

ЛЕКЦИИ 5Б—5В

Пространство \mathcal{D}' , продолжение

5. Линейная замена переменной

Для введения операции линейной (точнее, аффинной) замены переменной, как и прежде, воспользуемся принципом продолжения с множества регулярных обобщённых функций с бесконечно гладким представителем.

Пусть $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ — регулярная обобщённая функция с представителем $f_0(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$. Тогда при всяком $a > 0$ имеем для $g(x) = f_0(ax + b)$, $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$

$$\int_{\mathbb{R}^1} g(x)\varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(ax + b)\varphi(x) dx = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(t)\varphi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt = \frac{1}{a} \left\langle f, \varphi\left(\frac{x-b}{a}\right) \right\rangle,$$

а при всяком $a < 0$

$$\int_{\mathbb{R}^1} g(x)\varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(ax + b)\varphi(x) dx = \frac{1}{a} \int_{+\infty}^{-\infty} f_0(t)\varphi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt = \frac{1}{|a|} \left\langle f, \varphi\left(\frac{x-b}{a}\right) \right\rangle.$$

Итак, при всех $a \neq 0$ для указанного типа регулярных обобщённых функций имеет место равенство

$$\langle g(x), \varphi(x) \rangle = \frac{1}{|a|} \left\langle f, \varphi\left(\frac{x-b}{a}\right) \right\rangle.$$

Это позволяет ввести

Определение 3. Пусть $f \equiv f(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$, $a \neq 0$. Тогда символом $f(ax + b)$ обозначим обобщённую функцию, действующую по правилу

$$\langle f(ax + b), \varphi(x) \rangle = \frac{1}{|a|} \left\langle f(x), \varphi\left(\frac{x-b}{a}\right) \right\rangle.$$

Именно в этом смысле и следует понимать «аргумент» обобщённой функции.

Замечание 1. Тривиальную проверку того факта, что данное определение вводит функцию из \mathcal{D}' , оставляем слушателям.

1. Легко видеть, что при $a \neq 0$ имеем $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$.

В самом деле, согласно определению 3 имеем

$$\langle \delta(ax), \varphi(x) \rangle = \frac{1}{|a|} \left\langle \delta(x), \varphi\left(\frac{x}{a}\right) \right\rangle = \frac{1}{|a|} \varphi\left(\frac{0}{a}\right) = \frac{1}{|a|} \varphi(0) = \frac{1}{|a|} \langle \delta(x), \varphi(x) \rangle.$$

2. Упростим выражение $\langle \theta(ax), \varphi(x) \rangle$. Имеем при $a > 0$

$$\langle \theta(ax), \varphi(x) \rangle = \frac{1}{|a|} \left\langle \theta(x), \varphi\left(\frac{x}{a}\right) \right\rangle = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} \varphi\left(\frac{x}{a}\right) dx = \int_0^{+\infty} \varphi(t) dt = \langle \theta(x), \varphi(x) \rangle,$$

при $a < 0$

$$\langle \theta(ax), \varphi(x) \rangle = \frac{1}{|a|} \left\langle \theta(x), \varphi\left(\frac{x}{a}\right) \right\rangle = \frac{1}{-a} \int_0^{-\infty} \varphi\left(\frac{x}{a}\right) dx = \int_0^{+\infty} \varphi(-t) dt = \langle \theta(x), \varphi(-x) \rangle.$$

Итак, $\langle \theta(ax), \varphi(x) \rangle = \langle \theta(x), \varphi(x \operatorname{sgn} a) \rangle$.

В случае пространства $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ при произвольном N имеем (A — матрица, x, y, b — столбцы)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} f(Ax + b) \varphi(x) dx_1 \dots dx_N &= \int_{\mathbb{R}^N} f(y) \varphi(A^{-1}(y - b)) \left| \frac{D(x_1, \dots, x_N)}{y_1, \dots, y_N} \right| dy_1 \dots dy_N = \\ &= |\det A^{-1}| \int_{\mathbb{R}^N} f(y) \varphi(A^{-1}(y - b)) dy_1 \dots dy_N = \frac{1}{|\det A|} \int_{\mathbb{R}^N} f(y) \varphi(A^{-1}(y - b)) dy_1 \dots dy_N, \end{aligned}$$

