МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В. Ломоносова

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ

В.Ф. Бутузов, М.В. Бутузова

ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРОВ

Учебное пособие

Москва
2016

Предисловие

Учебное пособие предназначено как для студентов, так и для преподавателей, ведущих семинарские занятия по математическому анализу. Его содержание относится к разделу «Интегралы, зависящие от параметров», не вошедшему в известное учебное пособие «Математический анализ в вопросах и задачах» (авторы: В.Ф. Бутузов, Н.Ч. Крутицкая, Г.Н. Медведев, А.А. Шишкин). Структура данного пособия такая же, как и структура глав в упомянутом учебном пособии. Каждый параграф разбит на четыре пункта: «Основные понятия и теоремы», гда даются определения и приводятся (без доказательства) основные теоремы; «Контрольные вопросы и задания», способствующие усвоению основных понятий; «Примеры решения задач» (начало и конец решения каждой задачи отмечены знаками $\triangle$ и $\blacktriangle$) и «Задачи и упражнения для самостоятельной работы» (в конце пособия приведены ответы и указания к задачам этих пунктов).

Авторы признательны Е.А. Михайловой за компьютерный набор текста пособия.

Рекомендовано Советом отделения прикладной математики в качестве пособия для студентов физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова, обучающихся по направлениям «физика» и «астрономия».

§1. Собственные интегралы, зависящие от параметров

Основные понятия и теоремы

Пусть функция $f(x,y)$ определена в прямоугольнике

$$Q = \{(x,y) : a \le x \le b, \ \ c \le y \le d\}$$

и интегрируема по x на сегменте $[a,b]$ при каждом значении y из сегмента $[c,d]$. Тогда

$$F(y) = \int_a^b f(x,y)dx$$

является функцией аргуменета y, определённой на сегменте $[c,d]$. Функция $F(y)$ называется *собственным интегралом, зависящим от параметра y.*

Аналогично можно определить собственный интеграл, зависящий от двух (и более) параметров, например,

$$F(y,z) = \int_a^b f(x,y,z)dx.$$

Теорема 1 (о непрерывности по параметру). *Если функция $f(x,y)$ непрерывна в прямоугольнике Q, то функция $F(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ непрерывна на сегменте $[c,d]$.*

Теорема 1' (обобщение теоремы 1). *Пусть непрерывные функции $x_1(y)$ и $x_2(y)$ определены на сегменте $[c,d]$ и удовлетворяют неравенству*

$$x_1(y) \le x_2(y), \ \ c \le y \le d,$$

и пусть функция $f(x,y)$ определена и непрерывна в области

$$D = \{(x,y) : \ \ x_1(y) \le x \le x_2(y), \ \ c \le y \le d\}.$$

Тогда функция

$$g(y) = \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$$

определена и непрерывна на сегменте $[c,d]$.

Теорема 2 (об интегрировании по параметру). *Если функция $f(x,y)$ непрерывна в прямоугольнике*

$$Q = \{(x,y) : \ \ a \le x \le b, \ \ c \le y \le d\},$$

то функция $F(y) = \int_a^b (x,y)dx$ интегрируема на сегменте $[c,d]$, и справедливо равенство

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right] dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right] dx$$

(в таком случае говорят, что в повторном интеграле *можно изменить порядок интегрирования.*

Теорема 3 (о дифференцировании по параметру). *Пусть функция $f(x,y)$ и её частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ непрерывны в прямоугольнике $Q = \{(x,y) : a \le x \le b, \ \ c \le y \le d\}$. Тогда функция $F(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ имеет на сегменте $[c,d]$ непрерывную производную $F'(y)$ и справедливо равенство*

$$F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx,$$

т.е.

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$$

(в таком случае говорят, что зависящий от параметра y интеграл $F(y)$ *можно дифференцировать по параметру под знаком интеграла).*

Теорема 3' (обобщение теоремы 3). *Пусть выполнены условия теоремы 3, и пусть $x_1(y)$ и $x_2(y)$ - дифференцируемые на сегменте $[c,d]$ функции, удовлетворяющие неравенствам*

$$a \le x_1(y) \le x_2(y) \le b, \quad c \le y \le d.$$

Тогда функция $g(y) = \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$ дифференцируема на сегменте $[c,d]$ и справедливо равенство

$$g'(y) = \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx + f(x_2(y),y)\cdot x_2'(y) - \\ - f(x_1(y),y)x_1'(y), \quad c \le y \le d. \tag{1}$$

Контрольные вопросы и задания

1. Объясните, какие интегралы называются собственными интегралами, зависящими от параметров. Какие из указанных ниже интегралов относятся к этому типу интегралов:

$$\text{а)} \int_0^1 e^{xy}dx, \quad -1 \le y \le 1; \quad \text{б)} \int_0^\infty e^{-xy}dx, \quad 0 \le y \le 1;$$

$$\text{в)} \int_{y^2}^{y} \sin(xy)dx, \quad 0 \le y \le 1; \quad \text{г)} \int_0^1 x^{y-1}(1-x)^{z-1}dx, \quad y \ge 1, \quad z \ge 1;$$

$$\text{д)} \int_0^1 x^{y-1}(1-x)^{z-1}dx, \quad y > 0, \quad z > 0.$$

2. Сформулируйте теорему о непрерывности по параметру интеграла $F(y) = \int_a^b f(x,y)dx$, $c \le y \le d$. Докажите, приведя соответствующий пример, что непрерывность функции $f(x,y)$ является только достаточным, но не необходимым условием непрерывности $F(y)$.

3. Сформулируйте теорему о непрерывности по параметру интеграла

$$g(y) = \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx, \quad c \le y \le d.$$

4. Сформулируйте теорему об интегрировании по параметру для интеграла $F(y) = \int_a^b f(x,y)dx$, $c \le y \le d$. Можно ли изменить порядок интегрирования в интеграле $\int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right] dy$, если

$$f(x,y) = \begin{cases} -1, & a \le x \le \frac{a+b}{2}, \quad c \le y \le d, \\ +1, & \frac{a+b}{2} < x \le b, \quad c \le y \le d\,? \end{cases}$$

5. Сформулируйте теорему о дифференцировании по параметру интеграла

$$F(y) = \int_a^b f(x,y)dx, \;\; c \le y \le d.$$

6. Сформулируйте теорему о дифференцировании по параметру интеграла

$$g(y) = \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx, \;\; c \le y \le d.$$

Примеры решения задач

1. Найти предел

$$\lim_{y\to 0} \int_0^1 \sqrt[3]{x^3+y^2}dx.$$

$\triangle$ Введём обозначение

$$F(y) = \int_0^1 \sqrt[3]{x^3+y^2}dx.$$

Подынтегральная функция $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^2}$ непрерывна в прямоугольнике $Q = \{(x,y): \;\; 0 \le x \le 1, \;\; -\delta \le y \le \delta\}$, где δ - любое положительное число. Следовательно, по теореме 1 функция $F(y)$ непрерывна на сегменте $-\delta \le y \le \delta$. Поэтому

$$\lim_{y\to 0} F(y) = F(0) = \int_0^1 \sqrt[3]{x^3}dx = \int_0^1 xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}. \;\; \blacktriangle$$

2. Доказать, что в повторном интеграле

$$I = \int_0^1 \left[\int_0^1 xe^{-xy}dx\right] dy$$

можно изменить порядок интегрирования, и вычислить интеграл I.

$\triangle$ Подынтегральная функция

$$f(x,y) = xe^{-xy}$$

непрерывна в квадрате

$$Q = \{(x,y) : 0 \le x \le 1, \;\; 0 \le y \le 1\}.$$

Поэтому, согласно теореме 2, можно изменить порядок интегрирования в интеграле I. В результате получаем:

$$I = \int_0^1 \left[\int_0^1 xe^{-xy}dy\right] dx = \int_0^1 \left[-e^{-xy}\Big|_{y=0}^{y=1}\right] dx =$$

$$= \int_0^1 (1-e^{-x})dx = (x+e^{-x})\Big|_0^1 = (1+e^{-1}) - 1 = \frac{1}{e}. \;\; \blacktriangle$$

3. Доказать, что функция

$$g(y) = \int_0^y (x^2+y)\varphi(x)dx$$

дифференцируема при $y \ge 0$, если $\varphi(x)$ - непрерывная функция при $x \ge 0$, и найти $g'(0)$.

△ Для произвольного $y \geq 0$ возьмём число a, такое, что $a > y$, и рассмотрим подынтегральную функцию

$$f(x,y) = (x^2 + y)\varphi(x)$$

в квадрате $Q = \{(x,y) : 0 \leq x \leq a,\ \ 0 \leq y \leq a\}$. Очевидно, что $f(x,y)$ и $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \varphi(x)$ непрерывны в квадрате Q, а функции $x_1(y) = 0$ и $x_2(y) = y$ дифференцируемы на сегменте $0 \leq y \leq a$. Следовательно, по теореме 3' функция $g(y)$ дифференцируема на сегменте $[0,a]$, и, значит, в силу произвольности a, дифференцируема при $y \geq 0$. По формуле (1) получаем:

$$g'(y) = \int_0^y \varphi(x)dx + (y^2 + y)\varphi(y),\ \ 0 \leq y \leq a.$$

Положив $y = 0$, находим: $g'(0) = 0$. ▲

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

1. Найдите пределы:

$$\text{а)}\ \lim_{y\to 0}\int_0^1 x^2 e^{xy}dx;\ \ \text{б)}\ \lim_{y\to 0}\int_y^{1-y}\frac{dx}{1+x^2+y^2};$$

$$\text{в)}\ \lim_{y\to 0}\int_0^1 \frac{dx}{x+y+\sqrt{x^2+y^2+1}}.$$

2. Докажите теорему 1', используя данное ниже указание.

Указание. Продолжить функцию $f(x,y)$ на прямоугольник

$$Q = \{(x,y) : a \leq x \leq b,\ \ c \leq y \leq d\},$$

где $a = \min\limits_{y\in[c,d]} x_1(y)$, $b = \max\limits_{y\in[c,d]} x_2(y)$, следующим образом: ввести функцию

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x_1(y),y), & a \leq x \leq x_1(y),\ \ c \leq y \leq d, \\ f(x,y), & (x,y) \in D, \\ f(x_2(y),y), & x_2(y) \leq x \leq b, c \leq y \leq d, \end{cases}$$

а затем применить к функции $\tilde{f}(x,y)$ теорему 1.

3. Вычислите интеграл

$$\int_0^1 F(y)dy,$$

где

$$F(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos(xy)dx,$$

изменив порядок интегрирования, и обоснуйте правомерность этого способа вычисления.

4. Докажите, что функция $F(y)$ дифференцируема, и найдите $F'(y)$, если:

$$\text{а)}\ F(y) = \int_y^{y^2} e^{-x^2}dx,\ \ y > 1;\ \ \text{б)}\ F(y) = \int_0^y \frac{\sin xy}{x}dx,\ \ y > 0;$$

$$\text{в)}\ F(y) = \int_0^{y^2}\frac{\ln(1+xy)}{x}dx,\ \ y > 0.$$

§2. Несобственные интегралы, зависящие от параметров

Основные понятия и теоремы

1. Равномерная сходимость несобственных интегралов первого рода, зависящих от параметра. Пусть функция $f(x, y)$ определена в полуполосе $\{(x, y) : x \geq a,\ \ c \leq y \leq d\}$, и пусть для каждого значения y из сегмента $[c, d]$ сходится несобственный интеграл первого рода $\int_a^\infty f(x, y)dx$. Тогда на сегменте $[c, d]$ определена функция

$$F(y) = \int_a^\infty f(x, y)dx,$$

которая называется *несобственным интегралом первого рода, зависящим от параметра y.*

Замечание 1. Параметр y может изменяться не на сегменте, а на полупрямой ($y \geq c$ или $y \leq c$), или на всей числовой прямой ($-\infty < y < +\infty$), или на каком-то другом множестве.

Замечание 2. Аналогично определяются несобственные интегралы вида $\int_{-\infty}^a f(x, y)dx$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dx$, зависящие от параметра y.

Пусть несобственный интеграл $\int_a^\infty f(x, y)dx$ сходится для любого y из промежутка Y. Это означает, что $\forall\ y \in Y$ существует предел

$$\lim_{A\to\infty} \int_a^A f(x, y)dx,$$

т.е. $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists A > a$, такое, что $\forall\ A' > A$ выполняется неравенство

$$\left|\int_a^\infty f(x, y)dx - \int_a^{A'} f(x, y)dx\right| < \varepsilon$$

или, что то же самое,

$$\left|\int_{A'}^\infty f(x, y)dx\right| < \varepsilon. \tag{1}$$

При этом число A может зависеть не только от ε, но и от y, и может случиться так, что для некоторого ε не существует общего для всех $y \in Y$ числа A, такого, что $\forall\ y \in Y$ и $\forall\ A' > A$ выполнено неравенство (1).

Если же найдётся общее для всех $y \in Y$ число A, то будем говорить, что несобственный интеграл $\int_a^\infty f(x, y)dx$ *сходится равномерно по параметру y на промежутке Y*. Иными словами, мы вводим следующее определение.

