Математический анализ-2

Тема 1. Множества точек пространства R^m.

1. Сформулируйте определение:

1.1. окрестности точки пространства R^m;
1.2. шаровой окрестности точки пространства R^m;
1.3. прямоугольной окрестности точки пространства R^m;
1.4. внутренней точки множества D точек пространства R^m;
1.5. изолированной точки множества D точек пространства R^m;
1.6. граничной точки множества D точек пространства R^m;
1.7. границы множества D точек пространства R^m;
1.8. открытого множества точек пространства R^m;
1.9. замкнутого множества точек пространства R^m;
1.10. предельной точки множества D точек пространства R^m;
1.11. непрерывной кривой в пространстве R^m;
1.12. связного множества точек пространства R^m.

2. Вопросы и задачи.

Замечание: *Пустое множество считается одновременно открытым и замкнутым.*

2.1. Докажите, что любая внутренняя точка множества точек пространства R^m является его предельной точкой.
2.2. Докажите, что любая граничная точка множества точек пространства R^m является либо предельной точкой, либо изолированной точкой этого множества.
2.3. Докажите, что любая изолированная точка множества точек пространства R^m является граничной точкой этого множества.
2.4. Докажите, что множество точек пространства R^m, содержащее хотя бы одну свою граничную точку, не является открытым.
2.5. Докажите, что открытое множество не содержит ни одной своей граничной точки.
2.6. Приведите пример непустого множества точек на плоскости, которое не имеет внутренних точек.
2.7. Приведите пример непустого множества точек на плоскости, все точки которого являются граничными точками этого множества.
2.8. Приведите пример непустого множества точек на плоскости, которое совпадает со своей границей.
2.9. Приведите пример непустого множества точек на плоскости, все точки которого являются предельными точками этого множества.

2.10. Приведите пример множества точек на плоскости, каждая граничная точка которого является его предельной точкой.

2.11. Приведите пример множества точек на плоскости, для которого ни одна граничная точка не является его предельной точкой.

2.12. Приведите пример непустого множества точек на плоскости, для которого множество всех предельных точек не совпадает с множеством всех граничных точек.

2.13. Приведите пример непустого замкнутого множества точек на плоскости, которое не имеет ни одной предельной точки.

2.14. Приведите пример множества точек пространства R^m, каждая граничная точка которого является его изолированной точкой.

2.15. Докажите, что непустое множество точек на плоскости, не имеющее ни одной граничной точки, состоит из бесконечного числа точек.

2.16. Найдите все граничные точки множества точек на плоскости $\left\{(x,y): x^2+y^2<1\right\}$.

2.17. Найдите все предельные точки множества точек на плоскости $\left\{(x,y): x^2+y^2<1\right\}$.

2.18. Найдите все граничные точки множества точек на плоскости $\left\{(x,y): x^2+y^2=1\right\}$.

2.19. Найдите все предельные точки множества точек на плоскости $\left\{(x,y): x^2+y^2=1\right\}$.

2.20. Найдите все граничные точки множества точек на плоскости $\left\{(x_n,y_n)=\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)\right\}$, $n\in\mathbf{N}$. Обоснуйте ответ.

2.21. Найдите все граничные точки множества точек на плоскости $\left\{(x_n,y_n)=\left(\cos\frac{\pi}{n},\sin\frac{\pi}{n}\right)\right\}$, $n\in\mathbf{N}$. Обоснуйте ответ.

2.22. Является ли множество точек $\left\{(x_n,y_n)=\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)\right\}$, $n\in\mathbf{N}$ на плоскости открытым? Замкнутым? Ответ обоснуйте.

3. Задачи повышенной трудности.

3.1. Докажите, что объединение любого числа открытых множеств является открытым множеством.

3.2. Докажите, что пересечение конечного числа открытых множеств является открытым множеством.

3.3. Докажите, что объединение конечного числа замкнутых множеств является замкнутым множеством.

3.4. Докажите, что пересечение любого числа замкнутых множеств является замкнутым множеством.

3.5. Приведите пример множества, все элементы которого являются замкнутыми множествами, объединение которых есть открытое множество.

3.6. Докажите, что любая точка множества точек на плоскости, которая не является внутренней, является его граничной точкой.

3.7. Докажите, что непустое множество точек на плоскости, состоящее из конечного числа точек, совпадает со своей границей.

3.8. Докажите, что любое непустое ограниченное замкнутое множество точек на плоскости, все точки которого являются изолированными, содержит конечное число точек.

3.9. Докажите, что сфера в пространстве R^m является замкнутым множеством.

Тема 2. Последовательности точек пространства R^m.

1. Сформулируйте определение:

1.1. ограниченной последовательности точек пространства R^m;

1.2. неограниченной последовательности точек пространства R^m;

1.3. предела последовательности точек пространства R^m;

1.4. сходящейся последовательности точек пространства R^m;

1.5. предельной точки последовательности точек пространства R^m;

1.6. фундаментальной последовательности точек пространства R^m.

2. Сформулируйте (без доказательства):

2.1. теорему о критерии Коши сходимости последовательности точек пространства R^m;

2.2. теорему Больцано-Вейерштрасса для последовательности точек на плоскости.

3. Теоремы с доказательством.

3.1. Докажите, что любая ограниченная последовательность точек на плоскости имеет по крайней мере одну предельную точку.

3.2. Докажите, что если последовательность точек $\{M_n(x_n, y_n)\}$ на плоскости является сходящейся, то числовые последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ являются сходящимися.

3.3. Докажите, что если числовые последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ являются сходящимися, то последовательность точек $\{M_n(x_n, y_n)\}$ на плоскости является сходящейся.

3.4. Сформулируйте и докажите теорему о критерии Коши сходимости последовательности точек пространства R^m.

4. Вопросы и задачи.

4.1. Докажите, что если последовательность точек $\{M_n(x_n, y_n)\}$ на плоскости является ограниченной, то числовые последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ являются ограниченными.

4.2. Докажите, что если числовые последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ являются ограниченными, то последовательность точек $\{M_n(x_n, y_n)\}$ на плоскости является ограниченной.

4.3. Докажите, что любая сходящаяся последовательность точек пространства R^m является ограниченной.

4.4. Докажите, что если последовательность точек точек пространства R^m не является ограниченной, то она не сходится.

4.5. Докажите, что если числовые последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ являются сходящимися, то последовательность точек $\{M_n(x_n, y_n)\}$ на плоскости является ограниченной.

4.6. Докажите, что если числовые последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ являются фундаментальными, то последовательность точек $\{M_n(x_n, y_n)\}$ на плоскости является фундаментальной.

4.7. Найдите предел последовательности точек на плоскости:

а) $\left(\cos\dfrac{\pi}{n}, \sin\dfrac{\pi}{n}\right)$, б) $\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n, \sqrt[n]{n}\right)$.

5. Задачи повышенной трудности.

5.1. Докажите, что последовательность точек на плоскости, расположенных на окружности, имеет по крайней мере одну предельную точку.

5.2. Найдите все предельные точки последовательность точек на плоскости

$\left(x_n, y_n\right) = \left(\cos\dfrac{\pi n}{3}, \sin\dfrac{\pi n}{3}\right)$.

5.3. Найдите предел последовательности точек $\left(x_n, y_n\right)$ на плоскости, если

$\left(x_1, y_1\right) = \left(8;3\right)$, $\left(x_{n+1}, y_{n+1}\right) = \left(\dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{4}{x_n}\right), \dfrac{1}{2}\left(y_n + \dfrac{9}{y_n}\right)\right)$.

Тема 3. Функции, предел, непрерывность.

1. Сформулируйте определение:

1.1. ограниченной сверху (снизу) функции $u(M)$, заданной на множестве D точек пространства R^m;

1.2. неограниченной сверху (снизу) функции $u(M)$, заданной на множестве D точек пространства R^m;

1.3. точной верхней (нижней) грани функции $u(M)$, заданной на множестве D точек пространства R^m;

1.4. предела функции $u(M)$ в точке $M_0 \in R^m$ “по Коши”;
1.5. предела функции $u(M)$ в точке $M_0 \in R^m$ “по Гейне”;
1.6. предела функции $u(M)$ в бесконечно удаленной точке пространства R^m “по Гейне”;
1.7. предела функции $u(M)$ в бесконечно удаленной точке пространства R^m “по Коши”;
1.8. функции $u(x,y)$, непрерывной по переменной x в точке $M_0(x_0,y_0)$;
1.9. функции $u(x,y)$, непрерывной по совокупности переменных в точке $M_0(x_0,y_0)$;
1.10. повторного предела функции $u(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$.

2. Сформулируйте (без доказательства):

2.1. теорему о критерии Коши существования предела функции в точке $M_0 \in R^m$;
2.2. теорему о непрерывности суммы двух функций нескольких переменных;
2.3. теорему о непрерывности произведения двух функций нескольких переменных;
2.4. теорему о непрерывности частного от деления двух функций нескольких переменных;
2.5. теорему об устойчивости знака непрерывной функции нескольких переменных;
2.6. теорему о прохождении непрерывной функции нескольких переменных через любое промежуточное значение;
2.7. первую теорему Вейерштрасса для функции нескольких переменных;
2.8. вторую теорему Вейерштрасса для функции нескольких переменных;
2.9. теорему о непрерывности сложной функции нескольких переменных;
2.10. теорему Кантора для функции нескольких переменных.

3. Теоремы с доказательством.

3.1. Докажите теорему о пределе суммы двух функций нескольких переменных в данной точке.
3.2. Докажите теорему о пределе произведения двух функций нескольких переменных в данной точке.
3.3. Докажите теорему о непрерывности суммы двух функций нескольких переменных.
3.4. Докажите теорему о непрерывности произведения двух функций нескольких переменных.
3.5. Докажите теорему о непрерывности частного от деления двух функций нескольких переменных.
3.6. Докажите теорему о непрерывности сложной функции нескольких переменных.

3.7. Докажите теорему об устойчивости знака непрерывной функции двух переменных.

3.8. Докажите теорему о прохождении непрерывной функции двух переменных через любое промежуточное значение.

3.9. Докажите первую теорему Вейерштрасса для функции двух переменных.

3.10. Докажите вторую теорему Вейерштрасса для функции двух переменных.

4. Вопросы и задачи.

4.1. Сформулируйте определение “по Коши” того, что функция $u(M)$ не имеет предела в точке M_0 пространства R^m.

4.2. Сформулируйте определение “по Коши” того, что функция $u(M)$ не имеет предела в бесконечно удаленной точке пространства R^m.

4.3. Сформулируйте определение “по Гейне” того, что функция $u(M)$ не имеет предела в точке M_0 пространства R^m.

4.4. Сформулируйте определение “по Гейне” того, что функция $u(M)$ не имеет предела в бесконечно удаленной точке пространства R^m.

4.5. Сформулируйте “по Гейне” отрицание того, что число b является пределом функции $u(M)$ в точке M_0.

4.6. Пусть функция $u(x,y)$ определена в окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$ и непрерывна по совокупности переменных в этой точке. Докажите, что эта функция в точке M_0.непрерывна по переменной x.

4.7. Нарисуйте семейство линий уровня функции

4.7.1. $u(x,y)=xy$;

4.7.2. $u(x,y)=\dfrac{y}{x}$;

4.7.3. $u(x,y)=\dfrac{2y}{x^2+y^2}$;

4.7.4. $u(x,y)=\dfrac{2x}{x^2+y^2}$;

4.7.5. $u(x,y)=\dfrac{2x+2y}{x^2+y^2}$;

4.7.6. $u(x,y)=x^2-4xy+4y^2$.

4.8. Приведите пример функции, ограниченной сверху и неограниченной снизу на множестве $\left\{(x,y): x^2+y^2\le 1\right\}$.

4.9. Приведите пример функции, неограниченной сверху и ограниченной снизу на множестве $\left\{(x,y): x^2+y^2> 1\right\}$.

4.10. Приведите пример функции, неограниченной снизу и неограниченной сверху на множестве $\left\{(x,y): x^2+y^2> 1\right\}$.

4.11. Приведите пример функции, неограниченной на множестве $\left\{(x,y): x^2+y^2=1\right\}$.

4.12. Приведите пример функции двух переменных, которая является равномерно непрерывной на множестве $\left\{(x,y): x^2+y^2\le 1\right\}$.

4.13. Приведите пример непрерывной функции двух переменных, которая не является равномерно непрерывной на множестве $\left\{(x,y): x^2+y^2< 1\right\}$.

4.14.Приведите пример функции двух переменных, которая непрерывна и ограничена на множестве $\left\{(x,y): x^2+y^2<1\right\}$, но не достигает на этом множестве своей точной верхней грани.

4.15.Приведите пример функции $u(x,y)$, для которой существует предел $\lim\limits_{\rho\to+0} u(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)$ для любого заданного направления $\vec{l}=(\cos\varphi,\sin\varphi)$, но не существует предел по совокупности переменных $\lim\limits_{M\to M_0} u(x,y)$, где $M_0=(0,0)$. Ответ обоснуйте.

4.16.Приведите пример функции $u(x,y)$, в области определения которой есть такая точка $(a;b)$ ($a\neq 0$, $b\neq 0$), что $\lim\limits_{\rho\to+0,} u(a+\rho\cos\varphi, b+\rho\sin\varphi)=0$ для любого заданного направления $\vec{l}=(\cos\varphi,\sin\varphi)$ но не существует предел по совокупности переменных $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} u(x,y)$. Ответ обоснуйте.

4.17.Приведите пример функции $u(x,y)$, для которой существует предел $\lim\limits_{M\to M_0} u(x,y)$, где $M_0=(0,0)$, предел $\lim\limits_{\rho\to+0} u(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)$ существует для любого заданного направления $\vec{l}=(\cos\varphi,\sin\varphi)$, но не существуют оба повторных предела $\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{y\to b} u(x,y)$ и $\lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a} u(x,y)$. Ответ обоснуйте.

