P) - \mu(B^c), \quad \mu(B_n) = \mu(P) - \mu(B_n^c). \tag{14}$$

Тогда из (13), (14) и теорем о пределах получаем

$$\mu(B) = \mu(P) - \mu(B^c) = \mu(P) - (\lim_{n\to\infty} \mu(B_n^c)) = \mu(P) - (\lim_{n\to\infty} (\mu(P) - \mu(B_n))) = \\ = \mu(P) - \mu(P) + \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n). \tag{15}$$

Отметим, что в доказательстве теоремы 2 использовалось условие $\mu(P) < +\infty$ (в отличие от теоремы 1!). Это условие здесь существенно. В самом деле, рассмотрим пример $B_n = [n; +\infty)$ с мерой Лебега на прямой («убегающие лучи»). Тогда $B = \varnothing$, но $\mu(B_n) = +\infty$ и соотношение (12) не выполняется.

8. Отношение эквивалентности. Структура открытого множества на прямой

Пусть дано некоторое множество X.

Определение 1. Говорят, что на множестве X задано *отношение*, если в декартовом произведении $X \times X \equiv \{(a, b) \mid a \in X, b \in X\}$ выбрано некоторое подмножество упорядоченных пар $Q \subset X \times X$.

Определение 2. Говорят, что на множестве X задано *отношение эквивалентности*, если в декартовом произведении $X \times X \equiv \{(a, b) \mid a \in X, b \in X\}$ выбрано некоторое подмножество упорядоченных пар $R \subset X \times X$, удовлетворяющее следующим условиям:
1) для любого $a \in X$ верно: $(a, a) \in R$ (иными словами, любой элемент эквивалентен самому себе);
2) для любых $a \in X$, $b \in X$ из условия $(a, b) \in R$ следует $(b, a) \in R$ (эквивалентность не зависит от порядка);
3) для любых $a \in X$, $b \in X$, $c \in X$ из $(a, b) \in R$, $(b, c) \in R$ следует $(a, c) \in R$ (транзитивность эквивалентности).

Если теперь записать $(a, b) \in R$ в более привычном виде $a \sim b$, то только что сформулированные условия могут быть кратко записаны в виде
1) $\forall a \in X$ $a \sim a$;
2) $\forall a \in X$, $\forall b \in X$ $a \sim b \Rightarrow b \sim a$;
3) $\forall a \in X$, $\forall b \in X$, $\forall c \in X$ $a \sim b$, $b \sim c \Rightarrow a \sim c$.

В качестве «крайних» примеров можно привести следующие: а) будем считать каждый элемент множества X эквивалентным лишь самому себе (например, равенство чисел), б) будем считать все его элементы эквивалентными друг другу. В качестве более осмысленного примера можно предложить в) отношение эквивалентности на множестве натуральных чисел, при котором эквивалентными считаются любые два числа одинаковой чётности.

Подчеркнём, что любое отношение, удовлетворяющее условиям 1)—3), называется отношением эквивалентности, вне зависимости от того, соответствует ли оно некоторой «эквивалентности» в обычном понимании или нет. Однако сама по себе конструкция отношения и, в частности, отношения эквивалентности не интересна. Смысл в таком общем понятии, как и, пожалуй, во всех общих и абстрактных понятиях математики, — в возможности доказать разом, «автоматически» различные факты. В данном случае очень важен факт, указанный в задаче 13, — разбиение множества X на *непересекающиеся* классы эквивалентности.

Легко привести примеры отношений, удовлетворяющих лишь свойству транзитивности, — это отношение «меньше» для чисел или «вложено и не совпадает» для множеств. Если допустить равенство, то отношения становятся рефлексивными.

Наша ближайшая цель — изучить структуру открытых множеств на прямой. С помощью отношения эквивалентности мы сейчас докажем теорему, из которой будет легко следовать измеримость любого открытого множества на прямой.

Теорема 3. Любое открытое множество O на прямой представимо в виде конечного или счётного объединения непересекающихся интервалов (среди которых могут быть бесконечные).