что мотивирует

Определение 3'. Пусть $f \equiv f(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, A — невырожденная матрица размера $N \times N$, b — столбец высоты N . Тогда символом $f(Ax + b)$ обозначим обобщённую функцию, действующую по правилу

$$\langle f(Ax + b), \varphi(x) \rangle = \frac{1}{|\det A|} \langle f(x), \varphi(A^{-1}(x - b)) \rangle.$$

6. Сходимость в пространстве \mathcal{D}'

Определение 4. Пусть $f_n, f \in \mathcal{D}'$. Тогда говорят, что $f_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} f$ при $n \rightarrow \infty$, если для любой основной функции $\varphi \in \mathcal{D}$ имеет место предельное соотношение

$$\langle f_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle f, \varphi \rangle, \quad n \rightarrow \infty.$$

Таким образом, речь идёт о *-слабой сходимости.

Аналогично говорят, что $f_\varepsilon \xrightarrow{\mathcal{D}'} f$ при $\varepsilon \rightarrow +0$, если для любой основной функции $\varphi \in \mathcal{D}$ верно $\langle f_\varepsilon, \varphi \rangle \rightarrow \langle f, \varphi \rangle$ при $\varepsilon \rightarrow +0$.

3. Очевидно, с учётом определения 3 в силу финитности основных функций имеем

$$\delta(x - n) \rightarrow 0.$$

4. Рассмотрим так называемые δ -образные семейства (смысл названия скоро будет ясен)

$$\begin{aligned} 1) f_\varepsilon(x) &= \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon}, & |x| \leq \varepsilon, \\ 0, & |x| > \varepsilon, \end{cases} \quad 2) f_\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon}{\pi(x^2 + \varepsilon^2)}, \quad 3) f_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}, \\ 4) f_\varepsilon(x) &= \frac{1}{\pi x} \sin \frac{x}{\varepsilon}, \quad 5) f_\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon}{\pi x^2} \sin^2 \frac{x}{\varepsilon}. \end{aligned} \tag{1}$$

Во всех случаях имеем $f_\varepsilon \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta(x)$ при $\varepsilon \rightarrow +0$. Докажем это для примера 1). Применяя теорему Лагранжа о конечных приращениях, имеем для произвольной функции $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$

$$\langle f_\varepsilon, \varphi \rangle = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi(x) dx = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} [\varphi(0) + \varphi'(x^*(x))x] dx = \frac{1}{2\varepsilon} \cdot 2\varepsilon \varphi(0) + \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi'(x^*(x))x dx.$$

Таким образом,

$$|\langle f_\varepsilon, \varphi \rangle - \varphi(0)| = \frac{1}{2\varepsilon} \left| \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi'(x^*(x))x dx \right| \leq \frac{1}{2\varepsilon} \sup_{x \in \mathbb{R}^1} |\varphi'(x)| \cdot \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |x| dx \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^1} |\varphi'(x)| \cdot \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon} \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow +0.$$

Имеет смысл доказать более общее утверждение.

Лемма. Пусть:

- 1) функция $f(x)$ кусочно непрерывна на \mathbb{R}^1 ,
- 2) $f(x) \geq 0$ при всех $x \in \mathbb{R}^1$,
- 3) $\int_{\mathbb{R}^1} f(x) dx = 1$,
- 4) $f_\varepsilon(x) \equiv \frac{1}{\varepsilon} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$.

Тогда для регулярных обобщённых функций f_ε , задаваемых функциями $f_\varepsilon(x)$, верно предельное соотношение

$$f_\varepsilon \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta(x), \quad \varepsilon \rightarrow +0.$$

Замечание 2. Легко видеть, что лемма применима ко всем семействам (1), кроме 4). При этом в семействе 3) роль ε играет $\sqrt{\varepsilon}$.

Прежде чем перейти к доказательству леммы, опишем «на пальцах» его идею. Она состоит в том, что:

- 1) для каждой конкретной функции $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ найдётся окрестность ω нуля, в которой её значение мало отличается от значения в нуле;
- 2) с другой стороны, найдётся такое ε_0 , что при всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ функции f_ε «сосредоточены» в выбранной окрестности нуля, т. е. их интеграл по этой окрестности «почти равен» единице, а интеграл по оставшемуся множеству «пренебрежимо мал», поэтому в сумме

$$\int_{\mathbb{R}^1} f_\varepsilon(x)\varphi(x) dx = \int_{\omega} f_\varepsilon(x)\varphi(x) dx + \int_{\mathbb{R}^1 \setminus \omega} f_\varepsilon(x)\varphi(x) dx$$

первое слагаемое мало отличается от $\varphi(0)$, а второе малó.

