А.А. Быков, Н.Т. Левашова, Л.В. Перова, Н.Е. Шапкина.

Вопросы и задачи к экзамену по математическому анализу, I семестр.

Тема 1. Числовые множества и последовательности.

1. Определения.

Сформулируйте определение:

1.1. ограниченного множества вещественных чисел;
1.2. ограниченного сверху (снизу) множества вещественных чисел;
1.3. неограниченного множества вещественных чисел;
1.4. неограниченного сверху (снизу) множества вещественных чисел;
1.5. окрестности данной точки;
1.6. ε - окрестности данной точки;
1.7. проколотой окрестности данной точки;
1.8. предельной точки числового множества;
1.9. верхней (нижней) грани числового множества;
1.10. точной верхней (точной нижней) грани числового множества;
1.11. числовой последовательности;
1.12. ограниченной последовательности;
1.13. неограниченной последовательности;
1.14. монотонной последовательности;
1.15. предела последовательности;
1.16. бесконечно малой последовательности;
1.17. бесконечно большой последовательности;
1.18. фундаментальной последовательности;
1.19. подпоследовательности данной последовательности;
1.20. предельной точки последовательности (два определения);
1.21. верхнего (нижнего) предела последовательности.

2. Основные теоремы (без доказательства).

Сформулируйте:

2.1. теоремы о пределе суммы, разности, произведения и частного двух последовательностей;
2.2. теорему о трех последовательностях (двух полицейских);
2.3. теорему о пределе монотонной ограниченной последовательности;
2.4. теорему о вложенных отрезках;
2.5. теорему Больцано-Вейерштрасса;
2.6. критерий Коши сходимости последовательности.

3. Теоремы с доказательством.

3.1. Докажите, что сходящаяся последовательность имеет только один предел.

3.2. Докажите, что сходящаяся последовательность ограничена.

3.3. Докажите теоремы о пределах суммы, разности, произведения и частного двух последовательностей.

3.4. Докажите, что если для любого номера n выполнено неравенство $c \le x_n \le b$ и существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то $c \le a \le b$.

3.5. Докажите теорему о трех последовательностях (двух полицейских).

3.6. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Докажите, что любая подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$ сходится к a.

3.7. Докажите, что неубывающая ограниченная сверху последовательность имеет предел.

3.8. Докажите, что невозрастающая ограниченная снизу последовательность имеет предел.

3.9. Докажите теорему о вложенных отрезках.

3.10. Докажите теорему Больцано-Вейерштрасса.

3.11. Докажите, что фундаментальная последовательность является ограниченной.

3.12. Докажите, что сходящаяся последовательность является фундаментальной.

3.13. Докажите, что фундаментальная последовательность является сходящейся.

3.14. Докажите, что ограниченная последовательность имеет верхний и нижний пределы.

3.15. Докажите, что ограниченная последовательность имеет по крайней мере одну предельную точку.

3.16. Докажите эквивалентность двух определений подпоследовательности.

3.17. Докажите, что любая подпоследовательность бесконечно большой последовательности является бесконечно большой.

4. Вопросы и задачи.

4.1. Приведите примеры ограниченного и неограниченного множеств.

4.2. Докажите неравенство Бернулли $(1+x)^n \ge 1+nx$ при $x \ge -1$ и $n \in \mathbf{N}$

4.3. Сформулируйте отрицание к определению ограниченной последовательности.

4.4. Сформулируйте отрицание к определению предела последовательности.

4.5. Сформулируйте отрицание к определению бесконечно малой последовательности.

4.6. Сформулируйте отрицание к определению бесконечно большой последовательности.

4.7. Сформулируйте отрицание к определению сходящейся последовательности.

4.8. Сформулируйте отрицание к определению фундаментальной последовательности.

4.9. Докажите, что последовательность $x_n = (1+1/n)^n$ возрастающая.

4.10. Докажите, что последовательность $x_n = (1+1/n)^{n+1}$ убывающая.

4.11. Докажите, что последовательность $x_n = (1+1/n)^n$ сходится.

4.12. Пусть $\{a_n\}$ – бесконечно малая последовательность, $a_n \ne 0,\ \forall n \in \mathbf{N}$. Докажите, что последовательность $\{1/a_n\}$ – бесконечно большая.

4.13. Пусть $\{a_n\}$ – бесконечно большая последовательность. Докажите, что последовательность $\{1/a_n\}$ определена, начиная с некоторого номера n, и является бесконечно малой.

4.14. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ a \ne 0$. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{a}$.

4.15. Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится, а последовательность $\{y_n\}$ расходится. Что можно сказать о сходимости последовательностей а) $\{x_n + y_n\}$, б) $\{x_n \cdot y_n\}$, в) $\{x_n / y_n\}$? Ответ обоснуйте.

4.16. Пусть последовательность $\{x_n\}$ расходится и последовательность $\{y_n\}$ расходится. Что можно сказать о сходимости последовательностей а) $\{x_n + y_n\}$, б) $\{x_n \cdot y_n\}$, в) $\{x_n / y_n\}$? Ответ обоснуйте.

4.17. Докажите, что если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |a|$.

4.18. Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \left(x_{n+1} - x_n\right) = 0$.

4.19. Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \left(x_{n+1} - x_n\right)^n = 0$.

4.20. Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^2 = a^2$.

4.21. Пусть начиная с некоторого номера *n*, $x_n \ge y_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

4.22. Пусть $\{x_n\}$ – бесконечно большая положительная последовательность, а последовательность $\{y_n\}$ – ограниченная. Докажите, что последовательность $\{x_n + y_n\}$ бесконечно большая.

4.23. Пусть $\{x_n\}$ – бесконечно большая положительная последовательность, а последовательность $\{y_n\}$ сходится к пределу $b \ne 0$. Докажите, что последовательность $\{x_n \cdot y_n\}$ бесконечно большая.

4.24. Докажите, что неограниченная последовательность расходится.

4.25. Пользуясь определением предела последовательности, докажите, что:

4.25.1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$;

4.25.2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n}{n+3} = 2$;

4.25.3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{40n^2+7}{5n^2+3} = 8$;

4.25.4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+n}{n^3+1} = 1$;

4.25.5. $\lim\limits_{n\to\infty} (0.8)^n = 0$;

4.25.6. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin n^2}{n+1} = 0$;

4.25.7. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5\cdot 3^n}{3^n-2} = 5$;

4.25.8. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n+5\cdot 6^n}{3^n+6^n} = 5$.

4.26. Исследуйте сходимость последовательности $x_n = \dfrac{n^\alpha - 1}{2n^2+n+1}$ в зависимости от параметра α.

4.27. Найдите:

4.27.1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-8n+15}{n^2-10n+21}$;

4.27.2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2-3n+4}{3n^2-2n+1}$;

4.27.3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+n^2+n+1}{n^3+n^4+n^5+n^6}$;

4.27.4. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{9+\dfrac{2}{n}}-3\right)$;

4.27.5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}}{n}$;

4.27.6. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)$;

4.27.7. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+3}\left(\sqrt{n+8}-\sqrt{n+3}\right)$;

4.27.8. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$;

4.27.9. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{3n}$;

4.27.10. $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2n)^{\frac{3}{n}}$;

4.27.11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2n^2}\right)^{6n^2}$;

4.27.12. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+3}{2n+7}\right)^{n}$

4.27.13. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{3n^3}\right)^{2n^3}$;

4.27.14. $\lim\limits_{n\to\infty} n^{2/n}$;

4.27.15. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot3\cdot5}+\dfrac{1}{3\cdot5\cdot7}+\dfrac{1}{5\cdot7\cdot9}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)\cdot(2n+3)}\right)$.

4.28. Докажите, что последовательности являются бесконечно большими:

4.28.1. $a_n=\sqrt{n}$;

4.28.2. $a_n=(-1)^n\cdot n$;

4.28.3. $a_n=\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}-1}$, $n\ge 2$;

4.28.4. $a_n=\dfrac{2^n}{n^{1000}}$.

4.29. Докажите, что последовательность $x_n=\sqrt[n]{n}-1$ является бесконечно малой.

4.30. Докажите, что последовательность $\left\{\left(1+(-1)^n\right)n\right\}$ неограниченная, однако не является бесконечно большой.

4.31. Сформулируйте отрицание к определению «Число b называется предельной точкой последовательности», используя понятие подпоследовательности.

4.32. Сформулируйте отрицание к определению «Число b называется предельной точкой последовательности», используя понятие окрестности.

4.33. Найдите все предельные точки последовательностей $\{x_n\}$, а также $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$:

4.33.1. $x_n=(-1)^n$;

4.33.2. $x_n=\dfrac{(-1)^n}{n}+\dfrac{1+(-1)^n}{2}$;

4.33.3. $x_n=\dfrac{n-1}{n+1}\cos\dfrac{2\pi n}{3}$;

4.33.4. $x_n=\cos^n\dfrac{2\pi n}{3}$;

4.33.5. $x_n=\sin(\pi n/2+1/n)$.

4.34. Постройте пример последовательности, у которой есть одна предельная точка, но она не является сходящейся.

4.35. Приведите пример последовательности, у которой ровно две предельные точки.

4.36. Сколько предельных точек может иметь ограниченная последовательность $\{x_n\}$, если подпоследовательность $\{x_{2k}\}$ является возрастающей, а подпоследовательность $\{x_{2k-1}\}$ является убывающей? Приведите примеры.

