Методы математической физики

Часть вторая

Глава III

Профессор А.Н.Боголюбов

Гл. 3. Метод разделения переменных (Метод Фурье)

1. Постановка общей начально-краевой задачи

Рассмотрим общую начально-краевую задачу

$$\begin{cases} \rho(M)P_t[u] = L_M[u] + f(M,t),\ (M,t)\in Q_\infty, & (1)\\ u(M,0)=\varphi_0(M),\dots,\ \dfrac{\partial^m u}{\partial t^m}(M,0)=\varphi_m(M),\ M\in\bar{D}, & (2)\\ N_p\left[u(P,t)\right]=\mu(P,t),\ P\in S,\ t\in[0,\infty), & (3)\end{cases}$$

где $(n+1)$-мерный цилиндр Q_∞ (n-размерность области D) имеет вид

$$Q_\infty \equiv D\times(0,\infty)\equiv\left\{(M,t): M\in D, t\in(0,\infty)\right\},\quad \bar{Q}_\infty\equiv\bar{D}\times[0,\infty)$$

а операторы $P_t[u],\ L_M[u],\ N_p[u]$ определяются так:

-

$$P_t\left[u\left(M,t\right)\right]=\sum_{k=0}^{m+1}a_k\left(t\right)\frac{\partial^k u}{\partial t^k},\ t\in\left(0,\infty\right), \qquad (4)$$

$$L_M\left[u\left(M,t\right)\right]=div\left(k\left(M\right)gradu\right)-q\left(M\right)u,\ M\in S, \qquad (5)$$

$$N_p\left[u\left(P,t\right)\right]=\alpha\left(P\right)\frac{\partial u\left(P,t\right)}{\partial n_P}+\beta\left(P\right)u\left(P,t\right),\ P\in S. \qquad (6)$$

Будем в дальнейшем предполагать, что коэффициенты операторов (4)-(6) удовлетворяют следующим условиям:

$$\rho\left(M\right)>0,\ k\left(M\right)>0,\ q\left(M\right)\geq 0,\ M\in D,$$
$$\alpha\left(P\right)\geq 0,\ \beta\left(P\right)\geq 0,\ \alpha\left(P\right)+\beta\left(P\right)>0,\ P\in S. \qquad (7)$$

Определение. Функция $u(M,t)$ называется классическим решением задачи (1)-(3), если она:

1) (m+1) – раз непрерывно дифференцируема по времени и 2 раза непрерывно дифференцируема по координатам в открытом цилиндре Q_∞, m – раз непрерывно дифференцируема по времени и 1 раз непрерывно дифференцируема по координатам в замкнутом цилиндре $\bar{Q}_\infty$:

$$u(M,t) \in C_{t,M}^{(m+1,2)}(Q_\infty) \cap C_{t,M}^{(m,1)}(\bar{Q}_\infty),$$

2) удовлетворяет уравнению (1) в открытом цилиндре Q_∞ в классическом смысле,

3) непрерывно примыкает к начальным условиям (2) и граничному условию (3).

Необходимое условие существования классического решения общей начально-краевой задачи (1) – (3) (условие согласования начальных и граничных условий) имеет следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&\alpha(P)\frac{\partial \varphi_0(P)}{\partial n}+\beta(P)\varphi_0(P)=\mu(P,0),\\
&\alpha(P)\frac{\partial \varphi_1(P)}{\partial n}+\beta(P)\varphi_1(P)=\frac{\partial \mu(P,0)}{\partial t},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\alpha(P)\frac{\partial \varphi_m(P)}{\partial n}+\beta(P)\varphi_m(P)=\frac{\partial^m \mu(P,0)}{\partial t^m}.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

2. Редукция общей задачи

В силу линейности задачи (1) - (3) ее решение можно представить в виде суммы решений трех задач:

$$u(M,t)=u_I(M,t)+u_{II}(M,t)+u_{III}(M,t), \qquad (9)$$

где: задача I ставится для однородного уравнения с неоднородными начальными и однородными граничным условиями, задача II ставиться для неоднородного уравнения с однородными начальными и однородным граничным условиям, , задача III ставится для однородного уравнения с однородными начальными и неоднородным граничным условием.