Доказательство леммы. Сформулируем на языке « ε - δ », что, собственно, нужно доказать:

$$\forall \varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1), \forall \zeta > 0 \exists \varepsilon_0(\varphi, \zeta) > 0 \forall \varepsilon \in (0; \varepsilon_0(\varphi, \zeta)) \left| \int_{\mathbb{R}^1} f_\varepsilon(x)\varphi(x) dx - \varphi(0) \right| \leq \zeta. \quad (2)$$

Заметим прежде всего, что при всех a, b верно равенство

$$\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} f_\varepsilon(x) dx = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \int_a^b f(t) dt \quad (3)$$

и, в частности,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1. \quad (4)$$

Заметим теперь, что в силу равенства $\int_{\mathbb{R}^1} f(x) dx = 1$

$$\forall \gamma > 0 \exists R(\gamma) > 0 \forall R' \geq R(\gamma) \int_{\mathbb{R} \setminus [-R'; R']} f(x) dx \leq \gamma. \quad (5)$$

Следовательно, при тех же R' в силу (3) верно

$$\int_{\mathbb{R} \setminus [-R'\varepsilon; R'\varepsilon]} f_\varepsilon(x) dx \leq \gamma. \quad (6)$$

Пусть теперь нам заданы конкретные $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$, $\zeta > 0$ и требуется построить $\varepsilon_0(\varphi, \zeta)$ (см. (2)).

Положим $C = \sup_{x \in \mathbb{R}^1} |\varphi(x)|$. Положим в (5) $\gamma = \frac{\zeta}{4C}$ и возьмём соответствующее R . Тогда при всех $R' > R$ получим

$$\int_{\mathbb{R} \setminus [-R'\varepsilon; R'\varepsilon]} f_\varepsilon(x) dx < \frac{\zeta}{4C}.$$

Заметим, что в силу непрерывности основной функции $\varphi(x)$

$$\forall \eta > 0 \exists r(\varphi, \eta) > 0 \forall x \in [-r(\varphi, \eta); r(\varphi, \eta)] |\varphi(x) - \varphi(0)| \leq \eta, \quad (7)$$

а поэтому при всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_0 = \frac{r(\varphi, \zeta/2)}{R}$ имеем $|\varphi(x) - \varphi(0)| \leq \frac{\zeta}{2}$ на отрезке $[-R\varepsilon; R\varepsilon]$.

Теперь мы готовы получить окончательную оценку. Имеем при всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ с учётом равенства (4) и неотрицательности функции $\varepsilon(x)$

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}^1} f_\varepsilon(x) \varphi(x) dx - \varphi(0) \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^1} f_\varepsilon(x) \varphi(x) dx - \int_{\mathbb{R}^1} f_\varepsilon(x) \varphi(0) dx \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^1} f_\varepsilon(x) (\varphi(x) - \varphi(0)) dx \right| = \\ & = \left| \int_{-R\varepsilon}^{R\varepsilon} f_\varepsilon(x) (\varphi(x) - \varphi(0)) dx + \int_{\mathbb{R}^1 \setminus [-R\varepsilon; R\varepsilon]} f_\varepsilon(x) (\varphi(x) - \varphi(0)) dx \right| \leq \\ & \leq \left| \int_{-R\varepsilon}^{R\varepsilon} f_\varepsilon(x) (\varphi(x) - \varphi(0)) dx \right| + \left| \int_{\mathbb{R}^1 \setminus [-R\varepsilon; R\varepsilon]} f_\varepsilon(x) (\varphi(x) - \varphi(0)) dx \right| \leq \\ & \leq \frac{\zeta}{2} \int_{-R\varepsilon}^{R\varepsilon} f_\varepsilon(x) dx + 2C \int_{\mathbb{R}^1 \setminus [-R\varepsilon; R\varepsilon]} f_\varepsilon(x) dx \leq \frac{\zeta}{2} + 2C \cdot \frac{\zeta}{4C} = \zeta. \end{aligned}$$

Это и доказывает требуемый результат (2).

Лемма доказана.