4.37. Приведите пример последовательности с бесконечным числом предельных точек.

4.38. Постройте пример последовательности, не имеющей предельных точек.

4.39. Докажите, что монотонная неограниченная последовательность не имеет предельной точки.

4.40. Пользуясь критерием Коши, докажите сходимость последовательности:

4.40.1. $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sin k}{k^2}$;

4.40.2. $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k!}$.

4.41. Пользуясь критерием Коши, докажите расходимость последовательности:

4.41.1. $x_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k$;   4.41.2. $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

5. Задачи повышенной трудности.

5.1. Докажите, что из любой неограниченной последовательности можно выделить бесконечно большую подпоследовательность.

5.2. Докажите сходимость последовательности $\{x_n\}$ и вычислите ее предел, если она определяется рекуррентным соотношением:

5.2.1. x_1 – произвольное положительное число, $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$, $\forall n \geq 1$, $a > 0$;

5.2.2. $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_{n+1} = \sqrt{3x_n - 2}$.

5.3. Найдите все предельные точки последовательности
$1; 1/2; 1; 1/2; 1/3; 1; 1/2; 1/3; 1/4...$.

5.4. Не пользуясь правилом Лопиталя, докажите, что. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$.

5.5. Не пользуясь правилом Лопиталя, докажите, что последовательность $x_n = \frac{\ln n}{n^\alpha}$ при $\alpha > 1$ является бесконечно малой.

5.6. Не пользуясь правилом Лопиталя, докажите, что последовательность $x_n = \frac{n^a}{b^n}$ при $b > 1$ является бесконечно малой.

5.7. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b^n}{n!} = 0$, где b – любое вещественное число.

5.8. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

5.9. Не пользуясь правилом Лопиталя, докажите, что последовательность $x_n = \frac{b^n}{n^a}$ при $b > 1$ является бесконечно большой.

5.10. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $b_n = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

5.11. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $b_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}$. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

5.12. Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

5.13. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$.

5.14. Докажите, что если $p \in (0, e)$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p^n \cdot n!}{n^n} = 0$.

5.15. Докажите неравенства:

5.15.1. $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n + \varliminf\limits_{n\to\infty} y_n \leq \varliminf\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) \leq \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$;

5.15.2. $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n \leq \varlimsup\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) \leq \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$;

5.15.3. $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \varliminf\limits_{n\to\infty} y_n \le \varliminf\limits_{n\to\infty}\left(x_n \cdot y_n\right) \le \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$, где $x_n \ge 0,\ y_n \ge 0,\ n \in \mathbf{N}$;

5.15.4. $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n \le \varlimsup\limits_{n\to\infty}\left(x_n \cdot y_n\right) \le \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$ где $x_n \ge 0,\ y_n \ge 0,\ n \in \mathbf{N}$.

5.16. Постройте пример числовой последовательности $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, для которой все члены заданной числовой последовательности $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ являются её предельными точками.

5.17. Постройте пример числовой последовательности, имеющей в качестве своей предельной точки каждое вещественное число.

Тема 2. Предел и непрерывность функции.

1. Определения.

Сформулируйте определение:

1.1. ограниченной на множестве *X* функции;
1.2. ограниченной сверху (снизу) на множестве *X* функции;
1.3. неограниченной на множестве *X* функции;
1.4. неограниченной сверху (снизу) на множестве *X* функции;
1.5. верхней (нижней) грани функции на множестве *X;*
1.6. точной верхней (точной нижней) грани функции на множестве *X;*
1.7. монотонной на промежутке функции;
1.8. предела функции $f\left(x\right)$ в точке $x = a$ «по Коши»;
1.9. предела функции $f\left(x\right)$ при $x \to a+0$ «по Коши»;
1.10. предела функции $f\left(x\right)$ при $x \to a-0$ «по Коши»;
1.11. предела функции $f\left(x\right)$ при $x \to +\infty$ «по Коши»;
1.12. предела функции $f\left(x\right)$ при $x \to -\infty$ «по Коши»;
1.13. предела функции $f\left(x\right)$ в точке $x = a$ «по Гейне»;
1.14. предела функции $f\left(x\right)$ при $x \to +\infty$ «по Гейне»;
1.15. предела функции $f\left(x\right)$ при $x \to -\infty$ «по Гейне»;
1.16. $f(x) \to +\infty$ при $x \to a$ «по Коши»;
1.17. $f(x) \to +\infty$ при $x \to a-0$ «по Коши»;
1.18. $f(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$ «по Коши»;
1.19. $f(x) \to +\infty$ при $x \to -\infty$ «по Коши»;
1.20. $f(x) \to -\infty$ при $x \to -\infty$ «по Коши»;
1.21. $f(x) \to -\infty$ при $x \to a$ «по Коши»;
1.22. $f(x) \to -\infty$ при $x \to a+0$ «по Коши»;
1.23. $f(x) \to -\infty$ при $x \to +\infty$ «по Коши»;
1.24. функции $f\left(x\right)$, бесконечно малой при $x \to a$ «по Коши»;
1.25. функции $f\left(x\right)$, бесконечно малой при $x \to +\infty$ «по Коши»;
1.26. функции $f\left(x\right)$, бесконечно малой при $x \to -\infty$ «по Коши»;
1.27. $f(x) \to +\infty$ при $x \to a$ «по Гейне»;
1.28. $f(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$ «по Гейне»;

1.29. $f(x) \to +\infty$ при $x \to -\infty$ «по Гейне»;
1.30. функции, непрерывной в точке;
1.31. непрерывной на промежутке функции;
1.32. обратной функции;
1.33. точки разрыва функции $f(x)$;
1.34. точки устранимого разрыва функции $f(x)$;
1.35. точки разрыва первого рода функции $f(x)$;
1.36. точки разрыва второго рода функции $f(x)$.

2. Основные теоремы (без доказательства).

2.1. Сформулируйте критерий Коши существования предела функции при $x \to a$.
2.2. Сформулируйте критерий Коши существования предела функции при $x \to +\infty$.
Сформулируйте теорему:
2.3. о пределах суммы, разности, произведения и частного двух функций;
2.4. о трёх функциях (двух полицейских);
2.5. о предельном переходе в неравенстве $f(x) \le g(x)$;
2.6. о связи предела функции в данной точке с односторонними пределами в этой точке;
2.7. о единственности предела функции в точке;
2.8. о пределе монотонной функции;
2.9. о первом замечательном пределе;
2.10. о втором замечательном пределе;
2.11. о непрерывности суммы, разности, произведения и частного двух непрерывных функций;
2.12. о непрерывности сложной функции;
2.13. о существовании, монотонности и непрерывности обратной функции.

3. Теоремы с доказательством.

3.1. Докажите, что сумма двух бесконечно малых функций в точке a является бесконечно малой функцией в точке a.

3.2. Докажите, что произведение бесконечно малой в точке a функции на ограниченную функцию является бесконечно малой функцией в точке a.

3.3. Докажите, что если в некоторой проколотой окрестности точки a выполняется неравенство $f(x) \ge c$ и существует $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, то $b \ge c$.

Докажите теорему:

3.4. о пределах суммы, разности, произведения и частного двух функций;

3.5. о трёх функциях (двух полицейских);

3.6. о связи предела функции в данной точке с односторонними пределами в этой точке;

3.7. о единственности предела функции в точке;

3.8. о пределе монотонной ограниченной функции.

3.9. Докажите эквивалентность определений по Гейне и по Коши предела функции $f(x)$ при $x \to a$.

3.10. Сформулируйте критерий Коши существования $\lim\limits_{x \to a} f(x)$. Докажите необходимость.

3.11. Сформулируйте критерий Коши существования $\lim\limits_{x\to a} f(x)$. Докажите достаточность.

Докажите теорему:

3.12. о предельном переходе в неравенстве $f(x) \le g(x)$;

3.13. о непрерывности суммы, разности, произведения и частного двух непрерывных функций;

3.14. о непрерывности сложной функции;

3.15. о прохождении непрерывной на сегменте $[a;b]$ функции $f(x)$ через любое промежуточное значение сегмента $\left[f(a); f(b)\right]$;

3.16. о существовании, монотонности и непрерывности обратной функции;

3.17. о первом замечательном пределе;

3.18. о втором замечательном пределе.

4. Вопросы и задачи.

4.1. Докажите, что сумма и произведение двух ограниченных на множестве X функций является ограниченной функцией.

4.2. Приведите пример функции $f(x)$, непрерывной и ограниченной на полупрямой $[a,+\infty)$, которая не достигает своей точной верхней грани на этом промежутке.

4.3. Пусть функция $f(x)$ определена и возрастает на интервале $x \in (a,b)$, и для любой точки $c \in (a,b)$ существуют односторонние пределы $\lim\limits_{x\to c\pm 0} f(x)$, и эти пределы равны между собой. Докажите, что функция $f(x)$ непрерывна на указанном промежутке.

4.4. Сформулируйте определение «по Коши» того, что функция $f(x)$ не имеет предела в точке $x = a$.

4.5. Сформулируйте «по Коши» и «по Гейне» отрицание к утверждению:

4.5.1. «$f(x)\to b$ при $x \to a$»;

4.5.2. «$f(x)\to b$ при $x \to \infty$»;

4.5.3. «$f(x)\to b$ при $x \to -\infty$»;

4.5.4. «$f(x)\to +\infty$ при $x \to a$»;

4.5.5. «$f(x)\to -\infty$ при $x \to +\infty$»;

4.5.6. «$f(x)\to -\infty$ при $x \to a-0$»;

4.5.7. «$f(x)\to +\infty$ при $x \to a+0$».