4.18.Приведите пример функции $u(x,y)$, в области определения которой есть такая точка $(a;b)$, в которой $\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{y\to b} u(x,y)\neq \lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a} u(x,y)$. Ответ обоснуйте.

4.19.Приведите пример функции $u(x,y)$, в области определения которой есть такая точка $(a;b)$, в которой $\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{y\to b} u(x,y)=\lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a} u(x,y)$, но $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} u(x,y)$ не существует. Ответ обоснуйте.

4.20.Приведите пример функции $u(x,y)$, в области определения которой есть такая точка $(a;b)$, в которой существует предел по совокупности переменных $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} u(x,y)$, но не существуют повторные пределы $\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{y\to b} u(x,y)$ и $\lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a} u(x,y)$. Ответ обоснуйте.

4.21.Приведите пример функции $u(x,y)$, в области определения которой есть такая точка $(a;b)$, в которой существует предел по совокупности переменных $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} u(x,y)$, существует повторный предел $\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{y\to b} u(x,y)$, но не существует повторный предел $\lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a} u(x,y)$. Ответ обоснуйте.

4.22.Приведите пример функции $u(x,y)$, в области определения которой есть такая точка $(a;b)$, в которой существуют оба повторных предела $\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{y\to b} u(x,y)$ и

$\lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a} u(x,y)$, но не существует предел по совокупности переменных $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} u(x,y)$.

Ответ обоснуйте.

4.23. Найдите предел функции $u(x,y)$ при $M(x,y)\to(0,0)$ или докажите, что предел не существует:

4.23.1. $u(x,y)=x\ln\sqrt{x^2+y^2}$;

4.23.2. $u(x,y)=x\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x}$;

4.23.3. $u(x,y)=y\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{x}{x^2+y^2}$;

4.23.4. $u(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}$;

4.23.5. $u(x,y)=\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2}$;

4.23.6. $u(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$;

4.23.7. $u(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)$;

4.23.8. $u(x,y)=\dfrac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$;

4.23.9. $u(x,y)=xy\cdot\ln\left(x^2+y^2\right)$;

4.23.10. $u(x,y)=xy\cdot\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$;

4.23.11. $u(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2}\cdot\exp\left(-\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$.

4.24. Найдите предел функции $u(x,y)$ при $M(x,y)\to\infty$ или докажите, что предел не существует:

4.24.1. $u(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$;

4.24.2. $u(x,y)=\dfrac{x^3+y^3}{x^4+y^4}$;

4.24.3. $u(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{x^2+xy+y^2}$;

4.24.4. $u(x,y)=xy\cdot\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$;

4.24.5. $u(x,y)=\left(x^2+y^2\right)\cdot\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$;

4.24.6. $u(x,y)=\dfrac{x^3+y^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}$;

4.24.7. $u(x,y)=\dfrac{\ln\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}$.

4.25. Найдите пределы, или докажите, что они не существуют:

4.25.1. $\lim\limits_{\substack{x\to+0\\ y\to2}}(1+xy)^{\frac{y}{x}}$;

4.25.2. $\lim\limits_{\substack{x\to+0\\ y\to2}}\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^x$;

4.25.3. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to3}}\left(1+x^2y\right)^{\frac{y}{x^2+x^3y^4}}$.

4.26. Исследуйте функцию на непрерывность по каждой из переменных и по совокупности переменных в заданной точке:

4.26.1. $u(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ в точке (0,0);

4.26.2. $u(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ в точке (0,0);

4.26.3. $u(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ в точке (0,0);

4.26.4. $u(x,y)=\begin{cases}\dfrac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ в точке (0,0);

4.26.5. $u(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(xy)}{xy}, & xy\neq 0,\\ 1, & xy=0\end{cases}$ в точках (0,0) и (0,1);

4.26.6. $u(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(xy)}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0\end{cases}$ в точках (0,0), (1,0), (0,1);

4.26.7. $u(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(xy)}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 1, & x^2+y^2=0\end{cases}$ в точке (0,0);

4.26.8. $u(x,y)=\begin{cases}xy\ln(|xy|), & xy\neq 0,\\ 0, & xy=0\end{cases}$ в точке (0,0);

4.26.9. $u(x,y)=\begin{cases}x\ln(|xy|), & xy\neq 0,\\ 0, & xy=0\end{cases}$ в точке (0,0).

Тема 4. Дифференцируемые функции.

1. Сформулируйте определение:

1.1. функции $f(x_1,...,x_m)$, дифференцируемой в точке $M(x_1,x_2,...,x_m)$;

1.2. частной производной функции $f(x_1,...,x_m)$ по переменной x_k в точке $M(x_1,x_2,...,x_m)$;

1.3. первого дифференциала функции нескольких переменных;

1.4. касательной плоскости к графику функции $z=f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$;

1.5. функции нескольких переменных, *n* раз дифференцируемой в данной точке;

1.6. второго дифференциала функции $f(x_1,...,x_m)$ в данной точке;

1.7. *n* – ого дифференциала функции $f(x_1,...,x_m)$ в данной точке;

1.8. градиента функции $f(x,y,z)$ в точке $M(x_0,y_0,z_0)$;

1.9. производной по направлению $\vec{l}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ функции $f(x,y,z)$ в точке $M(x_0,y_0,z_0)$.

2. Основные теоремы и формулы (без доказательства).

2.1. Сформулируйте теорему о необходимых условиях дифференцируемости функции $f(x_1,...,x_m)$ в точке M_0 пространства $\mathbb{R}^m$.

2.2. Сформулируйте теорему о достаточных условиях дифференцируемости функции $f(x_1,...,x_m)$ в точке M_0 пространства $\mathbb{R}^m$.

2.3. Сформулируйте теорему о достаточных условиях равенства $f_{xy}=f_{yx}$ в точке $M_0\left(x_0,y_0\right)$.

2.4. Сформулируйте теорему о касательной плоскости к графику функции двух переменных.

2.5. Сформулируйте теорему о дифференцируемости сложной функции нескольких переменных.

2.6. Запишите формулу для частных производных сложной функции.

2.7. Запишите выражение производной функции $f(x,y,z)$ по заданному направлению в данной точке через частные производные функции в этой точке.

2.8. Запишите выражение производной функции $f(x,y,z)$ по заданному направлению в данной точке через градиент функции в этой точке.

2.9. Запишите формулу Лагранжа конечных приращений для функции нескольких переменных. При каких условиях эта формула верна?

2.10. Запишите выражение для второго дифференциала функции нескольких независимых переменных.

2.11. Запишите выражение для дифференциала n–го порядка функции двух независимых переменных.

2.12. Запишите выражение для второго дифференциала функции $f\left(u,v\right)$, если $u=u\left(x,y\right)$, $v=v\left(x,y\right)$, причем $\left(x,y\right)$ – независимые переменные.

2.13. Запишите выражение для второго дифференциала функции $f\left(u,v\right)$, если $u=u\left(t\right)$, $v=v\left(t\right)$, причем t – независимая переменная.

2.14. Запишите выражение для второго дифференциала функции $f\left(u,v,w\right)$, если $u=u\left(x,y\right)$, $v=v\left(x,y\right)$, $w=w\left(x,y\right)$, причем $\left(x,y\right)$ – независимые переменные.

2.15. Запишите выражение для второго дифференциала функции $f\left(u,v,w\right)$, если $u=u\left(x,y,z\right)$, $v=v\left(x,y,z\right)$, $w=w\left(x,y,z\right)$, причем $\left(x,y,z\right)$ – независимые переменные.

2.16. Сформулируйте теорему о формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для функции $f(x,y)$.

2.17. Сформулируйте теорему о формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано для функции $f(x,y)$.

2.18. Сформулируйте теорему о формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для функции $f(x_1,...,x_m)$.

2.19. Сформулируйте теорему о формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано для функции $f(x_1,...,x_m)$.

3. Теоремы с доказательством.

3.1. Докажите теорему о непрерывности дифференцируемой функции нескольких переменных в точке.

3.2. Докажите теорему о дифференциале суммы двух дифференцируемых функций нескольких переменных в данной точке.

3.3. Докажите теорему о дифференциале произведения двух дифференцируемых функций нескольких переменных в данной точке.

3.4. Докажите теорему о необходимых условиях дифференцируемости функции $f(x_1,...,x_m)$ в точке M_0 пространства $\mathbb{R}^m$.

3.5. Докажите теорему о достаточных условиях дифференцируемости функции $f(x_1,...,x_m)$ в точке M_0 пространства $\mathbb{R}^m$.

3.6. Докажите теорему о достаточных условиях равенства $f_{xy} = f_{yx}$ в точке $M_0(x_0, y_0)$.

3.7. Докажите теорему о касательной плоскости к графику функции двух переменных.

3.8. Докажите теорему о дифференцируемости сложной функции $f(u,v)$, если $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$, причем (x,y)-независимые переменные.

3.9. Докажите, что производная дифференцируемой в точке $M(x_0, y_0, z_0)$ функции $f(x,y,z)$ по направлению $\vec{l} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ равна скалярному произведению вектора $\vec{l}$ и градиента функции f в точке M.

3.10. Докажите теорему о формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для функции $f(x_1,...,x_m)$.

3.11. Докажите теорему о формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано для функции $f(x,y)$.

4. Вопросы и задачи.

4.1. Сформулируйте и докажите теорему о формуле Лагранжа (конечных приращений) для функции нескольких переменных.

4.2. Докажите, что если функция $u = f(x,y)$ имеет частные производные первого порядка в любой точке круга единичного радиуса и $\left|u_x(x,y)\right| \le 1$, $\left|u_y(x,y)\right| \le 1$, то для любых двух точек M и N этого круга справедливо неравенство $|u(M) - u(N)| < 3$.

4.3. Приведите пример функции $u = f(x,y)$, непрерывной в точке $M_0 = (x_0, y_0)$, но не дифференцируемой в этой точке.

4.4. Приведите пример функции $u = f(x, y)$, у которой существуют первые частные производные в точке (0;0), но функция не является дифференцируемой в этой точке.

4.5. Приведите пример функции $u = f(x, y)$, которая в некоторой точке имеет частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$, но не является непрерывной по совокупности переменных в этой точке. Может ли такая функция быть разрывной в этой точке по отдельным переменным? Обоснуйте ответ.

4.6. Приведите пример функции $u = f(x, y)$, которая в некоторой точке имеет частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ и непрерывна, но не дифференцируема в этой точке.

4.7. Что означает “инвариантность формы первого дифференциала”?

4.8. Что означает “неинвариантность формы дифференциала второго порядка”?

4.9. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_1, функция $g(x)$ дифференцируема в точке x_2. Докажите, что функция $u(x, y) = f(x) \cdot g(y)$ дифференцируема в точке $M = (x_1, x_2)$.

4.10. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_1, функция $g(x)$ дифференцируема в точке x_2. Докажите, что функция $u(x, y) = f(x) + g(y)$ дифференцируема в точке $M = (x_1, x_2)$.

4.11. Для функции $z = u(x, y)$ найдите частные производные первого порядка, градиент, первый и второй дифференциалы в точке $M(x, y)$, запишите уравнение касательной плоскости к поверхности $z = u(x, y)$ в точке $M(x, y, u(x, y))$, найдите вектор нормали к этой плоскости. Вычислите все указанные величины в точке $M_0(x_0, y_0)$. Вычислите производную по направлению заданного вектора $\vec{L}$ в точке $M_0(x_0, y_0)$:

4.11.1. $u(x, y) = 2x + 3y$, $M_0 = (3;2)$, $\vec{L} = (3;-2)$;

4.11.2. $u(x, y) = 8x^2 + 2y^2 - x^4 - y^4$, $M_0 = (1;1)$, $\vec{L} = (-1;-1)$;

4.11.3. $u(x, y) = xy(3 - x - y)$, $M_0 = (2;1)$, $\vec{L} = (-1;-1)$;

4.11.4. $u(x, y) = x^2 y^3 (6 - 2x - 3y)$, $M_0 = (-1;1)$, $\vec{L} = (-1;-2)$;

4.11.5. $u(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ $M_0 = (1;1)$, $\vec{L} = (-1;-1)$;

4.11.6. $u(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, $M_0 = (\sqrt{3};1)$, $\vec{L}_1 = (1;-\sqrt{3})$, $\vec{L}_2 = (\sqrt{3};1)$;

4.11.7. $u(x, y) = x^y - y^x$, $M_0 = (e;e)$, $M_1 = (1;1)$, $\vec{L} = (1;-1)$;

4.11.8. $u(x, y) = x^3 - x^2 y + y^3 - 1$, $M_0 = (1;1)$, $\vec{L}$ образует угол $\frac{\pi}{6}$ с осью Ox.

4.12.Для функции $f(x,y,z)$ найдите частные производные первого порядка, градиент, первый и второй дифференциалы. Вычислите все указанные величины в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$. Найдите производную по направлению заданного вектора $\vec{L}$ в точке $M_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$:

4.12.1. $u\left(x,y,z\right)=x^3+x+y+xyz\,, M_0=(1;1;1)\,, \vec{L}=\left(1;1;1\right)$;

4.12.2. $u\left(x,y,z\right)=\ln(xyz)$, $M_0=(1;1;1)$, $\vec{L}=\left(1;1;1\right)$;

4.12.3. $u\left(x,y,z\right)=xyz(4-x-y-z)$, $M_0=(1;1;-1)$, $\vec{L}=\left(1;2;-2\right)$;

4.12.4. $u\left(x,y,z\right)=x^3y^4z^5(13-3x-4y-5z)$, $M_0=(-1;1;1)\,,\vec{L}=\left(1;2;1\right)$.