Замечание 3. Мы пользовались условием неотрицательности функции $f_\varepsilon(x)$ в оценках типа

$$\int_{A \subset \mathbb{R}^1} f_\varepsilon(x) dx \leq \int_{\mathbb{R}^1} f_\varepsilon(x) dx, \quad \left| \int_{A \subset \mathbb{R}^1} f_\varepsilon(x) \varphi(x) dx \right| \leq \int_{A \subset \mathbb{R}^1} f_\varepsilon(x) \sup_{x \in A} |\varphi(x)| dx.$$

Поэтому для рассмотрения примера 4) требуется либо сформулировать более общее утверждение, либо провести доказательство в частном случае непосредственно для $f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi x} \sin \frac{x}{\varepsilon}$.

Замечание 4. Удивительный факт состоит в том, что результат леммы имеет место, в частности, в том случае, когда $f(0) = 0$ и даже $\text{supp } f \not\ni 0$, например, для $f(x) = 0,1\chi_{[90;100]}(x)$. Конечно, этим мы всецело обязаны свойству непрерывности основных функций (см. (7)).

5. $\mathcal{P} \frac{\cos kx}{x} \xrightarrow{\mathcal{D}'} 0$ при $k \rightarrow \infty$, где

$$\forall \varphi(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1) \quad \left\langle \mathcal{P} \frac{\cos kx}{x}, \varphi(x) \right\rangle \equiv \text{v. p.} \int_{\mathbb{R}^1} \frac{\cos kx}{x} \varphi(x) dx.$$

Действительно, пусть фиксирована некоторая произвольная основная функция $\varphi(x)$, $\text{supp } \varphi \subset [-R; R]$. Имеем

$$\begin{aligned} \text{v. p.} \int_{\mathbb{R}^1} \frac{\cos kx}{x} \varphi(x) dx &= \text{v. p.} \int_{-R}^R \frac{\cos kx}{x} \varphi(x) dx = \\ &= \text{v. p.} \int_{-R}^R \frac{\cos kx}{x} \varphi(0) dx + \text{v. p.} \int_{-R}^R \cos kx \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx. \end{aligned}$$

Здесь первое слагаемое в правой части обращается в нуль как предел интегралов от нечётной функции по симметричному множеству. Насчёт второго слагаемого заметим прежде всего, что в силу свойств гладкости основной функции подынтегральная функция содержит устранимую особенность: множитель $\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}$ имеет конечное предельное значение $\varphi'(0)$ при $x \rightarrow 0$, что вытекает из формулы конечных приращений Лагранжа и непрерывности производной основной функции. Далее, в силу вышесказанного получаем

$$\text{v. p.} \int_{\mathbb{R}^1} \frac{\cos kx}{x} \varphi(x) dx = \int_{-R}^R \cos kx \psi(x) dx,$$

где

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}, & x \neq 0, \\ \varphi'(0), & x = 0 \end{cases}. \quad (8)$$

Но тогда в силу леммы Римана получаем требуемый результат. (Формулировка леммы: $\int_a^b f(x) \cos tx dx \rightarrow 0$, $\int_a^b f(x) \sin tx dx \rightarrow 0$ при $a, b = \text{const}$, $t \rightarrow +\infty$ для любой кусочно непрерывной функции $f(x)$, см., напр.: А. В. Щепетиллов, Лекции по математическому анализу для экспериментального потока. Третий семестр, лемма 7.4.)

6. *Формула Сохоцкого.* $\frac{1}{x \pm i0} = \mp i\pi\delta(x) + \mathcal{P}\frac{1}{x}$, где $\frac{1}{x \pm i0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{x \pm i\varepsilon}$ в смысле обобщённых функций.

Имеем

$$\left\langle \frac{1}{x - i\varepsilon}, \varphi(x) \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^1} \frac{\varphi(x)}{x - i\varepsilon} dx = \int_{\mathbb{R}^1} \frac{\varphi(x)(x + i\varepsilon)}{x^2 + \varepsilon^2} dx = \int_{\mathbb{R}^1} \frac{x\varphi(x)}{x^2 + \varepsilon^2} dx + i \int_{\mathbb{R}^1} \frac{\varepsilon\varphi(x)}{x^2 + \varepsilon^2} dx.$$

Сходимость второго слагаемого в правой части к $i\pi\delta(x)$ следует из предыдущего примера (семейство 2)). Рассмотрим первое слагаемое. Как обычно, фиксируем произвольную основную функцию $\varphi(x)$ и выбираем R так, что $\text{supp } \varphi \subset [-R; R]$. Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^1} \frac{x\varphi(x)}{x^2 + \varepsilon^2} dx = \int_{-R}^R \frac{x\varphi(x)}{x^2 + \varepsilon^2} dx = \int_{-R}^R \frac{x(\varphi(x) - \varphi(0))}{x^2 + \varepsilon^2} dx = \int_{-R}^R \frac{x^2\psi(x)}{x^2 + \varepsilon^2} dx, \quad (9)$$

