Глава 5. Уравнения параболического типа

1. Постановка начально-краевой задачи

$$\begin{cases} \rho(M)u_t(M,t) = div\big(k(M)\,grad\,u(M,t)\big) + f(M,t), (M,t) \in Q_\infty, & (1) \\ u(M,0) = \varphi(M), M \in \bar{D}, & (2) \\ \alpha(P)\dfrac{\partial u(P,t)}{\partial n_P} + \beta(P)u(P,t) = \mu(P,t), P \in S, t \in [0,\infty), & (3) \end{cases}$$

где $\rho(M) > 0, k(M) > 0, \rho(M) = \tilde{\rho}(M)C(M), \tilde{\rho}(M) -$ плотность, $C(M) -$ удельная теплоемкость, $k(M) -$ коэффициент теплопроводности,

$$|\alpha(P)| + |\beta(P)| \neq 0, Q_\infty = D \times (0,\infty) = \{(M,t) : M \in D, t \in (0,\infty)\},$$

$$\bar{Q}_\infty = \bar{D} \times [0,\infty).$$

Определение. Функция $u(M,t)$ называется классическим решением начально-краевой задачи (1)-(3), если она обладает следующими свойствами :

1) $u(M,t) \in C_{t,M}^{(1,2)}(Q_T) \cap C_{t,M}^{(0,1)}(\bar{Q}_T)$,

2) удовлетворяет уравнению (1) в классическом смысле,

3) непрерывно примыкает к начальному (2) и граничному (3) условиям.

Здесь $Q_T = D \times (0,T] = \{(M,t) : M \in D, t \in (0,T]\}$, $\bar{Q}_T = \bar{D} \times [0,T]$.

Необходимым условием существования классического решения является выполнение условия сопряжения

$$\alpha(P)\frac{\partial \varphi(P)}{\partial n_P} + \beta(P)\varphi(P) = \mu(P,0).$$

2. Принцип максимума

Теорема. Классическое решение однородного дифференциального уравнения (1), где $\rho(M)>0,\ k(M)>0,\ M\in D,$ непрерывное в замкнутом цилиндре $u(M,t)\in\bar{Q}_T,$ во внутренних точках этого цилиндра не может принимать значений больших, чем максимальное из начального и граничного значений.

Доказательство (от противного). Итак, нужно доказать, что, если

$$\mathbf{M}=\max\left\{u(M,0),M\in\bar{D};\ u(P,t),P\in S,t\in[0,T]\right\},$$

то

$$u(M,t)\le\mathbf{M}.$$

Пусть найдется точка $(M_0,t_0)\in Q_T,$ в которой функция достигает своего максимального значения, большего

$$u(M_0,t_0)>\mathbf{M}.$$

Пусть $u\left(M_0,t_0\right)=\mathbf{M}+\varepsilon,\quad \varepsilon>0$. Введем вспомогательную функцию

$$v\left(M,t\right)=u\left(M,t\right)+\alpha\left(t_0-t\right), \tag{4}$$

где $\alpha>0$ – положительное число. Очевидно $v\left(M_0,t_0\right)=\mathbf{M}+\varepsilon$ и

$$\max\left\{v\left(M,0\right),M\in\bar{D};v\left(P,t\right),P\in S,t\in\left[0,T\right]\right\}\le\mathbf{M}+\alpha T<\mathbf{M}+\frac{\varepsilon}{2}, \tag{5}$$

если выбрать α так, чтобы $\alpha T<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

Так как функция $v\left(M,t\right)\in C\left(\bar{Q}_T\right)$ – непрерывна в замкнутой области $\bar{Q}_T=\bar{D}\times\left[0,T\right]$, то она должна в некоторой точке $\left(M_1,t_1\right)$ достигать своего максимального значения.

Очевидно, что

$$v\left(M_1,t_1\right)\ge v\left(M_0,t_0\right)=\mathbf{M}+\varepsilon$$

Поэтому ясно, что точка (M_1,t_1) внутренняя, так как, согласно (5), максимальное значение на границе и в начальный момент не превосходит $\mathbf{M}+\frac{\varepsilon}{2}$.

Итак, $(M_1,t_1)\in Q_T$, то есть $M_1\in D,\ t_1\in(0,T]$. Так как в точке (M_1,t_1) функция $v(M,t)$ достигает максимума, то

$$grad\big|_{M=M_1;t=t_1} v=0;\quad \Delta v\big|_{M=M_1;t=t_1}\le 0;\quad \frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{M=M_1;t=t_1}\ge 0. \qquad (6)$$

Заметим, что в (6) при $t_1<T$ $\frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=t_1}=0$, а при $t_1=T$ $\frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=t_1}\ge 0$.

Из формул (4) и (6) следует что

$$grad\big|_{M=M_1;t=t_1} u=0;\quad \Delta u\big|_{M=M_1;t=t_1}\le 0;\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{M=M_1;t=t_1}\ge \alpha>0. \qquad (7)$$

Поскольку $u(M,t)-$ решение уравнения (1), то, учитывая, что

$$\rho(M)>0,\ k(M)>0,$$

получим

$$\underset{>0}{\rho(M_1)}\,\underset{\geq\alpha>0}{u_t(M_1,t_1)}=\underset{>0}{k(M_1)}\,\underset{\leq 0}{\Delta u(M_1,t_1)}+grad\ k(M_1)\,\underset{=0}{grad\ u(M_1,t_1)}. \qquad (8)$$

Левая часть формулы (8) строго больше нуля, в то время как правая часть не больше нуля. Полученное противоречие доказывает теорему.

Ч.т.д.

Следствие.

Аналогично можно доказать принцип минимума, а также принципы сравнения.

1) Принцип минимума.

Теорема. Классическое решение однородного дифференциального уравнения (1), где $\rho(M)>0,\ k(M)>0,\ M\in D,$ непрерывное в замкнутом цилиндре $u(M,t)\in C(\bar{Q}_T),$ во внутренних точках этого цилиндра не может принимать значений меньших, чем минимальное из начального и граничного значений.

Доказательство. Эта теорема следует из доказанной, если учесть, что функция $\bar{u}(M,t)=-u(M,t)$ имеет минимальное значение там, где $u(M,t)$ имеет максимальное значение.

Замечание. Принципы максимума и минимума называют принципом экстремума.

2) Приведем две формулировки принципа сравнения.

Принцип сравнения 1. Если два классических решения однородного уравнения теплопроводности (1), где $\rho(M)>0,\ k(M)>0,\ M\in D,$ непрерывные в замкнутом цилиндре $u(M,t)\in C(\bar{Q}_T)$,удовлетворяют условиям

$$u_1(M,0)\ge u_2(M,0),\ M\in\bar{D}, \qquad (9)$$

$$u_1(P,t)\ge u_2(P,t),\ P\in S, t\in[0,T], \qquad (10)$$

то

$$u_1(M,t)\ge u_2(M,t),\ M\in\bar{D}, t\in[0,T], \qquad (11)$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $v(M,t)=u_1(M,t)-u_2(M,t)$ и применим к ней принцип минимума (в силу линейности функция $v(M,t)$

$v(M,t)$ удовлетворяет однородному уравнению (1) и $v(M) \in C(\bar{Q}_T)$.

Так как из (9) и (10) следует, что

$$v(M,0) \geq 0,\ M \in \bar{D},$$
$$v(P,t) \geq 0,\ P \in S,\ t \in [0,T],$$

то

$$v(M,t) \geq 0,\ M \in \bar{D},\ t \in [0,T],$$

откуда следует (11). **Ч.т.д.**

Принцип сравнения 2. Если два классических решения однородного уравнения теплопроводности (1), где $\rho(M) > 0,\ k(M) > 0,\ M \in D,$ непрерывные в замкнутом цилиндре $u(M,t) \in C(\bar{Q}_T)$, удовлетворяют условиям

$$\left|u_1(M,0)-u_2(M,0)\right|<\varepsilon,\ M\in\bar{D}, \tag{12}$$

$$\left|u_1(P,t)-u_2(P,t)\right|<\varepsilon,\ P\in S,\ t\in[0,T], \tag{13}$$

то

$$\left|u_1(M,t)-u_2(M,t)\right|<\varepsilon,\ M\in\bar{D},\ t\in[0,T]. \tag{14}$$

Доказательство. Рассмотрим функции

$$v_1(M,t)=-\varepsilon;\ v_2(M,t)=u_1(M,t)-u_2(M,t);\ v_3(M,t)=\varepsilon.$$

Функции $v_i(M,t),\ i=1,2,3,$ очевидно, удовлетворяют однородному уравнению (1) в области Q_T и непрерывны в области $\bar{Q}_T$. Поэтому применяя принцип сравнения 1 к функциям $v_1(M,t),\ v_2(M,t)$ и к

$v_2(M,t)$, $v_3(M,t)$, получим

$$v_1(M,t) < v_2(M,t) < v_3(M,t), \quad (M,t) \in \overline{Q}_T,$$

откуда следует (14). **Ч.т.д**.

Замечания

1) Доказанный принцип максимума не противоречит существованию решения уравнения (1) равного постоянной.

2) Физически принцип максимума означает отсутствие флуктуаций.