4.6. Докажите, что сумма бесконечно малой в точке a функции и ограниченной в окрестности точки a функции является ограниченной функцией в некоторой окрестности точки a.

4.7. Пусть функция $f(x)$ имеет предел в точке a, а функция $g(x)$ не имеет предела в этой точке. Что можно сказать о существовании пределов а) суммы $f(x)+g(x)$, б) произведения $f(x)\cdot g(x)$, в) частного $f(x)/g(x)$ в точке a? Ответ обоснуйте.

4.8. Дайте определение функции, не являющейся непрерывной в точке a (разрывной функции). Приведите пример.

4.9. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ разрывны в точке a. Что можно сказать о непрерывности а) суммы $f(x)+g(x)$, б)произведения $f(x)\cdot g(x)$, в) частного $f(x)/g(x)$ в точке a? Ответ обоснуйте.

4.10. Докажите, что если $f(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to a$ и $b \ne 0$, то функция $g(x)=\dfrac{1}{b+f(x)}$ ограничена в некоторой окрестности точки *a*.

4.11. Докажите, что если $f(x)$ бесконечно малая функция при $x \to a$ и $f(x) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности точки *a*, то функция $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ бесконечно большая в точке *a*.

4.12. Докажите, что если $f(x)$ бесконечно большая в точке *a* функция, то в некоторой проколотой окрестности точки a определена функция $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$, бесконечно малая в точке *a*.

4.13. Докажите, что если $f(x)$ непрерывна в точке a, то и $|f(x)|$ непрерывная функция в точке a.

4.14. Можно ли утверждать, что квадрат разрывной в некоторой точке функции есть функция, разрывная в этой точке? Ответ обоснуйте.

4.15. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке a, функция $g(x)$ – разрывна в точке *a*. Что можно сказать о непрерывности а) суммы $f(x)+g(x)$, б) произведения $f(x)\cdot g(x)$, в) частного $f(x)/g(x)$ в точке a? Ответ обоснуйте.

4.16. Пусть функция $f(x)$ определена на $[a;b]$ и $\exists c \in (f(a);f(b))$ такое, что уравнение $f(x)=c$ не имеет корней на (a,b). Докажите, что функция $f(x)$ не является непрерывной на $[a;b]$. **Совет**: воспользуйтесь теоремой о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение и методом доказательства «от противного».

4.17. Пусть $R(x)=\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+...+b_m}$, $a_0 \neq 0,\ b_0 \neq 0$. Докажите, что

$$\lim_{x\to\infty} R(x)=\begin{cases}\infty, & n>m,\\ a_0/b_0, & n=m,\\ 0, & n<m.\end{cases}$$

4.18. Докажите, что не существуют пределы:

4.18.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$,

4.18.2. $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$.

4.19. Существует ли $\lim\limits_{x\to 1} x\,\mathrm{sgn}(x-1)$? Обоснуйте ответ.

4.20. Вычислите:

4.20.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$;

4.20.2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$.

4.21. Докажите, что:

4.21.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$;

4.21.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$, если $a>0$.

4.22. Докажите, что $o(x)\cdot o(x^2)=o(x^3)$ при $x\to 0$.

4.23. Докажите, что при $x\to +0$

4.23.1. $o(\sqrt{x})\cdot o(\sqrt[3]{x})=o(\sqrt[6]{x^5})$;

4.23.2. $o(\sqrt[4]{x})\cdot o(\sqrt[3]{x})=o(\sqrt{x})$.

4.24. Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые при $x \to a$ функции. Докажите справедливость следующих равенств при $x \to a$:

4.24.1. $o(\beta)+o(\beta)=o(\beta)$;

4.24.2. $o(\beta)-o(\beta)=o(\beta)$;

4.24.3. $(o(\beta))^n=o(\beta^n)$, $\forall n \in \mathbf{N}$;

4.24.4. $\beta^n o(\beta)=o(\beta^{n+1})$, $\forall n \in \mathbf{N}$;

4.24.5. $\dfrac{o(\beta^n)}{\beta}=o(\beta^{n-1})$, $\forall n \in \mathbf{N}$;

4.24.6. $o(o(\beta))=o(\beta)$;

4.24.7. $o(\beta+o(\beta))=o(\beta)$;

4.24.8. $\alpha\beta=o(\alpha)$, $\alpha\beta=o(\beta)$;

4.24.9. $o(c\beta)=o(\beta), \forall c \ne 0, c=const$;

4.24.10. $co(\beta)=o(\beta), \forall c \ne 0, c=const$;

4.24.11. если $\alpha \sim \beta$, то $\alpha-\beta=o(\alpha)$ и $\alpha-\beta=o(\beta)$.

4.25. Пользуясь свойствами символа «о-малое», запишите для функции $\alpha(x)$ равенство вида $\alpha(x)=o(1)$ или $\alpha(x)=o\left((x-a)^k\right)$ при $x \to a$ (k-натуральное число):

4.25.1. $\alpha(x)=o(-5x+x^2-x^3+o(-5x+x^2-x^3))$, $x \to 0$;

4.25.2. $\alpha(x)=(x-1)\cdot o((x-1)^2+o(x-1))$, $x \to 1$;

4.25.3. $\alpha(x)=\dfrac{1}{3x}\cdot o(5x+x^2)$, $x \to 0$;

4.25.4. $\alpha(x)=\dfrac{1}{x^2}\cdot o\left(2x^4+o\left(x^4+2x^2\right)\right)$, $x \to 0$;

4.25.5. $\alpha(x)=\dfrac{o\left(2(x+2)^3\right)}{(x+2)^2}+\dfrac{o\left(4(x+2)^5\right)}{(x+2)^4}$, $x \to -2$.

4.26. Пользуясь свойствами символа «о-малое», запишите для функции $\alpha(x)$ равенство вида $\alpha(x)=o(1)$ или $\alpha(x)=o\left(\dfrac{1}{x^k}\right)$ при $x \to \infty$ (k-натуральное число):

4.26.1. $\alpha(x)=o\left(\dfrac{1}{2x^2}-\dfrac{1}{x}+o\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$;

4.26.2. $\alpha(x)=\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{1}{x^2}$;

4.26.3. $\alpha(x)=x^2\cdot o\left(\dfrac{1}{x^3}+o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)\right)$;

4.26.4. $\alpha(x)=x\left(o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)-o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right)$;

4.26.5. $\alpha(x)=5x\cdot o\left(\dfrac{1}{x^2}+o\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$.

4.27. Укажите все значения γ, при которых верно равенство:

4.27.1. $x^3+x^5=o(x^\gamma)$ при $x \to +0$;

4.27.2. $x^5+x^\gamma=o(x^2)$ при $x \to +0$;

4.27.3. $x^{-1}=o(x^{-\gamma})$ при $x \to +\infty$

4.27.4. $x^{-7}+x^{-8}=o(x^{-\gamma})$ при $x \to +\infty$;

4.27.5. $x^{-\gamma}=o(x^{-7})$ при $x \to +\infty$;

4.27.6. $\dfrac{1}{\sqrt{x}}=o(x^{-\gamma})$ при $x \to +\infty$;

4.27.7. $x^{-\gamma}=o\left(\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\right)$ при $x \to +\infty$;

4.27.8. $x^\gamma=o(x^{-4})$ при $x \to +\infty$;

4.27.9. $x^\alpha+x^{2\alpha}=o(x^\gamma)$ при $\alpha>0$, $x \to +0$.

4.28. Напишите асимптотическое разложение функции при $x \to 0$ с остаточным членом $o(x^{\alpha})$, где $\alpha \geq 0$:

4.28.1. $\sin^2(5\sqrt{x}+x),\ x>0$;

4.28.2. $\cos(4x^2+x)$;

4.28.3. $\ln(1-x^2+x)$;

4.28.4. $\ln(\cos 2x)$;

4.28.5. $\ln\left(e^x+\sqrt{x}\right),\ x>0$;

4.28.6. $\cos\sqrt{\sin x},\ x>0$.

4.29. Напишите асимптотическое разложение функции при $x \to +\infty$ с остаточным членом $o(1/x^{\alpha})$, где $\alpha \geq 0$:

4.29.1. $\sqrt{x^2+x}-x$;

4.29.2. $\sqrt[3]{x^3+x}-x$;

4.29.3. $\ln\cos\left(\dfrac{2}{x}\right)$;

4.29.4. $e^{1/\sqrt{x}}-1,\ x>0$.

4.30. Найдите такое значение *p*, при котором предел существует и не равен нулю. Вычислите предел при этом значении *p*:

4.30.1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}-\sqrt[3]{x^3-x^2}\right)$;

4.30.2. $\lim\limits_{x\to+0} x^p\ln\left(\dfrac{1+x^2}{1-x^2}\right)$;

4.30.3. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p\ln\left(\dfrac{x^3-1}{x^3+1}\right)$.