где в предпоследнем равенстве мы воспользовались нечётностью функции $\frac{x}{x^2 + \varepsilon^2}$, а в последнем перешли к функции $\psi(x)$, определённой формулой (8). С другой стороны,

$$\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi(x) \right\rangle = \text{v. p.} \int_{-R}^R \frac{\varphi(x)}{x} dx = \int_{-R}^R \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx = \int_{-R}^R \psi(x) dx, \quad (10)$$

где мы снова воспользовались соображениями нечётности, а также сняли знак главного значения, поскольку, как и в предыдущем примере, в подынтегральном выражении теперь функция с устранимой особенностью. Сравним теперь правые части (9) и (10):

$$\left| \int_{-R}^R \frac{x^2\psi(x)}{x^2 + \varepsilon^2} dx - \int_{-R}^R \psi(x) dx \right| \leq \sup_{x \in [-R; R]} |\psi(x)| \int_{-R}^R \frac{\varepsilon^2}{x^2 + \varepsilon^2} dx = C \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon} \arctg \frac{x}{\varepsilon} \Big|_{-R}^R \leq C\varepsilon\pi \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow +0.$$

7. Вычислить предел в смысле обобщённых функций при $t \rightarrow +\infty$ от выражения $\frac{e^{ixt}}{x - i0}$.

Имеем при произвольном фиксированном $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ с $\text{supp } \varphi \subset [-R; R]$ с учётом предыдущего примера

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{e^{ixt}}{x - i0}, \varphi(x) \right\rangle &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\mathbb{R}^1} \frac{\varphi(x)e^{ixt}}{x - i\varepsilon} dx = \{\varphi(x)e^{ixt} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\mathbb{R}^1} \frac{1}{x - i\varepsilon} \varphi(x)e^{ixt} dx = \\
&= \left\langle \frac{1}{x - i0}, \varphi(x)e^{ixt} \right\rangle = \left\langle i\pi\delta(x) + \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi(x)e^{ixt} \right\rangle = \\
&= i\pi\varphi(0) + \left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi(x)e^{ixt} \right\rangle = i\pi\varphi(0) + \text{v. p.} \int_{\mathbb{R}^1} \frac{\varphi(x)(\cos xt + i \sin xt)}{x} dx = \\
&= i\pi\varphi(0) + \int_{-R}^R \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} (\cos xt + i \sin xt) dx + \text{v. p.} \int_{-R}^R \frac{\varphi(0)(\cos xt + i \sin xt)}{x} dx \rightarrow \\
&\rightarrow i\pi\varphi(0) + 0 + 0 + \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^1} \frac{i\varphi(0) \sin xt}{x} dx = i\pi\varphi(0) + i\pi\varphi(0) = \langle 2i\pi\delta(x), \varphi(x) \rangle.
\end{aligned}$$

Здесь в одном из последних переходов мы воспользовались равенством

$$\int_{\mathbb{R}^1} \frac{\sin xt}{x} dx = \int_{\mathbb{R}^1} \frac{\sin y}{y} dy = \pi,$$

верном при всех $t > 0$. Этот результат можно получить с помощью дифференцирования или предельного перехода по параметру (см. материал 3-го семестра по математическому анализу).

7. Прямое (тензорное) произведение обобщённых функций из \mathcal{D}'

Пусть $x \in \mathbb{R}^M$, $y \in \mathbb{R}^N$, $\varphi(x, y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{M+N})$, $f(x) \in C(\mathbb{R}^M)$, $g(y) \in C(\mathbb{R}^N)$. Тогда верна формула сведения повторного интеграла к двойному (в более общем случае — теорема Фубини)

$$\int_{\mathbb{R}^{M+N}} f(x)g(y)\varphi(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^M} f(x) \left(\int_{\mathbb{R}^N} g(y)\varphi(x, y) dy \right) dx,$$

что позволяет сформулировать

Определение 5. Пусть $f(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^M)$, $g(y) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$. Тогда *прямым (тензорным) произведением функций $f(x)$ и $g(y)$* называется функция $h(x, y) \equiv f(x) \cdot g(y)$, действующая по правилу

$$\langle f(x) \cdot g(y), \varphi(x, y) \rangle_{\mathbb{R}^{M+N}} = \langle f(x), \langle g(y), \varphi(x, y) \rangle_{\mathbb{R}^N} \rangle_{\mathbb{R}^M}.$$