Доказательство. Тот факт, что подобное объединение является не более чем счётным, следует из доказанного ранее факта существования на любом интервале (и тем более — на бесконечном промежутке) хотя бы одной рациональной точки. Тем самым мы можем (см. предыдущую лекцию) установить ВОС между подмножеством множества рациональных чисел и рассматриваемым интервалом, поставив в соответствие каждому интервалу некоторую рациональную точку на нём[1]. Тогда, поскольку интервалы не пересекаются, соответствие действительно будет взаимно однозначным.

Осталось, собственно, доказать, что любое открытое множество на прямой является объединением некоторого семейства непересекающихся интервалов. Для этого построим на $X \equiv O$ отношение эквивалентности и воспользуемся результатом задачи 13 о разбиении X на непересекающиеся подмножества. Именно, будем считать, что $x \sim y$ (где $x, y \in O$) тогда и только тогда, когда отрезок $[x; y]$, где $x \leqslant y$, или $[y; x]$, где $x \geqslant y$, целиком содержится в O. (Вырожденный в точку отрезок допускается, «отрезок» вроде $[2; 1] = \varnothing$ — нет, иначе все числа из O пришлось бы считать эквивалентными.)

Условия 1), 2) проверяются элементарно. Несложно проверить и условие 3), разобрав все 6 возможных случаев взаимного расположения точек (каждый случай допускает нестрогие неравенства). Итак, в силу задачи 13, множество O оказалось разбитым на непересекающиеся подмножества — классы эквивалентности. Докажем, что каждый такой класс представляет собой связное открытое множество (и, тем самым, является интервалом, открытым лучом или всей прямой). Действительно, связность автоматически вытекает из самого введённого нами отношения. Тем самым, у произвольно взятого класса (выберем некоторый класс O_α) есть не более двух границ: $\inf O_\alpha$ и $\sup O_\alpha$. Рассмотрим для определённости точную нижнюю грань. Если $\inf O_\alpha = -\infty$, утверждение об открытости O_α «снизу» доказано. Пусть теперь $\inf O_\alpha = a > -\infty$. Надо доказать, что $a \notin O_\alpha$. Действительно, в противном случае имели бы, что a входит в O вместе с некоторой окрестностью $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ (т. к. множество O открыто). Но тогда $a - \varepsilon/2 \in O$ и, в силу нашего определения эквивалентности, $a - \varepsilon/2 \sim a$ и, тем самым, $a - \varepsilon/2 \in O_\alpha$. Но $a - \varepsilon/2 < \inf O_\alpha$. Полученное противоречие доказывает, что $a \notin O_\alpha$. Проведя аналогичное рассуждение для точной верхней грани, получаем, что O_α — открытый промежуток.

Теорема доказана.

Из данной теоремы в силу п. 1 § 1 следует, что любое открытое множество на прямой измеримо. В более общем случае открытых множеств в $\mathbb{R}^N$ это тоже верно. (См. задачу 9.)

Задачи для самостоятельного решения

При решении задач можно пользоваться утверждениями, сформулированными в лекции, кроме того, которое, собственно, требуется доказать.

[1] Здесь, как и в некоторых местах ранее, мы пользуемся т. н. аксимой выбора, но не будем заострять на этом внимания.

1. Доказать тождества и вложения, сформулированные в разделе 0 и не доказанные в тексте. Доказать также следующие утверждения, где $A, B, \ldots$ — произвольные подмножества некоторого множества P:

1) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$, причём если объединение в левой части дизъюнктно, то тем же свойством обладает и объединение в правой части;

2) $A \triangle B = (A \setminus B) \sqcup (B \setminus A)$ (таким образом, здесь требуется доказать и тот факт, что объединение в правой части всегда дизъюнктно);

3) $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$;

4) $A \cup B = (A \setminus B) \sqcup (A \cap B) \sqcup (B \setminus A)$.

2*. Завершить формулу и доказать получившееся утверждение:

1) $A = (A \setminus B) \cup \ldots$;

2) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup \ldots$.

3. Назовём *подграфиком* функции $f(x)$ множество $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in D(f), 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$, где $D(f)$ — область определения функции $f(x)$. Доказать, что подграфик неотрицательной функции, определённой на отрезке $[a; b]$ и интегрируемой по Риману, измерим по Лебегу и его мера равна $\int_a^b f(x)\,dx$. (Указание. Можно воспользоваться суммами Дарбу.)