3. Теоремы единственности и устойчивости

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} \rho(M)u_t(M,t) = div\big(k(M)\,grad\,u(M,t)\big) + f(M,t), \quad (M,t)\in Q_T, & (15) \\ u(M,0)=\varphi(M), \quad M\in \bar{D}, & (16) \\ u(P,t)=\mu(P,t), \quad P\in S,\ t\in[0,T]. & (17) \end{cases}$$

Теорема 1. Классическое решение задачи (15)-(17) единственно.

Доказательство (от противного). Пусть $u_1(M,t)\neq u_2(M,t)-$ два решения задачи (15)-(17). Рассмотрим функцию

$$v(M,t)=u_1(M,t)-u_2(M,t)$$

являющуюся решением однородного уравнения (15), удовлетворяющей однородным условиям (16) и (17) и непрерывной в цилиндре $\bar{Q}_T$.

Применяя к функции $v(M,t)$, для которой

$$v(M,0)=0, M\in\bar{D},$$
$$v(P,t)=0, P\in S, t\in[0,T]$$

принцип максимума, получим

$$v(M,t)\le 0, M\in\bar{D},\ \ t\in[0,T],$$

а применяя принцип минимума, получим

$$v(M,t)\ge 0, M\in\bar{D},\ \ t\in[0,T].$$

Таким образом,

$$v(M,t)=0,\ \ u_1(M,t)=u_2(M,t),\ \ M\in\bar{D},\ \ t\in[0,T].$$

Полученное противоречие доказывает теорему. **Ч.т.д.**

Теорема 2. Классическое решение задачи (15)-(17) устойчиво по начальному и граничному условиям.

Доказательство. Пусть $u_i(M,t),\ i=1,2-$ решения уравнения (15), удовлетворяющие условиям:

$$\begin{cases} u_i(M,0)=\varphi_i(M), M\in\bar{D}, i=1,2, \\ u_i(P,t)=\mu_i(P,t), P\in S, t\in[0,T], i=1,2. \end{cases}$$

Пусть выполняются неравенства:

$$\left|\varphi_1(M)-\varphi_2(M)\right|<\varepsilon, M\in\bar{D},$$

$$\left|\mu_1(P,t)-\mu_2(P,t)\right|<\varepsilon, P\in S, t\in[0,T].$$

Требуется доказать, что

$$\left|u_1(M,t)-u_2(M,t)\right|<\varepsilon, \quad (M,t)\in Q_T.$$

Это неравенство сразу следует из принципа сравнения 2, если его применить к функциям $u_1(M,t),\ u_2(M,t)$. **Ч.т.д.**

4. Формальное построение решения методом разделения переменных

Рассмотрим начально-краевую задачу (18)-20) с однородным граничным условием (задачу I):

$$\begin{cases} \rho(M)u_t(M,t) = L_M\left[u(M,t)\right] + f(M,t), (M,t)\in Q_\infty, & (18) \\ u(M,0) = \varphi(M), M\in \bar{D}, & (19) \\ N_P\left[u(P,t)\right] = 0, P\in S, t\in[0,\infty), & (20) \end{cases}$$

где операторы имеют следующий вид

$$L_M\left[u(M,t)\right] \equiv div\left(k(M)\, grad\ u(M,t)\right);$$

$$N_P\left[u(P,t)\right] \equiv \alpha(P)\frac{\partial u(P,t)}{\partial n_p} + \beta(P)u(P,t).$$

Рассмотрим задачу Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} L_M\left[v_n(M)\right]+\lambda_n\rho(M)v_n(M)=0,\ M\in D, \\ N_P\left[v_n(P)\right]=0,\ P\in S. \end{cases} \qquad (21)$$

Предположим, что существует система собственных функций $\{v_n(M)\}$ и система собственных значений $\{\lambda_n\}$, причем собственные функции образуют ортонормированную систему, $\|v_n(M)\|=1,\ n=1,2,\ldots$

Будем искать решение задачи (18)-(20) в виде

$$u(M,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)v_n(M), \qquad (22)$$

где

$$u_n(t)=\int_D u(Q,t)\rho(Q)v_n(Q)\,dV_Q,\quad n=1,2,\ldots \qquad (23)$$

Умножим уравнение (18) слева и справа на $v_n(M)$ и проинтегрируем по области D. Преобразуем в полученном равенстве слева первый интеграл по второй формуле Грина и введем обозначения:

$$f_n(t) = \int_D f(Q,t) v_n(Q) dV_Q, n = 1, 2, ... \qquad (24)$$

$$\varphi_n = \int_D \varphi(Q) \rho(Q) v_n(Q) dV_Q . n = 1, 2, ... \qquad (25)$$

Получим задачу для $u_n(t)$:

$$\begin{cases} u_n'(t) + \lambda_n u_n(t) = f_n(t), t \in (0, \infty), \\ u_n(0) = \varphi_n, \end{cases} \qquad (26)$$

решение которой имеет вид

$$u_n(t)=\int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)} f_n(\tau)\,d\tau+\varphi_n e^{-\lambda_n t}. \qquad (27)$$

Подставляя (27) в (22) и учитывая (23)-(25), получим

$$u(M,t)=\int_0^t\int_D G(M,Q,t-\tau)f(Q,\tau)\,dV_Q\,d\tau+$$

$$+\int_D G(M,Q,t)\varphi(Q)\rho(Q)\,dV_Q, \qquad (28)$$

где

$$G(M,Q,t)=\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} v_n(M) v_n(Q). \qquad (29)$$

Определение. Функция $G(M,Q,t)$, определяемая формулой (29), называется функцией Грина или функцией источника. Функция Грина представима в виде (29) при $t \geq 0$ и равна нулю при $t < 0$.

Физический смысл функции источника. Выберем в качестве начальной функцию $\varphi_\varepsilon(M) \in C(D)$:

$$\begin{cases} \varphi_\varepsilon(M) > 0, M \in K^\varepsilon_{M_0}, \\ \varphi_\varepsilon(M) = 0, M \notin \bar{K}^\varepsilon_{M_0}, \end{cases} \quad \bar{K}^\varepsilon_{M_0} \subset D. \qquad (30)$$

удовлетворяющее условию нормировки:

$$\int\limits_{K^\varepsilon_{M_0}} \rho(Q)\varphi_\varepsilon(Q) dV_Q = 1, \quad \varepsilon > 0. \qquad (31)$$

Тогда, полагая $f(M,t) \equiv 0,$ получаем решение

$$u_\varepsilon(M,t) = \int_D G(M,Q,t)\varphi_\varepsilon(Q)\rho(Q)\,dV_Q =$$

$$= \int_{K_{M_0}^\varepsilon} G(M,Q,t)\varphi_\varepsilon(Q)\rho(Q)\,dV_Q$$

Применяя формулу среднего значения, получим:

$$u_\varepsilon(M,t) = G(M,M^*,t)\int_{K_{M_0}^\varepsilon} \varphi_\varepsilon(Q)\rho(Q)\,dV_Q = G(M,M^*,t), M^* \in K_{M_0}^\varepsilon.$$

Перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0.$ Тогда $M^* \to M_0$ и

$$u_0(M,t) = \lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon(M,t) = \lim_{\varepsilon\to 0} G(M,M^*,t) = G(M,M_0,t).$$

Таким образом, $G(M, M_0, t)$ есть температура тела D в момент времени t в точке M, если возбуждение тела осуществлялось мгновенным точечным источником, действующим в момент $t = 0$ в точке M_0.

Мощность источника. $\rho(M) = C(M)\tilde{\rho}(M)$, $C(M)$ – теплоемкость, $\tilde{\rho}(M)$ – плотность. Количество тепла q_0, сообщенное телу D в момент $t = 0$, равно

$$q_0 = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{K_{M_0}^{\varepsilon}} C(Q)\tilde{\rho}(Q)\varphi_{\varepsilon}(Q)\,dV_Q = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{K_{M_0}^{\varepsilon}} \rho(Q)\varphi_{\varepsilon}(Q)\,dV_Q = 1.$$

Итак, $G(M, M_0, t)$ – температура тела при единичной мощности источника.

5.Существование решения начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности на отрезке

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), x \in (0,l), t \in (0,\infty), & (32) \\ u(x,0) = \varphi(x), x \in [0,l], & (33) \\ u(0,t) = 0; u(l,t) = 0, t \in [0,\infty). & (34) \end{cases}$$

Применяя метод разделения переменных, построим формально ее решение

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin \frac{\pi n x}{l}, \qquad (35)$$

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx, n = 1, 2, \ldots \qquad (36)$$

Функция (35) удовлетворяет граничным условиям (34) и, в силу выбора коэффициентов (36) удовлетворяет начальному условию (33). Покажем, что функция (35) является классическим решением задачи (32)-(34). Для этого нужно доказать, что эту функцию можно дифференцировать нужное число раз и что она удовлетворяет уравнению (32) в области $x \in (0, l), t \in (0, \infty)$ и непрерывна в точках $t = 0,\ x = 0,\ x = l,$ то есть обосновать возможность применения обобщенного принципа суперпозиции.

Обобщенный принцип суперпозиции. Если функции $u_n(x,t),\ n = 1, 2, \ldots$ по переменным (x,t) удовлетворяют линейному дифференциальному уравнению $L\left[u_n(x,t)\right] = 0$ при любом $n,$ то ряд

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)$$

также является решением того же уравнения $L\left[u(x,t)\right]=0,$ если производные, входящие в линейный дифференциальный оператор $L,$ можно вычислять путем почленного дифференцирования ряда.