Проверка корректности определения остаётся для самостоятельной работы слушателей, равно как и доказательство следующих свойств введённой операции:

- 1) коммутативность,
- 2) непрерывность по каждому из сомножителей (в смысле предельного перехода, определённого выше),
- 3) ассоциативность,
- 4) для любого мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_M)$ верно $D_x^\alpha[f(x) \cdot g(y)] = [D_x^\alpha f(x)] \cdot g(y)$,
- 5) для любой $a(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^M)$ верно $(a(x)f(x)) \cdot g(y) = a(x)(f(x) \cdot g(y))$,

$$6) \langle f(x), \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x, y) dy \rangle_{\mathbb{R}^M} = \int_{\mathbb{R}^N} \langle f(x), \varphi(x, y) \rangle_{\mathbb{R}^M} dy,$$

$$7) \text{supp} [f(x) \cdot g(y)] = \text{supp} f(x) \times \text{supp} g(y).$$

Для формулировки последнего свойства требуется ввести понятие носителя обобщённой функции. Сделаем это.

Определение 6. Говорят, что обобщённая функция $f(x) \in \mathcal{D}'$ обращается в ноль в области G , если для любой основной функции $\varphi(x)$ с $\text{supp} \varphi \subset G$ верно $\langle f(x), \varphi(x) \rangle = 0$.

Определение 7. Объединение всех областей, в которых обобщённая функция $f(x) \in \mathcal{D}'$ обращается в ноль, называется *нулевым множеством* этой функции, а дополнение к нулевому множеству — её *носителем*. Обобщённые функции с компактным носителем называются *финитными*.

Например, $\text{supp} \delta(x) = \{0\}$, $\text{supp} \theta(x) = \{x \mid x \geq 0\}$ (докажите это непосредственно!), поэтому функция Дирака финитна, а функция Хевисайда — нет.

Введём теперь обобщённую функцию (где $a > 0$)

$$\delta(at - |x|) \equiv \theta(t) \cdot \delta(at + x) + \theta(t) \cdot \delta(at - x). \quad (11)$$

Здесь в правой части использованы тензорные произведения функции Хевисайда по переменной t на дельта-функции, в которых осуществлена линейная замена переменной $x \mapsto at \pm x$, при которой t рассматривается как параметр.

8. Преобразуем тензорные произведения в правой части (11). Имеем

$$\begin{aligned} \langle \theta(t) \cdot \delta(at + x), \varphi(t, x) \rangle &= \langle \theta(t), \langle \delta(at + x), \varphi(t, x) \rangle \rangle = \left\langle \theta(t), \left\langle \delta(x), \varphi \left(t, \frac{x - at}{1} \right) \right\rangle \right\rangle = \\ &= \langle \theta(t) \varphi(t, -at) \rangle = \int_0^{+\infty} \varphi(t, -at) dt. \end{aligned}$$

Аналогично получаем

$$\langle \theta(t) \cdot \delta(at - x), \varphi(t, x) \rangle = \int_0^{+\infty} \varphi(t, at) dt.$$

9. Положим

$$\theta(at - |x|) = \begin{cases} 1, & at - |x| \geq 0, \\ 0, & at - |x| < 0. \end{cases}$$

Требуется вычислить $\frac{\partial}{\partial t} \theta(at - |x|)$, где производная понимается в смысле обобщённых функций.

Имеем с учётом предыдущего примера

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \theta(at - |x|), \varphi(t, x) \right\rangle &= - \left\langle \theta(at - |x|), \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, x) \right\rangle = - \int_{\{(t,x) \mid t \geq \frac{|x|}{a}\}} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, x) dt dx = \\ &= - \int_{\mathbb{R}^1} dx \int_{t=\frac{|x|}{a}} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, x) dt = \int_{\mathbb{R}^1} dx \varphi \left(\frac{|x|}{a}, x \right) = \int_{-\infty}^0 \varphi \left(-\frac{x}{a}, x \right) dx + \int_0^{+\infty} \varphi \left(\frac{x}{a}, x \right) dx = \\ &= a \int_0^{+\infty} \varphi(t, -at) dt + a \int_0^{+\infty} \varphi(t, at) dt = \langle a \delta(at - |x|), \varphi(t, x) \rangle. \end{aligned}$$