Такое представление **линейной** задачи называется **редукцией** общей задачи.

3. Первая и вторая формулы Грина

В дальнейшем нам понадобятся три формулы Грина. В этом разделе мы получим первую и вторую формулы Грина. Третья формула Грина будет получена в следующих разделах.

Пусть $\vec{A}(M) \in C^{(1)}$ и $\varphi(M) \in C^{(1)}$. Имеет место формула:

$$div\left(\varphi\vec{A}\right) = \varphi div\vec{A} + \vec{A} grad\varphi \qquad (10)$$

Пусть выполнены условия гладкости для функций $u(M), v(M), k(M)$:

$$u(M) \in C^{(2)}(D) \cap C^{(1)}(\bar{D}),\ v(M),\ k(M) \in C^{(1)}(D) \cap C(\bar{D}).$$

Положим:

$$\vec{A}(M) = k(M)\, grad u(M), \varphi(M) = v(M). \qquad (11)$$

Из формул (10) и (11) получаем

$$v(M)\,div\big(k(M)\,grad\,u(M)\big)=div\big(k(M)\,v(M)\,grad\,u(M)\big)-$$
$$-k(M)\,grad\,u(M)\,grad\,v(M). \qquad (12)$$

Проинтегрируем формулу (12) по области D:

$$\int_D v(M)\,div\big(k(M)\,grad\,u(M)\big)dV=\int_D div\big(k(M)\,v(M)\,grad\,u(M)\big)dV-$$
$$-\int_D k(M)\,grad\,u(M)\,grad\,v(M)\,dV. \qquad (13)$$

Для преобразования выделенного синим цветом в формуле (13) интеграла к интегралу по поверхности S воспользуемся формулой Остроградского – Гаусса.

Пусть $\vec{n}$ – внешняя нормаль к поверхности S, ограничивающей область D. Тогда

$$\int_D div\vec{A}dV = \int_S \vec{A}\vec{n}d\sigma. \qquad (14)$$

Полагая $\vec{A}(M) = k(M)v(M)\,grad\,u(M)$ и учитывая, что $grad\,u \cdot \vec{n} = \frac{\partial u}{\partial n}$, из формулы (14) получим:

$$\int_D div\left(k(M)v(M)\,grad\,u(M)\right)dV = \int_S k(P)v(P)\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma \quad (15)$$

Подставляя формулу (15) в формулу (13), получаем окончательную формулу (16):

$$\int_D v(M)\,div\big(k(M)\,grad\,u(M)\big)\,dV = \int_S k(P)\,v(P)\frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma\ -$$

$$-\int_D k(M)\,grad\,u(M)\,grad\,v(M)\,dV. \qquad (16)$$

Формула (16) называется **первой формулой Грина.** С помощью оператора $L_M\left[u(M,t)\right] = div\big(k(M)\,grad\,u\big) - q(M)\,u$ **первую формулу Грина** можно записать следующим образом:

$$\int_D v(M)\,L_M\left[u(M)\right]dV = \int_S k(P)\,v(P)\frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma\ -$$

$$-\int_D k(M)\,grad\,u(M)\,grad\,v(M)\,dV - \int_D q(M)\,u(M)\,v(M)\,dV \qquad (17)$$

Пусть теперь $u(M), v(M) \in C^{(2)}(D) \cap C^{(1)}(\bar{D}), k(M) \in C^{(1)}(D) \cap C(\bar{D})$. Поменяем в формуле (17) функции u и v местами и вычтем из формулы (17) полученную формулу. В результате получим **вторую формулу Грина**:

$$\int_D \left(v(M) L_M \left[u(M) \right] - u(M) L_M \left[v(M) \right] \right) dV =$$

$$= \int_S \left(k(P) \left(v(P) \frac{\partial u(P)}{\partial n} - u(P) \frac{\partial v(P)}{\partial n} \right) \right) d\sigma. \qquad (18)$$