Доказательство очевидно: $L\left[u(x,t)\right]=\sum_{n=1}^{\infty}L\left[u_n(x,t)\right]=0.$

Теорема. Пусть функция $\varphi(x)$ непрерывна на отрезке $[0,l],$ имеет на нем кусочно-непрерывную первую производную: $\varphi(x)\in C[0,l]\cap Q^{(1)}[0,l]$ и выполняются условия $\varphi(0)=0,\varphi(l)=0.$ тогда существует классическое решение задачи (32)-(34), представимое рядом (35) с коэффициентами (36).

Замечание. $Q^{(k)}[0,l]$ - множество функций, имеющих на отрезке $[0,l]$ кусочно-непрерывную производную k-го порядка.

Доказательство. Покажем прежде всего, что при $t\geq\bar{t}>0,$ где $\bar{t}$ – любое положительное число, ряд (35) и ряды из производных

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n(x,t)}{\partial t}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n(x,t)}{\partial x^2},$$

$$u_n(x,t) = C_n \mathrm{e}^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin \frac{\pi n x}{l} \tag{38}$$

сходятся равномерно.

Так как $\varphi(x) \in C[0,l]$, то $|\varphi(x)| < M$ и

$$|C_n| = \frac{2}{l} \left| \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx \right| < 2M. \tag{39}$$

Тогда при $t \geq \overline{t}$

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial t}\right| < 2M\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 a^2 n^2 e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 \bar{t}},$$

$$\left|\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}\right| < 2M\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 n^2 e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 \bar{t}} \qquad (40)$$

В силу (40) мажорантный ряд для рядов (38) имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} N n^2 e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 \bar{t}}, \qquad (41)$$

где $N -$ постоянная, и его сходимость легко устанавливается по признаку Даламбера.

Следовательно, ряд (35) в области $t \in [\bar{t}, \infty)$, $x \in [0, l]$ можно почленно дифференцировать один раз по t и два раза по x. Из обобщенного принципа суперпозиции следует, что функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (32). Так как $\bar{t}$ – произвольное число, то это имеет место при всех $t \in (0, \infty)$, $x \in [0, l]$. Причем функция $u(x,t)$ непрерывно примыкает граничным условиям.

Нам осталось доказать, что функция $u(x,t)$, представимая рядом (35), непрерывно примыкает к граничным и начальному условию при $t=0$, то есть ряд (35) будет определять непрерывную функцию при

$$t \in [0, \infty),\ x \in [0, l].$$

Для этого используем известные свойства рядов Фурье.

Прежде всего нам понадобится следующее свойство.

Если периодическая с периодом $2l$ функция $F(x)$ имеет κ непрерывных производных на отрезке $[-l,l]$, а (κ+1)-я производная ее кусочно-непрерывна на этом отрезке: $F(x)\in C^{(k)}[-l,l]\cap Q^{(k+1)}[-l,l]$, то числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^k\left(|a_n|+|b_n|\right), \qquad (42)$$

где $a_n,\ b_n -$ коэффициенты Фурье, сходится. Если речь идет о разложении в ряд по системе $\left\{\sin\frac{\pi n x}{l}\right\}$ функции $f(x)$, заданной только на отрезке $[0,l]$, то надо, чтобы сформулированные требования были выполнены для функции $F(x)$,получающейся при нечетном продолжении функции $f(x)$. В частности, для непрерывности $F(x)$ необходимо, чтобы

$f(0)=0$, так как в противном случае при нечетном продолжении получится разрыв в точке $x=0$. Аналогично этому в точке $x=l$ должно быть $f(l)=0$, так как продолженная функция должна быть непрерывна и периодична с периодом $2l$. Непрерывность первой производной при $x=0$ и $x=l$ получается автоматически, как и непрерывность любой нечетной производной. Для непрерывности четных производных нечетно продолженной функции нужно потребовать, чтобы

$$f^{(2p)}(0)=f^{(2p)}(l)=0,\ p=1,2,\ldots \qquad (43)$$

Непрерывность нечетных производных имеет место без дополнительных требований.

Из условия теоремы следует, что сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |C_n|. \qquad (44)$$

Так как при $t \in [0, \infty)$, $x \in [0, l]$

$$|u_n(x,t)| \le |C_n|, \qquad (45)$$

то ряд (44) является мажорантным для ряда (35). Следовательно, ряд (35) сходится равномерно и его сумма $u(x,t)$ является непрерывной функцией при $t \in [0, \infty)$, $x \in [0, l]$.

6. Задача Коши для уравнения теплопроводности

1) Постановка задачи Коши

Введем обозначения:

$$\Omega_T \equiv R^1 \times (0,T],\ \bar{\Omega}_T \equiv R^1 \times [0,T],\ R^1 \equiv \{-\infty < x < \infty\}.$$

Рассмотрим задачу Коши для уравнения теплопроводности на бесконечной прямой:

$$\begin{cases} u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + f(x,t),\ (x,t) \in \Omega_T, & (46) \\ u(x,0) = \varphi(x),\quad x \in R^1, & (47) \\ |u(x,t)| < M,\ (x,t) \in \bar{\Omega}_T. & (48) \end{cases}$$

Условие ограниченности решения (48), как мы увидим ниже, необходимо для выделения единственного решения.

Определение. Классическим решением задачи (46)-(48) мы будем называть непрерывную в области $\bar{\Omega}_T$ функцию, удовлетворяющую в области Ω_T уравнению (46) в классическом смысле, непрерывно примыкающую к начальному условию (47) и ограниченную в области $\bar{\Omega}_T$.

2) Теорема единственности

Теорема. Классическое решение задачи (46)-(48) единственно.

Доказательство. Пусть кроме решения $u_1(x,t)$ существует еще решение $u_2(x,t)$, $u_1(x,t) \neq u_2(x,t)$. Функции $u_1(x,t), u_2(x,t)$ непрерывны и ограничены в области $\bar{\Omega}_T$.

Рассмотрим функцию

$$v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t). \qquad (49)$$

Функция $v(x,t)$ непрерывна в области $\bar{\Omega}_T$, ограничена

$$|v(x,t)| \le |u_1(x,t)| + |u_2(x,t)| < 2M, \qquad (50)$$

удовлетворяет однородному уравнению теплопроводности и однородному начальному условию

$$v(x,0) = 0. \qquad (51)$$

Однако применить к функции $v(x,t)$ принцип максимума мы не можем, поскольку в не ограниченной по x области функция $v(x,t)$ может нигде не достигать максимального значения. Чтобы воспользоваться принципом максимума, рассмотрим область $|x| \le L$, где $L > 0$ – некоторое вспомогательное число, которое мы затем будем неограниченно увеличивать. Введем обозначение

$$\bar{\Omega}_L \equiv [-L, L] \times [0, T], \;\; \Omega_L \equiv [-L, L] \times (0, T].$$

Введем вспомогательную функцию, которая называется **барьером**

$$w_L(x,t) = \frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2} + a^2 t\right). \tag{52}$$

Функция $w_L(x,t)$ непрерывная, удовлетворяет однородному уравнению теплопроводности и кроме того обладает следующими свойствами

$$w_L(x,0) \geq |v(x,0)| = 0, \tag{53}$$

$$w_L(\pm L,t) \geq 2M > |v(\pm L,t)|. \tag{54}$$

Для ограниченной области $\bar{\Omega}_L$ уже можно будет применить принцип максимума и, применяя второй принцип сравнения, получим

$$|v(x,t)| \leq \frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2} + a^2 t\right)$$

или

$$-\frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2}+a^2t\right)\le v(x,t)\le\frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2}+a^2t\right). \qquad (54)$$

Зафиксируем точку $(x_0,t_0)\in\bar{\Omega}_L$ и перейдем в формуле (54) к пределу при $L\to\infty$. Тогда по теореме о «двух полицейских» получим

$$\lim_{L\to\infty} v(x_0,t_0)=0. \qquad (55)$$

Отсюда, в силу независимости функции $v(x,t)$ от L и в силу произвольности точки $(x_0,t_0)\in\bar{\Omega}_L$ получим, что всюду в области $\bar{\Omega}_T$ $v(x,t)=0,\ \ u_1(x,t)=u_2(x,t).$ Полученное противоречие доказывает теорему. **Ч.т.д.**

3) Формальное построение решения с помощью интегрального преобразования Фурье

Для построения решения задачи (46)-(48) используем интегральное преобразование Фурье с ядром $K(x,k)=\dfrac{1}{2\pi}e^{-ikx}$. Обозначим образы Фурье функций $u(x,t)$, $f(x,t)$, $\varphi(x)$ через $U(k,t)$, $F(k,t)$, $\Phi(k)$ соответственно. Будем предполагать, что функция $u(x,t)$ и ее частные производные достаточно быстро стремятся к нулю при $x\to\pm\infty$.