10. Доказать, что

$$\left\langle \frac{\partial^2}{\partial x^2} \theta(at - |x|), \varphi(t, x) \right\rangle = - \left\langle \theta(t) \cdot \delta(at + x), \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\rangle + \left\langle \theta(t) \cdot \delta(at - x), \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\rangle.$$

Имеем с учётом примера 8

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial^2}{\partial x^2} \theta(at - |x|), \varphi(t, x) \right\rangle &= \left\langle \theta(at - |x|), \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi(t, x) \right\rangle = \int_{\{(t,x)|t \geq \frac{|x|}{a}\}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dt dx = \\ &= \int_0^{+\infty} dt \int_{-at}^{at} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dx = \int_0^{+\infty} dt \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, at) - \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, -at) \right) = \\ &= - \left\langle \theta(t) \cdot \delta(at + x), \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\rangle + \left\langle \theta(t) \cdot \delta(at - x), \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\rangle. \end{aligned}$$

8. Свёртка обобщённых функций

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — непрерывные функции. Тогда можно ввести в рассмотрение функцию

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(t)g(x-t) dt = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-t)g(t) dt$$

при условии, что эти интегралы сходятся. Далее, для любой функции $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ имеем

$$\langle h(x), \varphi(x) \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} f(\xi)g(x-\xi) d\xi \right) \varphi(x) dx = \iint_{\mathbb{R}^{2N}} f(\xi) \cdot g(\eta)\varphi(\eta+\xi) d\eta d\xi.$$

Это позволяет ввести определение *свёртки* обобщённых функций.

Определение 8. Свёрткой $f(x)*g(x)$ обобщённых функций $f(x) \in \mathcal{D}'$, $g(x) \in \mathcal{D}'$ называется обобщённая функция, действующая по правилу

$$\langle f(x) * g(x), \varphi(x) \rangle = \langle f(\xi) \cdot g(\eta), \varphi(\xi + \eta) \rangle. \quad (12)$$

Замечание 5. Здесь в правой части происходит не линейная замена переменной в аргументе основной функции, а применение тензорного произведения к сложной функции $\psi(\xi, \eta) \equiv \varphi(\xi + \eta)$.

Вообще говоря, формула (12) имеет смысл не для всех $f(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, $g(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, поскольку $\varphi(\xi + \eta)$ может уже не быть финитной. Однако она заведомо имеет смысл, в частности, когда одна или обе обобщённые функции финитны или (при $N = 1$) когда носители функций f и g ограничены с одной стороны.

11. Упростим выражение $\theta(x) * \theta(x)$.

Имеем для всякой $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$

$$\begin{aligned} \langle \theta(x) * \theta(x), \varphi(x) \rangle &= \langle \theta(\xi) \cdot \theta(\eta), \varphi(\xi + \eta) \rangle = \iint_{\mathbb{R}^2} \theta(\xi)\theta(\eta)\varphi(\xi + \eta) d\xi d\eta = \\ &= \int_0^{+\infty} d\eta \int_0^{+\infty} \varphi(\xi + \eta) d\xi = \{\xi + \eta = u, \eta = v\} = \int_0^{+\infty} du \int_0^u dv \varphi(u) = \\ &= \int_0^{+\infty} u\varphi(u) du = \langle x\theta(x), \varphi(x) \rangle, \end{aligned}$$

или $\theta(x) * \theta(x) = x\theta(x)$.

12. Упростим выражение $f(x) = x^2\theta(x) * \theta(x) \sin^2 x$.

Имеем для всякой $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$

$$\begin{aligned} \langle f(x), \varphi(x) \rangle &= \langle \xi^2 \theta(\xi) \cdot \theta(\eta) \sin^2 \eta, \varphi(\xi + \eta) \rangle = \\ &= \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} \xi^2 \sin^2 \eta \varphi(\xi + \eta) d\xi = \{\xi + \eta = \tau\} = \int_0^{+\infty} d\tau \int_0^\tau d\eta \varphi(\tau) (\tau - \eta)^2 \sin^2 \eta = \\ &= \int_0^{+\infty} d\tau \varphi(\tau) \int_0^\tau (\tau - \eta)^2 \sin^2 \eta d\eta = \int_0^{+\infty} d\tau \varphi(\tau) \left(\frac{\tau^3}{6} + \frac{\sin 2\tau}{8} - \frac{\tau}{4} \right), \end{aligned}$$

или $x^2\theta(x) * \theta(x) \sin^2 x = \theta(x) \left(\frac{x^3}{6} + \frac{\sin 2x}{8} - \frac{x}{4} \right)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Доказать, что функционал, задаваемый определением 3, действительно определён на всём $\mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ и является линейным и непрерывным.