4. (Продолжение.) Обобщить это утверждение на случай функций, интегрируемых по Риману в несобственном смысле (для интегралов первого и второго рода).

5. Доказать, что множество A измеримо, и найти его меру, если

а) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}, 0 \leqslant y < \frac{a^2}{a^2+x^2}\}$, $a = \mathrm{const} > 0$;

б) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < 1, 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\}$;

в) $A = \cup_{n=1}^{\infty}\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [n; n+1), 0 \leqslant y \leqslant \frac{(x-n)^n}{n}\}$.

6. Рассмотрим *множество Кантора.* Оно строится следующим образом. Берётся отрезок $[0; 1]$. На первом шаге из него исключается интервал — средняя треть. На втором шаге из двух оставшихся отрезков $\left[0; \frac{1}{3}\right]$ и $\left[\frac{2}{3}; 1\right]$ также исключаются средние трети, и так далее. То, что оастанется, и называется множеством Кантора.

1*) Записать явную формулу для множества Кантора.

2) Доказать, что множество Кантора непусто.

3) Найти меру множества Кантора.

7*. (Продолжение.) Доказать, что множество Кантора равномощно отрезку. (*Указание.* Можно воспользоваться троичной записью действительных чисел.)

Замечание. Ранее мы показали, что всякое счётное множество точек на прямой (на плоскости, в пространстве...) имеет лебегову меру 0. Данная задача показывает, что **счётность множества A — достаточное, но вовсе не необходимое условие того, что** $\mu(A) = 0$.

8*. (Продолжение.) Найти меру множества всех тех чисел отрезка $[0; 1]$, в стандартном десятичном разложении которых отсутствует цифра 5.

9*. Можно ли указать замкнутое подмножество A замкнутого единичного квадрата, мера μ_2 которого равна 1 и которое не совпадает со всем квадратом? (Указание. Рассмотрите квадрат как метрическое пространство и воспользуйтесь тем, что разность квадрат минус A будет непустым открытым множеством.)

10*. Докажем, что любое непустое открытое множество на плоскости представимо в виде счётного (не более чем счётного) объединения открытых прямоугольников и, следовательно, измеримо. Будем в этой задаче под открытыми прямоугольниками понимать только те непустые открытые прямоугольники, стороны которых параллельны осям координат. Назовём прямоугольник рациональным, если его стороны лежат на вертикальных прямых с рациональными абсциссами и на горизонтальных прямых с рациональными ординатами.

а) Докажите, что любой открытый прямоугольник можно представить в виде счётного объединения рациональных прямоугольников (не обязательно попарно непересекающихся).

б) Докажите, что любое открытое множество можно представить в виде объединения открытых прямоугольников. (*Указание.* Представьте его сначала в виде объединения открытых кругов.)

в) Докажите, что любое открытое множество можно представить в виде объединения рациональных прямоугольников.

д) Докажите, что любое открытое множество можно представить в виде счётного объединения рациональных прямоугольников.

11. Показать, что отношение равенства на множестве действительных чисел является отношением эквивалентности. Как задать отношение равенства в терминах подмножеств декартова произведения?

12. а) Проверить, что приведённые три примера отношений эквивалентности действительно являются отношениями эквивалентности. б) «Перевести» описания трёх примеров отношений эквивалентности на язык подмножеств декартова произведения.

13. Доказать, что любое отношение отношение эквивалентности разбивает множество, на котором оно задано, на непересекающиеся подмножества.

14. (Продолжение.) Предположим, некоторое множество A разбито на непересекающиеся подмножества A_α. Верно ли, что отношение «элемент x находится в одном подмножестве с элементом y» является отношением эквивалентности?

15. Разбить множество рациональных чисел на счётное семейство непересекающихся подмножеств.

16*. Показать, что мера Лебега на плоскости не зависит от поворотов системы координат.

17. Пусть имеется некоторое семейство множеств $\mathcal{S}$. Доказать, что отношение $|A| > |B|$ (заданное на $\mathcal{S}$) транзитивно, но не рефлексивно и не симметрично.