4. Общая схема метода разделения переменных

Рассмотрим задачу I – начально-краевую задачу для однородного уравнения, неоднородных начальных и однородного граничного условий:

$$\begin{cases} \rho(M)P_t[u]=L_M[u],\ (M,t)\in Q_\infty, & (19)\\ u(M,0)=\varphi_0(M),\dots,\ \dfrac{\partial^m u}{\partial t^m}(M,0)=\varphi_m(M),\ M\in D, & (20)\\ N_p u(P,t)=0,\ P\in S,\ t\in[0,\infty), & (21)\end{cases}$$

где операторы имеют вид:

$$P_t[u(M,t)]=\sum_{k=0}^{m+1}a_k(t)\frac{\partial^k u}{\partial t^k},\ t\in(0,\infty), \qquad (4)$$

$$L_M[u(M,t)]=div\big(k(M)grad\big)-q(M)u,\ M\in S, \qquad (5)$$

$$N[u(P,t)]=\alpha(P)\frac{\partial u(P,t)}{\partial n_P}+\beta(P)u(P,t),\ P\in S. \qquad (6)$$

Следуя основной идее метода разделения переменных, рассмотрим вспомогательную задачу:

$$\begin{cases} \rho(M)P_t[w] = L_M[w], \quad (M,t) \in Q_\infty, & (22) \\ N_p[w(P,t)] = 0,\ P \in S,\ t \in [0,\infty), & (23) \\ w(M,t) = v(M)T(t), & (24) \\ w(M,t) \neq 0,\ (M,t) \in \bar{Q}_\infty. & (25) \end{cases}$$

Разделяя переменные, получим

$$\frac{P_t[T(t)]}{T(t)} = \frac{L_M[v(M)]}{\rho(M)v(M)} = -\lambda. \qquad (26)$$

Из формулы (26) следует уравнение для функции $T(t)$:

$$P_t\left[T(t)\right]+\lambda T(t)=0 \qquad (27)$$

и задача Штурма-Лиувилля (задача на собственные функции и собственные значения) для функции $v(M)$:

$$\begin{cases} L_M\left[v(M)\right]+\lambda\rho(M)v(M)=0,\ M\in D, & (28)\\ N_P\left[v(P)\right]=0,\ P\in S. & (29)\end{cases}$$

Задача (28)–(29) состоит в нахождении функций $v(M)\in C^{(2)}(D)\cap C^{(1)}(\bar{D})$, удовлетворяющих уравнению (28) в области D в классическом смысле, граничным условиям (29) на границе S и отличных от тождественного нуля.

Напомним, что коэффициенты введенных операторов удовлетворяют следующим условиям

$$\rho(M)>0,\ k(M)>0,\ q(M)\geq 0,\ M\in D,$$
$$\alpha(P)\geq 0,\ \beta(M)\geq 0,\ \alpha(P)+\beta(M)>0,\ P\in S. \qquad (7)$$

Основные свойства собственных функций и собственных значений задачи (28), (29).

а) Если функция $\kappa(M)$ непрерывно дифференцируема, а функции $\rho(M),\ q(M)$ непрерывны в области $\bar{D}$, функции $\alpha(P),\ \beta(P)$ непрерывны на поверхности $S: k(M)\in C^{(1)}(D), \rho(M), q(M)\in C(D)$, $\alpha(P), \beta(P)\in C(S)$, то существует бесконечная последовательность действительных собственных значений $\{\lambda_n\}$ и соответствующих им собственных функций $\{v_n(M)\}$ задачи (28)-(29).

Доказательство этого утверждения обычно основывается на теории интегральных уравнений и будет приведено в дальнешем.

б) Система собственных функций задачи (28)-(29) замкнута в $L_2\left(D\right)$ и для нее справедлива теорема разложимости В.А.Стеклова.

Теорема Стеклова. Если функция $f(M)$ дважды непрерывно дифференцируема в области $\bar{D}$: $f\left(M\right)\in C^{(2)}\left(\bar{D}\right)$ и удовлетворяет однородным граничным условиям $N_P\left[f\left(P\right)\right]=0,\ P\in S,$ то она разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по собственным функциям $\left\{v_n\left(M\right)\right\}$ задачи (28)-(29), коэффициенты которого определяются как коэффициенты Фурье функции $f(M)$.