4.13.Имеет ли функция $u\left(x,y\right)$ частные производные первого порядка в точке $\left(0;0\right)$? Если имеет, найдите их и исследуйте эти частные производные на непрерывность в точке $\left(0;0\right)$:

4.13.1. $u\left(x,y\right)=\sqrt[3]{xy\left(x+y\right)}$;

4.13.2. $u\left(x,y\right)=\sqrt[3]{x^2y}$;

4.13.3. $u\left(x,y\right)=\sqrt[3]{xy}$;

4.13.4. $u\left(x,y\right)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$;

4.13.5. $u\left(x,y\right)=\sqrt[3]{xy\left(x^2+y^2\right)}$;

4.13.6. $u\left(x,y\right)=\sqrt[3]{x^4-y^4}$;

4.13.7. $u\left(x,y\right)=\sqrt[3]{x^5-y^5}$;

4.13.8. $u\left(x,y\right)=\sqrt[3]{yx^4+xy^4}$.

4.14.Исследуйте функцию $u\left(x,y\right)$ на дифференцируемость в точке $\left(0;0\right)$:

4.14.1. $u\left(x,y\right)=\sqrt[3]{xy}$;

4.14.2. $u\left(x,y\right)=\sqrt[3]{x^2y}$;

4.14.3. $u\left(x,y\right)=xy\cdot\sqrt[3]{xy}$;

4.14.4. $u\left(x,y\right)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$;

4.14.5. $u\left(x,y\right)=\sqrt[3]{x^4-y^4}$;

4.14.6. $u\left(x,y\right)=\sqrt[3]{xy\left(x^2+y^2\right)}$;

4.14.7. $u\left(x,y\right)=\sqrt[3]{xy\left(x+y\right)}$;

4.14.8. $u\left(x,y\right)=xy\ln\left(x^2+y^2\right)$, если $x^2+y^2>0$, $u\left(0,0\right)=0$;

4.14.9. $u\left(x,y\right)=xy\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$, если $x^2+y^2>0$, $u\left(0,0\right)=0$;

4.14.10. $u\left(x,y\right)=xy\cdot\sqrt[3]{x^3+y^3}\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$, если $x^2+y^2>0$, $u\left(0,0\right)=0$.

4.15.Для функции $u\left(x,y,z\right)=e^{x^2+y^2+z^2}$ найдите $\dfrac{\partial^3u}{\partial x^2\partial y}$, $\dfrac{\partial^3u}{\partial x\partial y\partial z}$.

4.16.Найдите дифференциал первого порядка функции $u\left(x,y\right)$, если $f\left(t\right)$ – дифференцируемая функция, x и y — независимые переменные:

4.16.1. $u\left(x,y\right)=f\left(x\right)+f\left(y\right)$;

4.16.2. $u\left(x,y\right)=f\left(x-y\right)$;

4.16.3. $u\left(x,y\right)=\dfrac{f\left(x\right)}{f\left(y\right)}$, $f\left(y\right)\neq0$;

4.16.4. $u\left(x,y\right)=f\left(xy\right)$;

4.16.5. $u(x,y)=f(x)\cdot f(y)$;

4.16.6. $u(x,y)=f(x/y)$;

4.16.7. $u(x,y)=f\left(x^2+y^2\right)$.

4.17.Найдите дифференциал первого порядка функции $u(x,y)$, если $f(t)$, $g(t)$ – дифференцируемые функции, x и y — независимые переменные:

4.17.1. $u(x,y)=f(x)\cdot g(y)$;

4.17.2. $u(x,y)=f(xy)+g(x/y)$;

4.17.3. $u(x,y)=f(x,y)\cdot g(x,y)$;

4.17.4. $u(x,y)=f(x-y)+g(x+y)$;

4.17.5. $u(x,y)=\dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}$.

4.18.Найдите дифференциал первого порядка функции $u(x,y,z)$, если $f(t)$ – дифференцируемая функция, x, y и z — независимые переменные:

4.18.1. $u(x,y,z)=f(x)+f(y)+f(z)$;

4.18.2. $u(x,y,z)=f(x+y-z)$.

4.19.Найдите дифференциал первого порядка функции $u(x,y,z)=f(x)+g(y)+h(z)$, если $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ – дифференцируемые функции, x, y и z — независимые переменные.

4.20.Найдите дифференциалы первого и второго порядка сложной функции u, если f — дважды дифференцируемая функция, x и y — независимые переменные:

4.20.1. $u=f(\xi,\theta)$, $\quad \xi=x^2+y^2$, $\quad \theta=x^2-y^2$;

4.20.2. $u=f(\xi,\theta)$, $\quad \xi=x+y^2$, $\quad \theta=y-x$;

4.20.3. $u=f(\xi,y)$, $\quad \xi=xy$;

4.20.4. $u=y\cdot f(\xi,x)$, $\quad \xi=x^2+y$;

4.20.5. $u=f(\xi,\eta,\theta)$, $\quad \xi=xy$, $\quad \eta=x-y$, $\quad \theta=x+y$.

4.21. Предполагая, что функции φ и ψ дифференцируемы достаточное число раз, проверить следующее равенство:

4.21.1. $\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{z}{y^2}$, если $z=y\varphi(x^2-y^2)$;

4.21.2. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=xy+z$, если $z=xy+x\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$;

4.21.3. $a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, если $z=\varphi(x-ay)+\psi(x+ay)$, a – положительная константа.

4.22.Пусть функция $u(x,y)$ такова, что в точке $M_0(x_0,y_0)$ $u(M_0)=0,\quad du\big|_{M_0}=0,\quad d^2u\big|_{M_0}=0$. Докажите, что $u(x,y)=o\left(\rho^2\right)$ при $\rho\to 0$, где $\rho=\sqrt{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2}$.

4.23.Запишите формулу Тейлора порядка n с центром разложения в точке M_0 и с остаточным членом в форме Пеано для функций:

4.23.1. $u(x,y)=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, $\quad M_0(2;3)$, $\quad n=2$;

4.23.2. $u(x,y)=x^y$, $\quad M_0(e;e)$, $\quad n=2$;

4.23.3. $u(x,y)=e^x\sin y,\quad M_0(0;0),\quad n=3$;

4.23.4. $u(x,y)=\ln(1+x+y),\quad M_0(0;0),\quad n=3$;

4.23.5. $u(x,y,z)=x^3+x+y+xyz,\quad M_0(x_0,y_0,z_0), n=3$.

5. Задачи повышенной трудности.

5.1. Пусть функция $u(x,y)$ дифференцируема два раза в точке $M_0(x_0,y_0)$ и $R_3(x,y)=u(x,y)-P_2(x,y)$ – остаточный член формулы Тейлора, где $P_2(x,y)$ – многочлен Тейлора второго порядка. Докажите, что функция $R_3(x,y)$ и все её частные производные первого и второго порядка обращаются в нуль в точке M_0.

5.2. Докажите, что функция $f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ имеет в точке $(0;0)$ смешанные частные производные второго порядка, но при этом $f_{xy}(0;0)\neq f_{yx}(0;0)$.

5.3. Докажите, что функция $f(x,y)=\begin{cases} xy & \text{при } |y|\le|x|,\\ -xy & \text{при } |y|>|x|\end{cases}$ имеет в точке $(0;0)$ смешанные частные производные второго порядка, но при этом $f_{xy}(0;0)\neq f_{yx}(0;0)$.

Тема 5. Локальный экстремум.

1. Сформулируйте определение:

1.1. точки локального экстремума функции нескольких переменных;

1.2. положительно определённой квадратичной формы;

1.3. знакопеременной квадратичной формы.

2. Сформулируйте (без доказательства):

2.1. теорему о необходимых условиях локального экстремума в точке $M_0(x_0,y_0)$ функции $u(x,y)$, дифференцируемой в этой точке;

2.2. теорему о достаточных условиях локального экстремума в точке $M_0(x_0,y_0)$ функции $u(x,y)$, дважды дифференцируемой в этой точке.

3. Теоремы с доказательством.

3.1. Докажите теорему о необходимых условиях локального экстремума функции двух переменных.

3.2. Докажите теорему о достаточных условиях локального экстремума функции двух переменных.

4. Вопросы и задачи.

4.1. Пусть функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ имеют локальный минимум в точке $M_0(x_0,y_0)$. Докажите, что функция $u(x,y)+v(x,y)$ также имеет локальный минимум в указанной точке.

4.2. Приведите пример функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$, которые имеют локальный минимум в точке $M_0(x_0,y_0)$, а функция $u(x,y)\cdot v(x,y)$ имеет локальный максимум в указанной точке.

4.3. Приведите пример функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$, которые имеют локальный минимум в точке $M_0(x_0,y_0)$, а функция $u(x,y)\cdot v(x,y)$ не имеет локального экстремума в указанной точке.

4.4. Приведите пример функции $u(x,y)$, имеющей в точке $M_0(1;1)$ локальный экстремум, у которой не существует $\frac{\partial u}{\partial y}(M_0)$.

4.5. Приведите пример функции $u(x,y)$, удовлетворяющей условию $du(0;0)=0$, но не имеющей в точке $M_0(0;0)$ локального экстремума.

4.6. Исследуйте, является ли (0;0) точкой локального максимума, локального минимума функции $f(x,y)$ или же экстремум в указанной точке отсутствует:

4.6.1. $f(x,y)=-x^2+2xy-3y^2$;

4.6.2. $f(x,y)=3x^2+10xy+8y^2$;

4.6.3. $f(x,y)=x^2+xy+y^2+x$;

4.6.4. $f(x,y)=3x^2-6xy+4y^2$;

4.6.5. $f(x,y)=5x^2-8xy+3y^2$;

4.6.6. $f(x,y)=-5x^2+7xy-3y^2$;

4.6.7. $f(x,y)=8x^2-12xy+5y^2$;

4.6.8. $f(x,y)=5x^2+3xy+2y^2-e^y$.

4.7. Найдите все точки локального максимума и локального минимума функций:

4.7.1. $u(x,y)=x^2+xy+y^2$;

4.7.2. $u(x,y)=x^3+y^3-3xy$;

4.7.3. $u(x,y)=xy+\frac{8}{x}+\frac{8}{y}$;

4.7.4. $u(x,y)=(5-2x+y)e^{x^2-y}$.

4.8. Найдите все точки локального максимума и локального минимума функции $f(x,y)$, расположенные в области $x>0$, $y>0$, если:

4.8.1. $f(x,y)=xy(6-x-y)$;

4.8.2. $f(x,y)=x^2y^2(4-x^2-2y)$;

4.8.3. $f(x,y)=x^5+y^5-5xy$;

4.8.4. $f(x,y)=xy^2(4-x-2y)$;

4.8.5. $f(x,y)=6xy-x^6-y^6$.

4.9. Исследуйте наличие максимума или минимума в точке (0;0) у функции:

4.9.1. $u(x,y)=x^3y^3$;

4.9.2. $u(x,y)=x^3+y^3$;

4.9.3. $u(x,y)=\left(x-y^2\right)^2$;

4.9.4. $u(x,y)=x^4+x^2y^2+y^4$;

4.9.5. $u(x,y)=|x|+|y|$;

4.9.6. $u(x,y)=|x+y|+|x-y|$;

4.9.7. $u(x,y)=\sqrt[3]{xy}$;

4.9.8. $u(x,y)=\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}$;

4.9.9. $u(x,y)=\sqrt[4]{x^4+y^4}$;

4.9.10. $u(x,y)=\log_2(\cos(xy))$;

4.9.11. $u(x,y)=(y-\sin x)^2$;

4.9.12. $u(x,y)=(x-\operatorname{tg} y)^2$.

4.10. Исследуйте, является ли $M\left(\frac{\pi}{2};0;1\right)$ точкой максимума или минимума функции $u(x,y,z)=x\cos y+z\cos x$.

4.11. Найдите все точки локального максимума и локального минимума функций:

4.11.1. $u(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$;

4.11.2. $u(x,y,z)=xy+xz+yz$;

4.11.3. $u(x,y,z)=xyz(4-x-y-z)$;

4.11.4. $u(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2xy-2xz-2yz$;

4.11.5. $u(x,y,z)=x+\frac{y^2}{4x}+\frac{z^2}{y}+\frac{2}{z}$.

5. Задачи повышенной трудности.

5.1. Пусть функция $f(x,y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$, d^2f в точке M_0 существует и является положительно определённой квадратичной формой. Докажите, что касательная плоскость к графику функции $z=f(x,y)$ в точке $N_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ имеет единственную общую точку с графиком в некоторой окрестности точки N_0.

5.2. Пусть функция $f(x,y)$ дважды дифференцируема в точке $M_0(x_0,y_0)$ и в некоторой окрестности точки $N_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ касательная плоскость к графику функции в этой точке имеет единственную общую точку с графиком. Докажите, что второй дифференциал в указанной точке является либо знакоопределённой, либо квазизнакоопределенной квадратичной формой.

5.3. Известно, что касательная плоскость к графику в точке $N_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ дважды дифференцируемой функции $z=f(x,y)$ имеет в любой окрестности точки N_0 не менее двух общих точек с графиком. Может ли при этом условии второй дифференциал d^2f в точке $M_0(x_0,y_0)$ являться знакоопределенной квадратичной формой?

5.4. Пусть функция $u(x,y)=f(x)\cdot g(y)$ имеет локальный экстремум в точке $M(x_1,x_2)$, функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_1, $f(x_1)\neq 0$, функция $g(x)$ дифференцируема в точке x_2, $g(x_2)\neq 0$. Докажите, что $f'(x_1)=0$, $g'(x_2)=0$.