Определение. Несобственный интеграл $\int_a^\infty f(x, y)dx$ называется *сходящимся равномерно по параметру y* на промежутке Y, если он сходится $\forall\ y \in Y$, и если $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists A(A \geq a)$, такое, что $\forall\ A' > A$ и $\forall\ y \in Y$ выполняется неравенство (1).

Подчеркнём ещё раз, что главным моментом в этом определении является то, что для любого заданного ε найдётся «нужное» A, **одно и то же для всех y** из промежутка Y. Термин «равномерно сходится» означает равномерность (одинаковость) по отношению ко всем значениям параметра y из промежутка Y - неравенство (1) выполняется для всех $y \in Y$, если $A' > A$, где A - одно и то же число для всех $y \in Y$.

2. Признаки равномерной сходимости несобственных интегралов первого рода, зависящих от параметра.

Теорема 4 (критерий Коши равномерной сходимости несобственного интеграла первого рода, зависящего от параметра). *Пусть несобственный интеграл* $\int_a^\infty f(x,y)dx$ *сходится при каждом* y *из промежутка* Y. *Для того, чтобы этот интеграл сходился равномерно по параметру* y *на промежутке* Y, *необходимо и достаточно, чтобы было выполнено следующее условие (условие Коши):* $\forall\ \varepsilon > 0$ $\exists A > a$, *такое, что* $\forall\ A' > A$, $\forall\ A'' > A$ *и* $\forall\ y \in Y$ *выполняется неравенство*

$$\left| \int_{A'}^{A''} f(x,y)dx \right| < \varepsilon.$$

Заметим, что если выполнено сформулированное условие Коши, то для любого фиксированного значения y из промежутка Y выполнено условие Коши, гарантирующее сходимость несобственного интеграла $\int_a^\infty f(x,y)dx$ при этом значении y. Главным моментом в теореме 4 снова является тот факт, что число A - одно и то же для всех $y \in Y$.

Теорема 5 (мажорантный признак Вейерштрасса). *Пусть функция* $f(z,y)$ *определена в области*

$$D = \{(x,y) : x \geq a, \ \ y \in Y, \ \ \text{где} \ \ Y - \ \ \text{некоторый промежуток}\};$$

$\forall\ y \in Y$ *функция* $f(x,y)$ *интегрируема по* x *на любом сегменте вида* $[a \leq x \leq A]$*; в области* D *выполняется неравенство* $|f(x,y)| \leq g(x)$, *где* $g(x)$ *- такая функция, что интеграл* $\int_a^\infty g(x)dx$ *сходится. Тогда несобственные интегралы*

$$\int_a^\infty f(x,y)dx \ \ \text{и} \ \ \int_a^\infty |f(x,y)|dx$$

сходятся равномерно по параметру y *на промежутке* Y.

Функция $g(x)$ называется *мажорантой* для функции $f(x,y)$ в области D.

Теорема 6 (признак Дирихле - Абеля). *Пусть функции* $f(x,y)$ *и* $g(x,y)$ *определены в области* $D = \{(x,y) : \ \ x \geq a, \ \ y \in Y, \ \ \text{где} \ \ Y - \ \ \text{некоторый промежуток}\}$ *и удовлетворяют условиям:*

1) функция $f(x,y)$ *непрерывна в области* D *и имеет в этой области ограниченную первообразную* $F(x,y)$ *по переменной* x

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = f(x,y), \ \ |F(x,y)| \leq M = const, \ \ (x,y) \in D \right);$$

2) функция $g(x,y)$ *при каждом значении* y *из промежутка* Y *является монотонной функцией аргумента* x *на полупрямой* $[a, +\infty)$, *и* $g(x,y)$ *стремится к нулю при* $x \to +\infty$ *равномерно относительно* $y \in Y$.

Тогда несобственный интеграл

$$\int_a^\infty f(x,y)g(x,y)dx$$

сходится равномерно по параметру y *на промежутке* Y.

3. Непрерывность, интегрирование и дифференцирование по параметру несобственных интегралов первого рода, зависящих от параметра.

Теорема 7 (о непрерывности по параметру). *Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна в полуполосе $\{(x,y): \ x \geq a, \ c \leq y \leq d\}$, и пусть несобственный интеграл*

$$F(y) = \int_a^\infty f(x,y)dx$$

сходится равномерно по параметру y на сегменте $[c,d]$.

Тогда функция $F(y)$ непрерывна на сегменте $[c,d]$.

Следствие. *Если функция $f(x,y)$ непрерывна в области*

$$D = \{(x,y): \ x \geq a, \ y \in Y, \ \text{где } Y - \ \text{некоторый промежуток}\},$$

и интеграл $F(y) = \int_a^\infty f(x,y)dx$ сходится равномерно по параметру y на промежутке Y (либо на любом сегменте $[c,d] \subset Y$), то функция $F(y)$ непрерывна на промежутке Y.

Теорема 8 (об интегрировании по параметру). *Если выполнены условия теоремы 7, то функция $F(y) = \int_a^\infty f(x,y)dx$ интегрируема на сегменте $[c,d]$, и справедливо равенство*

$$\int_c^d \left[\int_a^\infty f(x,y)dx\right] dy = \int_a^\infty \left[\int_c^d f(x,y)dy\right] dx,$$

т.е. можно изменять порядок интегрирования.

Теорема 9 (об изменении порядка интегрирования в случае бесконечных промежутков по обеим переменным).
Пусть:
1) функция $f(x,y)$ непрерывна и неотрицательна в области

$$D = \{(x,y): x \geq a, \ y \geq c\};$$

2) $\forall \ y \in [c,+\infty)$ интеграл $\int_a^\infty f(x,y)dx$ сходится к функции $g(y)$, непрерывной на полупрямой $[c,+\infty)$;
3) $\forall \ x \in [a,+\infty)$ интеграл $\int_c^\infty f(x,y)dy$ сходится к функции $h(x)$, непрерывной на полупрямой $[a,+\infty)$.

Тогда интегралы

$$\int_c^\infty g(y)dy \ \ \text{и} \ \ \int_a^\infty h(x)dx$$

сходятся или расходятся одновременно, и в случае сходимости они равны, т.е.

$$\int_c^\infty \left[\int_a^\infty f(x,y)dx\right] dy = \int_a^\infty \left[\int_c^\infty f(x,y)dy\right] dx.$$

Замечание. Если функция $f(x,y)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 9, кроме условия $f(x,y) \geq 0$, и существует функция $\tilde{f}(x,y)$, удовлетворяющая всем условиям теоремы 9 и неравенству $\tilde{f}(x,y) \geq |f(x,y)|$ в области D, то утверждение теоремы 9 имеет место не только для функции $\tilde{f}(x,y)$, но и для функции $f(x,y)$.

Теорема 10 (о дифференцировании по параметру). *Пусть:*
1) функция $f(x,y)$ и её частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ непрерывны в полуполосе $\{(x,y):$

$x \geq a, \ \ c \leq y \leq d\}$;
2) несобственный интеграл

$$F(y) = \int_a^{\infty} f(x,y)dx$$

сходится $\forall \ \ y \in [c,d]$;
3) несобственный интеграл

$$\int_a^{\infty} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$$

сходится равномерно по параметру y на сегменте $[c,d]$.

Тогда функция $F(y)$ дифференцируема на сегменте $[c,d]$, и справедливо равенство

$$F'(y) = \int_a^{\infty} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx,$$

или (что то же самое)

$$\frac{d}{dy}\int_a^{\infty} f(x,y)dx = \int_a^{\infty} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx,$$

т.е. несобственный интеграл $\int_a^{\infty} f(x,y)dx$ можно дифференцировать по параметру под знаком интеграла.

4. О несобственных интегралах второго рода, зависящих от параметра. Пусть функция $f(x,y)$ определена в области $\{(x,y): \ \ a < x \leq b, \ \ y \in Y, \ \ \text{где } Y-$ некоторый промежуток$\}$ и пусть при каждом $y \in Y$ точка $x = a$ является единственной особой точкой функции $f(x,y)$ на сегменте $[a,b]$. Пусть для каждого $y \in Y$ несобственный интеграл $\int_a^b f(x,y)dx$ сходится. Тогда на промежутке Y определена функция

$$F(y) = \int_a^b f(x,y)dx,$$

которая называется *несобственным интегралом второго рода, зависящим от параметра y.*

Аналогично определяется несобственный интеграл второго рода $\int_a^b f(x,y)dx$, зависящий от параметра y, если единственной особой точкой функции $f(x,y)$ при каждом $y \in Y$ является точка $x = b$.

Пусть $\int_a^b f(x,y)dx$ - несобственный интеграл по полусегменту $(a,b]$, $y \in Y$.

Определение. Несобственный интеграл $\int_a^b f(x,y)dx$ называется *сходящимся равномерно по параметру y* на промежутке Y, если он сходится для каждого $y \in Y$, и если $\forall \ \ \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$, такое, что $\forall \ \ \delta' \in (0,\delta)$ и $\forall \ \ y \in Y$ выполняется неравенство

$$\left| \int_a^{a+\delta'} f(x,y)dx \right| < \varepsilon.$$

Главным моментом в этом определении является то, что δ - одно и то же число для всех $y \in Y$.

Для несобственных интегралов второго рода, зависящих от параметра, имеют место теоремы о признаках равномерной сходимости и теоремы о непрерывности, интегрировании и дифференцировании по параметру, аналогичные соответствующим теоремам для несобственных интегралов первого рода, зависящих от параметра. Приведём в качестве примера теорему о критерии Коши.

Теорема 11 (критерий Коши равномерной сходимости несобственного интеграла второго рода, зависящего от параметра). *Пусть несобственный интеграл $\int_a^b f(x,y)dx$ по полусегменту $(a,b]$ сходится при каждом y из промежутка Y. Для того, чтобы этот интеграл сходился равномерно по параметру y на промежутке Y, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено следующее условие (условие Коши): $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, такое, что $\forall\ \delta' \in (0,\delta)$, $\forall\ \delta'' \in (0,\delta)$ и $\forall\ y \in Y$ выполняется неравенство*

$$\left| \int_{a+\delta'}^{a+\delta''} f(x,y)dx \right| < \varepsilon.$$

5. Эйлеровы интегралы. Под этим названием в математическом анализе выступают два интеграла, зависящие от параметров:

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx - \ \text{«гамма - функция» аргумента } p,$$

она определена данной формулой на полупрямой $p > 0$, так как интеграл сходится $\forall\ p > 0$ и расходится $\forall\ p \leq 0$;

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx - \ \text{«бета - функция» аргументов } p \text{ и } q.$$

Точки $x = 0$ и $x = 1$ являются особыми точками подынтегральной функции соответственно при $p < 1$ и $q < 1$, интеграл сходится при $\{0 < p < 1,\ q > 0\}$ и $\{p \geq 1,\ 0 < q < 1\}$, а при $\{p \geq 1,\ q \geq 1\}$ интеграл является собственным. Таким образом, B - функция определена данной формулой в квадранте $\{p > 0,\ q > 0\}$.

Основные формулы для эйлеровых интегралов:

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)\ \ \forall\ p > 0\ \ (\textit{формула приведения}),$$

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}\ \ \forall\ p \in (0;1)\ \ (\textit{формула дополнения}),$$

$$B(p,q) = B(q,p) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\ \ \forall\ p > 0 \text{ и } \forall\ q > 0,$$

$$B(p,q) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}dx \tag{2}$$

(представление B - функции в виде интеграла по полупрямой).

Контрольные вопросы и задания.

1. Объясните, какой интеграл называется несобственным интегралом первого рода, зависящим от параметра. Приведите пример такого интеграла.

2. Сформулируйте определение равномерно сходящегося по параметру несобственного интеграла первого рода. Приведите пример несобственного интеграла первого рода, который сходится неравномерно по параметру на некотором промежутке изменения параметра, но сходится равномерно на части этого промежутка.

3. Сформулируйте: а) теорему о критерии Коши равномерной сходимости несобственного интеграла первого рода, зависящего от параметра; б) утверждение о том, что условие Коши, фигурирующее в этой теореме, не выполнено.

4. Сформулируйте теорему о мажорантном признаке Вейерштрасса равномерной сходимости несобственного интеграла первого рода, зависящего от параметра. Придумайте пример такой функции $f(x, y)$, которая не имеет мажоранты в области $D = \{(x, y) : \ \ x \geq a, \ \ y \in Y\}$, но интеграл $\int_a^\infty f(x, y)dx$ сходится равномерно по параметру y на множестве Y.

5. Сформулируйте теорему о признаке Дирихле - Абеля равномерной сходимости по параметру y несобственного интеграла $\int_a^\infty f(x, y)g(x, y)dx$. Придумайте пример функций $f(x, y)$ и $g(x, y)$, таких, что функция $f(x, y)$ удовлетворяет условию 1) теоремы 6, а функция $g(x, y)$ для любого $y \in Y$ монотонно стремится к нулю при $x \to +\infty$, но это стремление к нулю не является равномерным относительно $y \in Y$, и в результате этого интеграл $\int_a^\infty f(x, y)g(x, y)dx$ сходится неравномерно по параметру y на промежутке Y.