Доказательство этого утверждения также основывается на теории интегральных уравнений и будет приведено в дальнейшем.

в) Система собственных функций $\{v_n(M)\}$ задачи (28)-(29) ортогональна с весом $\rho(M)$.

Доказательство. Пусть $v_n(M)$, $v_k(M)$ – собственные функции задачи (28)-(29), соответствующие различным собственным значениям $\lambda_n \neq \lambda_k$, $n \neq k$. Тогда

$$L_M\left[v_n(M)\right]+\lambda_n\rho(M)v_n(M)=0, M\in D, N_P\left[v_n(P)\right]=0, P\in S, \quad (30)$$

$$L_M\left[v_k(M)\right]+\lambda_k\rho(M)v_k(M)=0, M\in D, N_P\left[v_k(P)\right]=0, P\in S. \quad (31)$$

Умножим уравнение (30) на $v_k(M)$, а уравнение на $v_n(M)$, вычтем одно из другого и проинтегрируем по области D:

$$\int_D \left(v_k L[v_n]-v_n L[v_k]\right)dV+(\lambda_n-\lambda_k)\int_D \rho(M)v_n(M)v_k(M)\,dV=0. \quad (32)$$

Интеграл в левой части формулы (32) преобразуем с помощью второй формулы Грина и граничных условий (29):

$$\int_D \left(v_k L_M\left[v_n\right]-v_n L_M\left[v_k\right]\right)dV=\int_S \left(k\left(P\right)\left(v_k\frac{\partial v_n}{\partial n}-v_n\frac{\partial v_k}{\partial n}\right)\right)d\sigma_P=$$

$$=\int_S \frac{k\left(P\right)}{\alpha\left(P\right)}\left(v_k N_P\left[v_n\right]-v_n N_P\left[v_k\right]\right)d\sigma_P=0. \qquad (33)$$

Из формулы (33) следует, что

$$\left(\lambda_n-\lambda_k\right)\int_D \rho\left(M\right)v_n\left(M\right)v_k\left(M\right)dV=$$

$$=-\int_D \left(v_k L_M\left[v_n\right]-v_n L_M\left[v_k\right]\right)dV=0,$$

откуда окончательно получаем

$$\int\limits_D \rho(M) v_n(M) v_k(M)\, dV = 0, \quad n \neq k. \qquad (34)$$

Ч.т.д. $\int\limits_D$

г) При выполнении условий (7) все собственные функции задачи (28)-(29) вещественные и неотрицательные.

Доказательство. Применим первую формулу Грина (17), положив ней $u = v = v_n$:

$$\int\limits_D v_n L_M[v_n] dV = \int\limits_S k(P) v_n \frac{\partial v_n}{\partial n} d\sigma - \int\limits_D k(M)\, grad^2 v_n dV -$$

$$-\int\limits_D q(M) v_n^2 dV. \qquad (35)$$

Учтем, что

$$L_M\left[v_n\right]=-\lambda_n\rho\left(M\right)v_n\left(M\right),\quad M\in D;$$

$$\alpha=0\ \Rightarrow\ v_n\left(P\right)=0;\ \beta=0\ \Rightarrow\ \frac{\partial v_n}{\partial n_P}\left(P\right)=0; \qquad (36)$$

$$\alpha\neq 0,\beta\neq 0\ \Rightarrow\ \frac{\partial v_n}{\partial n_P}\left(P\right)=-\frac{\beta\left(P\right)}{\alpha\left(P\right)}v_n\left(P\right),P\in S.$$

Из формул (35), (36) следует формула (37):

$$-\lambda_n\int_D\rho v_n^2\left(M\right)dV=\int_S k\left(P\right)v_n\left(M\right)\frac{\partial v_n}{\partial n}\left(M\right)d\sigma-$$

$$-\int_D k\left(M\right)grad^2 v_n\left(M\right)dV-\int_D q\left(M\right)v_n^2\left(M\right)dV, \qquad (37)$$