4.31. Вычислите пределы

4.31.1. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{(x-2)(x+1)}$;

4.31.2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-4}{(x-2)(x+1)}$;

4.31.3. $\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$;

4.31.4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-3)^{40}(5x+1)^{10}}{(3x^2-2)^{25}}$;

4.31.5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$;

4.31.6. $\lim\limits_{x\to\pi/3}\dfrac{\sin(x-\pi/3)}{1-2\cos x}$;

4.31.7. $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$;

4.31.8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$;

4.31.9. $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\sin x)^{tgx}$;

4.31.10. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\operatorname{ch}2x}{\ln\cos 3x}$;

4.31.11. $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$;

4.31.12. $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\log_x 2$;

4.31.13. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n+1]{a}\right),\ a>0$;

4.31.14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$;

4.31.15. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(x^2+e^x\right)}{\ln\left(x^4+e^{2x}\right)}$;

4.31.16. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(x^2+e^x\right)}{\ln\left(x^4+e^{2x}\right)}$;

4.31.17. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right)}{\sin bx}$;

4.31.18. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)$;

4.31.19. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{(a-1)+\sqrt[n]{b}}{a}\right)^n$;

4.31.20. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{x-a}\quad(a>0)$;

4.31.21. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}$;

4.31.22. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin^2\left(\pi\cdot 2^x\right)}{\ln\left(\cos\left(\pi\cdot 2^x\right)\right)}$;

4.31.23. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln\left(1+3^x\right)}{\ln\left(1+2^x\right)}$;

4.31.24. $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^n\left(\dfrac{2\pi n}{3n+1}\right)$;

4.31.25. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^x$, $a, c>0$;

4.31.26. $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$;

4.31.27. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\ln\left(\operatorname{ch}x\right)\right)$;

4.31.28. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$;

4.31.29. $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{tg}^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)$;

4.31.30. $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{a^{x+h}+a^{x-h}-2a^x}{h^2}, a>0$;

4.31.31. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+x2^x}{1+x3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

4.31.32. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}{\ln(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})}$;

4.31.33. $\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{x}-1), x>0$;

4.31.34. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\operatorname{ch}\dfrac{\pi}{n}\right)^{n^2}}{\left(\cos\dfrac{\pi}{n}\right)^{n^2}}$;

4.31.35. $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\ln(x+1)-\ln x\right)$;

4.31.36. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{1-\cos x}$;

4.31.37. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}\right)$;

4.31.38. а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}\right)$;

4.31.39. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[m]{1+ax}-\sqrt[n]{1+bx}}{x}, m,n\in\mathbb{N}$;

4.31.40. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$, $a>0$, $b>0$;

4.31.41. $\lim\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$ при $x\to+0, x\to1, x\to+\infty$;

4.31.42. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}, a>0, b>0, c>0$.

4.32. Найдите все точки разрыва функции $f\left(x\right)$ и определите их тип:

4.32.1. $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$;

4.32.2. $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$;

4.32.3. $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$;

4.32.4. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{\ln|x|}$;

4.32.5. $f\left(x\right)=\dfrac{\operatorname{tg}x}{\sin x}$;

4.32.6. $f\left(x\right)=\dfrac{\operatorname{tg}x}{\ln\left(1+x\right)}$;

4.32.7. $f\left(x\right)=\dfrac{\ln\left(1+x\right)}{\operatorname{tg}x}$;

4.32.8. $f\left(x\right)=\dfrac{\left(x-1\right)}{x\left(x^2-1\right)}\cdot e^{1/x}$;

4.32.9. $f\left(x\right)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$;

4.32.10. $f\left(x\right)=x\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$;

4.32.11. $f\left(x\right)=\ln|x|$;

4.32.12. $f\left(x\right)=x\ln|x|$;

4.32.13. $f(x)=|x|\ln|x|$;

4.32.14. $f(x)=\dfrac{|\sin x|}{\sin x}$.

5. Задачи повышенной трудности.

5.1. Докажите, что если $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ «по Гейне», то $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ «по Коши».

5.2. Докажите, что если $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ «по Коши», то $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ «по Гейне».

5.3. Докажите, что если $f(x)\to+\infty$ при $x\to a$ «по Гейне», то $f(x)\to+\infty$ при $x\to a$ «по Коши».

5.4. Докажите, что если $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=b$ «по Гейне», то $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=b$ «по Коши».

5.5. Пусть функция $f(x)$ возрастает и ограничена на промежутке $x\in(a;b)$. Докажите, что $\forall c\in(a;b)\ \exists\lim\limits_{x\to c-0} f(x)$.

5.6. Пусть функция $f(x)$ убывает и ограничена на интервале $(a;b)$. Докажите, что $\exists\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$.

5.7. Пусть функция $f(x)$ возрастает и ограничена на промежутке $(a;+\infty)$. Докажите, что $\exists\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

5.8. Сформулируйте критерий Коши существования $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Докажите необходимость.

5.9. Сформулируйте критерий Коши существования $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Докажите достаточность.

5.10. Докажите, что функция Дирихле $D(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x \text{ рационально},\\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально}\end{cases}$ не имеет предела ни в одной точке.

5.11. Докажите, что если $f(a)>0$ и $\forall\delta>0\,\exists x$ такое, что $0<|x-a|<\delta$ и $f(x)<0$, то функция $f(x)$ разрывна в точке $x=a$.

5.12. Пусть $f(x)$ – непрерывная функция, определённая на промежутке (a,b), причём $f(x)\to+\infty$ при $x\to b-0$ и $f(x)\to-\infty$ при $x\to a+0$. Сформулируйте и докажите теорему о необходимых и достаточных условиях существования обратной функции на промежутке $(-\infty,+\infty)$.

5.13. Пусть $f(x)$ – непрерывная функция, определённая на промежутке $(-\infty,+\infty)$, причём $f(x)\to B$ при $x\to+\infty$ и $f(x)\to A$ при $x\to-\infty$. Сформулируйте и докажите теорему о необходимых и достаточных условиях существования обратной функции на промежутке (A,B).

5.14. Пусть $f(x)$ – непрерывная функция, определённая на промежутке $(-\infty,+\infty)$, причём $f(x)\to+\infty$ при $x\to+\infty$ и $f(x)\to-\infty$ при $x\to-\infty$. Сформулируйте и докажите теорему о необходимых и достаточных условиях существования обратной функции на промежутке $(-\infty,+\infty)$.

Тема 3. Производные и дифференциалы функции.

1. Определения.

Сформулируйте определение:

1.1. производной функции $f(x)$ в данной точке;

1.2. правой (левой) производной функции $f(x)$ в данной точке;

1.3. производной вектор-функции в данной точке;

1.4. дифференцируемой в данной точке функции;

1.5. функции $f(x)$, дифференцируемой на множестве;

1.6. касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$ и запишите уравнение касательной;

1.7. дифференциала функции в данной точке;

1.8. n-ной производной функции $f(x)$ в данной точке;

1.9. n раз дифференцируемой функции $f(x)$ в данной точке;

1.10. бесконечно дифференцируемой функции $f(x)$ в данной точке;

1.11. n-ной производной вектор-функции в данной точке;

1.12. n-ного дифференциала функции в данной точке.

2. Основные теоремы и формулы (без доказательства).

Сформулируйте:

2.1. достаточное условие существования касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$;

2.2. теорему о производных суммы, разности, произведения и частного двух функций;

2.3. теорему о производной сложной функции;

2.4. теорему о производной обратной функции.

Запишите:

2.5. формулы дифференциалов суммы, разности, произведения и частного двух функций;

2.6. формулу для производной функции, заданной параметрически;

2.7. формулу n-ной производной произведения двух функций.

3. Теоремы с доказательством.

Докажите теорему:

3.1. о производных суммы, разности, произведения и частного двух функций;

3.2. о производной сложной функции;

3.3. о производной обратной функции.

3.4. Выведите формулу производной функции, заданной параметрически.

4. Вопросы и задачи.

4.1. Докажите, что если $\exists f'(x_0)$, то $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$.

4.2. Докажите, что если существует число A такое, что $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$, то $\exists f'(x_0)$ и $f'(x_0) = A$.

4.3. Пользуясь определением производной, выведите формулы производных функций:

4.3.1. $x^n, n \in \mathbf{N}$;

4.3.2. $\sin x$;

4.3.3. $\cos x$;

4.3.4. $\log_a x$;

4.3.5. a^x.

4.4. Пользуясь теоремой о производных суммы, разности, произведения и частного двух функций выведите формулы для производных функций:

4.4.1. $\operatorname{tg} x$;

4.4.2. $\operatorname{ctg} x$;

4.4.3. $\operatorname{sh} x$;

4.4.4. $\operatorname{ch} x$;

4.4.5. $\operatorname{th} x$;

4.4.6. $\operatorname{cth} x$.

4.5. Пользуясь теоремой о производной сложной функции, выведите формулу для производной функции x^α, $\alpha \in \mathbf{N}$.

4.6. Пользуясь определением производной, найдите производную функции в данной точке:

4.6.1. $y = \sqrt{x}$ в точке $x = 4$;

4.6.2. $y = x|x|$ в точке $x = 0$.

4.7. Найдите односторонние производные $f'_{\text{прав}}(x_0)$ и $f'_{\text{лев}}(x_0)$ функции:

4.7.1. $f(x) = |x|,\ x_0 = 0;\ x_0 = 1$;

4.7.2. $f(x) = x \operatorname{sgn} x,\ x_0 = 0$;

4.7.3. $f(x) = x^2 \operatorname{sgn} x,\ x_0 = 0$;

4.7.4. $f(x) = |x-1| e^x,\ x_0 = 1$.