Умножим уравнение (46) на ядро $K(x,k)$ и проинтегрируем по $x\in(-\infty,+\infty)$:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-ik\xi}u_t(\xi,t)\,d\xi=\frac{a^2}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-ik\xi}u_{\xi\xi}(\xi,t)\,d\xi+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-ik\xi}f(\xi,t)\,d\xi \tag{56}$$

Проинтегрируем первый интеграл в правой части формулы (56) по частям, учитывая, что подстановка на $\pm\infty$ обращается в ноль. Пусть также зависящий от параметра t интеграл в левой части формулы (56) допускает дифференцирование по параметру. В результате получаем задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\begin{cases} U_t(k,t)+a^2k^2U(k,t)=F(k,t), t\in(0,\infty), & (57)\\ U(k,0)=\Phi(k), & (58)\end{cases}$$

где

$$U(k,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ik\xi}u_t(\xi,t)\,d\xi,\ F(k,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ik\xi}f(\xi,t)\,d\xi,$$

$$\Phi(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ik\xi}\varphi(\xi)\,d\xi. \qquad (59)$$

Решение задачи (57), (58) имеет вид:

$$U(k,t)=\int_0^t e^{-a^2k^2(t-\tau)}F(k,\tau)d\tau+\Phi(k)e^{-a^2k^2t}. \qquad (60)$$

Формула обратного преобразования Фурье

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}U(k,t)e^{ikx}dk. \qquad (61)$$

Из формул (59)-(61) получаем

$$u(x,t)=\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2k^2(t-\tau)+ik(x-\xi)}dk\right)f(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2k^2t+ik(x-\xi)}dk\right)\varphi(\xi)d\xi. \qquad (62)$$

Введем обозначение

$$G\left(x,\xi,t\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2k^2t+ik\left(x-\xi\right)}dk. \qquad (63)$$

Интеграл (63) вычислим методом дифференцирования по параметру. Рассмотрим интеграл

$$J\left(\beta\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha^2k^2+ik\beta}dk. \qquad (64)$$

Имеем:

$$\frac{dJ\left(\beta\right)}{d\beta}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}ike^{-\alpha^2k^2+ik\beta}dk=-\frac{i}{2\alpha^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{ik\beta}de^{-\alpha^2k^2}=-\frac{i}{2\alpha^2}e^{ik\beta}\,e^{-\alpha^2k^2}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+$$

$$+\frac{i}{2\alpha^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}i\beta e^{-\alpha^2k^2+ik\beta}dk=-\frac{\beta}{2\alpha^2}J\left(\beta\right),$$

Таким образом

$$\frac{dJ(\beta)}{d\beta} = -\frac{\beta}{2\alpha^2} J(\beta), \quad J(\beta) = Ce^{-\frac{\beta}{2\alpha^2}},$$

$$J(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2 k^2} dk = \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}, \quad J(\beta) = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} e^{-\frac{\beta}{2\alpha^2}} \qquad (65)$$

Из формул (63)-(65) окончательно получаем

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \qquad (66)$$

Определение. Функция $G(x,\xi,t)$, определяемая формулой (66), называется **фунламентальным решением** уравнения теплопроводности на прямой или **функцией источника**.

Из формул (62) и (63) получаем, что

$$u(x,t)=\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty} G(x,\xi,t-\tau)\,f(\xi,\tau)\,d\xi d\tau+\int_{-\infty}^{+\infty} G(x,\xi,t)\varphi(\xi)\,d\xi \quad (67)$$

4) Свойства фундаментального решения

1. Из формулы (66) следует, что функция $G(x,\xi,t)$ определена и положительна: $G(x,\xi,t)>0, x\in R^1, \xi\in R^1, t\in(0,\infty)$.

2. Так как разложение δ- функции в интеграл Фурье имеет вид

$$\delta(x,\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(x-\xi)}dk, \quad (68)$$

то

$$G(x,\xi,0)=\delta(x,\xi). \quad (69)$$

3. Функция $G(x,\xi,t)$ по переменным (x,t) удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$G_t(x,\xi,t)=a^2G_{xx}(x,\xi,t),\ x\in R^1,\ \xi\in R^1,\ t\in(0,\infty). \qquad (70)$$

Таким образом, можно дать еще одно определение функции $G(x,\xi,t)$:

Определение. Фундаментальным решением $G(x,\xi,t)$ уравнения теплопроводности на бесконечной прямой называется решение задачи Коши:

$$\begin{cases} G_t(x,\xi,t)=a^2G_{xx}(x,\xi,t),\ x\in R^1,\ \xi\in R^1,\ t\in(0,\infty), & (71)\\ G(x,\xi,0)=\delta(x,\xi),\ x\in R^1,\ \xi\in R^1, & (72)\end{cases}$$

непрерывное всюду в области $\bar{\Omega}_\infty$ за исключением точки $(\xi,0)$, то есть при $x=\xi,\ t=0$.

4) Пусть $f(x,t)=0.$ Тогда из формулы (67) получим

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty} G(x,\xi,t)\varphi(\xi)\,d\xi \qquad (73)$$

Интеграл (73) называется интегралом Пуассона.

Из формулы (73) следует, что функция $G(x,\xi,t)$ представляет температуру в точке x в момент t=0, если в начальный момент t=0 в точке ξ выделяется количество тепла, равное q_0.

Имеет место формула:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(x,\xi,t)dx=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}dx=\left\{z=\frac{x-\xi}{2a\sqrt{t}}\right\}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}dz=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi}=1. \qquad (74)$$

Физический смысл формулы (74) заключатся в том, что количество тепла, находящееся на оси $-\infty < x < +\infty$ в момент времени t=0 не меняется с течением времени. В самом дел, количество тепла, находящегося на оси равно:

$$q_0 = c\tilde{\rho}\int_{-\infty}^{+\infty} G(x,\xi,t)\,dx = c\tilde{\rho}, \qquad (75)$$

где С - удельная теплоемкость, $\tilde{\rho}$ − линейная плотность.

Итак, точечный источник, находящийся в точке ξ, в начальный момент t=0 выделяет количество тепла $q_0 = c\tilde{\rho} = \rho.$ Заметим, что в уравнении (46) $a^2 = \dfrac{k}{\rho},\ k = const,\ \rho = c\tilde{\rho} = const.$

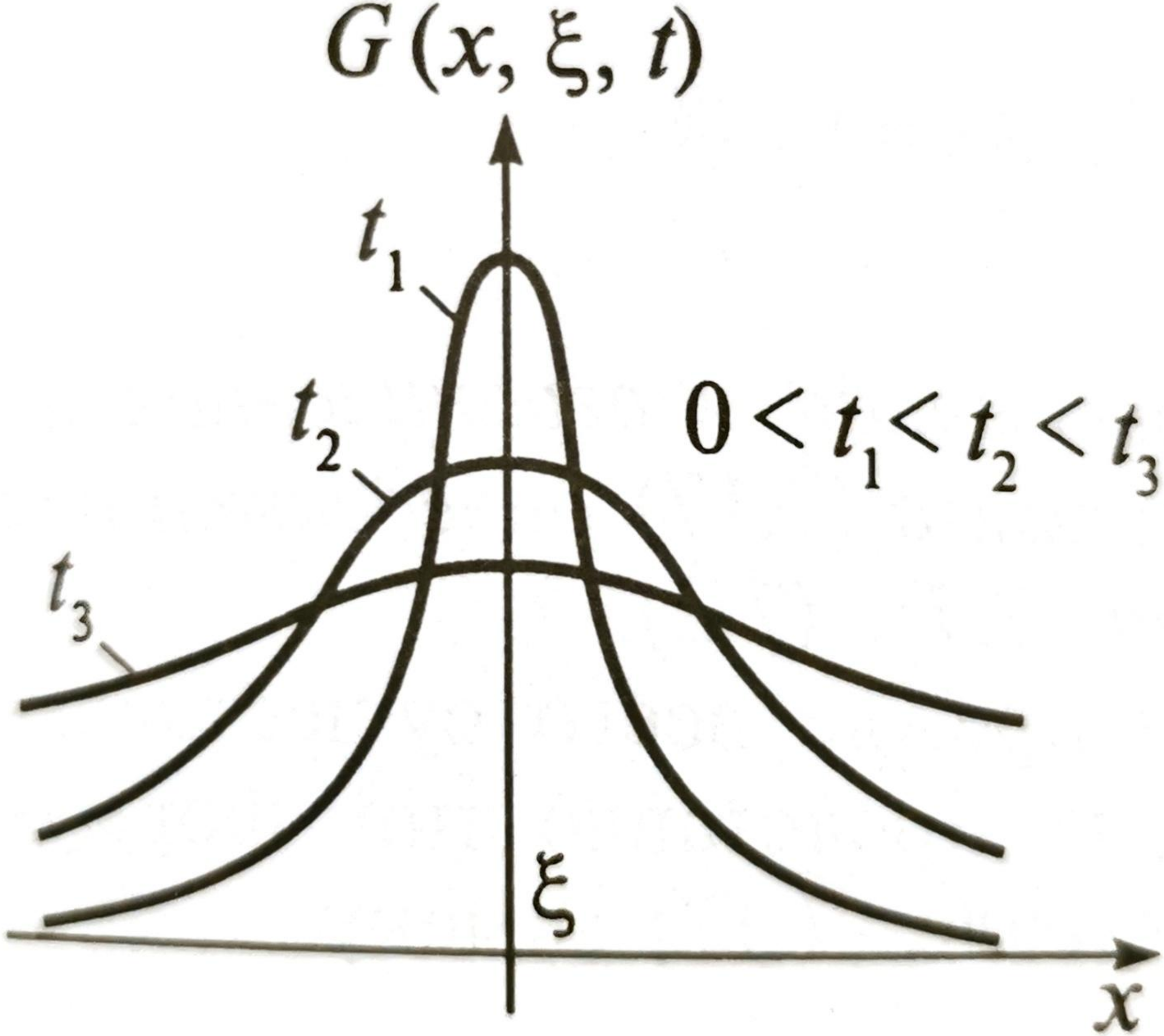
5) Функция $G(x,\xi,t)$ симметрична относительно переменных x,ξ: $G(x,\xi,t)=G(\xi,x,t)$, что является математическим выражением физического принципа взаимности: источник, помещенный в точке ξ, вызывает точке x такое же действие, как тот же источник вызывает в точке ξ, будучи помещенным в точке x.