6. Сформулируйте теорему о непрерывности по параметру y несобственного интеграла $F(y) = \int_a^\infty f(x, y)dx$. Придумайте пример непрерывной функции $f(x, y)$, такой, что интеграл $\int_a^\infty f(x, y)dx$ сходится неравномерно по параметру y на сегменте $[c, d]$, и в результате функция $F(y)$ не является непрерывной на этом сегменте.

7. Сформулируйте теорему об интегрировании по параметру интеграла

$$F(y) = \int_0^\infty f(x, y)dx.$$

8. Сформулируйте теорему об изменении порядка интегрирования в интеграле

$$\int_c^\infty \left[\int_a^\infty f(x, y)dx\right] dy.$$

9. Сформулируйте теорему о дифференцировании по параметру интеграла

$$F(y) = \int_a^\infty f(x, y)dx.$$

10. Объясните, какой интеграл называется несобственным интегралом второго рода, зависящим от параметра. Приведите пример такого интеграла.

11. Сформулируйте определение равномерно сходящегося по параметру несобственного интеграла второго рода. Приведите пример такого интеграла.

12. Сформулируйте определение неравномерной сходимости по параметру несобственного интеграла второго рода (т.е. отрицание равномерной сходимости). Приведите пример несобственного интеграла второго рода, сходящегося неравномерно на некотором промежутке изменения параметра.

13. Сформулируйте: а) теорему о критерии Коши равномерной сходимости несобственного интеграла второго рода, зависящего от параметра; б) утверждение о том, что условие Коши, фигурирующее в этой теореме, не выполнено.

14. Для несобственного интеграла второго рода, зависящего от параметра, сформулируйте теорему, аналогичную:
а) теореме 5 (о мажорантном признаке Вейерштрасса);
б) теореме 7 (о непрерывности по параметру);
в) теореме 8 (об интегрировании по параметру);
г) теореме 10 (о дифференцировании по параметру).

15. Что такое эйлеровы интегралы Γ - функция и B - функция? Укажите их области определения.

16. Напишите: формулу приведения и формулу дополнения для Γ - функции; формулу, выражающую B - функцию через Γ - функцию; выражение для B - функции в виде интеграла по полупрямой.

Примеры решения задач

1. Исследовать интеграл

$$F(y) = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^y}$$

на равномерную сходимость по параметру y на полупрямой: а) $y \geq b$, где $b > 1$; б) $y > 1$.

$\triangle$ Прежде всего отметим, что эталонный интеграл $F(y)$ сходится $\forall\ y > 1$ и расходится $\forall\ y \leq 1$, т.е. функция $F(y)$ определена на полупрямой $y > 1$.
Докажем, что на полупрямой $y \geq b$, где $b > 1$, интеграл $F(y)$ сходитя равномерно по параметру y. Сделаем это двумя способами.

1-й способ. Воспользуемся определением равномерной сходимости. Согласно этому определению нужно доказать, что $\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists A > 1$, такое, что $\forall\ A' > A$ и $\forall\ y \geq b$ выполняется неравенство

$$\left| \int_{A'}^{\infty} \frac{dx}{x^y} \right| < \varepsilon,$$

а поскольку

$$\left| \int_{A'}^{\infty} \frac{dx}{x^y} \right| = \frac{(A')^{1-y}}{y-1},$$

то это неравенство принимает вид

$$\frac{(A')^{1-y}}{y-1} < \varepsilon. \tag{3}$$

Так как $y \geq b > 1$, то $1 - y \leq 1 - b < 0$, поэтому для $A' > A > 1$ справедливо неравенство

$$\frac{(A')^{1-y}}{y-1} < \frac{A^{1-b}}{b-1}. \tag{4}$$

Правая часть неравенства (4) стремится к нулю при $A \to \infty$, и, следовательно, для заданного $\varepsilon > 0$ существует $A > 1$, такое, что

$$\frac{A^{1-b}}{b-1} < \varepsilon. \tag{5}$$

Отсюда в силу неравенства (4) следует, что $\forall\ A' > A$ и $\forall\ y > b$ будет выполнено неравенство (3), что и доказывает равномерную сходимость интеграла $F(y)$ по параметру y на полупрямой $y \geq b > 1$.

2-й способ. Применим к интегралу $F(y)$ на полупрямой $y \geq b > 1$ мажорантный признак Вейерштрасса (теорема 5). В качестве мажоранты для функции $f(x, y) = \frac{1}{x^y}$ в области $D = \{(x, y) :\ \ x \geq 1,\ \ y \geq b > 1\}$ возьмём функцию

$$g(x) = \frac{1}{x^b}.$$

Так как $|f(x)| = \frac{1}{x^y} \leq \frac{1}{x^b}$ в области D, и интеграл $\int_1^{\infty} g(x)dx = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^b}$ сходится при $b > 1$, то по теореме 5 интеграл $F(y)$ сходится равномерно по параметру y на полупрямой $y \geq b > 1$.

б) Докажем теперь, что на полупрямой $y > 1$ интеграл $F(y)$ сходится неравномерно по параметру y. С этой целью воспользуемся утверждением о неравномерной сходимости интеграла $F(y)$, которое получается как отрицание определения равномерной сходимости: интеграл $F(y)$ сходится неравномерно по параметру y на полупрямой $y > 1$, если существует $\varepsilon > 0$, такое, что для любого $A > 1$ найдутся числа $A' > A$ и $y > 1$, для которых выполняется неравенство

$$\left|\int_{A'}^{\infty} \frac{dx}{x^y}\right| = \frac{(A')^{1-y}}{1-y} \geq \varepsilon. \tag{6}$$

Положим $\varepsilon = 1$ и $\forall\ A > 1$ возьмём какое-нибедь $A' > A$. Если $y \to 1+0$ (т.е. $y > 1$ и $y \to 1$), то $(A')^{1-y} \to 1$, а $1 - y \to +0$, поэтому $\frac{(A')^{1-y}}{1-y} \to +\infty$, и, следовательно, найдётся такое $y > 1$, для которого будет выполнено неравенство $\frac{(A')^{1-y}}{1-y} > \varepsilon = 1$, т.е. будет выполнено неравенство (6), и, значит, интеграл $F(y)$ сходится неравномерно по параметру y на полупрямой $y > 1$. ▲

Замечание 1. Обратим внимание на следующий факт, связанный с рассмотренным примером: полупрямая $y > 1$ является объединением всех полупрямых вида $y \geq b > 1$, на каждой из которых интеграл $F(y)$ сходится равномерно по параметру y, но на объединении всех таких полупрямых (т.е. на полупрямой $y > 1$) интеграл $F(y)$ сходится неравномерно. Нетрудно понять, почему так получилось: чтобы обеспечить $\forall\ A' > A$ и $\forall\ y \geq b$ выполнение неравенства (3), мы выбирали число A так, чтобы для данного $b > 1$ выполнялось неравенство (5). Но чем ближе число b к 1, тем больше будет число A, для которого выполняется неравенство (5), т.е. $A = A(b)$ и $A(b) \to \infty$ при $b \to 1+0$. Таким образом, хотя для каждого $b > 1$ существует «нужное» A (т.е. удовлетворяющее неравенству (5)), однако нет общего (одного и того же) числа A для всех $b > 1$, и поэтому интеграл $F(y)$ сходится неравномерно по параметру y на полупрямой $y > 1$.

Замечание 2. Очевидно, что если интеграл $\int_a^\infty f(x,y)dx$ сходится равномерно по параметру y на конечном числе множеств: $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, то он сходится равномерно и на объединении этих множеств, а если указанный интеграл сходится $\forall y \in Y$, но при этом сходится неравномерно на каком-то подмножестве множества Y, то он сходится неравномерно и на всём множестве Y.

2. Доказать, что несобственный интеграл

$$\int_0^\infty ye^{-xy}dx \tag{7}$$

сходится для любого $y \geq 0$ и при этом:
а) сходится равномерно по параметру y на полупрямой $\delta \leq y < +\infty$, где δ - любое положительное число;
б) сходится неравномерно по параметру y на полупрямых $y > 0$ и $y \geq 0$.

△ Прежде всего докажем, что интеграл (7) сходится $\forall\ y \geq 0$.

При $y = 0$ подынтегральная функция

$$f(x,y) = ye^{-xy}$$

равна нулю во всех точках полупрямой $0 \leq x < +\infty$, поэтому интеграл (7) сходится и равен нулю.

Если $y > 0$, то

$$\lim_{A\to+\infty} \int_0^A ye^{-xy}dx = \lim_{A\to+\infty} \left(-e^{-xy}\Big|_{x=0}^{x=A} \right) =$$

$$= \lim_{A\to+\infty}\left(1-e^{-Ay}\right) = 1,$$

и, значит, интеграл (7) сходится и равен 1 для любого $y > 0$.

Таким образом,

$$F(y) := \int_0^\infty ye^{-xy}dx = \begin{cases} 0, & y = 0, \\ 1, & y > 0. \end{cases} \tag{8}$$

а) Докажем теперь, что интеграл $F(y)$ сходится равномерно по параметру y на любой полупрямой $[\delta \le y < +\infty)$, где $\delta > 0$. Сделаем это двумя способами.

1-й способ. Воспользуемся определением равномерной сходимости, в соответствии с которым нужно доказать, что $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists A > 0$, такое, что $\forall\ A' > A$ и $\forall\ y \in [\delta, +\infty)$ выполняется неравенство

$$\left|\int_{A'}^\infty f(x,y)dx\right| < \varepsilon. \tag{9}$$

Так как в данном примере $|\int_{A'}^\infty f(x,y)dx| = \int_{A'}^\infty ye^{-xy}dx = e^{-A'y}$, то неравенство (9) принимает вид

$$e^{-A'y} < \varepsilon. \tag{10}$$

Если $\varepsilon \ge 1$, то неравенство (10) выполняется $\forall\ A' > 0$ и $\forall\ y \in [\delta, +\infty)$, и, значит, в качестве A можно взять любое положительное число, а если $\varepsilon < 1$, то возьмём $A = -\frac{\ln\varepsilon}{\delta}$ (заметим, что выбранное A не зависит от y). Тогда $\forall\ A' > A$ и $\forall\ y \in [\delta, +\infty)$ получаем:

$$e^{-A'y} < e^{-A\delta} = e^{\ln\varepsilon} = \varepsilon,$$

т.е. неравенство (10) выполнено $\forall\ A' > A$ и $\forall\ y \in [\delta, +\infty)$, а это и означает, что интеграл $F(y)$ сходится равномерно по параметру y на любой полупрямой $[\delta, +\infty)$, где $\delta > 0$.

2-й способ. Докажем, что интеграл $F(y)$ сходится равномерно по параметру y на полупрямой $[\delta \le y < +\infty)$, где $\delta > 0$, с помощью мажорантного признака Вейерштрасса (теорема 5). С этой целью представим интеграл $F(y)$ в виде суммы двух слагаемых

$$F(y) = \int_0^1 ye^{-xy}dx + \int_1^\infty ye^{-xy}dx =: F_1(y) + F_2(y).$$

Функция $F_1(y) = \int_0^1 ye^{-xy}dx$ является собственным интегралом, зависящим от параметра y (она равна $1 - e^{-y}$), поэтому достаточно доказать, что равномерно на полупрямой $[\delta \le y < +\infty)$ сходится интеграл $F_2(y) = \int_1^\infty ye^{-xy}dx$.

Подынтегральную функцию представим в виде

$$f(x,y) = \left(ye^{-\frac{1}{2}xy}\right)e^{-\frac{1}{2}xy}.$$

В области $D = \{(x,y):\ \ 1 \le x < +\infty,\ \ \delta \le y < +\infty\}$ справедливы неравенства

$$ye^{-\frac{1}{2}xy} \le ye^{-\frac{1}{2}y} \le \max_{[0,+\infty)}(ye^{-\frac{1}{2}y}) = \frac{2}{e},\ \ e^{-\frac{1}{2}xy} \le e^{-\frac{\delta}{2}x},$$

поэтому

$$0 < f(x,y) \le e^{-\frac{\delta}{2}x},\ \ (x,y) \in D.$$

В качестве мажоранты для функции $f(x,y)$ в области D возьмём функцию $g(x) = e^{-\frac{\delta}{2}x}$. Так как интеграл $\int_1^\infty g(x)dx$ сходится (он равен $\frac{2}{\delta}e^{-\frac{\delta}{2}}$), то по признаку Вейерштрасса интеграл $F_2(y)$ сходится равномерно по параметру y на полупрямой $[\delta, +\infty)$, и, значит, интеграл $F(y)$ также сходится равномерно по параметру y на этой полупрямой.

б) Докажем теперь, что интеграл $F(y)$ сходится неравномерно по параметру y на полупрямых $y > 0$ и $y \geq 0$, причём для полупрямой $y \geq 0$ сделаем это двумя способвми.