4.8. Найдите первые производные и первые дифференциалы функций:

4.8.1. $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$;

4.8.2. $y = \sin^2(\cos x) + \cos^2(\sin x)$;

4.8.3. $y = e^{x^2} \cos 2x$;

4.8.4. $y = x^{\sin x}$;

4.8.5. $y = e^{e^x} + x^{e^x}$;

4.8.6. $y = \ln^3\left(\ln^2(\ln x)\right)$;

4.8.7. $y = \operatorname{arctg}\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$;

4.8.8. $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1 - x}{1 + x}$;

4.8.9. $y = \ln\left(e^x + \sqrt{1 + e^{2x}}\right)$;

4.8.10. $y = \sin x^{\cos x}$.

4.9. Исследуйте функции на непрерывность и дифференцируемость и укажите тип точек разрыва:

4.9.1. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x - 3}{4x^2 - 4x - 3}, & x < 2, \\ \dfrac{1}{x}, & x \geq 2; \end{cases}$

4.9.2. $f(x) = \begin{cases} -2x + 1, & x \leq -3, \\ -x^3 - 20, & -3 < x \leq 0, \\ \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}, & x > 0. \end{cases}$

4.10. Пусть $F(x) = \begin{cases} f(x), & x \leq x_0 \\ ax + b, & x > x_0 \end{cases}$, где функция $f(x)$ дифференцируема слева в точке $x = x_0$. При каком выборе коэффициентов a и b функция $F(x)$ будет дифференцируемой в точке x_0?

4.11. При каких значениях a и b функция $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x|}, & |x| > 2, \\ a + bx^2, & |x| \leq 2 \end{cases}$ является дифференцируемой на всей числовой прямой?

4.12. Подберите параметры a и b так, чтобы функция была непрерывной и дифференцируемой в точке x_0

4.12.1. $f(x)=\begin{cases} b\sin x, & -\pi/3 \le x \le x_0, \\ a\operatorname{tg} x+1, & x_0 < x \le \pi/3, \end{cases}$ $x_0=\pi/6$;

4.12.2. $f(x)=\begin{cases} b e^x, & x \le x_0, \\ \ln(x+1)+a, & x > x_0, \end{cases}$ $x_0=0$.

4.13. Докажите, что если существует дифференциал функции $f(x)$ в точке x_0, то $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha(\Delta x)$ при $\Delta x \ne 0$, где $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$.

4.14. Докажите, что если существует дифференциал функции $f(x)$ в точке $x=x_0$, то существует такое число A, что $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=A+\alpha(\Delta x)$ при $\Delta x \ne 0$,где $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$.

4.15. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, а функция $g(x)$ не дифференцируема в этой точке. Что можно сказать о дифференцируемости а) суммы $f(x)+g(x)$, б) произведения $f(x)\cdot g(x)$, в) частного $f(x)/g(x)$, $g(x_0)\ne 0$ в точке x_0? Ответ обоснуйте.

4.16. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ не дифференцируемы в точке x_0. Что можно сказать о дифференцируемости а) суммы $f(x)+g(x)$, б) произведения $f(x)\cdot g(x)$, в) частного $f(x)/g(x)$, $g(x_0)\ne 0$ в точке x_0? Ответ обоснуйте.

4.17. Используя теорему о производной сложной функции и тождество $f(f^{-1}(x))=x$, выведите формулу производной обратной функции.

4.18. Используя теорему о производной обратной функции, выведите формулу для производной функции $f(x)$:

4.18.1. $f(x)=\arcsin x$;

4.18.2. $f(x)=\operatorname{arctg} x$;

4.18.3. $f(x)=\ln x$.

4.19. Запишите уравнения касательной и нормали к графику функции $y=f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$:

4.19.1. $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $x_0=8$;

4.19.2. $f(x)=(\ln x)^2$, $x_0=1$;

4.19.3. $f(x)=\arcsin x$, $x_0=\dfrac{1}{2}$.

4.20. Найдите $f'(a)$, если $f(x)=(x-a)\varphi(x)$, где функция $\varphi(x)$непрерывна при $x=a$.

4.21. Покажите, что функция $f(x)=|x-a|\varphi(x)$, где функция $\varphi(x)$непрерывна при $x=a$ и $\varphi(a)\ne 0$ не имеет производной в точке $x=a$. Вычислите односторонние производные $f'_{\text{прав}}(x_0)$ и $f'_{\text{лев}}(x_0)$.

4.22. Покажите, что функция $f(x)=\begin{cases} x^2\left|\cos\dfrac{\pi}{x}\right|, & x\ne 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$ имеет точки недифференцируемости в любой окрестности точки $x=0$, но дифференцируема в этой точке.

4.23. Покажите, что функция $f\left(x\right)=\begin{cases} x^2, & \text{если } x \text{ рационально,} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально} \end{cases}$ имеет производную в единственной точке $x=0$.

4.24. Докажите, что функция $f\left(x\right)=\begin{cases} x\cdot\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$ имеет производную в точке $x=0$ и найдите её значение.

4.25. Докажите, что функция $f\left(x\right)=\begin{cases} x^{x+1}, & x>0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$ имеет правую производную в точке $x=0$ и найдите её значение.

4.26. Докажите, что функция $f\left(x\right)=\begin{cases} x\cdot\left(1-x^2\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$ имеет производную в точке $x=0$ и найдите её значение.

4.27. Пусть $f\left(x\right)=\begin{cases} x^2\sin\left(e^{-\frac{1}{x}}\right), & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$. Докажите, что $\forall x\ \exists\, f'\left(x\right)$, $\nexists \lim\limits_{x\to 0} f'\left(x\right)$. Найдите $f'\left(0\right)$.

4.28. Пусть $f\left(x\right)=\begin{cases} e^{-\left|\frac{1}{x^3}\right|}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$ Найдите $f'\left(0\right)$.

4.29. При каком значении p функция $f\left(x\right)=\begin{cases} x^p\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$ а) непрерывна при $x=0$, б) дифференцируема при $x=0$, в) имеет непрерывную производную при $x=0$?

4.30. При каких значениях p функция $f\left(x\right)=\begin{cases} \left|x\right|^p\sin\dfrac{1}{\left|x\right|^m}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ $m>0$ имеет а) ограниченную производную в окрестности начала координат, б) неограниченную производную в окрестности начала координат?

4.31. Для функции $y=f\left(x\right)$, заданной параметрически уравнениями $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, $0\leq t\leq\pi$, запишите уравнения касательной и нормали к графику функции при: а) $t=\dfrac{\pi}{4}$; б) $t=\dfrac{\pi}{2}$.

4.32. Для функции $y=f\left(x\right)$, заданной параметрически уравнениями $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$, $0\leq t\leq 2\pi$, запишите уравнения касательной и нормали к графику функции при: а) $t=\dfrac{\pi}{4}$; б) $t=\pi$.

4.33. Запишите формулы дифференциалов первого и второго порядков сложной функции:

4.33.1. $y=f\left(g\left(x\right)\right)$, где f и g – дважды дифференцируемые функции;

4.33.2. $y=f\left(2g\left(x\right)\right)$, где f и g – дважды дифференцируемые функции;

4.33.3. $y = \cos\left(f\left(x\right)\right)$, где f – дважды дифференцируемая функция;

4.33.4. $y = \sqrt{f\left(x\right)}$, где f – дважды дифференцируемая положительная функция.

4.34. Найдите производную n-го порядка функции $f\left(x\right)$:

4.34.1. $f(x) = x\ln x, n = 20$;

4.34.2. $f(x) = \sqrt{x}, n = 30$;

4.34.3. $f(x) = xe^x, n = 30$;

4.34.4. $f(x) = 1/\sqrt{x}, n = 40$;

4.34.5. $f(x) = x\sin x, n = 12$;

4.34.6. $f(x) = x^2 e^x, n = 100$;

4.34.7. $f(x) = x^2\sin x, n = 200$;

4.34.8. $f(x) = x\cos x, n = 60$;

4.34.9. $f(x) = x^2\cos x, n = 71$.

4.35. Найдите дифференциал n-го порядка функции $f(x)$:

4.35.1. $f(x) = \ln(x^2 + x)$, $n = 4$;

4.35.2. $f(x) = x^2\sin 2x$, $n = 20$;

4.35.3. $f(x) = xe^{5x}$, $n = 11$;

4.35.4. $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$, $n = 8$.

4.36. Найдите величину дифференциала n-го порядка функции $f\left(x\right)$ в точке x_0 при заданном значении dx:

4.36.1. $f(x) = \ln x$, $n = 10$, $x_0 = 1$, $dx = -1$;

4.36.2. $f(x) = \sqrt{x}$, $n = 3$, $x_0 = 4$, $dx = \dfrac{1}{2}$;

4.36.3. $f(x) = e^x$, $n = 20$, $x_0 = \ln 2$, $dx = \dfrac{1}{\sqrt[10]{2}}$;

4.36.4. $f(x) = \cos x$, $n = 7$, $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$, $dx = \dfrac{1}{2}$.

5. Задачи повышенной трудности.

5.1. Докажите, что если функция $f\left(x\right)$ дифференцируема на промежутке $x \in \left(0, +\infty\right)$ и для любых положительных x и y верно равенство $f\left(xy\right) = f\left(x\right) + f\left(y\right)$, то найдётся такое число C, что $f'\left(x\right) = \dfrac{C}{x}$ на указанном интервале.