6) **Парадокс бесконечной теплопроводности.** Изобразим график функции $G(x,\xi,t)$ для различных значений времени t. Величина площади фигуры, расположенной между кривой и осью x, умноженная на $\rho=c\tilde{\rho}$, равна количеству тепла, подведенному к бесконечной прямой в начальный момент. Для малых значеиий времени $t>0$ почти все тепло сосредоточено в малой окрестности точки $\xi\cdot$ В начальный момент t=0 все тепло сосредоточено точке $\xi\cdot$ При $x=\xi$ получаем:

$$G\left(\xi,\xi,t\right)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}.$$

Следовательно, температура в точке $x=\xi$, где в начальный момент происходит мгновенное выделение тепла (действует мгновенный точечный источник), для малых моментов времени неограниченно велика.

Из вида функции $G\left(x,\xi,t\right)$ следует, что температура точки бесконечной прямой, сколь угодно далеко расположенной от точки ξ, где находится источник, и в моменты времени, сколь угодно близкие к начальному моменту t=0, отлична от нуля. Это явление противоречит конечной скорости распространения тепла и носит название парадокса бесконечной теплопроводности. Этот парадокс связан с тем, что феноменологическая теория тепла, рассматривающая распространение тепла по аналогии с течением жидкости, уже не работает. Мы подошли к границе состоятельности модели, основанной на этой теории. Необходимо строить более совершенные модели распространения тепла, учитывающие, в частности, молекулярную структуру вещества.



$G(x, \xi, t)$
t_1
t_2
t_3
$0 < t_1 < t_2 < t_3$
ξ
x

5) Теоремы устойчивости

1. Устойчивость по начальным данным

Теорема 1. Задача Коши для уравнения теплопроводности устойчива по начальным данным.

Доказательство. Положим в уравнении (46) $f(x,t) \equiv 0$. Пусть $u_i(x,t)$ – решение задачи Коши (46)-(48), соответствующее начальной функции $\varphi_i(x)$, $i=1,2$.

Пусть $\left|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)\right|<\varepsilon, \quad x\in R^1$. Тогда из формулы (73) следует:

$$\left|u_1(x,t)-u_2(x,t)\right|=\left|\int_{-\infty}^{+\infty} G(x,\xi,t)\big(\varphi_1(\xi)-\varphi_2(\xi)\big)d\xi\right|\le$$

$$\le\int_{-\infty}^{+\infty} G(x,\xi,t)\left|\varphi_1(\xi)-\varphi_2(\xi)\right|d\xi<\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty} G(x,\xi,t)\,d\xi=\varepsilon,\ \ (x,t)\in\bar{\Omega}_\infty,$$

что и означает устойчивость решения по начальным данным. **Ч.т.д.**

Отметим. что данная теорема означает глобальную по времени устойчивость по начальным данным.

2. Устойчивость о правой части.

Теорема 2. Задача Коши для уравнения теплопроводности устойчива по правой части на любом конечном отрезке по времени.

Доказательство. Положим в условии (47) $\varphi(x) \equiv 0.$ Обозначим через $u_i(x,t)$ решение задачи Коши (46)-(48) для неоднородного уравнения (46) с правой частью $f_i(x,t,),\ i=1,2.$

Пусть

$$\left| f_1(x,t) - f_2(x,t) \right| < \delta,\ (x,t) \in \Omega_T.$$

Тогда с помощью формулы (67) получаем, что

$$\left|u_1(x,t)-u_2(x,t)\right| \le \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,\xi,t-\tau)\left|f_1(\xi,\tau)-f_2(\xi,\tau)\right| d\xi d\tau \le$$

$$\le \delta \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,\xi,t-\tau)\, d\xi d\tau = \delta \int_0^t d\tau \le \delta T < \varepsilon(\delta,T), (x,t) \in \bar{\Omega}_T,$$

что и означает локальную по времени устойчивость решения по правой части. **Ч.т.д.**

6) Теорема существования решения задачи Коши для однородного уравнения

1. Теорема существования

Рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), \ (x,t) \in \Omega_\infty, & (76) \\ u(x,0) = \varphi(x), \ \ x \in R^1, & (77) \\ \left|u(x,t)\right| < M, \ (x,t) \in \overline{\Omega}_\infty. & (78) \end{cases}$$

Обобщенный принцип суперпозиции. Если функция $U(x,t,\alpha)$ по переменным (x,t) удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению $L[U]=0$ при любом фиксированном значении α, то интеграл

$$u(x,t)=\int U(x,t,\alpha)\varphi(\alpha)\,d\alpha$$

также является решением того же уравнения в том случае, если входящие в линейный дифференциальный оператор производные можно вычислять дифференцированием под знаком интеграла.

Доказательство. Имеем $L[u]=\int L\left[U(x,t,\alpha)\right]\varphi(\alpha)\,d\alpha=0.$ **Ч.т.д.**

Теорема 1. Если $\varphi(x)-$ непрерывная и ограниченная на бесконечной прямой R^1 функция, то формула

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty} G(x,\xi,t)\varphi(\xi)\,d\xi \qquad (79)$$

определяет при $(x,t)\in\bar{\Omega}_\infty$ классическое решение задачи (76)-(78).

Доказательство.

1) Докажем прежде всего, что определяемая формулой (79) функция существует и ограничена всюду в $\overline{\Omega}_\infty$.

Сделаем замену $\alpha = \dfrac{\xi - x}{2a\sqrt{t}}$. Тогда

$$\left|u(x,t)\right| \le \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\varphi\left(x + 2\alpha a\sqrt{t}\right)\right| e^{-\alpha^2} d\alpha \le \frac{M}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha =$$

$$= \frac{M}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi} = M. \qquad (80)$$

2) Для доказательства того, что функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (76) при $(x,t) \in \Omega_\infty$ покажем, что выполняется обобщенный принцип суперпозиции.

В нашем случае все производные функции

$$G(x,\xi,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \qquad (81)$$

по x и по t при $(x,t)\in\Omega_\infty,\ \xi\in R^1$ непрерывны. Поэтому достаточно убедиться, что интегралы, полученные при формальном дифференцировании под знаком интеграла, сходятся равномерно. Проведем это исследование на примере первой производной по t: докажем равномерную сходимость интеграла

$$u_t(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}G_t(x,\xi,t)\varphi(\xi)\,d\xi. \qquad (82)$$

Так как

$$G_t\left(x,\xi,t\right) = -\frac{1}{2t}G\left(x,\xi,t\right) + \frac{\left(x-\xi\right)^2}{4a^2t^2}G\left(x,\xi,t\right), \qquad (83)$$

то нужно доказать равномерную сходимость интегралов:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} G\left(x,\xi,t\right)\frac{\varphi\left(\xi\right)}{2t}d\xi, \qquad (84)$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} G\left(x,\xi,t\right)\frac{\left(x-\xi\right)^2}{4a^2t^2}\varphi\left(\xi\right)d\xi. \qquad (85)$$

Используем замену $\alpha = \dfrac{\xi - x}{2a\sqrt{t}}$. Тогда

$$I_1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\left(x-\xi\right)^2}{4a^2 t}} \frac{\varphi\left(x + 2\alpha a\sqrt{t}\right)}{2t} 2a\sqrt{t}\, d\alpha =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \varphi\left(x + 2\alpha a\sqrt{t}\right) e^{-\alpha^2} d\alpha \qquad (86)$$

Так как подынтегральная функция в области $x \in R^1,\ t \geq \varepsilon > 0$ равномерно по $\left(x, t\right)$ мажорируется функцией, интеграл от которой сходится:

$$\left| \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \varphi\left(x + 2\alpha a\sqrt{t}\right) e^{-\alpha^2} \right| \leq \frac{M}{2\sqrt{\pi \varepsilon}} e^{-\alpha^2}, \qquad (87)$$

то интеграл I_1 равномерно сходится в указанной области.

С помощью указанной замены интеграл I_2 примет вид:

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha^2}{\sqrt{\pi t}} \varphi\left(x + 2\alpha a\sqrt{t}\right) e^{-\alpha^2} d\alpha. \qquad (88)$$

В этом случае

$$\left| \frac{\alpha^2}{\sqrt{\pi t}} \varphi\left(x + 2\alpha a\sqrt{t}\right) e^{-\alpha^2} \right| \le \frac{M}{\sqrt{\pi \varepsilon}} \alpha^2 e^{-\alpha^2}, \qquad (89)$$

Интеграл от мажорантой функции сходится и, следовательно, интеграл I_2 равномерно сходится в области $x \in R^1, t \ge \varepsilon > 0$ и, следовательно, в силу произвольности ε- и в области Ω_∞.