1-й способ. Воспользуемся утверждением о неравномерной сходимости интеграла $F(y)$ на полупрямой $y > 0$, которое получается как отрицание равномерной сходимости: интеграл $F(y)$ сходится неравномерно по параметру y на полупрямой $y > 0$, если $\exists \varepsilon > 0$, такое, что для любого $A > 0$ найдутся числа $A' > A$ и $y \in (0, +\infty)$, для которых выполняется неравенство

$$\left| \int_{A'}^{\infty} f(x,y)dx \right| = e^{-A'y} \geq \varepsilon. \tag{11}$$

Положим $\varepsilon = \frac{1}{3}$ и $\forall \ A > 0$ возьмём какое-нибудь $A' > A$ и $y = \frac{1}{A'}$ (так как $A' > 0$, то $y = \frac{1}{A'} \in (0, +\infty)$). Для этого выбора чисел A' и y получаем:

$$e^{-A'y} = e^{-1} > \varepsilon = \frac{1}{3},$$

т.е. выполнено неравенство (11), и, следовательно, интеграл $F(y)$ сходится неравномерно по параметру y на полупрямой $y > 0$, а, значит, и на полупрямой $y \geq 0$, содержащей полупрямую $y > 0$.

2-й способ (для полупрямой $y \geq 0$). Так как функция $f(x,y) = ye^{-xy}$ непрерывна в области $D = \{(x,y) : \ \ x \geq 0, \ \ y \geq 0\}$, то, согласно следствию из теоремы 7, функция $F(y) = \int_0^{\infty} ye^{-xy}dx$ была бы непрерывной на полупрямой $y \geq 0$, если бы интеграл $F(y)$ сходился равномерно по параметру y на этой полупрямой. Но функция $F(y)$ разрывна в точке $y = 0$ (см. (8)), и, следовательно, интеграл $F(y)$ сходится неравномерно по параметру y на полупрямой $y \geq 0$. ▲

3. Доказать, что интеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin xy}{x} dx \tag{12}$$

сходится для любого y, и исследовать его на равномерную сходимость по параметру y на полупрямой: а) $y \geq b$, где $b > 0$; б) $y > 0$.

△ Сначала докажем, что интеграл (12) сходится $\forall \ \ y \in (-\infty, +\infty)$. При $y = 0$ подынтегральная функция равна нулю во всех точках полупрямой $1 \leq x < +\infty$, поэтому интеграл (12) сходится и равен нулю.

При $y > 0$ замена переменной $x = \frac{t}{y}$ переводит интеграл (12) в интеграл $\int_y^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$, который сходится по признаку Дирихле, что обеспечивает сходимость интеграла (12).

При $y < 0$ замена переменной $x = -\frac{t}{y}$ переводит интеграл (12) в сходящийся интеграл $-\int_{|y|}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

а) Докажем, что интеграл (12) сходится равномерно по параметру y на любой полупрямой $y \geq b$, где $b > 0$.

Положим

$$f(x,y) = \sin xy, \ \ g(x,y) = \frac{1}{x}$$

и воспользуемся признаком Дирихле - Абеля (теорема 6).

Функция $f(x,y) = \sin xy$ непрерывна в области $D = \{(x,y) : \ \ x \geq 1, \ \ y \geq b\}$ и имеет в этой области ограниченную первообразную по переменной x:

$$F(x,y) = -\frac{1}{y} \cos xy \quad \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \sin xy, \ \ |F(x,y) \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{b} \right),$$

т.е. $f(x,y)$ удовлетворяет условию 1) теоремы 6. Функция $g(x,y)=\frac{1}{x}$ является монотонной функцией на полупрямой $x\geq 1$ и стремится к нулю при $x\to+\infty$ равномерно относительно y, поскольку от y эта функция не зависит; тем самым $g(x,y)$ удовлетворяет условию 2) теоремы 6.

По теореме 6 интеграл (12) сходится равномерно по параметру y на полупрямой $y\geq b>1$.

б) Докажем теперь, что на полупрямой $y>0$ интеграл (12) сходится неравномерно по параметру y. С этой целью воспользуемся критерием Коши (теорема 4). Нужно доказать, что для интеграла (12) условие Коши не выполнено, т.е. $\exists\varepsilon>0$, такое, что $\forall\ A>1$ найдутся числа $A'>A$, $A''>A$ и $y>0$, для которых будет выполнено неравенство

$$\left|\int_{A'}^{A''}\frac{\sin xy}{x}dx\right|\geq\varepsilon. \tag{13}$$

Возьмём какое-нибудь ε из интервала $0<\varepsilon<\frac{2}{3\pi}$ и $\forall\ A>1$ положим $A'=2\pi n$, $A''=3\pi n$, $y=\frac{1}{n}$, причём возьмём столь большое n, что $2\pi n>A$. Тогда для выбранных A', A'' и y, удовлетворяющих неравенствам $A'>A$, $A''>A$, $y>0$, получим:

$$\left|\int_{2\pi n}^{3\pi n}\frac{\sin\frac{x}{n}}{x}dx\right|\geq\frac{1}{3\pi n}\int_{2\pi n}^{3\pi n}\sin\frac{x}{n}dx=\frac{1}{3\pi n}\cdot n\int_{2\pi}^{3\pi}\sin t dt=\frac{2}{3\pi}>\varepsilon,$$

т.е. выполнено неравенство (13), и, значит, интеграл (12) сходится неравномерно по параметру y на полупрямой $y>0$. ▲

4. Доказать следствие из теоремы 7.

△ Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна в области $\{(x,y):\ \ x\geq a,\ \ y\in Y,$ где $Y-$ некоторый промежуток$\}$, и пусть интеграл

$$F(y)=\int_a^{\infty}f(x,y)dx$$

сходится равномерно по параметру y на промежутке Y, либо на любом сегменте $[c\leq y\leq d]$, расположенном на этом промежутке. Требуется доказать, что функция $F(y)$ непрерывна на промежутке Y.

Докажем непрерывность функции $F(y)$ в произвольной точке $y_0\in Y$. Возьмём такие числа c и d, что $c\leq y_0\leq d$ и $[c,d]\subset Y$. Так как интеграл $F(y)$ сходится равномерно на сегменте $[c,d]$ (по условию),то функция $F(y)$ по теореме 7 непрерывна на сегменте $[c,d]$ и, следовательно, непрерывна в точке y_0.

Итак, функция $F(y)$ непрерывна в любой точке y_0 промежутка Y, т.е. она непрерывна на этом промежутке, что и требовалось доказать. ▲

Замечание. Из равномерной сходимости интеграла $F(y)$ по параметру y на любом сегменте $[c,d]$, лежащем на промежутке Y, не следует равномерная сходимость на всём промежутке Y. Так, например, в примере 1 интеграл $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^y}$ сходится равномерно по параметру y на любом сегменте $[c,d]$, лежащем на полупрямой $y>1$ (это следует из доказательства в п. а)), но не сходится равномерно на всей полупрямой $y>1$.

5. Найти область определения функции

$$F(y)=\int_0^{\infty}\frac{xdx}{1+x^y} \tag{14}$$

(т.е. множество всех значений y, для которых интеграл (14) сходится), и исследовать функцию $F(y)$ на непрерывность в этой области.

$\triangle$ Подынтегральная функция $f(x,y) = \frac{x}{1+x^y}$ непрерывна в области $\{(x,y): \ x \geq 0, \ y > 0\}$ и $\forall \ y > 0$ функция $f(x,y)$ эквивалентна функции $g(x,y) = \frac{1}{x^{y-1}}$ при $x \to +\infty$, поэтому интеграл (14) сходится при $y - 1 > 1$, т.е. при $y > 2$, и расходится при $0 < y \leq 2$. Очевидно, что при $y \leq 0$ интеграл (14) расходится.

Итак, функция $F(y)$ определена на полупрямой $y > 2$. Представим её в виде суммы двух слагаемых

$$F(y) = F_1(y) + F_2(y),$$

где

$$F_1(y) = \int_0^1 \frac{xdx}{1+x^y}, \quad F_2(y) = \int_1^\infty \frac{xdx}{1+x^y}.$$

Функция $F_1(y)$ является собственным интегралом от функции $f(x,y)$, непрерывной в любом прямоугольнике $Q = \{(x,y): \ 0 \leq x \leq 1, \ c \leq y \leq d\}$, где $c > 2$, поэтому функция $F_1(y)$ непрерывна на любом сегменте $[c,d]$, где $c > 2$ (в силу теоремы 1) и, следовательно, непрерывна на полупрямой $y > 2$.

Для доказательства непрерывности функции $F_2(y)$ на полупрямой $y > 2$ достаточно доказать (в силу следствия из теоремы 7, см. пример 4), что интеграл $F_2(y)$ сходится равномерно по параметру y на любом сегменте $[c \leq y \leq d]$, где $c > 2$. Докажем это с помощью мажорантного признака Вейерштрасса.

В качестве мажоранты для функции $f(x,y)$ в полуполосе $D = \{(x,y): \ x \geq 1, c \leq y \leq d\}$, где $c > 2$, возьмём функцию $g(x) = \frac{x}{1+x^c}$. В полуполосе D выполнено неравенство $|f(x,y)| = f(x,y) \leq g(x)$ (отметим, что при $0 < x < 1$ это неравенство не выполняется, в связи с чем функция $F(y)$ и была разбита на два слагаемых), и так как интеграл $\int_1^\infty g(x)dx$ сходится (поскольку $g(x) \sim \frac{1}{x^{c-1}}$ при $x \to +\infty$ и $c - 1 > 1$), то по признаку Вейерштрасса интеграл $F_2(y)$ сходится равномерно по параметру y на сегменте $[c,d]$. Следовательно, функция $F_2(y)$ непрерывна на любом сегменте $[c,d]$, где $c > 2$, и, значит, функция $F_2(y)$ непрерывна на полупрямой $y > 2$. Из непрерывности функций $F_1(y)$ и $F_2(y)$ следует непрерывность функции $F(y)$ при $y > 2$.

Замечание. Отметим, что на полупрямой $y > 2$ интеграл $F(y)$ сходится неравномерно (докажите это). $\blacktriangle$

6. Рассмотрим интеграл

$$F(a,b) = \int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx,$$

где функция $f(x)$ непрерывна на полупрямой $x \geq 0$, a и b - положительные числа.

Доказать: а) если существует $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ (обозначим его $f(\infty)$), то интеграл $F(a,b)$ сходится и справедливо равенство

$$F(a,b) = [f(0) - f(\infty)] \ln \frac{b}{a}; \tag{15}$$

б) если $\forall \ c > 0$ сходится интеграл $\int_c^\infty \frac{f(t)}{t} dt$, то интеграл $F(a,b)$ сходится и справедливо равенство

$$F(a,b) = f(0) \ln \frac{b}{a}. \tag{16}$$

Формулы (15) и (16) называются *формулами Фруллани.*

$\triangle$ По определению несобственных интегралов

$$F(a,b) = \int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \lim_{\substack{\delta \to +0 \\ A \to +\infty}} \int_\delta^A \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx. \tag{17}$$

Так как
$$\int_{\delta}^{A} \frac{f(ax)}{x}dx = \int_{a\delta}^{aA} \frac{f(t)}{t}dt$$
и
$$\int_{\delta}^{A} \frac{f(bx)}{x}dx = \int_{b\delta}^{bA} \frac{f(t)}{t}dt,$$
то
$$\int_{\delta}^{A} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = \int_{a\delta}^{aA} \frac{f(t)}{t}dt - \int_{b\delta}^{bA} \frac{f(t)}{t}dt = \int_{a\delta}^{b\delta} \frac{f(t)}{t}dt - \int_{aA}^{bA} \frac{f(t)}{t}dt. \qquad (18)$$

Далее рассмотрим случаи а) и б) раздельно.

а) К каждому из интегралов в правой части (18) применим формулу среднего значения:
$$\int_{a\delta}^{b\delta} \frac{f(t)}{t}dt = f(c_1\delta) \int_{a\delta}^{b\delta} \frac{dt}{t} = f(c_1\delta) \ln \frac{b}{a},$$
$$\int_{aA}^{bA} \frac{f(t)}{t}dt = f(c_2A) \int_{aA}^{bA} \frac{dt}{t} = f(c_2A) \ln \frac{b}{a},$$
где $c_1 = c_1(\delta)$ и $c_2 = c_2(A)$ - какие-то положительные числа из сегмента $[a, b]$. Поэтому $c_1\delta \to 0$ при $\delta \to +0$, $c_2A \to +\infty$ при $A \to +\infty$. Следовательно, если существует $\lim_{x\to+\infty} f(x) = f(\infty)$, то
$$\lim_{A\to\infty} f(c_2A) = f(\infty),$$
а так как функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = 0$, то
$$\lim_{\delta\to+0} f(c_1\delta) = f(0).$$
Переходя в равенстве (18) к пределу при $\delta \to +0$, $A \to +\infty$, получаем:
$$\lim_{\substack{\delta \to +0 \\ A \to +\infty}} \int_{\delta}^{A} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = \lim_{\delta\to+0} f(c_1\delta) \ln \frac{b}{a} - \lim_{A\to+\infty} f(c_2A) \ln \frac{b}{a} =$$
$$= [f(0) - f(\infty)] \ln \frac{b}{a},$$
откуда в силу (17) следует формула (15).