5.2. Докажите, что если функция $f\left(x\right)$ дифференцируема на всей числовой оси и для любых x и y верно равенство $f\left(x+y\right) = f\left(x\right)f\left(y\right)$, то найдётся такое число C, что $f'\left(x\right) = Cf\left(x\right)$.

5.3. Докажите, что если функция $f\left(x\right)$ дифференцируема на некотором интервале $x \in \left(-a, a\right)$, $a > 0$ и $\forall x, y \in \left(-a, a\right)$ таких, что $x + y \in \left(-a, a\right)$ верно равенство $f\left(x+y\right) = \dfrac{f\left(x\right) + f\left(y\right)}{1 - f\left(x\right)f\left(y\right)}$, то найдётся такое число C, что $f'\left(x\right) = C\left(1 + f^2\left(x\right)\right)$ на указанном интервале.

5.4. Функция $y = f\left(x\right)$ имеет в точке $x = 0$ производную, отличную от нуля. Вычислите пределы:

5.4.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(x\right)e^x - f\left(0\right)}{f\left(x\right)\cos x - f\left(0\right)}$;

5.4.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(x\right)\sin x}{f\left(x\right)\operatorname{ch} x - f\left(0\right)}$.

5.5. Функция $y = f\left(x\right)$ имеет производную в точке $x = a$ и $f\left(a\right) \neq 0$. Вычислите пределы:

5.5.1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(a+x)}{f(a)}\right)^{1/x}$; 5.5.2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)}{f(a)}\right)^{1/\left(\sqrt{x}-\sqrt{a}\right)}$.

5.6. Функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют производные в точке a. Вычислите пределы:

5.6.1. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^n f(x)-x^n f(a)}{x-a}$, $a>0$; 5.6.2. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)g(a)-f(a)g(x)}{x-a}$;

5.6.3. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)\ln a-f(a)\ln x}{g(x)-g(a)}$, $a>0,\ g'(a)\neq 0$.

Тема 4. Неопределенный и определенный интегралы.

1. Определения.

Сформулируйте определение:

1.1. Первообразной функции $f(x)$;

1.2. неопределенного интеграла от функции $f(x)$;

1.3. интегральной суммыдля функции $f(x)$ на сегменте $[a,b]$;

1.4. предела интегральных сумм при стремлении диаметра разбиения к нулю;

1.5. определенного интеграла от функции $f(x)$ по сегменту $[a,b]$;

1.6. верхней (нижней) суммы Дарбу;

1.7. предела верхних (нижних) сумм при стремлении диаметра разбиения к нулю;

1.8. верхнего (нижнего) интеграла Дарбу.

2. Основные теоремы и формулы (без доказательства).

2.1. Сформулируйте теорему об интегрировании по частям для неопределенного интеграла.

2.2. Сформулируйте теорему об интегрировании методом замены переменной для неопределенного интеграла.

2.3. Перечислите свойства сумм Дарбу.

2.4. Сформулируйте теорему о необходимом и достаточном условии интегрируемости функции $f(x)$ на сегменте $[a,b]$ в терминах нижнего и верхнего интегралов Дарбу.

2.5. Сформулируйте теорему о необходимом и достаточном условии интегрируемости функции $f(x)$ на сегменте $[a,b]$ в терминах нижних и верхних сумм.

2.6. Перечислите классы интегрируемых функций.

2.7. Перечислите свойства определенного интеграла.

2.8. Запишите формулу среднего значения для определенного интеграла и сформулируйте достаточные условия ее применимости.

2.9. Запишите формулу Ньютона – Лейбница и сформулируйте достаточные условия ее применимости.

2.10. Сформулируйте теорему о дифференцировании интеграла с переменными пределами.

2.11. Запишите формулу замены переменной для определенного интеграла и сформулируйте достаточные условия ее применимости.

2.12. Запишите формулу интегрирования по частям для определенного интеграла и сформулируйте достаточные условия ее применимости.

3. Теоремы с доказательством.

3.1. Докажите теорему об интегрировании методом замены переменной для неопределенного интеграла.

3.2. Докажите теорему об интегрировании по частям для неопределенного интеграла.

3.3. Докажите, что для данного разбиения отрезка нижняя (верхняя) сумма является точной нижней (верхней) гранью множества интегральных сумм.

3.4. Пусть разбиение T' отрезка $[a;b]$ получено из разбиения T путем добавления к нему новых точек. Докажите, что нижняя сумма функции $f(x)$ для разбиения T' не меньше, чем нижняя сумма для разбиения T. Получите оценку разности нижних сумм этих разбиений.

3.5. Пусть разбиение T' отрезка $[a;b]$ получено из разбиения T путем добавления к нему новых точек. Докажите, что верхняя сумма функции $f(x)$ для разбиения T' не больше, чем верхняя сумма для разбиения T. Получите оценку разности верхних сумм этих разбиений.

3.6. Докажите, что нижняя сумма функции $f(x)$ для любого разбиенияотрезка $[a;b]$ не больше верхней суммы той же функции $f(x)$ для любого другого разбиения T' отрезка $[a;b]$.

3.7. Докажите, что множество нижних сумм функции $f(x)$ для всевозможных разбиений отрезка $[a;b]$ ограничено сверху.

3.8. Докажите, что множество верхних сумм функции $f(x)$ для всевозможных разбиений отрезка $[a;b]$ ограничено снизу.

3.9. Докажите, что нижний интеграл Дарбу не превосходит верхнего.

3.10. Докажите лемму Дарбу.

3.11. Докажите теорему о необходимом и достаточном условии интегрируемости функции $f(x)$ на сегменте $[a;b]$ в терминах нижнего и верхнего интегралов Дарбу.

3.12. Докажите теорему о необходимом и достаточном условии интегрируемости функции $f(x)$ на сегменте $[a;b]$ в терминах нижних и верхних сумм.

3.13. Докажите теорему об интегрируемости непрерывной на сегменте функции.

3.14. Докажите теорему об интегрируемости некоторых разрывных на сегменте функций.

3.15. Докажите теорему об интегрируемости монотонной на сегменте функции.

3.16. Докажите теорему об интегрируемости суммы и разности двух интегрируемых на сегменте функций.

3.17. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a;b]$. Докажите, что эта функция интегрируема на любом сегменте $[c,d]$, содержащемся в сегменте $[a;b]$.

3.18. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на сегментах $[a;c]$ и $[c;b]$, $a<c<b$. Докажите, что эта функция интегрируема на сегменте $[a,b]$, причем $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx$.

3.19. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$. Докажите, что функция $|f(x)|$ тоже интегрируема на $[a,b]$.

3.20. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, $a<b$. Докажите, что $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \le \int\limits_a^b |f(x)|dx$.

3.21. Докажите теорему о формуле среднего значения для определенного интеграла.
3.22. Докажите теорему о существовании первообразной непрерывной функции.
3.23. Докажите теорему о формуле Ньютона – Лейбница.
3.24. Докажите теорему о дифференцировании интеграла с переменными пределами.
3.25. Докажите теорему об интегрировании методом замены переменной для определенного интеграла.
3.26. Докажите теорему об интегрировании по частям для определенного интеграла.

4. Вопросы и задачи.

4.1. Вычислите неопределенные интегралы:

4.1.1. $\int\left(x^3+1\right)x^2dx$;
4.1.2. $\int\frac{dx}{\sqrt{2-5x}}$;
4.1.3. $\int\frac{x^2dx}{1+x^2}$;
4.1.4. $\int\frac{dx}{\sqrt{3+8x^2}}$;
4.1.5. $\int\frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}dx$;
4.1.6. $\int\frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$;
4.1.7. $\int\frac{(x+1)dx}{x^2+x-2}$;
4.1.8. $\int\frac{x^2dx}{x^2+x-2}$;
4.1.9. $\int\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx$;
4.1.10. $\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx$;
4.1.11. $\int\frac{dx}{\left(a^2+x^2\right)^{3/2}}$;
4.1.12. $\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2-x}}$;
4.1.13. $\int\sin^3xdx$;
4.1.14. $\int(x+1)\cos 2xdx$;
4.1.15. $\int xe^{-x}dx$;
4.1.16. $\int x^5e^{x^3}dx$;
4.1.17. $\int\operatorname{arctg}\sqrt{x}dx$;
4.1.18. $\int e^x\cos xdx$;
4.1.19. $\int\sqrt{x}\ln xdx$;
4.1.20. $\int x\ln\sqrt{x}dx$;
4.1.21. $\int\sin\left(\ln x\right)dx$;
4.1.22. $\int\ln\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)dx$;
4.1.23. $\int\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)dx$;
4.1.24. $\int\frac{dx}{\left(2+\cos x\right)\sin x}$;
4.1.25. $\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$;
4.1.26. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}}$;
4.1.27. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+3}}$.