3) Покажем, наконец, что функция $u(x,t)$ непрерывно примыкает к функции $\varphi(x)$ при $t \to 0.$

Применяя замену $\alpha = \dfrac{\xi - x}{2a\sqrt{t}}$, получим

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\left(x + 2\alpha a\sqrt{t}\right) e^{-\alpha^2} d\alpha. \qquad (90)$$

Поскольку подынтегральная функция равномерно по $(x,t) \in \bar{\Omega}_{\infty}$ мажорируется функцией $\dfrac{M}{\sqrt{\pi}} e^{-\alpha^2}$ и интеграл от мажоранты сходится, то интеграл (90) сходится равномерно в $\bar{\Omega}_{\infty}$. Так как подынтегральная функция в интеграле (90) непрерывна, то, применяя теорему о предельном переходе под знаком интеграла, получим:

$$\lim_{t\to 0} u(x,t) = \varphi(x)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2}\,d\alpha = \varphi(x). \qquad (91)$$

Следовательно, функция $u(x,t)$ непрерывна в области $\bar{\Omega}_\infty$ и непрерывно примыкает к начальной функции $\varphi(x)$. **Ч.т.д.**

Замечание 1. Условие на функцию $\varphi(x)$ можно ослабить. Например, функция $\varphi(x)$ может быть возрастающей при стремлении $x \to \pm\infty$ функцией с ограниченной степенью роста: найдутся такие постоянные b и N, $|\varphi(x)| \le Ne^{b|x|}$.

Замечание 2. Если функция $\varphi(x)$ не будет непрерывной на прямой R^1, то в этом случае решение задачи (76)-(78) не будет классическим.

Имеет место следующая теорема:

Теорема 2. Если $\varphi(x)$ - кусочно-непрерывная и ограниченная функция $|\varphi(x)| < M$, $x \in R^1$ с конечным числом точек разрыва первого рода, формула (79) определяет решение однородного уравнения (76) при $(x,t) \in \Omega_\infty$, ограниченного при $(x,t) \in \overline{\Omega}_\infty$ и непрерывно примыкающее к функции $\varphi(x)$ в точках ее непрерывности.

2. Пример

Рассмотрим задачу: найти решение задачи Коши (76)-(78) для однородного уравнения теплопроводности, если начальная функция $\varphi(x)$ имеет вид:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ T_0 = const, & x > 0. \end{cases}$$

Воспользуемся формулой Пуассона (73):

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,\xi,t)\varphi(\xi)\,d\xi = \frac{T_0}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}\,d\xi.$$

Преобразуем интеграл с помощью замены

$$\alpha = \frac{\xi - x}{2a\sqrt{t}}:$$

$$u(x,t)=\frac{T_0}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{+\infty}e^{-\alpha^2}d\alpha=\frac{T_0}{\sqrt{\pi}}\left(\int\limits_0^{+\infty}e^{-\alpha^2}d\alpha+\int\limits_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}e^{-\alpha^2}d\alpha\right)=$$

$$=\frac{T_0}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}+\frac{\sqrt{\pi}}{2}\Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right)=\frac{T_0}{2}\left(1+\Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right),$$

где

$$\Phi(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^z e^{-\alpha^2}d\alpha.$$

Функция $\Phi(z)$ носит название **интеграла ошибок**.

Некоторые свойства интеграла ошибок:

$$\Phi(0)=0;\quad \Phi(+\infty)=1;\Phi\quad(-z)=-\Phi(z).$$

Из полученной для решения $u(x,t)$ формулы можно сделать следующие выводы.

1) Пусть x>0. Тогда при $t\to 0$ получим, что $\frac{x}{2a\sqrt{t}}\to+\infty$ и следовательно $\Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\to 1,$ то есть

$$\lim u(x,t)_{t\to 0,x>0}=T_0.$$

2) Пусть $x<0.$ Тогда

$$1+\Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)=1-\Phi\left(-\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$$

и при $t \to 0$ $-\dfrac{x}{2a\sqrt{t}} \to +\infty$, $\Phi\left(-\dfrac{x}{2a\sqrt{t}}\right) \to 1$, то есть предел

$$\lim u(x,t)_{t\to 0, x<0} = 0.$$

3) Пусть, наконец, $x \to 0$, $t \to 0$. В этом случае предельное значение $u(x,t)$ будет зависеть от способа предельного перехода. Действительно, если сначала перейти к пределу при $x \to 0$, то получим, что

$$\lim u(x,t)_{x\to 0} = \frac{T_0}{2}$$

и, следовательно,

$$\lim u(x,t)_{x\to 0, t\to 0} = \frac{T_0}{2}.$$

Если $x > 0,$ то $\lim_{t\to 0} u(x,t) = T_0$ и $\lim_{t\to 0, x\to 0+0} u(x,t) = T_0.$

Если $x < 0,$ то $\lim_{t\to 0} u(x,t) = 0$ и $\lim_{t\to 0, x\to 0-0} u(x,t) = 0.$

Осуществим теперь предельный переход одновременно при $x \to 0,\ t \to 0$ вдоль кривой $\dfrac{x}{2a\sqrt{t}} = w, \quad w \in R^1.$ Получим, что

$$\lim_{x\to 0, t\to 0, \frac{x}{2a\sqrt{t}} = w} u(x,t) = \frac{T_0}{2}\left(1 + \Phi(w)\right),$$

и при $w \in R^1$ предельное значение будет заключаться в пределах от 0 до $T_0,$ поскольку $-1 \le \Phi(w) \le 1, w \in R^1.$

Заметим, что так как $\left|\Phi\left(\dfrac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right| \le 1,$

то $\left|u(x,t)\right| \le T_0.$

7. Задача Коши для уравнения теплопроводности в пространстве

Рассмотрим задачу Коши для уравнения теплопроводности в двумерном и трехмерном пространствах.

Введем обозначения:

$$\bar{\Omega}_T^2 \equiv \left\{ \left(M, t \right) : M \in R^2, t \in \left[0, T \right] \right\},$$

$$\bar{\Omega}_T^3 \equiv \left\{ \left(M, t \right) : M \in R^3, t \in \left[0, T \right] \right\}.$$

Определение. Фундаментальным решением (функцией источника) $G\left(M, M_0, t\right)$ задачи Коши для уравнения

$$u_t\left(M, t\right) = a^2 \Delta_2 u\left(M, t\right), \Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (1)$$

называется такое его решение в области Ω_∞^2 которое :

а) удовлетворяет начальному условию

$$u(M,0)=\delta(M,M_0), \qquad (2)$$

б) непрерывно всюду в замкнутой области $\bar{\Omega}_\infty^2$, кроме точки $(M_0,0)$.

Здесь $M_0=\{x_0,y_0\}, M=\{x,y\}$.

Определение. Фундаментальным решением (функцией источника) $G(M,M_0,t)$ задачи Коши для уравнения

$$u_t(M,t)=a^2\Delta u(M,t),\ \Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \qquad (3)$$

называется такое его решение в области Ω_∞^3, которое :

а) удовлетворяет начальному условию

$$u(M,0)=\delta(M,M_0), \tag{4}$$

б) непрерывно всюду в замкнутой области $\bar{\Omega}^3_\infty$, кроме точки $(M_0,0)$.

Здесь $M_0=\{x_0,y_0,z_0\}, M=\{x,y,z\}$.

Рассмотрим трехмерный случай.

Лемма. Если в задаче Коши

$$\begin{cases} u_t(M,t)=a^2\Delta u(M,t),(M,t)\in\Omega^3_\infty, \\ u(M,0)=\varphi(M),M\in R^3 \end{cases}$$

начальная функция представлена в виде

$$\varphi(M)=\varphi_1(x)\varphi_2(y)\varphi_3(z),$$

то решение задачи будет иметь вид

$$u(M,t)=u_1(x,t)u_2(y,t)u_3(z,t),$$

где функции $u_1(x,t),\ u_2(y,t),\ u_3(z,t)$ – решения соответствующих одномерных задач Коши :

$$u_{1,t}(x,t)=a^2u_{1,xx}(x,t),\ (x,t)\in\Omega^1_\infty;\ \ u_1(x,0)=\varphi_1(x),\ x\in R^1,$$

$$u_{2,t}(y,t)=a^2u_{2,yy}(y,t),\ (y,t)\in\Omega^1_\infty;\ \ u_2(y,0)=\varphi_2(y),\ y\in R^1,$$

$$u_{3,t}(z,t)=a^2u_{3,zz}(z,t),\ (z,t)\in\Omega^1_\infty;\ \ u_3(z,0)=\varphi_3(z),\ z\in R^1.$$

Доказательство. В силу условий теоремы имеем:

$$a^2\Delta(u_1u_2u_3)=u_2u_3a^2u_{1xx}+u_1u_3a^2u_{2yy}+u_1u_2a^2u_{3zz}=$$

$$=u_2u_3u_{1t}+u_1u_3u_{2t}+u_1u_2u_{3t}=(u_1u_2u_3)_t\Rightarrow u_t=a^2\Delta u.$$

Удовлетворение начальному условию очевидно:

$$u(M,0)=u_1(x,0)u_2(y,0)u_3(z,0)=\varphi_1(x)\varphi_2(y)\varphi_3(z)=\varphi(M).$$

Ч.т.д.

Замечание. Аналогичная лемма имеет мести в двумерном случае.