б) Если $\forall\ c > 0$ сходится интеграл $\int_{c}^{\infty} \frac{f(t)}{t}dt$, то
$$\lim_{A\to+\infty} \int_{aA}^{bA} \frac{f(t)}{t}dt = 0,$$
а для первого слагаемого в правой части (18), как и в п. а), получаем:
$$\lim_{\delta\to+0} \int_{a\delta}^{b\delta} \frac{f(t)}{t}dt = f(0) \ln \frac{b}{a}.$$
Следовательно, из равенства (17) следует теперь формула (16). ▲

7. Доказать, что интеграл
$$F(a,b) = \int_{0}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax - \operatorname{arctg} bx}{x}dx \quad (a > 0,\ \ b > 0) \qquad (19)$$
сходится, и найти его значение.

△ Интеграл (19) имеет такой же вид, как интегралы в формулах Фруллани, причём $f(x) = \operatorname{arctg} x$. Эта функция непрерывна на полупрямой $x \geq 0$, и существует предел

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, интеграл (19) сходится, и его можно вычислить по формуле (15). Учитывая, что $f(0) = \operatorname{arctg} 0 = 0$, $f(\infty) = \frac{\pi}{2}$, получаем

$$F(a,b) = -\frac{\pi}{2}\ln\frac{b}{a} = \frac{\pi}{2}\ln\frac{a}{b}. \ \blacktriangle$$

8. Пусть $f(x,y) = xe^{-(1+y^2)x^2}$, $(x,y) \in D_\delta = \{(x,y) : \quad x \geq \delta, \ y \geq 0; \ \delta > 0 -$ произвольное число$\}$.
а) Доказать, что:

1) при всех $y \geq 0$ интеграл $\int_\delta^\infty f(x,y)dx$ сходится к функции $g(y)$, непрерывной на полупрямой $y \geq 0$;

2) при всех $x \geq \delta$ интеграл $\int_0^\infty f(x,y)dy$ сходится к функции $h(x)$, непрерывной на полупрямой $x \geq \delta$;

3) интегралы

$$J_1 = \int_\delta^\infty h(x)dx \ \text{ и } \ J_2 = \int_0^\infty g(y)dy$$

сходятся и равны друг другу.

б) Используя равенство $J_1 = J_2$, вычислить интеграл Пуассона

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2}dx.$$

△ 1) По определению несобственного интеграла первого рода $\forall \ \ y \geq 0$ имеем:

$$\int_\delta^\infty f(x,y)dx = \lim_{A\to+\infty}\int_\delta^A f(x,y)dx = \lim_{A\to+\infty}\int_\delta^A xe^{-(1+y^2)x^2}dx =$$

$$= \lim_{A\to+\infty}\left[-\frac{1}{2(1+y^2)}e^{-(1+y^2)x^2}\Bigg|_{x=\delta}^{x=A}\right] = \lim_{A\to+\infty}\frac{1}{2(1+y^2)}\left[e^{-(1+y^2)\delta^2} - e^{-(1+y^2)A^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2(1+y^2)}e^{-(1+y^2)\delta^2}.$$

Таким образом, при всех $y \geq 0$ интеграл $\int_\delta^\infty f(x,y)dx$ сходится к функции

$$g(y) = \frac{1}{2(1+y^2)}e^{-(1+y^2)\delta^2},$$

которая непрерывна на полупрямой $y \geq 0$.

2) Снова по определению $\forall \ \ x \geq \delta > 0$ имеем:

$$\int_0^\infty f(x,y)dy = \lim_{A\to+\infty}\int_0^A xe^{-(1+y^2)x^2}dy = \lim_{A\to+\infty}e^{-x^2}\int_0^A e^{-x^2y^2}d(xy) =$$

$$= e^{-x^2} \lim_{A\to+\infty} \int_0^{xA} e^{-t^2} dt = e^{-x^2} \cdot \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = e^{-x^2} \cdot I,$$

где $I = \int_0^\infty e^{-x^2}dx$ - интеграл Пуассонв. Этот интеграл, очевидно, сходится и равен некоторому числу, которое нам предстоит найти.

Итак, при всех $x \geq \delta > 0$ интеграл $\int_0^\infty f(x,y)dy$ сходится к функции

$$h(x) = I \cdot e^{-x^2},$$

которая непрерывна на полупрямой $x \geq \delta > 0$.

Доказанные утверждения 1) и 2), а также тот факт, что функция $f(x,y)$ непрерывна и неотрицательна в области D_δ, означают, что для функции $f(x,y)$ выполнены условия теоремы 9, согласно которой интегралы J_1 и J_2 (см. (20)) сходятся или расходятся одновременно, и в случае сходимости они равны.

3) Докажем сходимость интеграла J_1:

$$J_1 = \int_\delta^\infty h(x)dx = I \cdot \int_\delta^\infty e^{-x^2}dx = I \cdot \left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx - \int_0^\delta e^{-x^2}dx \right) =$$

$$= I^2 - I \cdot \Phi(\delta), \text{ где } \Phi(\delta) = \int_0^\delta e^{-x^2}dx. \tag{21}$$

Итак, интеграл J_1 сходится, и, значит, по теореме 9 сходится также интеграл

$$J_2 = \int_0^\infty g(y)dy = \int_0^\infty \frac{1}{2(1+y^2)} e^{-(1+y^2)\delta} dy, \tag{22}$$

и $\forall\ \delta > 0$ справедливо равенство $J_1 = J_2$.

Отметим, что сходимость интеграла J_2 нетрудно доказать, не опираясь на теорему 9, а используя мажорантный признак Вейерштрасса: так как $\forall\ \delta \geq 0$ выполняется неравенство

$$0 < g(y) = \frac{1}{2(1+y^2)} e^{-(1+y^2)\delta} \leq \frac{1}{2(1+y^2)} \ \ (y \geq 0),$$

и интеграл $\int_0^\infty \frac{dy}{2(1+y^2)}$ сходится (он легко вычисляется и равен $\frac{\pi}{4}$), то интеграл J_2 сходится равномерно относительно δ на полупрямой $\delta \geq 0$, и, следовательно, $J_2 = J_2(\delta)$ - непрерывная функция параметра δ на полупрямой $\delta \geq 0$.

Интеграл J_1 также зависит от параметра δ ($J_1 = J_1(\delta)$) и являестя , как видно из (21), непрерывной функцией параметра δ на полупрямой $\delta \geq 0$.

Теорема 9 обеспечивает равенство

$$J_1(\delta) = J_2(\delta)\ \ \forall\ \ \delta > 0,$$

но поскольку функции $J_1(\delta)$ и $J_2(\delta)$ определены формулами (21) и (22) $\forall\ \ \delta \geq 0$ и непрерывны справа в точке $\delta = 0$, то справедливо равенство

$$J_1(0) = J_2(0).$$

4) Из (21) и (22) следует, что

$$J_1(0) = I^2 - I \cdot \Phi(0) = I^2, \ \ J_2(0) = \int_0^\infty \frac{dy}{2(1+y^2)} = \frac{\pi}{4}.$$

Следовательно, $I^2 = \frac{\pi}{4}$, откуда получаем

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \ \blacktriangle$$

Замечание. Естественно возникает вопрос: нельзя ли было с самого начала рассмотреть функцию $f(x,y)$ не в области D_δ, где $\delta > 0$, а в области $D_0 = \{(x,y): \ x \geq 0, \ y \geq 0\}$, и в соответствии с этим ввести функцию $g(y) = \int_0^\infty f(x,y)dx \ \forall \ y \geq 0$ и функцию $h(x) = \int_0^\infty f(x,y)dy \ \forall \ x \geq 0$, а затем, ссылаясь на теорему 9, воспользоваться равенством $J_1 = J_2$, где

$$J_1 = \int_0^\infty h(x)dx \ \text{ и } \ J_2 = \int_0^\infty g(y)dy \ ?$$

Идя по такому пути, мы получили бы равенства (убедитесь в этом)

$$h(x) = \begin{cases} I \cdot e^{-x^2}, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \qquad g(y) = \frac{1}{2(1+y^2)}, \ \ y \geq 0,$$

$$J_1 = \int_0^\infty g(x)dx = I^2, \ \ J_2 = \int_0^\infty \frac{dy}{2(1+y^2)} = \frac{\pi}{4}.$$

И если теперь воспользоваться равенством $J_1 = J_2$, т.е. $I^2 = \frac{\pi}{4}$, то мы пришли бы к желаемому результату: $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Однако, такой подход не правомерен, поскольку функция $h(x)$ не является непрерывной на полупрямой $x \geq 0$ (она разрыва в точке $x = 0$), и, следовательно для получения равенства $J_1 = J_2$ нельзя сослаться на теорему 9, в условии которой требовалось, чтобы функция $h(x)$ была непрерывной на полупрямой $x \geq 0$. Именно по этой причине мы рассматривали функцию $f(x,y)$ в области D_δ, где $\delta > 0$.

9. Вычислить интеграл

$$I(a,b) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x^2} \ \ (a > 0, \ \ b > 0).$$

$\triangle$ Вычислим интеграл $I(a,b)$ двумя способами.

1-й способ *(с помощью дифференцирования по параметру).*

Интеграл $I(a,b)$ зависит от двух параметров: a и b. Будем рассматривать его как функцию параметра a на произвольном сегменте $a_1 \leq a \leq a_2$, где $a_1 > 0$, при любом фиксированном значении параметра $b > 0$, и убедимся в том, для этой функции выполнены все три условия теоремы 10 (о дифференцировании по параметру).

1) Подынтегральная функция

$$f(x,a,b) = \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x^2} \tag{23}$$

не имеет особенности в точке $x = 0$, так как существует

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x^2} = b - a.$$

Будем считать, что

$$f(0,a,b) = b - a, \tag{24}$$

и тогда функция $f(x,a,b)$ будет непрерывной в области

$$G = \{x \geq 0, \ \ a_1 \leq a \leq a_2, \ \ b > 0\}.$$

Кроме того, функция $f(x,a,b)$ имеет в области G непрерывную производную

$$\frac{\partial f}{\partial a}(x,a,b) = -e^{-ax^2}. \tag{25}$$

В самом деле, при $x>0$ это выражение для $\frac{\partial f}{\partial a}$ получается путём непосредственного дифференцирования по переменной a функции $f(x,a,b)$, заданной формулой (23), а при $x=0$, используя выражение (24) для $f(0,a,b)$, получаем:

$$\frac{\partial f}{\partial a}(0,a,b)=\lim_{\Delta a\to 0}\frac{f(0,a+\Delta a,b)-f(0,a,b)}{\Delta a}=\lim_{\Delta a\to 0}\frac{-\Delta a}{\Delta a}=-1=-e^{-ax^2}\Big|_{x=0}.$$

Таким образом, справедливо равенство (25), показывающее, что частная производная $\frac{\partial f}{\partial a}(x,a,b)$ непрерывна в области G, и, значит выполнено условие 1) теоремы 10.

2) Интеграл $I(a,b)$ сходится при $a_1\le a\le a_2$, $b>0$. Чтобы обосновать это, представим $I(a,b)$ в виде суммы

$$I(a,b)=\int_0^1 f(x,a,b)dx+\int_1^\infty f(x,a,b)dx=:I_1(a,b)+I_2(a,b).$$

Интеграл $I_1(a,b)$ является собственным интегралом, а интеграл $I_2(a,b)$ сходится по признаку Вейерштрасса:

$$|f(x,a,b)|\le\frac{1}{x^2}\ \text{ при }\ x\ge 1,\ \ a_1\le a\le a_2,\ \ b>0,$$

и так как интеграл $\int_1^\infty\frac{dx}{x^2}$ сходится, то интеграл $I_2(a,b)$, а, значит, и интеграл $I(a,b)$, также сходится при $a_1\le a\le a_2$, $b>0$.

Таким образом, выполнено условие 2) теоремы 10.

3) Интеграл $\int_0^\infty\frac{\partial f}{\partial a}(x,a,b)dx=\int_0^\infty\left(-e^{-ax^2}\right)dx$ сходится равномерно по параметру a на сегменте $[a_1,a_2]$ по признаку Вейерштрасса: $\left|-e^{-ax^2}\right|\le e^{-a_1x^2}$ при $x\ge 0$, $a_1\le a\le a_2$, а интеграл $\int_0^\infty e^{-a_1x^2}dx$ сходится (он равен $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a_1}}$), поэтому интеграл $\int_0^\infty(-e^{-ax^2})dx$ сходится равномерно по параметру a на сегменте $[a_1,a_2]$, и тем самым выполнено условие 3) теоремы 10.

По теореме 10 функция $I(a,b)$ дифференцируема по параметру на сегменте $[a_1,a_2]$, и её производную $\frac{\partial I}{\partial a}(a,b)$ мjжно вычислить путём дифференцирования под знаком интеграла, т.е.

$$\frac{\partial I}{\partial a}(a,b)=\int_0^\infty\frac{\partial f}{\partial a}(x,a,b)dx=\int_0^\infty(-e^{-ax^2})dx=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^\infty e^{-t^2}dt=-\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}\ \text{ при }\ a_1\le a\le a_2,\ \ b>0,$$

а поскольку $\forall\ a>0$ найдётся сегмент $[a_1,a_2]$, такой, что $0<a_1<a<a_2$, то полученное выражение для производной $\frac{\partial I}{\partial a}(a,b)$ имеет место $\forall\ a>0$ и $\forall\ b>0$. Из этого выражения следует, что

$$I(a,b)=-\sqrt{\pi a}+c,\tag{26}$$

где c - не зависит от a, но может зависеть от b: $c=c(b)$.