5.5. Пусть функция $f(x)$ имеет локальный минимум в точке x_1, $f(x_1)>0$, функция $g(x)$ имеет локальный минимум в точке x_2, $g(x_2)>0$. Докажите, что функция $u(x,y)=f(x)\cdot g(y)$ имеет локальный минимум в точке $M(x_1,x_2)$.

5.6. Докажите, что если $d^2u(M_0)$ - знакопеременная квадратичная форма, то функция $u(M)$ не имеет локального экстремума в точке M_0.

5.7. Докажите, что если в точке $M_0(x_0,y_0)$ функция $u(x,y)$ трижды дифференцируема, $du\big|_{M_0}=0$, $d^2u\big|_{M_0}=0$, $d^3u\big|_{M_0}\neq 0$, то функция $u(x,y)$ не имеет локального экстремума в точке M_0.

5.8. Докажите, что если точка $M_0(x_0,y_0)$ является точкой локального экстремума трижды дифференцируемой в этой точке функции $u(x,y)$ и $d^2u\big|_{M_0}=0$, то $d^3u\big|_{M_0}=0$.

5.9. Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в точке x_1, $f'(x_1)=0$, функция $g(x)$ дважды дифференцируема в точке x_2, $g'(x_2)=0$, $f(x_1)g(x_2)f''(x_1)g''(x_2)>0$. Докажите, что функция $u(x,y)=f(x)\cdot g(y)$ имеет локальный экстремум в точке $M(x_1,x_2)$.

5.10. Пусть функция $f(x)$ имеет локальный минимум в точке x_1, $f(x_1)>0$, функция $g(x)$ имеет локальный максимум в точке x_2, $g(x_2)>0$. Докажите, что функция $u(x,y)=f(x)\cdot g(y)$ не имеет локального экстремума в точке $M(x_1,x_2)$.

5.11. Пусть функция $u(x,y)$ имеет локальный минимум в точке $M_0(x_0,y_0)$, а функции $x=\varphi(t,s)$ и $y=\psi(t,s)$ имеют отличный от нуля первый дифференциал в точке $K_0(s_0,t_0)$, причем $x_0=\varphi(t_0,s_0)$ и $y_0=\psi(t_0,s_0)$. Докажите, что сложная функция $u(\varphi(t,s),\psi(t,s))$ имеет локальный минимум в точке K_0.

5.12. Пусть непрерывные функции $x=\varphi(t,s)$ и $y=\psi(t,s)$ имеют локальный максимум в точке $K_0(s_0,t_0)$, а дифференцируемая в точке $M_0(x_0,y_0)$ функция $u(x,y)$ такова, что $\frac{\partial u}{\partial x}(M_0)>0$ и $\frac{\partial u}{\partial y}(M_0)>0$, причем $x_0=\varphi(t_0,s_0)$ и $y_0=\psi(t_0,s_0)$. Докажите, что сложная функция $u(\varphi(t,s),\psi(t,s))$ имеет локальный максимум в точке K_0.

Тема 6. Неявные функции.

1. Сформулируйте определение:

1.1. функции $y=f(x)$, заданной неявно уравнением $F(x,y)=0$;

1.2. функции $z=f(x,y)$, заданной неявно уравнением $F(x,y,z)=0$;

1.3. зависимости функций $f_1(x_1,...,x_n),\ldots,\ f_k(x_1,...,x_n)$;

1.4. независимости функций $f_1\left(x_1,...,x_n\right),\ldots,\ f_k\left(x_1,...,x_n\right)$.

2. Сформулируйте (без доказательства):

2.1. теорему о существовании и непрерывности функции $y=f\left(x\right)$, заданной неявно уравнением $F\left(x,y\right)=0$;

2.2. теорему о дифференцируемости функции $y=f\left(x\right)$, заданной неявно уравнением $F\left(x,y\right)=0$;

2.3. теорему о существовании и непрерывности функции $z=f\left(x,y\right)$, заданной неявно уравнением $F\left(x,y,z\right)=0$;

2.4. теорему о дифференцируемости функции $z=f\left(x,y\right)$, заданной неявно уравнением $F\left(x,y,z\right)=0$;

2.5. теорему о существовании и дифференцируемости функций $y=f(x)$, $z=g(x)$, заданных неявно системой уравнений $\begin{cases}F\left(x,y,z\right)=0,\\ G\left(x,y,z\right)=0;\end{cases}$

2.6. теорему о достаточных условиях независимости функций;

2.7. общую теорему о зависимости и независимости функций.

3. Теоремы с доказательством.

3.1. Докажите теорему о существовании и непрерывности функции $y=f\left(x\right)$, заданной неявно уравнением $F\left(x,y\right)=0$.

3.2. Докажите теорему о дифференцируемости функции $y=f\left(x\right)$, заданной неявно уравнением $F\left(x,y\right)=0$.

3.3. Докажите теорему о существовании и непрерывности функции $z=f\left(x,y\right)$, заданной неявно уравнением $F\left(x,y,z\right)=0$.

3.4. Докажите теорему о существовании и дифференцируемости функций $y=f(x)$, $z=g(x)$, заданных неявно системой уравнений $\begin{cases}F\left(x,y,z\right)=0,\\ G\left(x,y,z\right)=0.\end{cases}$

3.5. Докажите теорему о существовании и дифференцируемости функций $x=f(u,v)$, $y=g(u,v)$, заданных неявно системой уравнений $\begin{cases}F\left(x,y\right)=u,\\ G\left(x,y\right)=v;\end{cases}$

3.6. Докажите теорему о достаточных условиях независимости функций.

4. Вопросы и задачи.

4.1. Пусть кривая *C* на плоскости задана уравнением $F\left(x,y\right)=0$. Напишите уравнение нормали к кривой *C* в некоторой точке.

4.2. Пусть кривая *C* на плоскости задана уравнением $F\left(x,y\right)=0$. Напишите уравнение касательной к кривой *C* в некоторой точке.

4.3. Пусть функция $y = f(x)$ задана неявно уравнением $x - g(y) = 0$. Сформулируйте достаточные условия дифференцируемости функции $f(x)$ и запишите формулу для вычисления её производной.

4.4. Докажите, что уравнение $F(x,y) = 0$ в окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ однозначно определяет дифференцируемую функцию $y = f(x)$, найдите df, d^2f в этой точке:

4.4.1. $F(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3$, $M_0(1;1)$;

4.4.2. $F(x,y) = x^3 + y^3 - x - y$, $M_0(1;1)$;

4.4.3. $F(x,y) = \ln(xy) - x^3 + y^3$, $M_0(1;1)$;

4.4.4. $F(x,y) = x^3 + y^3 - 2xy$, $M_0(1;1)$;

4.4.5. $F(x,y) = x^4 + y^4 + y - 3$, $M_0(1;1)$;

4.4.6. $F(x,y) = x^3 + \ln(x+1) - y^2 + e^y - 1$, $M_0(0;0)$;

4.4.7. $F(x,y) = xy + \ln(xy) - 1$, $M_0(2; 1/2)$;

4.4.8. $F(x,y) = e^{x-y} - x^2 - y^2 + 1$, $M_0(1;1)$;

4.4.9. $F(x,y) = \sin(x-y) - x^2 + y^2$, $M_0(1;1)$;

4.4.10. $F(x,y) = e^{x-1} + e^{y-1} - 2xy$, $M_0(1;1)$;

4.4.11. $F(x,y) = e^{x-y} - xy$, $M_0(1;1)$.

4.5. Докажите, что в окрестности точки (1;0;1) уравнение $2e^{x+y-z} = x^2 + z^2$ определяет единственную дважды непрерывно дифференцируемую неявную функцию вида $z = z(x,y)$ и найдите частную производную $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1;0)$.

4.6. Докажите, что в окрестности точки (1;1;1) уравнение $\operatorname{arctg} z = x + y + z - 3 + \dfrac{\pi}{4}$ определяет единственную дважды непрерывно дифференцируемую неявную функцию вида $z = z(x,y)$ и найдите $d^2z(1;1)$.

4.7. Найдите первый дифференциал дифференцируемой функции $y = f(x)$, заданной неявно уравнением $u(x,y) = 0$:

4.7.1. $u(x,y) = x^4 + y^3 - 2x^2y$;

4.7.2. $u(x,y) = x^2 + y^5 - 2xy$;

4.7.3. $u(x,y) = x^4 + y^4 + 2y - 4x$.

4.8. Докажите, что уравнение $F(x,y,z) = 0$ в окрестности точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ однозначно определяет дифференцируемую функцию $z = f(x,y)$, найдите df, d^2f в этой точке:

4.8.1. $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 3$, $M_0(0;0;1)$;

4.8.2. $F(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - xyz - 2$, $M_0(1;1;1)$;

4.8.3. $F(x,y,z) = x + y + z^5 - 3xyz$, $M_0(1;1;1)$;

4.8.4. $F(x,y,z) = 3\ln(xyz) - x - y - z + 3$, $M_0(1;1;1)$;

4.8.5. $F(x,y,z)=x+y+z-3e^{xyz-1}$, $M_0(1;1;1)$;

4.8.6. $F(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-3-\ln(xyz)$, $M_0(1;1;1)$.

4.9. Найдите частные производные первого порядка и первый дифференциал дифференцируемой функции $z=z(x,y)$, заданной неявно уравнением

4.9.1. $xyz=x^2+y^2+z^2$;

4.9.2. $z\cos x+y\cos z+x\cos y=3$;

4.9.3. $x^2+zx+z^2+y=0$;

4.9.4. $x+y+z+e^{-z}=0$.

4.10. Пусть в окрестности точки (x_0,y_0,z_0) данное уравнение имеет единственное решение вида $z=z(x,y)$. Найдите указанные частные производные функции $z=z(x,y)$ в точке (x_0,y_0):

4.10.1. $\operatorname{arctg}\dfrac{z}{x}=z+x+y$; $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$;

4.10.2. $\ln(xy+yz)=z^2+x^2+y^2-2$; $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

4.11. Пусть функции $y=y(x)$, $z=z(x)$ заданы неявно системой уравнений $f(x,y,z)=0,\quad g(x,y,z)=0$. Найдите первый дифференциал функции $y(x)$ и $\dfrac{dz}{dx}$.

4.12. Пусть функции $x=f(u,v),\quad y=g(u,v)$ заданы неявно системой уравнений

$\begin{cases}F(x,y)=u,\\ G(x,y)=v.\end{cases}$ Найдите $\dfrac{\partial x}{\partial v}$.

4.13. Сформулируйте достаточные условия существования и дифференцируемости функций $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$, заданных неявно системой уравнений

$$\begin{cases}F(x,y,u,v)=0,\\ G(x,y,u,v)=0.\end{cases}$$

Найдите du и dv.

4.14. Сформулируйте достаточные условия существования и дифференцируемости функций $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$, заданных неявно системой уравнений

$$\begin{cases}x=F(u,v),\\ y=G(u,v).\end{cases}$$

Найдите du и dv.

4.15. Найдите первый и второй дифференциалы функций $y(x)$ и $z(x)$, заданных неявно системой уравнений $\begin{cases}x+2y+3z=0,\\ x^2+y^2+z^2=1.\end{cases}$

4.16. Укажите такую точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, в окрестности которой система уравнений $\begin{cases} \sin x + \cos y = \sin z; \\ \cos x + \sin y = \cos z \end{cases}$ определяет единственную пару дифференцируемых неявных функций вида $x(z)$, $y(z)$. Найдите $x'(z_0)$, $y'(z_0)$.

4.17. Докажите, что система уравнений $\begin{cases} x^3 + y^3 + xy = z, \\ xy + yz + xz = 1 \end{cases}$ определяет единственную пару дважды дифференцируемых неявных функций вида $x(z)$, $y(z)$ в окрестности точки $M_0(0;1;1)$ и найдите $x'(1)$, $y'(1)$, $x''(1)$, $y''(1)$.

4.18. Найдите первый и второй дифференциалы функций $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$, заданных неявно системой уравнений $\begin{cases} xu + yv = 1, \\ x + y + u + v = 0. \end{cases}$

4.19. Найдите $du(x, y)$, $dv(x, y)$, если $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ – пара неявных функций, определяемых системой уравнений $\begin{cases} uv + xy = 2, \\ ux^2 + vy^2 = 2. \end{cases}$

4.20. Найдите такую точку $M_0(x_0, y_0, u_0, v_0)$, в окрестности которой система уравнений $\begin{cases} u^2 + v^2 = x, \\ uv = y \end{cases}$ определяет единственную пару дифференцируемых неявных функций вида $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ и найдите $u_x(x, y)$, $v_x(x, y)$.

4.21. Найдите все точки возможного экстремума дифференцируемой неявной функции $y = f(x)$, определяемой уравнением $F(x, y) = 0$. Используя достаточное условие, определите, являются ли найденные точки точками минимума, максимума, или же экстремум в этих точках отсутствует:

4.21.1. $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$;

4.21.2. $F(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 12$;

4.21.3. $F(x, y) = y^3 - 2y^2 - x^2 + 2xy$, $x > 0$, $y > 0$;

4.21.4. $F(x, y) = 8x^2y - x^4 - y^4$, $\quad x > 0, \quad y > 0$;

4.21.5. $F(x, y) = y^2 - ay - \sin x, \quad 0 \le x \le 2\pi$.

4.22. Найдите все точки возможного экстремума дифференцируемой неявной функции $z = f(x, y)$, определяемой уравнением $F(x, y, z) = 0$. Если возможно, с помощью достаточного условия проверьте, будет ли в найденных точках локальный минимум или локальный максимум функции $z = f(x, y)$, или же локальный экстремум в этих точках отсутствует.