В трехмерном случае

$$\delta(M,M_0)=\delta(x,x_0)\delta(y,y_0)\delta(z,z_0).$$

Применяя лемму к задаче (3), (4), получим

$$G(M,M_0,t)=G(x,x_0,t)G(y,y_0,t)G(z,z_0,t). \qquad (5)$$

Учитывая выражения для одномерных функций Грина, получим

$$G(M,M_0,t)=\left(\frac{1}{2\pi a\sqrt{t}}\right)^3 e^{-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}{4a^2t}} \qquad (6)$$

Проведя аналогичные рассуждения для двумерной области, получим:

$$G\left(M, M_0, t\right) = \left(\frac{1}{2\pi a\sqrt{t}}\right)^2 e^{-\frac{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2}{4a^2t}} \qquad (7)$$

Функции, определяемые формулами (6) и (7), называются **фундаментальными решениями** уравнения теплопроводности или **функциями источника** в трехмерном и двумерном случаях соответственно. Физически они означают температуру области R^3 $\left(R^2\right)$ в точке M в момент времени t, если возбуждение области производится мгновенным точечным источником мощности $c\left(M\right)\tilde{\rho}\left(M\right)$, где $c\left(M\right)-$ удельная теплоемкость, $\tilde{\rho}\left(M\right)-$ плотность, действующим в точке M_0 в момент времени $t=0$.

Из формул (6) и (7) следует, что функция $G\left(M, M_0, t\right)$ симметрична по переменным $M, M_0: G\left(M, M_0, t\right) = G\left(M_0, M, t\right)$.

Как и в одномерном случае, симметрия функции источника является выражением физического принципа взаимности: действие в точке M источника, находящегося в точке M_0, равно действию в точке M_0 такого же источника, помещенного в точку M. Однако относительно переменной t такая симметрия не имеет места, что является выражением необратимости тепловых процессов во времени.

Зная фундаментальное решение, решение задачи Коши для однородного уравнения теплопроводности, например, в трехмерном случае, можно записать следующим образом:

$$u(M,t) = \int_{R^3} G(M,Q,t)\varphi(Q)\,dV_Q = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} G(x,y,z,\xi,\eta,\varsigma,t)\varphi(\xi,\varsigma,\eta)\,d\xi\,d\varsigma\,d\eta \quad (8)$$

Теорема. Если функция $\varphi(M)$ кусочно-непрерывна с конечным числом точек разрыва первого рода и ограничена $|\varphi(M)| < N,$ в области $R^3,$ то функция

$$u(M,t) = \int_{R^3} G(M,Q,t)\varphi(Q)\,dV_Q \qquad (9)$$

а) удовлетворяет однородному уравнению теплопроводности в области Ω_∞^3 ;

б) ограничена в области $\bar{\Omega}_\infty^3$;

в) непрерывно примыкает к функции $\varphi(M)$ в точках ее непрерывности.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству аналогичной теоремы в одномерном случае и мы его приводить не будем.

С помощью метода **интегрального преобразования Фурье** можно следующим образом записать решение задачи Коши для неоднородного уравнения теплопроводности с однородным начальным условием:

$$u(M,t)=\int_0^t\int_{R^3} G(M,Q,t-\tau)f(Q,\tau)\,dV_Q\,d\tau. \qquad (10)$$

8. Решение уравнения теплопроводности на полупрямой

1) Однородные граничные условия. Принцип продолжения

Введем обозначения:

$$\bar{\Omega}_T^+ \equiv \{0 \le x < \infty; 0 \le t < T\},\ \Omega_T^+ \equiv \{0 < x < \infty; 0 < t < T\}.$$

$$\bar{R}^+ \equiv \{0 \le x < \infty\},\quad R^+ \equiv \{0 < x < \infty\}.$$

Рассмотрим две задачи для уравнения теплопроводности на полупрямой.

Задача Дирихле:

$$\begin{cases} u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), (x,t) \in \Omega_T^+, & (1) \\ u(x,0) = \varphi(x), x \in \bar{R}^+, & (2) \\ u(0,t) = \mu(t), t \in [0,T], & (3) \\ |u(x,t)| < M, (x,t) \in \bar{\Omega}_T^+. & (4) \end{cases}$$

Задача Неймана:

$$\begin{cases} u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), (x,t) \in \Omega_T^+, & (5) \\ u(x,0) = \varphi(x), x \in \bar{R}^+, & (6) \\ u_x(0,t) = \nu(t), t \in [0,T], & (7) \\ |u(x,t)| < M \ (x,t) \in \bar{\Omega}_T^+. & (8) \end{cases}$$

Рассмотрим однородные граничные условия: $\mu(t) = 0, \ \nu(t) = 0.$

Докажем две леммы относительно функции $u(x,t)$, определяемой интегралом Пуассона.

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi) d\xi \tag{9}$$

Лемма 1. Если функция $\varphi(x)$ является нечетной функцией, то есть $\varphi(-x)=-\varphi(x)$, то функция (9) обращается в нуль при $x=0,\ t\geq 0.$

Доказательство. Подынтегральная функция в интеграле

$$u(0,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}}\varphi(\xi)d\xi$$

является нечетной функцией, интеграл от которой в симметричных пределах равен нулю: $u(0,t)=0.$ **Ч.т.д.**

Лемма 2. Если функция $\varphi(x)$ является четной функцией, то есть $\varphi(-x)=\varphi(x)$, то производная функции (9) обращается в нуль при $x=0,\ t\geq 0.$

Доказательство. Подсчитаем производную $u_x(0,t)=0:$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}\left(a^2t\right)^{\frac{3}{2}}}\int_{-\infty}^{+\infty} \xi e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}} \varphi(\xi)\,d\xi = 0,$$

так как подынтегральная функция является нечетной. **Ч.т.д.**

Построим решение задачи (1)-(4). Введем функцию $\Phi(x)$, которая является нечетным продолжением функции $\varphi(x)$:

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x > 0, \\ -\varphi(-x), & x < 0 \end{cases} \qquad (10)$$

и рассмотрим задачу Коши для уравнения теплопроводности на бесконечной прямой для функции $U(x,t)$.

Задача имеет следующий вид:

$$\begin{cases} U_t\left(x,t\right)=a^2U_{xx}\left(x,t\right),\ \left(x,t\right)\in\Omega_\infty\equiv R^1\times\left(0,\infty\right), & (11)\\ U\left(x,0\right)=\Phi\left(x\right),\ x\in R^1\equiv\left\{-\infty<x<+\infty\right\}, & (12)\\ \left|U\left(x,t\right)\right|<\infty,\ \left(x,t\right)\in\bar{\Omega}_\infty\equiv R^1\times[0,\infty). & (13)\end{cases}$$

Решение задачи (11)-(13) дается интегралом Пуассона

$$U\left(x,t\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}G\left(x,\xi,t\right)\Phi\left(\xi\right)d\xi\ =$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{\left(x-\xi\right)^2}{4a^2t}}\Phi\left(\xi\right)d\xi \qquad (14)$$

Согласно лемме 1, функция $U(x,t)$ в точке $x=0$ обращается в ноль. Поэтому, если рассматривать функцию $U(x,t)$ только при $x \geq 0$, то она будет совпадать с функцией $u(x,t)-$ решением задачи (1)-(4). Так как в формулировке задачи (1)-(4) фигурирует функция $\varphi(x)$, а не $\Phi(x)$, то выразим функцию $\Phi(x)$ через $\varphi(x)$:

$$U(x,t)=\int_{0}^{+\infty} G(x,\xi,t)\varphi(\xi)\,d\xi+$$

$$+\int_{-\infty}^{0} G(x,\xi,t)\big(-\varphi(-\xi)\big)\,d\xi=\{\xi\to-\xi\}=$$

$$=\int_{0}^{+\infty} G(x,\xi,t)\varphi(\xi)\,d\xi-\int_{0}^{+\infty} G(x,-\xi,t)\varphi(\xi)\,d\xi.$$

Таким образом, решение задачи (1)-(4) при $\mu(t)=0$ имеет вид:

$$u(x,t)=\int_{0}^{+\infty} G_1(x,\xi,t)\varphi(\xi)\,d\xi, \qquad (15)$$

$$G_1(x,\xi,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right). \qquad (16)$$

Определение. Функция, определяемая формулой (16), называется функцией Грина задачи (1)-(4).

Зная функцию $G_1(x,\xi,t)$, можно построить решение задачи для неоднородного уравнения теплопроводности в области $\bar{\Omega}_\infty^+$ при однородных начальных и однородных граничных условиях Дирихле:

$$
\begin{cases}
u_t\left(x,t\right)=a^2u_{xx}\left(x,t\right)+f\left(x,t\right),\left(x,t\right)\in\Omega_\infty^+, & (17)\\
u\left(x,0\right)=0,\ x\in\bar{R}^+, & (18)\\
u\left(0,t\right)=0,\ t\in\left[0,\infty\right), & (19)\\
\left|u\left(x,t\right)\right|<M\left(x,t\right)\in\bar{\Omega}_\infty^+. & (20)
\end{cases}
$$

Решение задачи (17)-(20) записывается следующим образом

$$
u\left(x,t\right)=\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}G_1\left(x,\xi,t-\tau\right)f\left(\xi,\tau\right)d\xi d\tau=
$$

$$
=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{\left(t-\tau\right)}}\left(e^{-\frac{\left(x-\xi\right)^2}{4a^2\left(t-\tau\right)}}-e^{-\frac{\left(x+\xi\right)^2}{4a^2\left(t-\tau\right)}}\right)f\left(\xi,\tau\right)d\xi d\tau \quad (21)
$$

Из вида функции Грина $G_1(x,\xi,t)$ следует, что решение задачи (1)-(4) можно получить, рассматривая неограниченную прямую (стержень) и предполагая, что в момент времени $t=0$ в точке $\xi=0$ мгновенно выделилось $q=c\tilde{\rho}$ единиц тепла, то есть в точку $x=\xi$ нужно поместить мгновенный точечный источник мощности $q=c\tilde{\rho}$,а в точку $x=-\xi$ поместить мгновенны отрицательны источник той же мощности. В результате действия этих источников температура в точке $x=0$ будет поддерживаться равной нулю:

$$G_1(x,\xi,t)=G(x,\xi,t)-G(x,-\xi,t).$$

Рассмотрим построение решения задачи (5)-(8) с граничными условиями Неймана.