Чтобы найти $c(b)$, положим в равенстве (26) $a=b$. Учитывая, что $f(x,b,b)=0$ $\forall\ x>0$ (см. (23)), и, следовательно, $I(b,b)=0$, приходим к равенству

$$0=-\sqrt{\pi b}+c(b),$$

откуда следует, что $c(b)=\sqrt{\pi b}$.

Таким образом,

$$I(a,b)=-\sqrt{\pi a}+\sqrt{\pi b}=\sqrt{\pi}(\sqrt{b}-\sqrt{a}).$$

2-й способ. Вычислим теперь интеграл $I(a,b)$ с помощью интегрирования по частям, положив $f(x) = e^{-ax^2} - e^{-bx^2}$, $g(x) = -\frac{1}{x}$. Заметим однако, что производная $g'(x)$ не является непрерывной на полупрямой $x \geq 0$ (она разрывна в точке $x = 0$), и поэтому непосредственно к интегралу $I(a,b)$ нельзя применить формулу интегрирования по частям. Применим формулу интегрирования по частям к интегралу

$$I_\delta(a,b) = \int_\delta^\infty \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x^2} dx,$$

где $\delta > 0$ (убедитесь в том, что для этого интеграла все условия применимости указанной формулы выполнены). Получим

$$I_\delta(a,b) = \int_\delta^\infty \left(e^{-ax^2} - e^{-bx^2}\right) d\left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x}\Bigg|_\delta^\infty +$$

$$+\int_\delta^\infty \frac{1}{x}\left(-2axe^{-ax^2} + 2bxe^{-bx^2}\right) dx = \frac{1}{\delta}\left(e^{-a\delta^2} - e^{-b\delta^2}\right) -$$

$$-2a\int_\delta^\infty e^{-ax^2} dx + 2b\int_\delta^\infty e^{-bx^2} dx.$$

Перейдём в полученном равенстве к пределу при $\delta \to +0$. Так как

$$\lim_{\delta \to +0} I_\delta(a,b) = I(a,b),$$

$$\lim_{\delta \to +0} \frac{1}{\delta}\left(e^{-a\delta^2} - e^{-b\delta^2}\right) = 0,$$

$$\lim_{\delta \to +0} \int_\delta^\infty e^{-ax^2} dx = \int_0^\infty e^{-ax^2} dx, \quad \lim_{\delta \to +0} \int_\delta^\infty e^{-bx^2} dx = \int_0^\infty e^{-bx^2} dx$$

(обоснуйте эти равенства), то в пределе получим равенство

$$I(a,b) = -2a\int_0^\infty e^{-ax^2} dx + 2b\int_0^\infty e^{-bx^2} dx =$$

$$= -2a\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}\right) + 2b\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{b}}\right) = \sqrt{\pi}(\sqrt{b} - \sqrt{a}). \quad \blacktriangle$$

10. С помощью дифференцирования по параметру y интеграла

$$F(y) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-yx} dx \quad (y \geq 0)$$

вычислить интеграл Дирихле

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$$

(в точке $x = 0$ считаем подынтегральную функцию равной пределу $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$).

$\triangle$ Заметим, что $I = F(0)$. С помощью дифференцирования по параметру y нам удастся получить более простое выражение для $F(y)$, которое и даст возможность найти $F(0)$.

Схема получения этого более простого выражения для $F(y)$ будет во многом похожа на схему вычисления интеграла $I(a,b)$ в примере 9 первым способом. Разобьём наши вычисления на несколько пунктов.

а) Прежде всего докажем, что $F(y)$ - непрерывная функция при $y \geq 0$. Представим $F(y)$ в виде суммы

$$F(y) = F_1(y) + F_2(y),$$

где

$$F_1(y) = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} e^{-yx} dx, \quad F_2(y) = \int_1^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-yx} dx.$$

Функция $F_1(y)$ является собственным интегралом, зависящим от параметра y. Так как подынтегральная функция

$$f(x,y) = \frac{\sin x}{x} e^{-yx}$$

непрерывна в любом прямоугольнике $Q = \{(x,y): \ \ 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq y_0\}$, то по теореме 1 функция $F_1(y)$ непрерывна на любом сегменте $[0; y_0]$ и, следовательно, непрерывна на полупрямой $y \geq 0$.

Для доказательства непрерывности функции $F_2(y)$ на полупрямой $y \geq 0$ достаточно доказать (в силу следствия из теоремы 7), что несобственный интеграл $F_2(y)$ сходится равномерно на этой полупрямой. Это нетрудно доказать с помощью признака Дирихле - Абеля (теорема 6). С этой целью положим

$$\tilde{f}(x,y) = \sin x, \quad g(x,y) = \frac{e^{-yx}}{x}.$$

Функция $\tilde{f}(x,y)$ непрерывна и имеет ограниченную первообразную $(-\cos x)$ по переменной x в области $\{x \geq 1, \ \ y \geq 0\}$, а функция $g(x,y)$ при каждом $y \geq 0$ является убывающей функцией аргумента x на полупрямой $x \geq 1$, причём $g(x,y) \to 0$ при $x \to +\infty$ равномерно относительно y из промежутка $[0 \leq y < \infty)$ (это следует из неравенства $g(x,y) \leq \frac{1}{x}$).

Таким образом, функции $\tilde{f}(x,y)$ и $g(x,y)$ удовлетворяют условиям теоремы 6, и, следовательно, по признаку Дирихле - Абеля интеграл $F_2(y)$ сходится равномерно по параметру y на полупрямой $y \geq 0$, что обеспечивает непрерывность $F_2(y)$, а, значит, и непрерывность $F(y)$ при $y \geq 0$.

б) Докажем теперь, что функция $F(y)$ является дифференцируемой при $y > 0$, и её производную можно вычислить путём дифференцирования под знаком интегралаю

Возьмём произвольный сегменте $c \leq y \leq d$, где $c > 0$, и рассмотрим функцию $F(y)$ на этом сегменте. Для неё выполнены все условия теоремы 10:

1) $f(x,y) = \frac{\sin x}{x} e^{-yx}$ и $\frac{\partial f}{\partial y} = -\sin x \cdot e^{-xy}$ непрерывны в полуполосе $\{(x,y): \ \ x \geq 0, \ \ c \leq y \leq d\}$;

2) несобственный интеграл $\int_0^\infty f(x,y)dx$ сходится $\forall \ \ y \in [c,d]$ (это доказано в п. а));

3) несобственный интеграл $\int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx = -\int_0^\infty \sin x \cdot e^{-yx} dx$ сходится равномерно по параметру y на сегменте $[c,d]$, это легко доказать с помощью признака Вейерштрасса: $|\sin x e^{-yx}| \leq e^{-cx} =: g(x)$, а интеграл $\int_0^\infty g(x)dx$ сходится (он равен $\frac{1}{c}$).

По теореме 10 функция $F(y)$ дифференцируема на сегменте $[c,d]$, и для её производной справедливо равенство

$$F'(y) = \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx = -\int_0^\infty \sin x \cdot e^{-yx} dx, \quad c \leq y \leq d. \tag{27}$$

Так как для любого $y > 0$ найдётся сегмент $[c,d]$, такой, что $0 < c < y < d$, то формула (27) справедлива для любого $y > 0$.

в) Вычислив интеграл (27) (это можно сделать по формуле Ньютона - Лейбница, используя первообразную $\frac{(y\sin x+\cos x)e^{-yx}}{1+y^2}$ для функции $-\sin x\cdot e^{-yx}$), приходим к равенству

$$F'(y)=-\frac{1}{1+y^2}\ \text{ при }\ y>0.$$

Отсюда следует, что

$$F(y)=-\operatorname{arctg}y+c\ \text{ при }\ y>0, \tag{28}$$

где c - пока неизвестная постоянная. Для её нахождения воспользуемся оценкой

$$|f(x,y)|=\left|\frac{\sin x}{x}\right|e^{-yx}\le e^{-yx}\ \text{ при }\ x\ge 0,\ \ y\ge 0,$$

в силу которой

$$|F(y)|\le\left|\int_0^\infty|f(x,y)|dx\right|\le\int_0^\infty e^{-yx}dx=\frac{1}{y}\ \text{ при }\ y>0.$$

Отсюда следует, что $F(y)\to 0$ при $y\to+\infty$. Переходя теперь к пределу при $y\to+\infty$ в равенстве (28) и учитывая, что $\lim_{y\to+\infty}\operatorname{arctg}y=\frac{\pi}{2}$, получаем

$$0=-\frac{\pi}{2}+c,\ \text{ и, значит, }\ c=\frac{\pi}{2}.$$

Итак, $F(y)=-\operatorname{arctg}y+\frac{\pi}{2}$ при $y>0$. Это и есть то более простое выражение для $F(y)$, которое даёт возможность найти $F(0)$. Поскольку $F(y)$ - непрерывная функция при $y\ge 0$ (это доказано в п. а)), то

$$F(0)=\lim_{y\to+0}F(y)=\frac{\pi}{2},$$

а так как $I=\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx=F(0)$, то

$$\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}.\ \blacktriangle$$

Замечание. Рассмотрим функцию

$$I(\alpha)=\int_0^\infty\frac{\sin\alpha x}{x}dx.$$

Если $\alpha=0$, то $I(0)=0$. Если $\alpha>0$, то, сделав замену переменной $x=\frac{t}{\alpha}$, получим

$$I(\alpha)=\int_0^\infty\frac{\sin t}{t}dt=\frac{\pi}{2}.$$

Так как $I(\alpha)$ - нечётная функция ($I(-\alpha)=-I(\alpha)$), то

$$I(\alpha)=-\frac{\pi}{2},\ \text{ если }\ \alpha<0.$$

Таким образом,

$$I(\alpha)=\begin{cases}\frac{\pi}{2},\ \text{ если }\ \alpha>0,\\ 0,\ \text{ если }\ \alpha=0,\\ -\frac{\pi}{2},\ \text{ если }\ \alpha<0.\end{cases}$$

Функция $I(\alpha)$ называется *разрывным множителем Дирихле*. Через эту функцию можно выразить известную функцию $\operatorname{Sgn}\alpha$:

$$\operatorname{Sgn}\alpha = \frac{2}{\pi}I(\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha > 0, \\ 0, & \text{если } \alpha = 0, \\ -1, & \text{если } \alpha < 0. \end{cases}$$

11. Исследовать несобственный интеграл второго рода

$$F(y) = \int_0^1 \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^y} \tag{29}$$

на равномерную сходимость по параметру y на интервале $(0 < y < 2)$.

$\triangle$ Прежде всего докажем, что $\forall\ y \in (0;2)$ интеграл (29) сходится. Согласно определению сходимости для этого нужно доказать, что $\forall\ y \in (0;2)$ существует предел

$$\lim_{\delta\to+0} I(\delta), \quad \text{где} \quad I(\delta) = \int_\delta^1 \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^y}.$$

В определённом интеграле $I(\delta)$ сделаем замену переменной $x = \frac{1}{t}$. Получим

$$I_\delta = \int_1^{\frac{1}{\delta}} \frac{\sin t}{t^{2-y}}dt = \int_1^{\frac{1}{\delta}} \frac{\sin t}{t^\alpha}dt, \quad 0 < \alpha = 2 - y < 2. \tag{30}$$

Воспользуемся тем, что несобственный интеграл первого рода $\int_1^\infty \frac{\sin t}{t^\alpha}dt$ сходится $\forall\ \alpha > 0$. Это означает (по определению), что $\forall\ \alpha > 0$ существует предел

$$\lim_{A\to+\infty} \int_1^A \frac{\sin t}{t^\alpha}dx,$$

а поскольку $A = \frac{1}{\delta} \to +\infty$ при $\delta \to +0$, то $\forall\ \alpha > 0$ существует предел

$$\lim_{\delta\to+0} \int_1^{\frac{1}{\delta}} \frac{\sin t}{t^\alpha}dt.$$

Учитывая равенство (30), приходим к выводу, что $\forall\ y \in (0;2)$ существует предел $\lim_{\delta\to+0} I(\delta)$, и, следовательно, интеграл $F(y)$ сходится $\forall\ y \in (0;2)$.

Докажем теперь, что интеграл $F(y)$ сходится неравномерно по параметру y на интервале $(0 < y < 2)$.