4.2. Вычислите определенные интегралы:

4.2.1. $\int_0^1\frac{dx}{3+x^2}$;
4.2.2. $\int_0^1 x\left(1-x\right)^{10}dx$;
4.2.3. $\int_1^2\frac{dx}{e^x-1}$;
4.2.4. $\int_0^1\frac{xdx}{x^2+x+1}$;
4.2.5. $\int_0^{1/2}\frac{dx}{\left(x^2+x+1\right)\left(x-1\right)}$;
4.2.6. $\int_{-1}^1\frac{dx}{x^3-8}$;

4.2.7. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$;

4.2.8. $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\left(1-x^2\right)^{3/2}}$;

4.2.9. $\int_1^e \ln x dx$;

4.2.10. $\int_0^2 \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$;

4.2.11. $\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}dx$;

4.2.12. $\int_0^{\pi} \cos^4 x dx$;

4.2.13. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2-\sin x}$;

4.2.14. $\int_0^{\pi/2} \sin^5 x dx$;

4.2.15. $\int_0^{\pi/6} e^{2x}\cos 3x dx$;

4.2.16. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\cdot\sin^2 x dx$;

4.2.17. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$;

4.2.18. $\int_0^{\pi/8} \frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$.

4.3. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a;b]$. Докажите, что $cf(x)$, где $c=const$, тоже интегрируема на $[a;b]$, причем $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$.

4.4. Следует ли интегрируемость функций $f(x)$ и $g(x)$ на сегменте $[a;b]$ из интегрируемости а) их суммы $f(x)+g(x)$, б) их разности $f(x)-g(x)$? Ответ обоснуйте.

4.5. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a;b]$, а функция $g(x)$ неинтегрируема на сегменте $[a;b]$. Что можно сказать об интегрируемости а) их суммы $f(x)+g(x)$, б) их разности $f(x)-g(x)$ на этом сегменте? Ответ обоснуйте.

4.6. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ неинтегрируемы на сегменте $[a;b]$. Что можно сказать об интегрируемости а) их суммы $f(x)+g(x)$, б) их произведения $f(x)\cdot g(x)$ на этом сегменте? Ответ обоснуйте.

4.7. Приведите пример функции $f(x)$, такой, что $\int_a^b |f(x)|dx$ существует, а $\int_a^b f(x)dx$ не существует.

4.8. Вычислите производные:

4.8.1. $\frac{d}{dx}\int_0^x \sin\left(t^2\right)dt$;

4.8.2. $\frac{d}{dx}\int_a^b \sin\left(x^2\right)dx$;

4.8.3. $\frac{d}{dx}\int_x^1 \arcsin\sqrt{t}\,dt$;

4.8.4. $\frac{d}{dx}\int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2}\,dt$;

4.8.5. $\dfrac{d}{dx}\int\limits_0^{x^2} \ln\left(\dfrac{2t^2}{1+\operatorname{arctg}^2 t+\sin^4 t}\right)dt$;

4.8.6. $\dfrac{d}{dx}\int\limits_{x^2}^{x^3} \dfrac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$;

4.8.7. $\dfrac{d}{dx}\int\limits_{\operatorname{arctg} x}^{\cos x} e^{-t^2}dt$.

4.9. Найдите среднее значение функции $f(x)$ на заданном сегменте:

4.9.1. $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $[8;27]$;

4.9.2. $f(x)=\sin x$, а) $[0;\pi]$, б) $[0;2\pi]$;

4.9.3. $f(x)=\cos^2 x$, а) $[0;\pi]$, б) $[0;2\pi]$.

5. Задачи повышенной трудности.

5.1. Вычислите интегралы:

5.1.1. $\int \dfrac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$;

5.1.2. $\int \dfrac{\cos(\ln x)dx}{x^2}$;

5.1.3. $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$;

5.1.4. $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{dx}{1+0,5\cos x}$.

5.2. Докажите интегрируемость произведения интегрируемых на сегменте функций.

5.3. Известно, что функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, $a<b$ и $f(x)\ge 0$. Докажите, что $\int\limits_a^b f(x)dx \ge 0$.

5.4. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a,b]$, $a<b$ и $f(x)\ge g(x)\ \forall x\in[a,b]$. Докажите, что $\int\limits_a^b f(x)dx \ge \int\limits_a^b g(x)dx$.

5.5. Известно, что $\int\limits_a^b f(x)dx \ge 0$ и $a<b$. Следует ли отсюда, что $f(x)\ge 0$? Ответ обоснуйте.

5.6. Известно, что $\int\limits_a^b f(x)dx > \int\limits_a^b g(x)dx$ и $a<b$. Следует ли отсюда, что $f(x)\ge g(x)\ \forall x\in[a,b]$? Ответ обоснуйте.

5.7. Докажите, что если функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a,b]$ и $\inf\limits_{[a,b]} f(x)>0$, то функция $1/f(x)$ также интегрируема на этом сегменте.

Тема 5. Основные теоремы о непрерывных и дифференцируемых функциях.

1. Определения.

Сформулируйте определение:

1.1. ограниченной на заданном множестве функции;

1.2. точной верхней (точной нижней) грани функции на заданном множестве;

1.3. равномерно непрерывной на промежутке X функции;

1.4. функции, возрастающей (убывающей) в данной точке.

2. Основные теоремы (без доказательства).

Сформулируйте:

2.1. теорему о локальной ограниченности функции, непрерывной в точке;

2.2. теорему об устойчивости знака функции, непрерывной в точке;

2.3. первую теорему Вейерштрасса;

2.4. вторую теорему Вейерштрасса;

2.5. теорему Кантора;

2.6. достаточное условие возрастания (убывания) дифференцируемой функции в точке;

2.7. теорему Ролля;

2.8. теорему о формуле конечных приращений Лагранжа;

2.9. необходимое и достаточное условие невозрастания (неубывания) дифференцируемой функции на интервале (a,b);

2.10. достаточное условие возрастания (убывания) дифференцируемой функции на интервале (a,b);

2.11. теорему о формуле Коши;

2.12. теорему о формуле Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.

2.13. Запишите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

2.14. Запишите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

3. Теоремы с доказательством.

Докажите:

3.1. теорему о локальной ограниченности функции, имеющей предел в точке;

3.2. теорему об устойчивости знака непрерывной функции;

3.3. теорему о непрерывной функции, принимающей значения разных знаков на концах отрезка;

3.4. первую теорему Вейерштрасса;

3.5. вторую теорему Вейерштрасса;

3.6. теорему Кантора;

3.7. теорему о достаточном условии возрастания (убывания) в точке x_0 функции $f(x)$, дифференцируемой в точке x_0;

3.8. теорему о необходимом и достаточном условии невозрастания (неубывания) дифференцируемой функции на интервале (a,b);

3.9. теорему о достаточном условии возрастания (убывания) дифференцируемой функции на интервале (a,b);

3.10. теорему о необходимом условии убывания (возрастания) дифференцируемой функции в точке;

3.11. теорему Ролля;

3.12. теорему о формуле конечных приращений Лагранжа;
3.13. теорему о формуле Коши;
3.14. теорему о формуле Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.
3.15. теорему оформуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.
3.16. теорему оформуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.
3.17. Докажите теорему о правилеЛопиталя вычисления $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$.

4. Вопросы и задачи.

4.1. Приведите пример функции $f(x)$, непрерывной и ограниченной на промежутке $[a;+\infty)$, которая не достигает своей точной верхней грани на этом промежутке.

4.2. Докажите, что если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a,b]$, то найдётся такая точка $c\in[a,b]$, что для всех $x\in[a,b]$ будет выполнено неравенство $f(x)\le f(c)$.

4.3. Пусть функция $f(x)$ определена на сегменте $[a,b]$, $f(a)\cdot f(b)<0$ и уравнение $f(x)=0$ не имеет корней на (a,b). Докажите, что функция $f(x)$ не является непрерывной на $[a,b]$.

4.4. Докажите, что если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x=a$, и в любой окрестности точки a найдутся точки x_1 и x_2 такие, что $f(x_1)\cdot f(x_2)<0$, то $f(a)=0$.

4.5. Найдите точку c в формуле конечных приращений Лагранжа $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$, если:

4.5.1. $f(x)=\frac{1}{x}$, $a=1$, $b=5$;

4.5.2. $f(x)=\sqrt{x}$, $a=1$, $b=4$;

4.5.3. $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(3-x^2), & 0\le x\le 1,\\ \frac{1}{x}, & 1<x\le 2,\end{cases}$ $a=0$, $b=2$.

4.6. Используя правило Лопиталя, вычислите пределы:

4.6.1. $\lim\limits_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a}$;

4.6.2. $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^x-a^a}{x-a}$;

4.6.3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{ch}x-\cos x}{x^2}$;

4.6.4. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{ctg}2x$;

4.6.5. $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln(\sin\alpha x)}{\ln(\sin\beta x)}$, $\alpha>0$, $\beta>0$.

4.7. Докажите, что многочлен Тейлора $P_n(x)$ дифференцируемой n раз в точке x_0 функции $f(x)$ и все его производные $P_n^{(k)}(x)$ до n -го порядка включительно в точке x_0 равны соответственно $f(x_0)$ и $f^{(k)}(x_0)$, $k=1,2,...n$.

4.8. Запишите разложение функции $f(x)$ по формуле Маклорена с остаточным членом n-го порядка в форме а) Пеано, б) Лагранжа:

4.8.1. $f(x)=\cos x$;

4.8.2. $f(x)=e^x$;

4.8.3. $f(x)=e^{-x}$;

4.8.4. $f(x)=\frac{1}{1+x}$;

4.8.5. $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$;

4.8.6. $f(x)=-\ln(1-x)$;

4.8.7. $f(x)=\ln(1+x)$;

4.8.8. $f(x)=\sin x$.