Для получения решения задачи (5)-(8) введем функцию $\Phi(x)$, которая является четным продолжением функции $\varphi(x)$:

$$\Phi(x)=\begin{cases}\varphi(x), x>0,\\ \varphi(-x),\ x<0,\end{cases} \qquad (21)$$

и рассмотрим задачу Коши (11)-(13) с функцией $\Phi(x)$, определенной формулой (21).

Согласно лемме 2, производная $U_x(0,t)=0$. Поэтому решение $u(x,t)$ задачи (11)-(13) совпадает с функцией $U(x,t)$ при $x\geq 0$:

$$U(x,t)=\int\limits_{0}^{+\infty}G(x,\xi,t)\varphi(\xi)\,d\xi+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{0}G(x,\xi,t)\big(\varphi(-\xi)\big)\,d\xi=\{\xi\to-\xi\}=$$

$$=\int\limits_{0}^{+\infty}G(x,\xi,t)\varphi(\xi)\,d\xi+\int\limits_{0}^{+\infty}G(x,-\xi,t)\varphi(\xi)\,d\xi.$$

Таким образом, решение задачи (5)-(8) при $\nu(t)=0$ имеет вид:

$$u(x,t)=\int\limits_{0}^{+\infty}G_2(x,\xi,t)\varphi(\xi)\,d\xi, \qquad (22)$$

где

$$G_2(x,\xi,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left(e^{-\frac{\left(x-\xi\right)^2}{4a^2t}}+e^{-\frac{\left(x+\xi\right)^2}{4a^2t}}\right). \qquad (23)$$

Определение. Функция, определяемая формулой (23), называется функцией Грина задачи (3)-(8).

Рассмотрим задачу для неоднородного уравнения:

$$\begin{cases} u_t(x,t)=a^2u_{xx}(x,t)+f(x,t),(x,t)\in\Omega_\infty^+, & (24)\\ u(x,0)=0,\ x\in\bar{R}^+, & (25)\\ u_x(0,t)=0,\ t\in[0,\infty), & (26)\\ \left|u(x,t)\right|<M\ (x,t)\in\bar{\Omega}_\infty^+. & (27)\end{cases}$$

Решение задачи (24)-(27) дается формулой:

$$u(x,t)=\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}G_2(x,\xi,t-\tau)\,f(\xi,\tau)\,d\xi d\tau=$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}+e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right)f(\xi,\tau)\,d\xi d\tau \qquad (28)$$

Из вида функции Грина $G_2(x,\xi,t)$ следует, что решение задачи (5)-(8) можно получить, рассматривая неограниченную прямую (стержень) и предполагая, что в точках $x=-\xi$, $x=\xi$ помещены мгновенные точечные положительные источники мощности $q=c\tilde{\rho}$. Так как тепловой поток равен $-k(x)u_x(x,t)$, то два встречных равных тепловых потока точке $x=0$ компенсируют друг друга:

$$G_2(x,\xi,t)=G(x,\xi,t)+G(x,-\xi,t).$$

2) Краевой режим. Принцип Дюамеля

Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{cases} u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), (x,t) \in \Omega_T^+, & (29) \\ u(x,0) = 0,\ x \in \overline{R}^+, & (30) \\ u(0,t) = \mu(t), t \in [0,\infty), & (31) \\ |u(x,t)| < M. (x,t) \in \overline{\Omega}_T^+. & (32) \end{cases}$$

Для построения решения задачи (29)-(32) применим метод преобразования Лапласа .

Рассмотрим преобразование Лапласа по t от функции $u(x,t)$:

Рассмотрим преобразование Лапласа по t от функции $u(x,t)$:

$$U(x,p)=\int_0^\infty u(x,t)e^{-pt}dt. \qquad (33)$$

Здесь функция $u(x,t)$ является оригиналом, а функция $U(x,p)$ – образом преобразования Лапласа.

Будем предполагать, что условия дифференцирования под знаком интеграла по параметру x выполнены:

$$U_{xx}(x,p)=\int_0^\infty u_{xx}(x,t)e^{-pt}dt. \qquad (34)$$

Изображение функции $\mu(t)$ обозначим через $M(p)$.

Так как изображение производной $u_t(x,t)$ с учетом однородного начального условия имеет вид $pU(x,p)-u(x,0)=pU(x,p)$, то задача (29)-(32) в пространстве образов записывается следующим так:

$$\begin{cases} pU(x,p)=a^2U_{xx}(x,p), x\in(0,\infty), & (35) \\ U(0,p)=M(p), & (36) \\ \left|U(x,p)\right|<N, x\in[0,\infty). & (37) \end{cases}$$

Задача (35)-(37) – это краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения, в котором переменная p играет роль параметра.

Решение уравнения (35) с учетом условия ограниченности (37) имеет вид:

$$U\left(x,p\right)=C\left(p\right)e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x},$$

из условия (36) следует, что $C\left(p\right)=M\left(p\right).$ Таким образом, решение имеет следующий вид

$$U\left(x,p\right)=M\left(p\right)e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}.$$

Чтобы из пространства образов вернуться в пространство оригиналов, запишем решение следующим образом

$$U\left(x,p\right)=M\left(p\right)p\frac{e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}}{p}.$$

Пусть $\dfrac{e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}}{p}$ – изображение, оригинал которого мы обозначим через $G(x,t)$.

Тогда, если $G(x,0)=0$, то изображением оригинала

$$\frac{\partial G(x,t)}{\partial t}$$

будет

$$p\left(\frac{e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}}{p}\right),$$

и по теореме о свертке получаем , что оригиналом изображения

$$U(x,p)=M(p)\,p\,\frac{e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}}{p}$$

будет

$$u(x,t)=\int_0^t \frac{\partial}{\partial t}G(x,t-\tau)\,\mu(\tau)\,d\tau. \qquad (38)$$

Для определения функции $G(x,t)$ воспользуемся следующим приемом. Так как изображение единицы имеет вид $\frac{1}{p}$, то поскольку при x=0 изображение $G(x,t)$ равно $\frac{1}{p}$, то, следовательно, $G(0,t)=1$, и для функции $G(x,t)$ получаем задачу:

$$\begin{cases} G_t(x,t)=a^2G_{xx}(x,t),(x,t)\in\Omega_\infty^+, & (39) \\ G(x,0)=0, x\in[0,\infty), & (40) \\ G(0,t)=1, t\in[0,\infty), & (41) \\ |G(x,t)|<N,(x,t)\in\bar{\Omega}_\infty^+, & (42) \end{cases}$$

Тогда для функции $v(x,t)=1-G(x,t)$ получатся задача:

$$
\begin{cases}
v_t(x,t) = a^2 v_{xx}(x,t), (x,t) \in \Omega_\infty^+, & (43) \\
v(x,0) = 1, x \in [0,\infty), & (44) \\
v(0,t) = 0, t \in [0,\infty), & (45) \\
|v(x,t)| < N, (x,t) \in \bar{\Omega}_\infty^+, & (46)
\end{cases}
$$

Задача (43)-(46) уже изучена нами и ее решение мы можем сразу записать

$$
v(x,t) = \int_0^\infty G(x,\xi,t)\, d\xi = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right) d\xi =
$$

$$=\left\{z=\frac{\xi-x}{2a\sqrt{t}}\right\}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty}e^{-z^2}dz-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty}e^{-z^2}dz=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{0}e^{-z^2}dz-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{0}e^{-z^2}dz=\left\{z\to-z,-\frac{x}{2a\sqrt{t}}\to\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right\}=$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{0}e^{-z^2}dz=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}e^{-z^2}dz=\Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\quad(47)$$

Отсюда получаем, что функция $G(x,t)=1-v(x,t)$ равна:

$$G(x,t)=1-\Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-z^2}dz,$$

$$\frac{\partial G(x,t-\tau)}{\partial t}=\frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\frac{e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}. \qquad (48)$$

Решение задачи (39)-(42) дается формулой

$$u(x,t)=\frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}\frac{\mu(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}d\tau \qquad (49)$$

Сформулируем в заключение принцип Дюамеля, который мы получили.

Принцип Дюамеля. Пусть нужно решить однородное линейное дифференциальное уравнение на полупрямой при граничном условии

$$u(0,t)=\mu(t),\quad t\in[0,\infty),$$

нулевых начальных условиях и нулевых дополнительных граничных условиях, если таковые имеются (например, при $x=l$). Тогда решение этой задачи может быть представлено в виде

$$u(x,t)=\int_0^t \frac{\partial G(x,t-\tau)}{\partial \tau}\mu(\tau)\,d\tau,$$

где $G(x,t)-$ решение аналогичной краевой задачи при $G(0,t)=1$.