2. 1) Показать, что

$$(D^\alpha f)(x + h) = D^\alpha[f(x + h)], \quad f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N), \quad h \in \mathbb{R}^N.$$

2) Показать, что

$$(D^l f)(ax + b) = a^l D^l[f(ax + b)], \quad f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1), \quad h \in \mathbb{R}^1, \quad a \neq 0, \quad l \in \mathbb{N}.$$

3) Показать, что при всех $a(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\mathfrak{F}(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ верно $(af)(Ax + b) = a(Ax + b)f(Ax + b)$ ($\det A \neq 0$).

4) Упростить выражение $\delta(ax)$ (в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$).

3. Найти носители обобщённых функций $\delta(x)$, $\theta(x)$, $\mathcal{P}\frac{1}{x}$.

4. Описать преобразование носителя при линейной замене переменной.

5. Убедиться, что в примерах 4.1)–4.3), 4.5) можно применить лемму, сформулированную на с. 3.

6. 1) Обосновать требуемый результат для примера 4.4).

2*) Сформулировать и доказать общее утверждение, подходящее для этого случая.

7. Пусть $f(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ — финитная обобщённая функция (не обязательно регулярная!). Показать, что если $\eta(x) \equiv 0$ в окрестности $\text{supp } f$ (т. е. в некотором открытом множестве, содержащем $\text{supp } f$), то $\eta(x)f(x) = 0$.

8*. Найти предел $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^m e^{ixt}$, где $m \in \mathbb{N}$ фиксировано.

9. Исследовать на сходимость в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^n \delta^{(n)}(x - n)$.

10*. Проверить корректность определения тензорного произведения обобщённых функций. (Что именно нужно проверить?)

11*. Проверить свойства тензорного произведения.

12. Показать, что

- 1) $\theta(x_1, x_2, \dots, x_N) = \theta(x_1) \cdot \theta(x_2) \cdot \dots \cdot \theta(x_N)$;
- 2) $\delta(x_1, x_2, \dots, x_N) = \delta(x_1) \cdot \delta(x_2) \cdot \dots \cdot \delta(x_N)$;
- 3) $\frac{\partial^n \theta(x_1, x_2, \dots, x_N)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_N} = \delta(x_1, x_2, \dots, x_N)$.

13. Показать, что в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$

$$1) \frac{\partial}{\partial x} \theta(at - |x|) = \theta(t) \cdot \delta(at + x) - \theta(t) \cdot \delta(at - x);$$

$$2) \left\langle \frac{\partial^2}{\partial t^2} \theta(at - |x|), \varphi(t, x) \right\rangle = -a \left\langle \delta(at - |x|), \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x} \right\rangle.$$

14. Изобразить на координатной плоскости носители следующих обобщённых функций:

$$1) \delta(x - a) \cdot \delta(y - b), \quad 2) \theta(x - a) \cdot \delta(y - b), \quad 3) \theta(x - a) \cdot \theta(y - b).$$

15. Упростить выражение $f(x) = x^2 \theta(x) * \theta(x) \sin x$.

16. На примере обобщённых функций $\theta(x)$, $\delta(x)$, 1 показать, что операция свёртки не ассоциативна.

17*. Показать, что верны формулы

$$f_\alpha(x) * f_\beta(x) = f_{\alpha+\beta}(x), \quad g_\alpha(x) * g_\beta(x) = g_{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}(x),$$

где

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\alpha}{\alpha^2 + x^2}, \quad \alpha > 0; \quad g_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha} \cdot \exp\left(-\pi \frac{x^2}{\alpha^2}\right), \quad \alpha > 0.$$

18*. Показать, что в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ свёртка $x \cdot \theta(t) * t \cdot \theta(x)$ не имеет смысла.

19. Показать, что имеют место равенства:

- 1) $\delta(x - a) * f(x) = f(x - a)$;
- 2) $\delta(x - a) * \delta(x - b) = \delta(x - a - b)$;
- 3) $(\delta^{(l)}(x)) * f(x) = f^{(l)}(x)$, $l \in \mathbb{N}$.

20. Вычислить в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ свёртку $\theta(t - |x|) * \theta(t - |x|)$.