4.9. Разложите функцию $f(x)$ по формуле Маклорена до члена порядка x^n:

4.9.1. $f(x)=\sin(\sin x)$, $n=3$;

4.9.2. $f(x)=\ln\cos x$, $n=4$;

4.9.3. $f(x)=e^{2x-x^2}$, $n=3$;

4.9.4. $f(x)=\ln\dfrac{\sin x}{x}$, $n=4$;

4.9.5. $f(x)=\sqrt[m]{a^m+x}$, $n=2$.

4.10. Получите верхнюю и нижнюю оценки величины остаточного члена n-го порядка разложения Тейлора в форме Лагранжа в δ-окрестности точки x_0 для функции $f(x)$, если:

4.10.1. $f(x)=\sin x$, $x_0=0$, $\delta=\dfrac{1}{2}$, $n=5$;

4.10.2. $f(x)=e^x$, $x_0=0$, $\delta=2$, $n=6$;

4.10.3. $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$, $x_0=0$, $\delta=\dfrac{1}{2}$, $n=4$;

4.10.4. $f(x)=\ln(1+x)$, $x_0=0$, $\delta=\dfrac{1}{2}$, $n=7$.

4.11. Вычислите пределы:

4.11.1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-e^{-x^2/2}}{x^4}$;

4.11.2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x-2\operatorname{tg}x}{\ln(1+x^3)}$;

4.11.3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{2x^2}$;

4.11.4. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$;

4.11.5. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{3/2}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right)$.

5. Задачи повышенной трудности.

5.1. Докажите, что если $\exists f''(0)$, то $f(x)=f(0)+f'(0)\cdot x+\dfrac{1}{2}f''(0)\cdot x^2+o(x^2)$ при $x\to0$.

5.2. Докажите, что если $\exists f'''(0)$, то

$$f(x)=f(0)+f'(0)\cdot x+\frac{1}{2}f''(0)\cdot x^2+\frac{1}{6}f'''(0)\cdot x^3+o(x^3) \text{ при } x\to0.$$

5.3. Пусть $P_n(x)$– многочлен Тейлора дифференцируемой n раз в точке x_0 функции $f(x)$. Докажите, что $f(x_0+\Delta x)=P_n(x_0)+o\left((\Delta x)^n\right)$.

5.4. Докажите, что если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x_0, $f(x_0)=0,\ g(x_0)=0,\ g'(x_0)\neq0$, то $\exists\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.

5.5. Докажите, что если функции $f(x)$ и $g(x)$ дважды дифференцируемы в точке x_0, $f(x_0)=0,\ g(x_0)=0,\ f'(x_0)=0,\ g'(x_0)=0,\ g''(x_0)\neq0$, то $\exists\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f''(x_0)}{g''(x_0)}$.

5.6. Докажите, что функция $f(x)=\sqrt{x}$ равномерно непрерывна на полупрямой $(0;+\infty)$.

5.7. Докажите, что функция $f(x)=\operatorname{arctg}\sqrt[3]{x}$ равномерно непрерывна на полупрямой $(0;+\infty)$.

5.8. Докажите, что если функция $f(x)$ определена и непрерывна на полупрямой $[0;+\infty)$ и существует предел $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=c$, то $f(x)$ равномерно непрерывна на этой полупрямой.

5.9. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на полупрямой $[a;+\infty)$, $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ и $f(a)=b$. Докажите, что функция $f(x)$ достигает своих точных граней на этой полупрямой.

5.10. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на полупрямой $[a;+\infty)$, $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$, $f(a)=b$, существует такое число $c\in(a,+\infty)$, что $f(c)<b$. Докажите, что функция $f(x)$ достигает своей точной нижней грани на промежутке $(a,+\infty)$.

Тема6. Исследование поведения функций и построение их графиков.

1. Определения.

Сформулируйте определение:

1.1. точки локального максимума (минимума) функции $f(x)$;

1.2. направления выпуклости графика функции $y=f(x)$;

1.3. точки перегиба графика функции $y=f(x)$;

1.4. наклонной асимптоты графика функции $y=f(x)$;

1.5. вертикальной асимптоты графика функции $y=f(x)$.

2. Основные теоремы (без доказательства).

Сформулируйте теорему:

2.1. о необходимом условии локального экстремума функции, дифференцируемой в данной точке;

2.2. о достаточных условияхлокального экстремума функции, дифференцируемой в окрестности данной точки;

2.3. о достаточных условиях локального экстремума функции, дважды дифференцируемой в данной точке;

2.4. о необходимыхи достаточных условиях существования наклонной асимптоты графика функции $y=f(x)$ при $x\to+\infty$;

2.5. о необходимом условииперегиба графика функции, дважды непрерывно дифференцируемой в данной точке;

2.6. о достаточных условиях перегиба графика функции в данной точке, использующих вторую производную функции;

2.7. о достаточных условиях перегиба графика функции в данной точке, использующих третью производную функции.

3. **Теоремы с доказательством.**

Докажите теорему:

3.1. о необходимом условии локального экстремума функции, дифференцируемой в данной точке;

3.2. о достаточных условиях локального экстремума функции, дифференцируемой в окрестности данной точки;

3.3. о достаточных условиях локального экстремума функции, дважды дифференцируемой в данной точке;

3.4. о необходимом условии перегиба графика функции, дважды непрерывно дифференцируемой в данной точке;

3.5. о достаточных условиях перегиба графика функции в данной точке, использующих вторую производную функции;

3.6. о достаточных условиях перегиба графика функции в данной точке, использующих третью производную функции.

3.7. Докажите, что если $f''(x)<0$ на интервале $(a;b)$, то график функции $y=f(x)$ на этом интервале направлен выпуклостью вверх.

3.8. Докажите, что если $f''(x)>0$ на интервале $(a;b)$, то график функции $y=f(x)$ на этом интервале направлен выпуклостью вниз.

4. **Вопросы и задачи.**

4.1. Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки $x=a$. Сформулируйте отрицание к определению «Точка $x=a$ называется точкой локального максимума (минимума) функции $f(x)$».

4.2. Найдите промежутки возрастания и убывания функции, точки локального экстремума, промежутки сохранения направления выпуклости, точки перегиба графика функции $f(x)$, асимптоты (если есть), а также нарисуйте эскиз графика функции $f(x)$:

4.2.1. $f(x)=x^3-6x^2+9$;

4.2.2. $f(x)=x\ln x$;

4.2.3. $f(x)=\sqrt{x}e^{-x}$;

4.2.4. $f(x)=x/(1-x^2)$.

4.3. Найдите наклонные асимптоты графика функции $f(x)$:

4.3.1. $f(x)=x\operatorname{arctg}x$;

4.3.2. $f(x)=x\ln\dfrac{x+1}{x}$;

4.3.3. $f(x)=x^2\ln\dfrac{x+1}{x}$;

4.3.4. $f(x)=\sqrt{x^2+x}$;

4.3.5. $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$;

4.3.6. $f(x)=x^2\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right)$.

4.4. Нарисуйте эскиз графика функции $f(x)=\int\limits_0^x (t-2)^3(t-4)^2\,dt$.

4.5. Материальная точка движется по плоскости (x,y), зависимость координат от времени выражается формулами $x=\cos\dfrac{t}{2}$, $y=\sin\dfrac{t}{2}$. Нарисуйте траекторию движения материальной точки на плоскости *xOy*.

4.6. Материальная точка движется по плоскости (x, y), причем зависимость координат от времени выражается формулой $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $0 \le t \le 2\pi$. Нарисуйте траекторию движения материальной точки на плоскости *xOy*.

4.7. Перейдя к обобщённым полярным координатам, постройте кривую, заданную уравнением $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$.

4.8. Постройте кривую, заданную в полярной системе координат уравнением $\rho = \dfrac{5}{\varphi}$, $0 < \varphi < +\infty$.

4.9. Перейдя к полярным координатам, постройте кривую, заданную уравнением $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2xy$.

5. Задачи повышенной трудности.

5.1. Докажите, что если функция $f(x)$ определена и непрерывна на полупрямой $[0;+\infty)$ и её график имеет наклонную асимптоту при $x \to +\infty$, то $f(x)$ равномерно непрерывна на этой полупрямой.

5.2. Докажите, что если $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \ne 0$, то в точке x_0 функция $f(x)$ не имеет локального экстремума.

5.3. Докажите, что если $f''(x_0) = 0$, $f^{(4)}(x_0) = 0$, $f^{(5)}(x_0) \ne 0$, то в точке x_0 функция $f(x)$ не имеет локального экстремума.

5.4. Докажите, что если $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) = 0$, $f^{(4)}(x_0) < 0$, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет строгий локальный максимум.

5.5. Докажите, что если $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \ne 0$, то найдется такая окрестность точки x_0, в которой уравнение $f(x) = f(x_0)$ имеет единственное решение $x = x_0$.

5.6. Докажите, что если $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \ne 0$, то найдется такая окрестность точки x_0, в которой уравнение $f(x) = f(x_0)$ имеет единственное решение $x = x_0$.

5.7. Докажите, что если $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) = 0$, $f^{(4)}(x_0) \ne 0$, то найдется такая окрестность точки x_0, в которой уравнение $f(x) = f(x_0)$ имеет единственное решение $x = x_0$.

5.8. Докажите, что если $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) = 0$, $f^{(4)}(x_0) = 0$, $f^{(5)}(x_0) \ne 0$, то найдется такая окрестность точки x_0, в которой уравнение $f(x) = f(x_0)$ имеет единственное решение $x = x_0$.