где (см. (7)): $$I=-\int_S k(P)v_n\frac{\partial v_n}{\partial n}d\sigma=\int_S k(P)v_n^2\frac{\beta(P)}{\alpha(P)}\geq 0. \quad (38)$$

Из формул (37), (38) следует, что

$$\lambda_n=\frac{I+\int_D k(M)\,grad^2 v_n(M)\,dV+\int_D q(M)v_n^2(M)\,dV}{\int_D \rho(M)v_n^2(M)\,dV}\geq 0. \quad (39)$$

Ч.т.д.

Замечание. Имеет место

Лемма. Для того, чтобы $\lambda=0$ было собственным значением задачи Штурма-Лиувилля (28)-(29), необходимо и достаточно, чтобы $q=0,\ \ \beta=0.$ При этом $\lambda_0=0-$ простое собственное значение, которому соответствует собственная функция $V_0=const.$ (См. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: «Наука», 1988).

Перейдем к задаче для временной функции. Из уравнения (27) получаем

$$P_t\left[T_n(t)\right]+\lambda_n T_n(t)=0, \qquad (40)$$

где

$$P_t\left[u(M,t)\right]=\sum_{k=0}^{m+1} a_k(t)\frac{\partial^k u}{\partial t^k},\ t\in(0,\infty), \qquad (4)$$

откуда получаем обыкновенное дифференциальное уравнение порядка m:

$$a_{m+1}(t)T_n^{(m+1)}(t)+a_m(t)T_n^{(m)}(t)+\ldots$$

$$\ldots+a_0(t)T_n(t)+\lambda_n T_n(t)=0 \qquad (41)$$

Для построения ФСР (фундаментальной системы решений) уравнения (41) найдем m+1 линейно-независимых частных решений, которые будем выбирать следующим образом. Под κ-м частным решением уравнения (41) мы будем понимать функцию $T_{n,k}\left(t\right)$, удовлетворяющую при t=0 начальным условиям следующего вида:

$$T_{n,k}^{(l)}\left(0\right)=\delta_{k,l}, \quad k,l=0,1,...,m, \qquad (42)$$

где $\delta_{k,l}$ – символ Кронекера.

Решения $T_{n,k}\left(t\right)$ являются линейно независимыми, поскольку при t=0 определитель Вронского этой системы не обращается в нуль (при линейной зависимости он тождественно равен нулю).

$$W\left[T_{n,k}\right] = \begin{vmatrix} T_{n,0}^{(0)} & T_{n,1}^{(0)} & \ldots & T_{n,m}^{(0)} \\ T_{n,0}^{(1)} & T_{n,1}^{(1)} & \ldots & T_{n,m}^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ T_{n,0}^{(m)} & T_{n,1}^{(m)} & \ldots & T_{n,m}^{(m)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad t = 0.$$

Следовательно, система функций $\left\{T_{n,k}\left(t\right)\right\}$ является ФСР уравнения (41), и поэтому

$$T_n\left(t\right) = \sum_{k=0}^{m} C_{n,k} T_{n,k}\left(t\right),$$

где $C_{n,k}$ – произвольные коэффициенты.

Теперь мы можем формально записать решение задачи (19)-(21):

$$u(M,t)=\sum_{n=1}^{\infty} v_n(M) T_n(t)=\sum_{n=1}^{\infty} v_n(M)\sum_{k=0}^{m} C_{n,k} T_{n,k}(t), \quad (43)$$

При этом формально удовлетворяется уравнение (19) и граничные условия (21). Коэффициенты разложения определяются из начальных условий:

$$\frac{\partial^l}{\partial t^l} u(M,0)=\sum_{n=1}^{\infty} v_n(M)\sum_{k=0}^{m} C_{n,k} T_{n,k}^{(l)}(0)=\sum_{n=1}^{\infty} v_n(M)\sum_{k=0}^{m} C_{n,k}\delta_{k,l}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} C_{n,l} v_n(M)=\varphi_l(M), \quad l=0,1,\ldots,m. \quad (44)$$