4.22.1. $F(x, y, z) = z^3 + 3xyz - x - y$;

4.22.2. $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + ze^z$;

4.22.3. $F(x, y, z) = z^5 + x^3 + y^3 - 3xyz$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$;

4.22.4. $F(x,y,z)=z^5-x^4-y^4-3z^2+4xyz$, $x>0$, $y>0$, $z>0$.

4.23. Предполагая, что $\varphi(t)$ – дифференцируемая функция, проверьте выполнение равенства: $xz\dfrac{\partial z}{\partial x}+yz\dfrac{\partial z}{\partial y}=xy$, если $z^2=xy+\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

4.24. Преобразуйте дифференциальное уравнение, приняв y за новую независимую переменную, а x – за новую функцию:

4.24.1. $y''+(y')^2=0$; 4.24.2. $y'y'''-3(y'')^2-(y')^5y=0$.

4.25. Преобразуйте уравнение, введя новые переменные:

4.25.1. $y^2+(x^2-xy)y'=0, \quad y=tx, \quad y=y(t)$;

4.25.2. $x^2y''+3xy'+y=0, \quad x=e^t, \quad y=y(t)$;

4.25.3. $x^3y''+xyy'-y^2=0, \quad u=u(t), \quad x=e^t, \ y=u\cdot e^t$;

4.25.4. $\left(1-x^2\right)^2 y''=-y, \quad u=u(t), \quad x=\operatorname{th}t, \ y=\dfrac{u}{\operatorname{ch}t}$.

4.26. Преобразуйте дифференциальное уравнение, перейдя к полярным координатам $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, где $\rho=\rho(\varphi)$:

4.26.1. $y'=\dfrac{x+y}{x-y}$; 4.26.2. $\dfrac{x+yy'}{xy'-y}=1$.

4.27. Преобразуйте дифференциальное уравнение в частных производных, введя новые независимые переменные u и v:

4.27.1. $yz_x-xz_y=0$, если $u=x$, $v=x^2+y^2$;

4.27.2. $(x+y)z_x-(x-y)z_y=0$, если $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$, $v=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

4.28. Преобразуйте дифференциальное уравнение в частных производных $u_{xy}+u_x+u_y=-u$, введя новую функцию $v=v(x,y)$, $u=ve^{-x-y}$.

4.29. Преобразуйте дифференциальное уравнение в частных производных, введя новые переменные u, v:

4.29.1. $(x+z)z_x+(y+z)z_y=x+y+z, \ z=z(u,v)$, если $u=x+z, \ v=y+z$;

4.29.2. $2z_{xx}+z_{xy}-z_{yy}+z_x+z_y=0, \ z=z(u,v)$, если $u=x+2y+2, \ v=x-y-1$;

4.29.3. $z_{xx}+y^2z_{yy}+\dfrac{1}{2}z_y=0$, $z=z(u,v)$, если $u=x, v=2\sqrt{y} \ (y>0)$.

4.30. Преобразуйте дифференциальное уравнение в частных производных, введя новые переменные u, v, и w, где $w=w(u,v)$:

4.30.1. $z_x+z_y=4x$, если $u=x, \ v=x-y, \ w=x-y+z$;

4.30.2. $yz_{yy}+2z_y=\dfrac{2}{x}$, если $yu=x, v=x, w=xz-y$;

4.30.3. $z_{xx}+2z_{xy}+z_{yy}=0$, если $u=x+y, v=x-y, w=xy-z$;

4.31. Проверьте, что дифференцируемая функция $z(x, y)$, определяемая уравнением $F\left(z^2 - y^2, x^2 + (y-z)^2\right) = 0$, где F – дифференцируемая функция, является решением уравнения $(z-y)^2 \dfrac{\partial z}{\partial x} + xz \dfrac{\partial z}{\partial y} = xy$.

4.32.Проверьте, что дифференцируемая функция $z\,(x,y)$, определяемая уравнением $F\left(x^2 + y^2, \dfrac{z}{x}\right) = 0$, где F – дифференцируемая функция, является решением уравнения $xy\dfrac{\partial z}{\partial x} - x^2 \dfrac{\partial z}{\partial y} = yz$.

4.33.Докажите, что функции u_1, u_2, u_3 зависимы в некоторой окрестности точки M_0, а любые две из них независимы в любой окрестности этой точки. Зависимы ли функции во всём пространстве $\mathbb{R}^3$?

4.33.1. $u_1 = \sin(xyz)$, $u_2 = x\cos y$, $u_3 = x^2 \sin(xyz) - x^2 \sin(xyz)\sin^2 y$, $M_0(1;0;1)$;

4.33.2. $u_1 = xy + yz + xz$, $u_2 = x + y + z$, $u_3 = x^2 + y^2 + z^2$, $M_0(1;2;3)$.

5. Задачи повышенной трудности.

5.1. Докажите, что отличный от нуля градиент дифференцируемой функции $z = u(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ направлен перпендикулярно касательной к линии уровня функции $u(x, y)$ в точке M_0.

5.2. Докажите, что функции $y_1 = x + y$ и $y_2 = xy$ независимы в любой области из $\mathbb{R}^2$.

5.3. Даны две функции: $y_1 = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ 0, & x \leq 0; \end{cases}$ $\quad y_2 = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ 0, & -1 \leq x \leq 0, \\ (x+1)^2, & x \leq -1. \end{cases}$

Докажите, а) что для любой точки $x \in \mathbb{R}$ существует окрестность этой точки в которой y_1 зависит от y_2, но вместе с тем на всей числовой прямой y_1 не зависит от y_2; б) y_2 не зависит от y_1 на всей числовой прямой.

5.4. Зависимы ли функции $y_1 = \dfrac{x_1 x_2}{x_3}$, $y_2 = x_1 x_2 x_3$, $y_3 = x_3$ а) в окрестности точки $(0;0;1)$; б) в полупространстве $x_3 > 0$?

5.5. Пользуясь определением зависимости и независимости функций, докажите, что:

5.5.1. функции $u_1 = xy$ и $u_2 = \dfrac{x}{y}$ независимы в окрестности точки $(0;1)$;

5.5.2. функции $u_1 = \dfrac{x_1 x_2}{x_3}$ и $u_2 = \dfrac{x_3}{x_2}$ независимы в окрестности точки $(1;1;1)$.

5.6. Докажите, что функции $y_1 = \sin(x_1 x_2 x_3)$, $y_2 = x_1 \cos(x_2)$ независимы в окрестности точки $(1;0;1)$. Зависимы ли эти функции в какой-нибудь окрестности точки $(0;0;0)$?

Тема 7. Условный экстремум.

1. **Сформулируйте определение:**

1.1. экстремума функции $u(x,y)$ с условием связи $f(x,y)=0$;

1.2. экстремума функции $u(x,y,z)$ с условием связи $f(x,y,z)=0$;

1.3. экстремума функции $u(x,y,z)$ с двумя условиями связи $f(x,y,z)=0$, $g(x,y,z)=0$.

2. **Сформулируйте (без доказательства):**

2.1. теорему о необходимых условиях экстремума функции $u(x,y)$ с условием связи $f(x,y)=0$ в форме Лагранжа;

2.2. теорему о достаточных условиях экстремума функции $u(x,y)$ с условием связи $f(x,y)=0$ в форме Лагранжа;

2.3. теорему о необходимых условиях экстремума функции $u(x,y,z)$ с условием связи $f(x,y,z)=0$ в форме Лагранжа;

2.4. теорему о достаточных условиях экстремума функции $u(x,y,z)$ с условием связи $f(x,y,z)=0$ в форме Лагранжа;

2.5. теорему о необходимых условиях экстремума функции $u(x,y,z)$ с двумя условиями связи $f(x,y,z)=0$, $g(x,y,z)=0$ в форме Лагранжа;

2.6. теорему о достаточных условиях экстремума функции $u(x,y,z)$ с двумя условиями связи $f(x,y,z)=0$, $g(x,y,z)=0$ в форме Лагранжа.

3. **Теоремы с доказательством.**

3.1. Докажите теорему о необходимых условиях экстремума функции $u(x,y)$ с условием связи $f(x,y)=0$ в форме Лагранжа.

3.2. Докажите теорему о необходимых условиях экстремума функции $u(x,y,z)$ с условием связи $f(x,y,z)=0$ в форме Лагранжа.

3.3. Докажите теорему о необходимых условиях экстремума функции $u(x,y,z)$ с двумя условиями связи $f(x,y,z)=0$, $g(x,y,z)=0$ в форме Лагранжа.

3.4. Докажите теорему о достаточных условиях экстремума функции $u(x,y)$ с условием связи $f(x,y)=0$ в форме Лагранжа.

3.5. Докажите теорему о достаточных условиях экстремума функции $u(x,y,z)$ с условием связи $f(x,y,z)=0$ в форме Лагранжа.

3.6. Докажите теорему о достаточных условиях экстремума функции $u(x,y,z)$ с двумя условиями связи $f(x,y,z)=0$, $g(x,y,z)=0$ в форме Лагранжа.

4. **Вопросы и задачи.**

4.1. Используя метод Лагранжа, найдите все точки возможного экстремума функции $u(x,y)$ при заданных условиях связи. Используя достаточное условие, определите, являются ли найденные точки точками минимума, максимума, или же экстремум в этих точках отсутствует:

4.1.1. $u(x,y)=x^2+y^2$ при условии $x+y=2$;

4.1.2. $u(x,y)=x+y$ при условии $x^2+y^2=2$;

4.1.3. $u(x,y)=x+y$ при условии $x^2+y^2-2x=0$;

4.1.4. $u(x,y)=x+y$ при условии $x^2-2y=0$;

4.1.5. $u(x,y)=x+y$ при условии $x+y+xy=3$;

4.1.6. $u(x,y)=x+y$ при условии $xy=1$;

4.1.7. $u(x,y)=x+y+xy$ при условии $xy=1$;

4.1.8. $u(x,y)=x+y+xy$ при условии $x+y=2$;

4.1.9. $u(x,y)=xy$ при условии $x+y=2$;

4.1.10. $u(x,y)=xy$ при условии $x+y+xy=3$;

4.1.11. $u(x,y)=xy$ при условии $(x+y)^2=4$;

4.1.12. $u(x,y)=xy$ при условии $x^2+y^2=2$;

4.1.13. $u(x,y)=xy$ при условии $x^3+y^3-2xy=0$;

4.1.14. $u(x,y)=\dfrac{y}{x}$ при условии $y=x^2+1$;

4.1.15. $u(x,y)=y-x^2$ при условии $x^2+y^2=4$;

4.1.16. $u(x,y)=xy^2$ при условии $x+2y-3=0$;

4.1.17. $u(x,y)=x+3y$ при условии $xy^3=1$;

4.1.18. $u(x,y)=2x+3y$ при условии $x^2y^3=1$;

4.1.19. $u(x,y)=xy^3$ при условии $x+3y-4=0$;

4.1.20. $u(x,y)=x^2y^3$ при условии $2x+3y-5=0$.

4.2. Используя метод Лагранжа, найдите все точки возможного экстремума функции $u(x,y,z)$ при заданных условиях связи. Используя достаточное условие, определите, являются ли найденные точки точками минимума, максимума, или же экстремум в этих точках отсутствует:

4.2.1. $u(x,y,z)=x+y+z$ при условии $xyz=1$;

4.2.2. $u(x,y,z)=xyz$ при условии $x+y+z=3$;

4.2.3. $u(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ при условии $x+y+z=3$;

4.2.4. $u(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ при условии $xyz=1$;

4.2.5. $u(x,y,z)=xyz$ при условии $x^2+y^2+z^2=3$;

4.2.6. $u(x,y,z)=x+y+z$ при условии $x^2+y^2+z^2=3$;

4.2.7. $u(x,y,z)=2x+3y+4z$ при условии $x^2y^3z^4=1$;

4.2.8. $u(x,y,z)=xyz$ при условиях $x^2+y^2+z^2=1, \quad x+y+z=0$;

4.2.9. $u(x,y,z)=xyz$ при условиях $x+y+z=5, \quad xy+yz+xz=8$.

5. **Задачи повышенной трудности.**

5.1. Пусть в точке $N_0(x_0,y_0)$ выполнены необходимые (в форме Лагранжа) условия экстремума функции $u(x,y)$ с условием связи $f(x,y)=0$ и к тому же $\operatorname{grad} u(x_0,y_0)\neq 0$, $\operatorname{grad} f(x_0,y_0)\neq 0$. Докажите, что в точке $M_0(x_0,y_0)$ градиенты функций $u(x,y)$ и $f(x,y)$ коллинеарны.

5.2. Пусть в точке $N_0(x_0,y_0)$ выполнены необходимые (в форме Лагранжа) условия экстремума функции $u(x,y)$ с условием связи $ax+by=c$ и $d^2u\big|_{M_0}>0$, $M_0(x_0,y_0)$. Докажите, что в точке $M_0(x_0,y_0)$ имеет место экстремум указанной функции с указанным условием связи.

5.3. Пусть в точке $N_0(x_0,y_0)$ выполнены необходимые (в форме Лагранжа) условия экстремума функции $u(x,y)=ax+by$ с условием связи $f(x,y)=0$ и $d^2f\big|_{M_0}>0$, $M_0(x_0,y_0)$. Докажите, что в точке $M_0(x_0,y_0)$ имеет место экстремум указанной функции с указанным условием связи.

Тема 8. Кратные интегралы.

1. **Сформулируйте определение:**

1.1. квадрируемой плоской фигуры;

1.2. площади плоской фигуры;

1.3. интегральной суммы для двойного интеграла;

1.4. диаметра ограниченного множества G;

1.5. предела интегральных сумм при стремлении диаметра разбиения к нулю.