Согласно критерию Коши (теорема 11) для этого нужно доказать, что для интеграла $F(y)$ на интервале $(0 < y < 2)$ не выполнено условие Коши, т.е. $\exists\varepsilon > 0$, такое, что $\forall\ \delta > 0\ \ \exists\delta_1 \in (0;\delta)$, $\delta_2 \in (0;\delta)$ и $y \in (0;2)$, для которых выполнено неравенство

$$\left|\int_{\delta_1}^{\delta_2} \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^y}\right| \geq \varepsilon,$$

или (сделаем в интеграле замену переменной $x = \frac{1}{t}$)

$$\left|\int_{\frac{1}{\delta_2}}^{\frac{1}{\delta_1}} \frac{\sin t}{t^{2-y}}dt\right| \geq \varepsilon.$$

Возьмём $\varepsilon = 1$ и $\forall\ \delta > 0$ положим $\delta_1 = \frac{1}{2\pi n+\pi}$, $\delta_2 = \frac{1}{2\pi n}$, причём натуральное число n возьмём столь большим, что будут выполнены неравенства $\delta_1 < \delta$, $\delta_2 < \delta$. Для выбранных δ_1 и δ_2 получаем оценку

$$\left|\int_{\frac{1}{\delta_2}}^{\frac{1}{\delta_1}} \frac{\sin t}{t^{2-y}}dt\right| = \left|\int_{2\pi n}^{2\pi n+\pi} \frac{\sin t}{t^{2-y}}dt\right| \geq \frac{1}{(2\pi n+\pi)^{2-y}}\left|\int_{2\pi n}^{2\pi n+\pi} \sin t dt\right| = \frac{2}{(2\pi n+\pi)^{2-y}}.$$

Т.к. $(2\pi n+\pi)^{2-y} \to 1$ при $y \to 2-0$, то найдётся такое $y \in (0;2)$, для которого будет выполнено неравенство

$$(2\pi n+\pi)^{2-y} < 2, \ \text{ и, следовательно,}$$

$$\left|\int_{2\pi n}^{2\pi n+\pi} \frac{\sin t}{t^{2-y}} dt\right| \geq \frac{2}{(2\pi n+\pi)^{2-y}} > 1.$$

Таким образом, $\forall\ \delta > 0\ \exists \delta_1 = \frac{1}{2\pi n+\pi} \in (0;\delta)$, $\delta_2 = \frac{1}{2\pi n} \in (0,\delta)$ и $y \in (0;2)$, для которых выполнено неравенство

$$\left|\int_{\delta_1}^{\delta_2} \sin\frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^y}\right| = \left|\int_{2\pi n}^{2\pi n+\pi} \frac{\sin t}{t^{2-y}} dt\right| \geq \varepsilon = 1.$$

Это и означает, что для интеграла $F(y)$ не выполнено условие Коши, и, значит, интеграл $F(y)$ сходится неравномерно по параметру y на интервале $(0 < y < 2)$. ▲

12. С помощью эйлеровых интегралов вычислить интеграл

$$I = \int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx \quad (a > 0).$$

△ Интеграл I является определённым интегралом. Сделаем в нём замену переменной

$$x = a\sqrt{t}, \ \ 0 \leq t \leq 1.$$

Получим

$$I = \frac{a^4}{2}\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}\,dt = \frac{a^4}{2}\int_0^1 t^{\frac{3}{2}-1}(1-t)^{\frac{3}{2}-1}\,dt = \frac{a^4}{2}B\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right).$$

Чтобы вычислить значение $B\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$, воспользуемся формулой $B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$. По этой формуле

$$B\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\right)} = \frac{\Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(3)}.$$

По формуле приведения

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right), \ \ \Gamma(3) = \Gamma(1+2) = 2\cdot\Gamma(2) = 2\cdot 1\cdot\Gamma(1).$$

Найдём значения $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ и $\Gamma(1)$:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}dx = 2\int_0^\infty e^{-x}d\sqrt{x} = 2\int_0^\infty e^{-t^2}dt = 2\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi},$$

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_0^\infty = 1.$$

Следовательно, $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, $\Gamma(3) = 2$, поэтому

$$I = \frac{a^4}{2}\cdot\frac{\Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(3)} = \frac{a^4}{2}\cdot\frac{\pi}{8} = \frac{\pi a^4}{16}. \ ▲$$

13. С помощью эйлеровых интегралов вычислить интеграл

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[2]{x}dx}{(1+x)^3}.$$

△ Запишем интеграл в виде

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{4}{3}-1}}{(1+x)^{\frac{4}{3}+\frac{5}{3}}} dx.$$

Сопоставляя это выражение с формулой (2) для B - функции, приходим к выводу, что интеграл I равен значению функции $B(p,q)$ при $p = \frac{4}{3}$, $q = \frac{5}{3}$. Применяя формулу $B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma)p+q)}$, а затем формулу приведения и формулу дополнения для Γ - функции, и учитывая, что $\Gamma(3) = 2$ (это установлено в ходе решения примера 12), получаем:

$$I = B\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{3}+\frac{5}{3}\right)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{2}{3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{9}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}.$$

Итак, $I = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$. ▲

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

5. Найдите область определения функции

$$F(y) = \int_a^{\infty} f(x,y)dx,$$

т.е. множество Y значений y, для которых интеграл $F(y)$ сходится, и исследуйте интеграл $F(y)$ на равномерную сходимость по параметру y на множестве Y, если:

$$\text{а)}\;\; f(x,y) = \frac{e^{-yx}}{1+x^2},\;\; a=0; \qquad \text{б)}\;\; f(x,y) = \frac{y}{1+x^2y^2},\;\; a=0;$$

$$\text{в)}\;\; f(x,y) = \frac{x^y}{1+x^2},\;\; a=1; \qquad \text{г)}\;\; f(x,y) = \frac{\cos x}{1+xy^2},\;\; a=0;$$

$$\text{д)}\;\; f(x,y) = \frac{\sin x}{x^y+\sin x},\;\; a=0.$$

6. Исследуйте функции $F(y)$ из упражнения 5 на непрерывность на множестве Y.

7. Исследуйте на непрерывность в указанных промежутках следующие функции:

$$\text{а)}\;\; F(y) = \int_0^{\infty} x^y e^{-x} dx,\;\; y \geq 0; \qquad \text{б)}\;\; F(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{1+x^2} dx,\;\; -\infty < y < +\infty;$$

$$\text{в)}\;\; F(y) = \int_0^1 \frac{\cos x}{x^y} dx,\;\; 0 < y < 1; \qquad \text{г)} F(y) = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x-y)^2+1},\;\; y \geq 0;$$

$$\text{д)}\;\; F(y) = \int_0^{\infty} \sqrt{y} e^{-yx^2} dx,\;\; y \geq 0; \qquad \text{е)} F(y) = \int_0^{\infty} e^{-(x-y)^2} dx,\;\; -\infty < y < +\infty;$$

$$\text{ж)}\;\; F(y) = \int_0^1 \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^y},\;\; 0 < y < 2; \qquad \text{з)} F(y) = \int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^y} dx,\;\; y > 0.$$

8. Применяя формулу Фруллани, вычислите интегралы:

$$\text{а)}\;\; \int_0^{\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x} dx\;\; (a>0, b>0); \qquad \text{б)}\;\; \int_0^{\infty} \frac{\sin ax - \sin bx}{x} dx\;\; (a>0, b>0);$$

$$в) \int_0^\infty \frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x}dx \ \ (a>0, b>0).$$

9. С помощью дифференцирования по параметру вычислите интегралы:

$$а) \int_0^\infty \frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x}dx \ \ (a>0, b>0); \quad б) \int_0^\infty \left(\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\right)^2 dx \ \ (a>0, b>0);$$

$$в) \int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\sin mx dx \ \ (a>0, b>0, m\neq 0);$$

$$г) \int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\cos mx dx \ \ (a>0, b>0); \quad д) \int_0^\infty \frac{e^{-ax^2}-\cos bx}{x^2}dx \ \ (a>0);$$

$$е) \int_0^\infty \frac{\cos ax}{1+x^2}dx \ \ (-\infty<a<+\infty); \quad ж) \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} ax\cdot\operatorname{arctg} bx}{x^2}dx \ \ (a>0, b>0);$$

$$з) \int_0^\infty e^{-x^2}\cos ax\cdot dx \ \ (-\infty<a<+\infty).$$

10. С помощью интегрирования по частям получите для интеграла I_n рекуррентную формулу и вычислите I_n:

$$а) \ I_n = \int_0^1 x^{m-1}\ln^n x dx \ \ (m>0, \ \ n - \text{натуральное число});$$

$$б) \ I_n = \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a)^{n+1}} \ \ (a>0, \ \ n - \text{натуральное число}).$$

11. Докажите, что для Γ - функции имеют место следующие формулы:

$$а) \ \Gamma(p+1) = p\cdot\Gamma(p) \ \ \forall \ \ p>0 \ \ (\text{формула проведения});$$

$$б) \ \Gamma(n+1) = n! \ \ \forall \ \ \text{натурального} \ \ n;$$

$$в) \ \Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi} \ \ \forall \ \ \text{натурального} \ \ n.$$

12. С помощью эйлеровых интегралов вычислите следующие интегралы:

$$а) \int_0^1 \sqrt{x-x^2}dx; \quad б) \int_0^a x^3\sqrt{a^2-x^2}dx \ \ (a>0),$$

$$в) \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}dx; \quad г) \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3}; \quad д) \int_0^\infty \frac{x^2dx}{1+x^4}.$$

§3. Кратные интегралы, зависящие от параметров

Основные понятия и теоремы

1. Кратные интегралы, зависящие от параметров, - это функции следующего вида

$$u(y_1,\ldots,y_m) = \int\underset{G}{\cdots}\int f(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)dx_1\ldots dx_n.$$

Мы ограничимся рассмотрением тройных интегралов, имеющих вид

$$u(M) = \iiint\limits_G f(M,P)g(P)dV_P, \tag{1}$$

где G - кубируемая область, точка $P(x,y,z)$ пробегает область G, $dV_P = dxdydz$, $M(x_0,y_0,z_0)$ - точка, от координат которой, как от параметров, зависит функция $u(M)$, $g(P)$ - ограниченная интегрируемая в области G функция, а $f(M,P)$ - функция, зависящая от шести переменных (x_0,y_0,z_0,x,y,z), причём $f(M,P)$ непрерывна при $M \neq P$ и имеет особенность (стремится к бесконечности), если $P \to M$.

2. Ньютонов потенциал. Важным физическим примером интегралов вида (1) является потенциал гравитационного поля, создаваемого в точке $M(x_0,y_0,z_0)$ телом G с плотностью $\varrho(P)$ в точке $P(x,y,z)$. Этот потенциал называется *ньютоновым потенциалом* и имеет вид

$$u(M) = \iiint\limits_G \frac{\varrho(P)}{r_{MP}} dV_P, \tag{2}$$

где $r_{MP} = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$ - расстояние между точками M и P.

Если точка M лежит вне тела G, то $r_{MP} \neq 0 \ \forall \ P \in G$, поэтому $f(M,P) = \frac{1}{r_{MP}}$ является непрерывной (и также любое число раз дифференцируемой) функцией, а $u(M)$ представляет собой *собственный* тройной интеграл, зависящий от параметров x_0,y_0,z_0 - координат точки M. Если при этом $\varrho(P)$ - интегрируемая (например, непрерывная) функция, то функция $u(M)$ дифференцируема любое число раз в точке M, а её частные производные любого порядка можно вычислить путём дифференцирования под знаком интеграла. Например,

$$\frac{\partial u}{\partial x_0}(M) = \iiint\limits_G \varrho(P)\frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{1}{r_{MP}}\right) dV_P =$$

$$= \iiint\limits_G \varrho(x,y,z)\frac{x-x_0}{r_{MP}^3} dxdydz. \tag{3}$$

Аналогичные выражения получаются для $\frac{\partial u}{\partial y_0}(M)$ и $\frac{\partial u}{\partial z_0}(M)$.

Частные производные первого порядка потенциала $u(M)$ являются координатами вектора $\vec{F}(M) = \operatorname{grad} u(M)$, представляющего собой силу, с которой единичная точечная масса, помещённая в точку M, притягивается телом G:

$$\vec{F}(M) = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_0}(M), \frac{\partial u}{\partial y_0}(M), \frac{\partial u}{\partial z_0}(M) \right\}.$$

Вычислив (снова путём дифференцирования под знаком интеграла) частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}(M)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y_0^2}(M)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z_0^2}(M)$ (проделайте вычисления) и сложив их, получим

$$\triangle u(M) = 0, \ \ M \neq G,$$

где $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_0^2}$ - оператор Лапласа.

Таким образом, *в точках M, лежащих вне тела G, ньютонов потенциал $u(M)$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\triangle u = 0$.*

Если же точка $M(x_0,y_0,z_0)$ zвляется внутренней точкой области G, то функция $f(M,P) = \frac{1}{r_{MP}}$ имеет особенность при $P = M$ ($\frac{1}{r_{MP}} \to \infty$ при $P \to M$), поэтому интеграл (2) становится *несобственным* тройным интегралом, зависящим от параметров x_0,y_0,z_0. Вопросы непрерывности и дифференцируемости функции $u(M)$ становятся более сложными. Для ответа на эти вопросы обратимся снова к интегралу вида (1).