Из формулы (44) следует, что коэффициент $C_{n,l}$ есть n- коэффициент Фурье в разложении функции $\varphi_l(M)$ по системе собственных функций $\{v_n(M)\}$ задачи (28)-(29):

$$C_{n,l} = \frac{\int\limits_D \rho(M)\varphi_l(M)v_n(M)\,dV}{\int\limits_D \rho(M)v_n^2(M)\,dV}, \quad n = 1, 2, \dots; \quad l = 0, 1, \dots, m. \quad (45)$$

Тем самым все коэффициенты оказываются определенными и начальные условия выполняются.

Итак, мы построили формальное решение задачи (19)-(21). Для доказательства существования решения очень полезен **обобщенный принцип суперпозиции.**

Обобщенный принцип суперпозиции. Если $W_n(M,t)-$ частные решения линейного однородного дифференциального уравнения и все дифференциальные операции, входящие в это уравнение, над функцией $u(M,t)=\sum_{n=1}^{\infty} W_n(M,t)$, определенной как сумма сходящегося ряда частных решений, можно выполнять путем почленного дифференцирования ряда, то функция $u(M,t)$ является решением этого уравнения.

Для выяснения вопроса о существовании решения задачи, необходимо проверить, позволяют ли условия задачи применить обобщенный принцип суперпозиции.

5. Неоднородное уравнение и неоднородные граничные условия

1) Неоднородное уравнение

Рассмотрим задачу II для неоднородного уравнения и однородных начальных и граничного условий:

$$\begin{cases} \rho(M)P_t[u] = L_M[u] + f(M,t), \quad (M,t) \in Q_\infty, & (46) \\ u(M,0) = 0, \ldots, \dfrac{\partial^m u}{\partial t^m}(M,0) = 0, \; M \in D, & (47) \\ N_p\left[u(P,t)\right] = 0, \; P \in S, \; t \in [0,\infty), & (48) \end{cases}$$

Будем искать решение задачи (46)-(48) в виде разложения по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля (28)-(29)

$$\begin{cases} L_M\left[v(M)\right]+\lambda\rho(M)v(M)=0,\ M\in D, & (28)\\ N_P\left[v(P)\right]=0,\ P\in S, & (29)\end{cases}$$

$$u(M,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)v_n(M). \qquad (49)$$

Предположим, что система собственных функций ортонормированная, то есть каждая собственная функция поделена на свою норму. Тогда

$$u_n(t)=\int_D\rho(M)u(M,t)v_n(M)dV,\quad n=1,2,... \qquad (50)$$

Предположим, что интеграл (50) можно дифференцировать по параметру:

$$u_n^{(l)}(t) = \int_D \rho(M) \frac{\partial^l}{\partial t^l} u(M,t) v_n(M) dV,$$

$$n=1,2,..., \quad l = 1,2,...,m+1. \quad (51)$$

Умножим уравнение (46) на $v_n(M)$ и проинтегрируем по области D, меняя порядок суммирования и интегрирования. Получим:

$$P_t\left[u_n(t)\right] - \int_D L_M\left[u(M,t)\right] v_n(M) dV = f_n(t).$$

Применив к выделенному интегралу вторую формулу Грина и учитывая однородные граничные условия, получим

$$P_t\left[u_n(t)\right]-\int\limits_D L_M\left[v_n(M)\right]u(M,t)\,dV = f_n(t),$$

и так как

$$L_M\left[v_n(M)\right]=-\lambda_n\rho(M)v_n(M),$$

то

$$P_t\left[u_n(t)\right]+\lambda_n\int\limits_D \rho(M)u(M,t)v_n(M)\,dV = f_n(t),$$