2. **Основные теоремы и формулы (без доказательства).**

2.1. Сформулируйте теорему о необходимом и достаточном условии квадрируемости плоской фигуры.

2.2. Сформулируйте теорему о площади криволинейной трапеции.

2.3. Сформулируйте теорему о сведении двойного интеграла к повторному.

2.4. Сформулируйте теорему о сведении тройного интеграла к повторному.

2.5. Сформулируйте теорему о формуле замены переменных для двойного интеграла.

2.6. Сформулируйте теорему о формуле замены переменных для тройного интеграла.

2.7. Сформулируйте теорему о среднем значении для двойного интеграла. Запишите выражение для площади плоской фигуры в декартовой системе координат через двойной интеграл.

2.8. Запишите выражение для площади плоской фигуры в полярной системе координат через двойной интеграл.

2.9. Напишите формулы для массы и координат центра тяжести плоской фигуры (материальной пластины) с поверхностной плотностью $\rho(x,y)$ через двойной интеграл.

2.10. Напишите формулы для моментов инерции плоской фигуры (материальной пластины) с поверхностной плотностью $\rho(x,y)$ через двойной интеграл.

3. Теоремы с доказательством.

3.1. Докажите теорему о необходимом и достаточном условии квадрируемости плоской фигуры.

3.2. Докажите теорему о площади криволинейной трапеции.

3.3. Докажите теорему о сведении двойного интеграла к повторному.

3.4. Сформулируйте и докажите теорему об интегрируемости непрерывной функции двух переменных.

3.5. Докажите теорему о замене переменных в двойном интеграле для случая линейной замены.

4. Вопросы и задачи.

4.1. Измените порядок интегрирования в повторных интегралах. Вычислите повторный интеграл:

4.1.1. $\int_0^1 dy \int_y^1 xydx$;

4.1.2. $\int_0^1 dx \int_x^{2-x} ydy$;

4.1.3. $\int_0^4 dy \int_{0.5y-2}^{0.5y} (x+1)dx$;

4.1.4. $\int_0^1 (y+1)dy \int_0^{3-y} dx$;

4.1.5. $\int_{-3}^{-1} dx \int_{x+2}^{-x} (x+y)dy$;

4.1.6. $\int_0^1 dx \int_{1-x}^{1+x} xydy$;

4.1.7. $\int_0^1 dy \int_y^{2-y} (y-x)dx$;

4.1.8. $\int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x} 2ydy$;

4.1.9. $\int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} 2ydy$;

4.1.10. $\int_0^1 dx \int_{\arcsin x}^{\pi/2} \cos ydy$;

4.1.11. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x x^2 y dy$;

4.1.12. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{x(2-x)} (x-y) dy$;

4.1.13. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{1-y^2}^{1+y^2} dx$;

4.1.14. $\int\limits_0^{\pi} dx \int\limits_0^{\sqrt[3]{\sin x}} 3xy^2 dy$;

4.1.15. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} y dy$;

4.1.16. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^3}^{\sqrt[3]{x}} 3y^2 dy$;

4.1.17. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\arcsin x}^{\pi-\arcsin x} dy$;

4.1.18. $\int\limits_{-1}^1 dy \int\limits_y^{2y+1} y dx$;

4.1.19. $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{-x}^{2-3x} xy dy$.

4.2. Сведите двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ к повторному двумя способами:

4.2.1. $D=\{(x,y): 1\le x\le 2,\ 0\le y\le 1\}$;

4.2.2. $D=\{(x,y): 1\le x\le 2,\ 0\le y\le x+1\}$;

4.2.3. $D=\{(x,y): -2\le x\le -1,\ x+1\le y\le 0\}$;

4.2.4. D – область на плоскости (x,y), ограниченная прямыми $x=-3$, $y=0$, $y=1$, $y=-1-x$;

4.2.5. D – область на плоскости (x,y), ограниченная прямыми $x=0$, $y=1$, $y=-2x$;

4.2.6. D – область на плоскости (x,y), ограниченная прямыми $y=0$, $x=1$, $x=2y$;

4.2.7. D – область на плоскости (x,y), ограниченная линиями $y=0$, $y=1-x$, $x^2+y^2=1$ ($x^2+y^2\le 1$);

4.2.8. D – область на плоскости (x,y), ограниченная прямыми $x=-1$, $x=0$, $y=2x$ и частью верхней полуокружности $x^2+y^2=1$;

4.2.9. $D=\{(x,y): |x|+|y|\le 1\}$;

4.2.10. $D=\{(x,y): y^2\le x+2,\ y\ge x\}$.

4.3. Вычислите двойной интеграл, перейдя в полярные координаты:

4.3.1. $\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy,\quad D=\left\{(x,y):\ x^2+y^2\le 6\right\}$;

4.3.2. $\iint\limits_D \left(x^2-y^2\right)dxdy,\quad D=\left\{(x,y):\ \left(1\le x^2+y^2\le 4\right)\cap\left(\frac{\pi}{6}\le \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\le\frac{\pi}{4}\right)\cap x>0\right\}$;

4.3.3. $\iint\limits_D xdxdy$, где D – область на плоскости (x,y), ограниченная прямыми $x=-1$, $x=0$, $y=x$ и частью верхней полуокружности $x^2+y^2=1$;

4.3.4. $\iint\limits_D ydxdy$, где D – область на плоскости (x,y), ограниченная прямыми $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y=0$ и частью верхней полуокружности $x^2+y^2=1$;

4.3.5. $\iint\limits_D (x+y)dxdy$, где D – область на плоскости (x,y), ограниченная прямыми $x=1$, $y=-x$ и частью верхней полуокружности $x^2+y^2=1$.

4.4. Найдите замену переменных $(u,v)\leftrightarrow(x,y)$, при которой область D на плоскости (x,y), ограниченная линиями $x+y=1$, $x+y=2$, $y=2x$, $y=3x$, $x>0$, $y>0$, переходит в прямоугольник на плоскости (u,v). Вычислите площадь области D.

4.5. Найдите замену переменных $(u,v)\leftrightarrow(x,y)$, при которой область D на плоскости (x,y), ограниченная линиями $xy=1$, $xy=2$, $y=x$, $y=2x$, $x>0$, $y>0$, переходит в прямоугольник на плоскости (u,v). Вычислите площадь области D.

4.6. Найдите замену переменных $(u,v)\leftrightarrow(x,y)$, при которой область D на плоскости (x,y), ограниченная линиями $y^2=x$, $y^2=3x$, $x^2=y$, $x^2=2y$, $x>0$, $y>0$, переходит в прямоугольник на плоскости (u,v). Вычислите площадь области D.

4.7. Найдите замену переменных $(u,v)\leftrightarrow(x,y)$, при которой область D на плоскости (x,y), ограниченная линиями $x^2=y$, $x^2=2y$, $x^3=y^2$, $x^3=2y^2$, $x>0$, $y>0$, переходит в прямоугольник на плоскости (u,v). Вычислите площадь области D.

4.8. Найдите замену переменных $(u,v)\leftrightarrow(x,y)$, при которой область D на плоскости (x,y), ограниченная линиями $y=x^3$, $y=2x^3$, $y=x^4$, $y=3x^4$, $x>0$, $y>0$, переходит в прямоугольник на плоскости (u,v). Вычислите площадь области D.

4.9. Найдите замену переменных $(u,v)\leftrightarrow(x,y)$, при которой область D на плоскости (x,y), ограниченная линиями $xy=1$, $xy=2$, $x^2y^3=3$, $x^2y^3=4$, $x>0$, $y>0$, переходит в прямоугольник на плоскости (u,v). Вычислите площадь области D.

4.10. Найдите замену переменных $(u,v)\leftrightarrow(x,y)$, при которой область D на плоскости (x,y), ограниченная линиями $xe^y=1$, $xe^y=2$, $x=e^y$, $x=2e^y$, переходит в прямоугольник на плоскости (u,v). Вычислите площадь области D.

4.11. Найдите замену переменных $(u,v)\leftrightarrow(x,y)$, при которой область D на плоскости (x,y), ограниченная линиями $x^2y=1$, $x^2y=8$, $x=y$, $x=27y$, $x>0$, $y>0$, переходит в прямоугольник на плоскости (u,v). Вычислите площадь области D.

4.12. Вычислите массу, статические моменты и моменты инерции плоской фигуры (однородной пластины с плотностью $\rho=1$), заданной следующим образом:

4.12.1. $0\le x\le 2, 0\le y\le x;$

4.12.2. $0\le x\le 4, 0\le y\le x(4-x);$

4.12.3. $0\le x\le \pi, 0\le y\le \sin x;$

4.12.4. $10^{-3}\le x\le 1, 0\le y\le x^{-1}.$

4.13. Вычислите координаты центра тяжести и моменты инерции относительно осей координат плоской фигуры (однородной пластины с плотностью $\rho = 1$), ограниченной линиями $x = 1, \quad x = 2, \quad y = 0, \quad y = x$.

4.14. Вычислите координаты центра масс плоской фигуры (однородной пластины), ограниченной кривыми $y = \cos x, \quad y = \sin x \quad \left(\pi/4 \le x \le 5\pi/4\right)$.

4.15. Найдите координаты центра тяжести плоской фигуры (однородной пластины), ограниченной линиями:

4.15.1. $2y = x^2, \; x + y = 4$;

4.15.2. $x^{2/3} + y^{2/3} = 1, x = 0, y = 0 \; (x > 0, y > 0)$;

4.16. Вычислите момент инерции относительно оси Oy плоской фигуры (однородной пластины с плотностью $\rho = 1$), ограниченной линиями $x = 0$, $x = 1, \; y = 0, \; y = \arcsin x$.

4.17. Сведите тройной интеграл $\iiint\limits_G f(x, y, z)\,dxdydz$ к повторному, если G - область, ограниченная поверхностями $x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad x + y + z = 2$.

4.18. Вычислите интеграл:

4.18.1. $\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}dxdy$, если $D = \left\{(x, y) : x^2 + y^2 \le 4\right\}$;

4.18.2. $\iint\limits_D \sin\left(x^2 + y^2\right)dxdy$, если $D = \left\{(x, y) : x^2 + y^2 \le \pi/4\right\}$;

4.18.3. $\iiint\limits_G e^{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} dxdydz \;\; G = \left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \le 1, \, z \ge 0\right\}$.

4.19. Вычислите тройной интеграл $\iiint\limits_G (x^2 + y^2)dxdydz$, где область G ограничена поверхностями $x^2 + y^2 = 2z, \; z = 2$.

4.20. С помощью тройного интеграла вычислите объём тела, ограниченного поверхностями:

4.20.1. $x^2 + y^2 = z, \quad x^2 + y^2 = 1, \quad z > 0, \quad x > 0$;

4.20.2. $x^2 + y^2 + z^2 \le 4, \quad z = 1, (z \ge 1)$;

4.20.3. $x^2 + y^2 + z^2 = 2z + 1, \; z \ge 0$.

4.21. Вычислите моменты инерции относительно координатных плоскостей однородного тела с плотностью $\rho = 1$, ограниченного поверхностями $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \quad z = 0, \quad (z \ge 0)$.

4.22. Вычислите координаты центра масс и момент инерции относительно начала координат тела с плотностью $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad x^2 + y^2 = z^2 \quad (z \ge 0)$.

4.23. Пусть G – однородное тело, ограниченное поверхностями $x^2+y^2+z^2=4, \quad z=1 \quad (z\ge 1)$ с плотностью $\rho=1$. Найдите силу притяжения этим телом материальной точки массы m_0, находящейся в начале координат.

5. Задачи повышенной трудности.

5.1. Измените порядок интегрирования в интеграле (решите задачу всеми возможными различными способами):

5.1.1. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)dz$; 5.1.2. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)dz$.

5.2. С помощью тройного интеграла найдите объём тела, ограниченного поверхностью $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2=z,\ x>0$.

5.3. Вычислите $\iiint\limits_G \frac{dxdydz}{2a+z}$, если область G ограничена цилиндрами $x^2+z^2=a^2$ и $y^2+z^2=a^2$.

5.4. Замените тройные интегралы однократными:

5.4.1. $\int\limits_0^x d\xi \int\limits_0^{\xi} d\eta \int\limits_0^{\eta} f(\zeta)d\zeta$; 5.4.2. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{x+y} f(z)dz$.

Тема 9. Криволинейные интегралы.

1. Сформулируйте определение:

1.1. спрямляемой кривой;
1.2. длины дуги кривой;
1.3. гладкой кривой, кусочно гладкой кривой;
1.4. интегральной суммы для криволинейного интеграла $\int\limits_C f(x,y)dl$ по гладкой кривой C, заданной на плоскости;
1.5. криволинейного интеграла I рода от функции $f(x,y)$ по заданной кривой C – гладкая кривая на плоскости;
1.6. интегральной суммы для криволинейного интеграла $\int\limits_C P(x,y)dx$ по гладкой кривой C, заданной на плоскости;
1.7. интегральной суммы для криволинейного интеграла $\int\limits_C Q(x,y)dy$, C – гладкая кривая на плоскости;
1.8. интегральной суммы для криволинейного интеграла $\int\limits_C R(x,y,z)dz$, C – гладкая кривая в пространстве;

1.9. криволинейного интеграла II рода $\int\limits_C P(x,y)dx$ по гладкой кривой C, заданной на плоскости;

1.10. криволинейного интеграла II рода $\int\limits_C Q(x,y)dy$ по гладкой кривой C, заданной на плоскости.

2. Основные теоремы и формулы (без доказательства).

2.1. Запишите уравнение касательной в заданной точке к кривой на плоскости, заданной в параметрической форме $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $\alpha \le t \le \beta$.