3. Равномерная сходимость и непрерывность несобственного интеграла вида (1). Пусть $M(x_0,y_0,z_0)$ - внутренняя точка кубируемой области G. Сохраним условия на функции $f(M,P)$ и $g(P)$ в интеграле (1), введённые в п. 1. Так как

$f(M,P) \to \infty$ при $P \to M$, то интеграл (1) является теперь *несобственным* интегралом, зависящим от координат (x_0, y_0, z_0) точки M, как от параметров. Будем говорить более кратко: несобственный интеграл (1) зависит от параметра M и введём понятие равномерной сходимости интеграла (1) по параметру M во внутренней точке M_0 области G. Обозначим через $\Omega^{\delta}_{M_0}$ шар радиуса δ с центром в точке M_0.

Определение. Несобственный интеграл (1) называется *сходящимся равномерно по параметру M в точке M_0*, если $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, такое, что $\Omega^{\delta}_{M_0} \subset G$, и для любой области $\omega \subset \Omega^{\delta}_{M_0}$ и любой точки $M \subset \Omega^{\delta}_{M_0}$ выполняется неравенство

$$\left| \iiint\limits_{\omega} f(M,P) g(P) dV_P \right| < \varepsilon.$$

Иначе говоря, интеграл (1) сходится равномерно по параметру M в точке M_0, если величина $\left| \iiint_{\omega} f(M,P) g(P) dV_P \right|$ сколь угодно мала для любой области ω и любой точки M, расположенных в достаточно малом шаре $\Omega^{\delta}_{M_0}$.

Замечание. В отличие от одномерных несобственных интегралов, зависящих от параметра, для которых вводилось понятие равномерной сходимости по параметру на некотором промежутке изменения параметра, данное определение вводит понятие равномерной сходимости по параметру в данной точке (т.е. для данного значения параметра). Вместе с тем, нетрудно усмотреть, что если несобственный интеграл (1) в соответствии с определением сходится равномерно по параметру M в точке M_0, то он сходится равномерно по параметру M и в некоторой окрестности точки M_0, т.е. для любой точки M_0' из этой окрестности по заданному ε найдётся нужное δ, одно и то же для всех точек M_0' из этой окрестности.

Теорема 12 (достаточное условие непрерывности интеграла (1)). *Если несобственный интеграл (1) сходится равномерно по параметру M в точке M_0, то функция $u(M)$ непрерывна в точке M_0.*

Теорема 13 (достаточное условие равномерной сходимости интеграла (1)). *Если*

$$|f(M,P)| \le \frac{c}{r^{\alpha}_{MP}}, \quad \textit{где}\ \ c = const > 0, \ \ 0 < \alpha < 3, \tag{4}$$

то несобственный интеграл (1) сходится равномерно по параметру M в любой внутренней точке области G.

Следствие из теорем 12 и 13. *Если выполнено условие (4), то функция $u(M)$, определённая формулой (1), непрерывна в любой внутренней точке области G.*

4. Свойства ньютонова потенциала внутри области G. Обратимся снова к ньютонову потенциалу $u(M)$ (см. (2)) и отметим его свойства во внутренних точках области G.

1^0. Ньютонов потенциал $u(M)$ - непревная функция внутри области G (т.е. непрерывная функция в любой внутренней точке M области G).

2^0. Частные производные первого порядка функции $u(M)$ в любой внутренней точке M области G можно вычислять путём дифференцирования под знаком интеграла. Например, производная $\frac{\partial u}{\partial x_0}(M)$ выражается формулой (3).

3^0.Частные производные первого порядка функции $u(M)$ непрерывны внутри области G.

4^0.Оказывается, что частные производные второго порядка функции $u(M)$ во внутренних точках области G уже *нельзя* вычислять путём дифференцирования под знаком интеграла. Если потребовать, чтобы функция $\varrho(P)$ имела в области G

непрерывные частные производные первого порядка, то функция $u(M)$ будет иметь внутри области G непрерывные частные производные второго порядка и будет удовлетворять внутри области G *уравнению Пуассона*.

$$\triangle u(M) = -4\pi\varrho(M),$$

где $\triangle$ - оператор Лапласа.

Контрольные вопросы и задания

1. Напишите выражение для n - кратного интеграла, зависящего от m параметров.

2. Сформулируйте условия на область G и функции $f(M,P)$ и $g(P)$ в тройном интеграле $\iiint_G f(M,P)g(P)dP$. Для каких точек M этот интеграл является собственным и для каких - несобственным?

3. Напишите выражение для ньютонова потенциала. Докажите, что если $M \notin G$, то ньютонов потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа.

4. Для несобственного интеграла $u(M) = \iiint_G f(M,P)g(P)dV_P$ сформулируйте:
а) определение равномерной сходимости по параметру M в точке M_0;
б) теорему о достаточном условии непрерывности функции $u(M)$ в точности M_0;
в) теорему о достаточном условии равномерной сходимости в любой внутренней точке области G;
г) следствие из теорем, указанных в п.п. б) и в).

5. Перечислите свойства ньютонова потенциала во внутренних точках области G.

Примеры решения задач

1. Доказать, что частные производные первого порядка ньютонова потенциала непрерывны внутри области G.

$\triangle$ Воспользуемся тем, что частные производные первого порядка ньютонова потенциала $u(M)$ в любой внутренней точке $M(x_0, y_0, z_0)$ области G можно вычислить путём дифференцирования под знаком интеграла, в результате чего для $\frac{\partial u}{\partial x_0}(M)$ получается выражение (см. (3))

$$\frac{\partial u}{\partial x_0}(M) = \iiint\limits_G \varrho(P)\frac{x - x_0}{r^3_{MP}}dV_\varrho. \tag{5}$$

Так как $|x - x_0| \leq r_{MP} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$ и $\varrho(P)$ - ограниченная функция, то для подынтегральной функции в интеграле (5) справедлива оценка

$$\left|\frac{\varrho(P)(x - x_0)}{r^3_{MP}}\right| \leq \frac{c}{r^2_{MP}}, \quad c = const > 0,$$

т.е. выполнено условие (4) (в нашем случае $\alpha = 2 < 3$). Следовательно, согласно следствию из теорем 12 и 13, частная производная $\frac{\partial u}{\partial x_0}(M)$ непрерывна внутри области G. Таким же образом доказывается непрерывность производных $\frac{\partial u}{\partial y_0}(M)$ и $\frac{\partial u}{\partial z_0}(M)$ внутри области G. $\blacktriangle$

2. Найти ньютонов потенциал гравитационного поля, создаваемого однородным шаром G радиуса R с центром в начале координат и плотностью ϱ_0.

$\triangle$ Вычислим значение ньютонова потенциала в точке $M(0,0,z_0)$, лежащей на положительной полуоси Oz. Для этой точки расстояние от точки $P(x,y,z)$ выражается формулой

$$r_{MP} = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_0)^2}.$$

Следовательно (см. (2))

$$u(M) = \varrho_0 \iiint\limits_G \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-z_0)^2}}.$$

Чтобы вычислить интеграл $u(M)$, перейдём к сферическим координатам (r, θ, φ) по формулам

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta,$$
$$(0 \le r \le R, \ \ 0 \le \theta \le \pi, \ \ 0 \le \varphi \le 2\pi).$$

Учитывая, что

$$\sqrt{x^2+y^2+(z-z_0)^2} = \sqrt{r^2 - 2rz_0\cos\theta + z_0^2},$$

а якобиан перехода от координат (x, y, z) к координатам (r, θ, φ) равен $r^2\sin\theta$, приходим к равенству

$$u(M) = \varrho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R dr \int_0^\pi \frac{r^2\sin\theta}{\sqrt{r^2-2rz_0\cos\theta+z_0^2}} d\theta. \tag{6}$$

Для внутреннего интеграла по переменной θ получаем:

$$I(r) := \int_0^\pi \frac{r^2\sin\theta d\theta}{\sqrt{r^2-2rz_0\cos\theta+z_0^2}} = \frac{r}{z_0}\sqrt{r^2-2rz_0\cos\theta+z_0^2}\Big|_0^\pi =$$
$$= \frac{r}{z_0}\left(\sqrt{(r+z_0)^2} - \sqrt{(r-z_0)^2}\right) = \frac{r}{z_0}\left(r+z_0-|r-z_0|\right) =$$
$$= \begin{cases} \frac{2r^2}{z_0}, & \text{если} \ \ 0 \le r \le z_0, \\ 2r, & \text{если} \ \ r > z_0. \end{cases} \tag{7}$$

В соответствии с этим для внутреннего интеграла в (6) по переменной r возможны два случая:

1) если $z_0 < R$, то, используя равенства (7), получаем:

$$\int_0^R I(r)dr = \int_0^{z_0} \frac{2r^2}{z_0}dr + \int_{z_0}^R 2r\cdot dr = \frac{2}{3}z_0^2 + (R^2 - z_0^2) = R^2 - \frac{z_0^2}{3};$$

2) если $z_0 \ge R$, то

$$\int_0^R I(r)dr = \int_0^R \frac{2r^2}{z_0}dr = \frac{2}{3}\frac{R^3}{z_0}.$$

Наконец, интегрируя по переменной φ, окончательно находим

$$u(M) = 2\pi\varrho_0 \cdot \begin{cases} (R^2 - \frac{z_0^2}{3}), & \text{если} \ \ z_0 < R, \\ \frac{2}{3}\cdot\frac{R^3}{z_0}, & \text{если} \ \ z_0 \ge R. \end{cases} \tag{8}$$

Заметим теперь, что расстояние от точки $M(0, 0, z_0)$ до центра шара G равно z_0 (напомним, что точка M_0 была взята на положительной полуоси Oz). Поэтому, если обозначить расстояние от точки M до центра шара G через r_0, то равенство (8) для ньютонова потенциала $u(M)$ в точке M запишется в виде

$$u(M) = \begin{cases} 2\pi\varrho_0(R^2 - \frac{r_0^2}{3}), & \text{если} \ \ r_0 < R, \\ \frac{4}{3}\pi\varrho_0\frac{R^3}{r_0}, & \text{если} \ \ r_0 \ge R. \end{cases} \tag{9}$$

Ясно, что для любой точки $M(x_0, y_0, z_0)$ ньютонов потенциал в точке M выражается формулой (9), где $r_0 = \sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$ - расстояние от точки M до центра шара G. ▲

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

13. Докажите, что ньютонов потенциал $u(M) = \iiint_G \frac{\varrho(P)}{r_{MP}} dV_p$ является непрерывной функцией внутри области G.

14. Докажите теорему 12.

15. Докажите теорему 13.

16*. Докажите, что частные производные первого порядка ньютонова потенциала во внутренней точке области можно вычислять путём дифференцирования под знаком интеграла.

17. С какой силой притягивает однородный шар массы m с центром в начале координат и радиусом R единичную точечную массу, помещённую в точку $M(0,0,z_0)$, $z_0 > 0$?

Ответы

1. а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{\pi}{4}$; в) $\ln(1+\sqrt{2})$.

3. 1.

4. а)$2ye^{-y^4} - e^{-y^2}$; б) $\frac{2\sin y^2}{y}$; в)$\frac{3\ln(1+y^3)}{y}$.

5. а)$Y = (0 < y < +\infty)$, сходится равномерно;
б)$Y = (-\infty < y < +\infty)$, сходится неравномерно;
в)$Y = (-\infty < y < 1)$, сходится неравномерно;
г)$Y = (-\infty < y < 0) \cup (0 < y < \infty)$, сходится неравномерно;
д) $Y = \left(\frac{1}{2} < y < +\infty\right)$, сходится неравномерно.

6. а) непрерывна; б) разрывна в точке $y = 0$; в) непрерывна; г) непрерывна; д) непрерывна.

7. а) непрерывна; б) непрерывна; в) непрерывна; г) непрерывна; д) разрывна в точке $y = 0$; е) непрерывна; ж) непрерывна; з) непрерывна.

8. а) $\ln\frac{b}{a}$; б) 0; в) $\frac{1}{2}\ln\frac{b}{a}$.

9. а)$\frac{1}{2}\ln\frac{b}{a}$; б) $\ln\frac{(2a)^{2a}(2b)^{2b}}{(a+b)^{2a+2b}}$; в) $\operatorname{arctg}\frac{a}{m} - \operatorname{arctg}\frac{b}{m}$; г)$\frac{1}{2}\ln\frac{b^2+m^2}{a^2+m^2}$; д) $\frac{\pi}{2}|b| - \sqrt{\pi a}$; е) $\frac{\pi}{2}e^{-|a|}$; ж) $\frac{\pi}{2}\ln\frac{(a+b)^{a+b}}{a^a \cdot b^b}$; з) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{a^2}{4}}$.

10. а) $I_n = -\frac{n}{m}I_{n-1} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{m^{n+1}}$; б) $I_n = \frac{2_{n-1}}{2an}I_{n-1} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}a^{-(n+\frac{1}{2})}$, где $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)$, $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdots 2n$.

12. а) $\frac{\pi}{8}$; б) $\frac{2}{15}a^5$; в) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$; г) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$; д) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

17. $\vec{F} = \{0; 0; F_z\}$, где $F_z = -\frac{m}{z_0^2}$, если $z_0 \geq R$, $F_z = -\frac{mz_0}{R^3}$, если $0 < z_0 < R$.

Подписано к печати . . . 2016 г.
Тираж 100 экз. Заказ № . . ..
Отпечатано в отделе оперативной печати
Физического факультета