и, с учетом формулы (51), получим окончательную формулу:

$$P_t\left[u_n(t)\right]+\lambda_n u_n(t)= f_n(t),$$

где

$$f_n(t) = \int_D f(M,t)\, v_n(M)\, dV.$$

Учитывая формулы (47) и (51), получим

$$u_n(0) = 0, \ldots, u_n^{(m)}(0) = 0, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Таким образом, для функций $u_n(t)$ получаем задачу Коши

$$\begin{cases} P_t\left[u_n(t)\right] + \lambda_n u_n(t) = f_n(t), t \in (0,\infty), \\ u_n(0) = 0, \ldots, u_n^{(m)}(0) = 0, \quad n = 1, 2, \ldots \end{cases} \qquad (52)$$

Решение задачи (52) выписывается с помощью функции Коши $K_n(t-\tau)$, которая является решением задачи:

$$\begin{cases} P_t\left[K_n\right]+\lambda_n K_n=0, \\ K_n(0)=0, \dfrac{\partial}{\partial t}K_n(0)=0, \ldots, \dfrac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}}K_n(0)=0, \dfrac{\partial^m}{\partial t^m}K_n(0)=1, \end{cases}$$

$$u_n(t)=\int_0^t K_n(t-\tau)\, f_n(\tau)\, d\tau, \qquad (53)$$

$$u(M,t)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)v_n(M)=\sum_{n=1}^{\infty} v_n(M)\int_0^t K_n(t-\tau)\, f_n(\tau)\, d\tau=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} v_n(M)\int_0^t K_n(t-\tau)\int_D f(Q,\tau)v_n(Q)\, dQ\, d\tau=$$

$$=\int_0^t \int_D \sum_{n=1}^{\infty} K_n(t-\tau)v_n(M)v_n(Q)\, f(Q,\tau)\, dQ\, d\tau.$$

Таким образом, окончательно получаем

$$u(M,t)=\int_0^t\int_D G(M,Q,t-\tau)f(Q,\tau)\,dV_Q\,d\tau, \qquad (54)$$

где

$$G(M,Q,t-\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}K_n(t-\tau)v_n(M)v_n(Q). \qquad (55)$$

Подчеркнем, что данное решение **построено формально**. Вопросы **существования решения** связаны с детальным анализом свойств собственных функций для конкретных задач. В дальнейшем это обоснование будет проведено для отдельных задач.

2) Неоднородное граничное условие

Рассмотрим задачу III для однородного уравнения с однородными начальными и неоднородным граничным условием:

$$\begin{cases} \rho(M)P_t[u] = L_M[u], \quad (M,t)\in Q_\infty, & (56)\\ u(M,0)=0,\dots,\ \dfrac{\partial^m u}{\partial t^m}(M,0)=0,\ M\in D, & (57)\\ N_p[u(P,t)] = \mu(P,t),\ P\in S,\ t\in[0,\infty). & (58)\end{cases}$$

Для решения задачи (56)-(58) будем искать решение в виде суммы двух функций $u(M,t)=\tilde{u}(M,t)+v(M,t)$, причем функция $\tilde{u}(M,t)$ подбирается так, чтобы она удовлетворяла граничному условию $N_p\left[\tilde{u}(P,t)\right]=0.$

В результате для функции v получается задача:

$$\begin{cases} \rho(M)P_t[v] = L_M[v] + f(M,t), \quad (M,t)\in Q_\infty, & (59) \\ v(M,0) = \varphi(M),\ldots, \dfrac{\partial^m v}{\partial t^m}(M,0) = \varphi(M),\ M\in D, & (60) \\ N_p\left[v(P,t)\right] = 0,\ P\in S,\ t\in[0,\infty), & (61) \end{cases}$$

где

$$f(M,t) = L_M[\tilde{u}] - \rho(M)P_t[\tilde{u}],$$

$$\varphi_0(M) = -\tilde{u}(M,0),\ldots,\varphi_m(M) = -\frac{\partial^m}{\partial t^m}\tilde{u}(M,0).$$

Таким образом, решение исходной задачи (56)-(58) свелось к сумме решений двух уже рассмотренных задач: задачи I и задачи II. .

Иногда удается подобрать функцию $\tilde{u}(M,t)$ так, чтобы она удовлетворяла не только граничному условию (56), но и уравнению (58). В этом случае для функции v получается задача I.