2.2. Запишите уравнение нормали в заданной точке к кривой на плоскости, заданной в параметрической форме $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $\alpha \le t \le \beta$.

2.3. Запишите уравнение касательной в заданной точке к кривой на плоскости, заданной в виде $y=f(x)$, $a \le x \le b$.

2.4. Запишите уравнение нормали в заданной точке к кривой на плоскости, заданной в виде $y=f(x)$, $a \le x \le b$.

2.5. Сформулируйте теорему о вычислении криволинейного интеграла $\int\limits_L f(x,y)dl$ с помощью определенного интеграла.

2.6. Сформулируйте теорему о вычислении криволинейного интеграла $\int\limits_{AB} P(x,y)dx$ с помощью определенного интеграла.

2.7. Сформулируйте теорему о вычислении криволинейного интеграла $\int\limits_{AB} Q(x,y)dy$ с помощью определенного интеграла.

2.8. Запишите формулу для вычисления длины дуги кривой, заданной параметрически, и сформулируйте достаточные условия ее применимости.

2.9. Запишите формулу для вычисления длины дуги кривой, заданной уравнением $y=f(x)$, $a \le x \le b$, и сформулируйте достаточные условия ее применимости.

2.10. Напишите формулу длины кривой, заданной в полярных координатах и сформулируйте достаточные условия ее применимости.

2.11. Кривая L на плоскости задана уравнением $y=y(x)$, $a \le x \le b$; линейная плотность равна $\rho(x)$. Запишите формулы для вычисления следующих её параметров, используя криволинейный интеграл, а затем выразите их через определённый интеграл:

2.11.1. массы;

2.11.2. x – координаты центра масс;

2.11.3. y – координаты центра масс;

2.11.4. момента инерции относительно оси Ox;

2.11.5. момента инерции относительно оси Oy.

2.12. Кривая L на плоскости задана в параметрической форме: $x=x(t)$, $y=y(t)$, $\alpha \le t \le \beta$; линейная плотность равна $\rho(x,y)$. Запишите формулы для вычисления следующих её параметров, используя криволинейный интеграл, а затем выразите их через определённый интеграл:

2.12.1. массы;
2.12.2. x – координаты центра масс;
2.12.3. y – координаты центра масс;
2.12.4. момента инерции относительно оси Ox;
2.12.5. момента инерции относительно оси Oy.

2.13. Запишите формулу, связывающую криволинейные интегралы первого и второго рода.

2.14. Сформулируйте теорему о формуле Грина.

2.15. Запишите формулу, выражающую а) интеграл $\oint\limits_L P(x,y)dx$, б) интеграл $\oint\limits_L Q(x,y)dy$ через двойной интеграл по области G на плоскости, ограниченной контуром L. Укажите достаточные условия её применимости.

2.16. Сформулируйте теорему об условиях независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования.

3. Теоремы с доказательством.

3.1. Докажите теорему о длине дуги кривой, заданной параметрически.

3.2. Докажите теорему о вычислении криволинейного интеграла первого рода с помощью определённого интеграла.

3.3. Докажите теорему о вычислении криволинейного интеграла второго рода с помощью определённого интеграла.

3.4. Докажите теорему о формуле Грина.

3.5. Докажите теорему об условиях независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования.

4. Вопросы и задачи.

4.1. Пусть G – ограниченная область на плоскости с гладкой границей L. Получите формулу, выражающую площадь области G через интеграл вида $\oint\limits_L f(x,y)dx$.

4.2. Пусть G – ограниченная область на плоскости с гладкой границей L и поверхностной плотностью $\rho=1$. Получите формулы для вычисления x и y – координат центра тяжести области G через интегралы вида $\oint\limits_L f(x,y)dx$; $\oint\limits_L f(x,y)dy$.

4.3. Пусть G – ограниченная область на плоскости с гладкой границей L. Выведите формулу, выражающую в виде двойного интеграла по области G работу силы $\vec{F}(x,y)=(P(x,y);Q(x,y))$ при перемещении материальной точки по замкнутому контуру L против часовой стрелки, если функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывно дифференцируемы в G.

4.4. Вычислите криволинейные интегралы первого рода:

4.4.1. $\int\limits_L dl$, где кривая L задана уравнениями $x=\cos t$, $y=\sin t$, $0\le t\le 3$;

4.4.2. $\int\limits_L xdl$, где кривая L задана уравнениями $x=\cos t$, $y=\sin t$, $\frac{\pi}{4}\le t\le\frac{\pi}{2}$;

4.4.3. $\int\limits_L ydl$, где кривая L задана уравнениями $x=\cos t$, $y=\sin t$, $-\frac{\pi}{2}\le t\le 0$;

4.4.4. $\int\limits_L dl$, где кривая L задана уравнениями $x=t$, $y=\frac{t^2}{2}$, $0\le t\le 1$;

4.4.5. $\int\limits_L xdl$, где кривая L задана уравнениями $x=t$, $y=\frac{t^2}{2}$, $0\le t\le 1$;

4.4.6. $\int\limits_L ydl$, где кривая L задана уравнением $y=e^x$, $0\le x\le 2$;

4.4.7. $\int\limits_L y^2dl$, где кривая L задана уравнением $y=e^x$, $0\le x\le 3$;

4.4.8. $\int\limits_L xydl$, где $L-$ ломаная линия, заданная уравнением $y=1-|x|, -1\le x\le 1$;

4.4.9. $\int\limits_L x^2ydl$, где кривая L задана уравнениями $x=4\cos t$, $y=\sin 2t$, $0\le t\le\frac{\pi}{2}$;

4.4.10. $\int\limits_L \sqrt{1+x^2}dl$, где кривая L задана уравнением $y=\frac{x^2}{2}$, $0\le x\le 1$;

4.4.11. $\int\limits_L \sqrt{1+x^4}dl$, где кривая L задана уравнением $y=\frac{x^3}{3}$, $0\le x\le 4$;

4.4.12. $\int\limits_L xdl$, где кривая L задана уравнением $y=\ln x$, $1\le x\le 6$.

4.5. Вычислите криволинейные интегралы второго рода:

4.5.1. $\int\limits_L dx+dy$, где кривая L задана уравнениями $x=3\cos t$, $y=4\sin t$, $0\le t\le\frac{\pi}{2}$ и пробегается в направлении возрастания параметра t;

4.5.2. $\int\limits_L dx$, где кривая L задана уравнениями $x=3\cos t$, $y=4\sin t$, $0\le t\le\pi$ и пробегается в направлении возрастания параметра t;

4.5.3. $\int\limits_L \frac{xdy-ydx}{x^2}$, где кривая L задана уравнениями $x=\cos t$, $y=\sin t$, $\frac{\pi}{6}\le t\le\frac{\pi}{3}$ и пробегается в направлении возрастания параметра t;

4.5.4. $\int\limits_{AB} xdx + ydy$, где кривая AB задана уравнением $y = x^2, \quad A(0,0), \quad B(1,1)$;

4.5.5. $\int\limits_{AB} x^2dx + y^2dy$, где кривая AB задана уравнением $y = \sqrt{x}, \quad A(0,0), \quad B(1,1)$;

4.5.6. $\int\limits_{L} \frac{(x+y)dx + (y-x)dy}{x^2 + y^2}$, где кривая L задана уравнениями $x = \cos t,\ y = \sin t,\ 0 \le t \le 2\pi$ и пробегается в направлении возрастания параметра t;

4.5.7. $\oint\limits_{L} xdy + 2ydx$, где контур L − граница кругового сектора, состоящая из двух отрезков прямых $y = 0$ и $y = x$ и дуги окружности $x^2 + y^2 = 1$, расположенной в первом квадранте (контур пробегается против часовой стрелки);

4.5.8. $\int\limits_{L} xydx - x^3y^3dy$, где L – замкнутый контур, заданный уравнением $|x - y| + |x + y| = 1$ (контур пробегается против часовой стрелки);

4.5.9. $\int\limits_{L} ydx + xdy + dz$, где кривая L задана уравнениями $x = \sin t,\ y = \cos t,\ z = t^2$, $0 \le t \le \pi$ и пробегается в направлении возрастания параметра t;

4.5.10. $\int\limits_{L} ydx + ydy + \frac{z}{y}dz$, где кривая L задана уравнениями $x = \ln t,\ y = t,\ z = t^2$, $1 \le t \le e$ и пробегается в направлении возрастания параметра t;

4.5.11. $\int\limits_{L} ydx - xydy + dz$, где кривая L задана уравнениями $x = e^t,\ y = t,\ z = t^2$, $0 \le t \le 1$ и пробегается в направлении возрастания параметра t;

4.6. Вычислите длину кривой, заданной уравнением $y = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$, $0 \le x \le 3$.

4.7. Вычислите массу кривой, заданной уравнением $y = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$, $0 \le x \le 3$, если линейная плотность $\rho(x) = 2\sqrt{1 + x}$.

4.8. Вычислите x-координату центра масс кривой, заданной уравнениями $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$, если линейная плотность постоянна.

4.9. Вычислите момент инерции относительно оси Ox кривой, заданной уравнениями $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \le t \le \pi$, если линейная плотность $\rho = 1$.

4.10. Вычислите момент инерции относительно оси Ox кривой, заданной уравнениями $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \le t \le \pi$, если линейная плотность $\rho(t) = \sin t$.

4.11. Найдите y-координату силы притяжения материальной точки массы m_0 дугой однородной окружности массы M и радиуса R. Материальная точка помещена в центре этой окружности, расположенной на плоскости OXY в области $x \ge 0,\ y \ge 0$. (Сила притяжения материальной точки массой m_0 однородной кривой плотности ρ_0 может быть вычислена по формуле $\vec{F} = \gamma m_0 \int\limits_L \frac{\vec{r}}{r^3} \rho_0 dl$).

4.12. Вычислите x- координату центра тяжести однородной кривой, заданной как пересечение поверхности $9x^2 + y^2 = z^2$ и плоскости $z = 2x + 5$.

4.13. Вычислите z- координату центра тяжести однородной кривой, заданной как пересечение поверхности $x^2 + 9y^2 = z^2 + 4$ и плоскости $z = 2y - 5$.

4.14. Вычислите работу силы $\vec{F} = \left\{x - y, 2x + y^2\right\}$ вдоль части параболы $x = y^2$, пробегаемой от точки $A(1, -1)$ до точки $B(1, 1)$.

4.15. Вычислите работу поля $\vec{F} = \{2 - y, x\}$ вдоль кривой L, заданной уравнениями $x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t,\ 0 \le t \le 2\pi$ и пробегаемой в направлении возрастания параметра t.

4.16. Вычислите работу поля $\vec{F} = \{-y; x\}$ вдоль замкнутого контура, заданного уравнением $|x| + |y| = 1$, пробегаемого против часовой стрелки.

4.17. Вычислите работу поля $\vec{F} = \left\{e^x - y; 1 + e^y\right\}$ вдоль замкнутого контура, ограниченного отрезками кривых $y = x^2,\ y = x,\ x \ge 0$, пробегаемого против часовой стрелки.

4.18. Вычислите работу поля $\vec{F} = \left\{e^x; x + y\right\}$, вдоль замкнутого контура, заданного уравнениями $x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ 0 \le t \le 2\pi,\ a > 0,\ b > 0$. Обход контура против часовой стрелки.

4.19. Вычислите работу поля $\vec{F} = \{y; z; x\}$ вдоль кривой L, заданной уравнениями $x = \cos t,\quad y = \sin t,\quad z = t,\ 0 \le t \le 2\pi$ и пробегаемой в направлении возрастания параметра t.

4.20. Вычислите работу силы $\vec{F} = \{y, x, 0\}$ вдоль контура, заданного как пересечение эллипсоида $3x^2 + y^2 + z^2 = 4$ и плоскости $z = x - 2$, пробегаемого против часовой стрелки, если смотреть из точки (0,0,-3).

4.21. Вычислите интеграл $I = \oint\limits_L \left(x\cos\alpha + y\cos\beta\right) dl$, где L – замкнутая гладкая кривая, ограничивающая область площади S; α и β - углы между вектором внешней нормали **n** к кривой L в точке $M\left(x, y\right)$ и осями Ox и Oy.

4.22. Докажите, что если L – замкнутый контур на плоскости, n – нормаль к кривой и $\mathbf{l}_0$ – постоянный вектор, то $\oint\limits_L \cos\left(\widehat{\mathbf{l}_0, \mathbf{n}}\right) dl = 0$.

4.23. С помощью криволинейного интеграла найдите площадь области, ограниченной:

4.23.1. эллипсом $x = a\sin t,\ y = b\cos t,\ 0 \le t \le 2\pi,\ a > 0,\ b > 0$;

4.23.2. параболой $(x+y)^2=2ax \quad (a>0)$ и осью Ox;

4.23.3. астроидой $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.

4.24.С помощью формулы Грина вычислите интеграл $\oint\limits_C \left(\sin\left(x^2-x\right)+2y\right)dx+\left(x+\ln\left(y^2-y+1\right)\right)dy$, где C – граница квадрата $|x|+|y|=1$, проходимая против часовой стрелки.

4.25.С помощью формулы Грина вычислите интеграл $\oint\limits_C \left(\sqrt{x^4+1}-y\right)dx+\left(x+\sqrt{y^2+1}\right)dy$, где C – окружность $x^2+y^2=x$, проходимая против часовой стрелки.

4.26.С помощью формулы Грина вычислите интеграл $\oint\limits_C \left(ye^{xy}+1\right)dx+\left(xe^{xy}+x\right)dy$, где C – окружность $x^2+y^2=6x$, проходимая против часовой стрелки.

4.27.С помощью формулы Грина вычислите интеграл $\oint\limits_C y^3dx-x^3dy$, где C – окружность $x^2+y^2=4$, проходимая против часовой стрелки.

4.28.С помощью формулы Грина вычислите интеграл $\oint\limits_C \frac{y}{x^2+y^2}dx-\frac{x}{x^2+y^2}dy$, где C – окружность $x^2+y^2=4$, проходимая против часовой стрелки.

4.29.С помощью формулы Грина вычислите интеграл $\oint\limits_C \left(-x+\frac{2x}{y}\right)dx+\left(y-\frac{x^2}{y^2}\right)dy$, где C – окружность $x^2+(y-2)^2=1$, проходимая против часовой стрелки.

4.30.С помощью формулы Грина вычислите интеграл $\oint\limits_C \left(x+\frac{1}{y}\right)dx+\left(x-\frac{x}{y^2}\right)dy$, где C – контур квадрата с вершинами (2;1), (4;1), (4;3), (2;3), проходимый против часовой стрелки.

4.31.С помощью формулы Грина вычислите интеграл $\int\limits_C \frac{2xdx+2dy}{x^2+2y}$, где C – дуга окружности $\left(x-3\right)^2+y^2=1,\ x\geq 3$. Дуга пробегается против часовой стрелки.

4.32.С помощью формулы Грина вычислите интеграл $\int\limits_C e^{xy}\left(\left(y\cos x-\sin x\right)dx+x\cos x dy\right)$, где C – дуга окружности $x^2+y^2=1$, $y\geq 0$. Дуга пробегается против часовой стрелки.

4.33.С помощью формулы Грина вычислите интеграл $\int\limits_C \left(y+xy\right)e^{x+2y}dx+\left(x+2xy\right)e^{x+2y}dy$, вдоль кривой C, заданной уравнением

$y=\sin x$, где x принимает значения на отрезке $[0;\pi]$. Кривая пробегается против часовой стрелки.

4.34. С помощью формулы Грина вычислите интеграл $\int\limits_C \left(1+xy^2\right)e^{xy^2}dx+2x^2ye^{xy^2}dy$, вдоль кривой *C*, заданной уравнением $y=\sqrt{1-x^2}$, где x принимает значения на отрезке $[0;1]$. Кривая пробегается против часовой стрелки.

4.35. С помощью формулы Грина вычислите интеграл $\int\limits_C \left(2x+x^2y\right)e^{xy}dx+x^3e^{xy}dy$, вдоль кривой *C*, заданной уравнением $y=x\left(1-x\right)$, где x принимает значения на отрезке $[0;1]$. Кривая пробегается против часовой стрелки.

5. Задачи повышенной трудности.

5.1. Пусть число $l(t)$ равно длине кривой L на плоскости, заданной уравнением $y=\dfrac{x^2}{2}$, $0\le x\le t$. Найдите а) $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{l(t)}{t^2}$; б) $\dfrac{dl(t)}{dt}$; в) $\dfrac{d^2l(t)}{dt^2}$.

5.2. Докажите, что если функция $u\left(x,y\right)$ имеет в замкнутой области G непрерывные частные производные второго порядка, то справедлива формула $\iint\limits_G\left[\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy=-\iint\limits_G u\,\Delta u\,dxdy+\int\limits_L u\dfrac{\partial u}{\partial n}dl$, где L – гладкий контур, ограничивающий область *G*, $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ – производная по направлению внешней нормали к *L*, $\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

5.3. Пусть функции $u\left(x,y\right)$, $v\left(x,y\right)$ и их частные производные первого и второго порядка непрерывны в замкнутой области *G*, ограниченной гладкой кривой *L*. Докажите, что справедлива формула: $\oint\limits_L\begin{vmatrix} u & v\\ \dfrac{\partial u}{\partial n} & \dfrac{\partial v}{\partial n}\end{vmatrix}dl=\iint\limits_G\begin{vmatrix} u & v\\ \Delta u & \Delta v\end{vmatrix}dxdy$ (вторая формула Грина), где $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ – производная по направлению внешней нормали к *L*, $\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\Delta v=\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}$, а интеграл в левой части есть криволинейный интеграл первого рода.

5.4. Применяя формулу Грина, найти $\lim\limits_{d(S)\to 0}\dfrac{1}{S}\oint\limits_L\left(\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\right)dl$, где S – площадь области, ограниченной контуром *L*, окружающим точку $\left(x_0,y_0\right)$, $d\left(S\right)$ - диаметр области *S*, **n** – единичный вектор внешней нормали к контуру *L* и $\mathbf{F}=\left\{x,y\right\}$.

Тема 10. Поверхностные интегралы.

1. Сформулируйте определение:

1.1. площади поверхности;
1.2. нормали к поверхности;
1.3. поверхностного интеграла первого рода;
1.4. двусторонней поверхности;
1.5. поверхностного интеграла второго рода;

2. Основные теоремы и формулы (без доказательства).

2.1. Запишите формулу площади поверхности, заданной уравнением $z = h(x, y), \quad (x, y) \in D$, и сформулируйте условия ее применимости.

2.2. Запишите формулу площади поверхности, заданной параметрически, и сформулируйте условия ее применимости.

2.3. Запишите формулу для вычисления поверхностного интеграла первого рода $\iint\limits_S f(x, y, z)ds$ при условии, что поверхность S задана уравнением $z = z(x, y), \quad (x, y) \in G,\ G$ – область на плоскости (x,y).

2.4. Запишите формулу для вычисления поверхностного интеграла первого рода $\iint\limits_S f(x, y, z)ds$ при условии, что поверхность S задана в параметрической форме.

2.5. Запишите формулу для вычисления поверхностного интеграла второго рода $\iint\limits_S f(x, y, z)\cos\gamma ds$ при условии, что поверхность S задана уравнением $z = z(x, y), \quad (x, y) \in G, \quad G$ – область на плоскости (x,y), γ - угол между нормалью к выбранной стороне поверхности и осью Oz.

2.6. Запишите формулу для вычисления поверхностного интеграла второго рода $\iint\limits_S f(x, y, z)\cos\alpha ds$ при условии, что поверхность S задана в параметрической форме, $\alpha -$ угол между нормалью к выбранной стороне поверхности и осью Ox.

2.7. Запишите формулу для вычисления поверхностного интеграла второго рода $\iint\limits_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy$ при условии, что поверхность S задана в параметрической форме.

3. Теоремы с доказательством.

3.1. Докажите теорему о вычислении площади поверхности, заданной уравнением $z = h(x, y), \quad (x, y) \in D$, с помощью двойного интеграла.

3.2. Докажите теорему о существовании площади поверхности, заданой в параметрической форме для случая поверхности, заданной в виде $x = a_{11}u + a_{12}v + b_1$; $y = a_{21}u + a_{22}v + b_2$; $z = a_{31}u + a_{32}v + b_3$.

3.3. Докажите теорему о вычислении поверхностного интеграла первого рода $\iint\limits_S f(x,y,z)ds$ с помощью двойного интеграла, если поверхность S задана уравнением $z = z(x,y)$.

3.4. Докажите, что если функция $P(x,y,z)$ непрерывна на поверхности S, то поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_S P(x,y,z)\cos\alpha ds$ существует (здесь α – угол между направлением нормали к выбранной стороне поверхности и осью OX). Требования к поверхности S сформулируйте самостоятельно.

4. Вопросы и задачи.

4.1. Найдите вектор нормали и запишите уравнение касательной плоскости к поверхности S в заданной точке M:

4.1.1. S: $z = x^2 + y^2$; $M(3,4,25)$;

4.1.2. S: $x^2 + y^2 + z^2 + xyz = 2$; $M(1,1,0)$;

4.1.3. $S: x = 2uv, y = u + v, z = u^2 + v^2$, $M(x_0, y_0, z_0)$, $x_0 = 2u_0v_0$, $y_0 = u_0 + v_0$, $z_0 = u_0^2 + v_0^2$, где $u_0 = 1, v_0 = -1$.

4.1. Найдите площадь поверхности с помощью поверхностного интеграла:

4.2.1. $z = 3x + 4y$, $x^2 + y^2 \le 1$;

4.2.2. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 \le 1$;

4.2.3. $2z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 \le 1$;

4.2.4. $z = xy$, $x^2 + y^2 \le a^2$;

4.2.5. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \ge 0$, $x^2 + y^2 \le \dfrac{a^2}{2}$ (a – положительная константа);

4.2.6. $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = v$, $0 \le u \le a$, $0 \le v \le 2\pi$ (a – положительная константа).

4.3. Вычислите поверхностные интегралы I рода:

4.3.1. $\iint\limits_S ds$, где поверхность S: $x + y + z = 1$, $x \in [-1;1]$, $y \in [-1;1]$;

4.3.2. $\iint\limits_S (x + y + z)ds$, где поверхность S: $x + y + z = 1$, $x \in [-1;1]$, $y \in [-1;1]$;

4.3.3. $\iint\limits_S (x + y + z)ds$, где поверхность S: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \ge 0$;

4.3.4. $\iint\limits_S (x^2 + y^2)ds$, где S – граница тела $V = \{(x,y,z): \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 1\}$;

4.3.5. $\iint\limits_S \left(x^2 + y^2 + z - 0{,}5\right)ds$, где S – часть параболоида $2z = 2 - x^2 - y^2$, $z \ge 0$;

4.3.6. $\iint\limits_S zds$, где S – часть плоскости $z = 3 - 4x + y$, заключенная внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 16$.

4.4. Вычислите поверхностные интегралы второго рода:

4.4.1. $\iint\limits_S dxdy$, если S – часть конической поверхности $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \le z \le 1$, нормаль к которой образует острый угол с осью Oz;

4.4.2. $\iint\limits_S dydz$, если S – часть конической поверхности $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \le z \le 1$, нормаль к которой образует острый угол с осью Oz;

4.4.3. $\iint\limits_S dxdy$, если S – поверхность $x + y + z = 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$, нормаль к которой образует острый угол с осью Oz;

4.4.4. $\iint\limits_S dydz$, если S – поверхность $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$, нормаль к которой образует острый угол с осью Oz;

4.4.5. $\iint\limits_S dxdz$, если S – поверхность $x^2 + y^2 = 1 - z$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$, нормаль к которой образует острый угол с осью Oz;

4.4.6. $\iint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy$, где S – верхняя сторона поверхности $x + y + z = 1$, $x \in [-1;1]$, $y \in [-1;1]$, то есть нормаль к поверхности составляет острый угол с осью Oz;

4.4.7. $\iint\limits_S 3dydz - 2dzdx + dxdy$, где S – сторона поверхности $z = 2x + 3y$, $x \in [-1;1]$, $y \in [-1;1]$, нормаль к которой имеет положительную z-компоненту;

4.4.8. $\iint\limits_S 2dydz - 3dzdx + dxdy$, где S – сторона поверхности $z = x - y$, $x^2 + y^2 \le 4$, нормаль к которой имеет положительную z-компоненту;

4.4.9. $\iint\limits_S (y^2 + z^2)dxdy$, где S – часть внешней стороны цилиндрической поверхности $z = \sqrt{a^2 - x^2}$, $0 \le y \le b$;

4.4.10. $\iint\limits_S (x^2 + y^2 + z^2)dxdy$, где S - часть внешней стороны конической поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \le z \le c$ (нормаль образует тупой угол с осью Oz);

4.4.11. $\iint\limits_S x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$, где S - часть внутренней стороны гиперболоида $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, $0 \le z \le 3$;

4.4.12. $\iint\limits_S x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$, где S – внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ (R – положительная константа).

4.5. Найдите координаты центра тяжести части однородной сферы $x^2+y^2+z^2=R^2, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0$ (R – положительная константа) с помощью поверхностного интеграла.

4.6. Вычислите x - компоненту силы притяжения материальной точки массы m_0, помещённой в начало координат, частью сферы $x^2+y^2+z^2=1$, $x\geq 0$, $y\geq 0$ $z\geq 0$. Поверхностная плотность сферы $\rho=1$.

4.7. Вычислите силу притяжения материальной точки массы m_0, помещённой в начало координат, частью цилиндра $x^2+y^2=1$, $x\geq 0$, $y\geq 0$, $0\leq z\leq 1$. Поверхностная плотность цилиндра $\rho = 1$.

5. Задачи повышенной трудности.

5.1. Вычислите площадь части конической поверхности $x^2+y^2=(1-z)^2$, $z\leq 1$, заключенной внутри цилиндрической поверхности $x^2+y^2=y$.

5.2. Вычислите поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_S x\,dydz$, где S – часть внешней стороны сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$ (R – положительная константа), вырезанная конической поверхностью $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

5.3. Вычислите поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_S z^2dxdy$, где S – часть внешней стороны сферы $x^2+y^2+z^2=4$, $z\geq 0$, вырезанная цилиндрической поверхностью $x^2+y^2=3$.

5.4. Вычислите поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_S z\,dxdz$, где S – часть внешней стороны сферы $x^2+y^2+z^2=1$, $x\geq 0$, $z\geq 0$, вырезанной цилиндрической поверхностью $x^2+y^2=y$.

5.5. Найдите момент инерции относительно оси Oz части сферы $x^2+y^2+z^2=1$, $z\geq 0$, $y\geq 0$, заключенной внутри цилиндрической поверхности $x^2+y^2=x$. Поверхностная плотность $\rho=zy$.

5.6. Вычислите x – координату центра масс части гиперболического параболоида $x^2-y^2=2z$, вырезанной цилиндрической поверхностью $x^2+y^2=x$. Поверхностная плотность $\rho=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$.

Тема 11. Кривые на плоскости.

1. Сформулируйте определение:

1.1. того, что две кривые на плоскости касаются (соприкасаются) в данной точке;
1.2. порядка касания плоских кривых в данной точке;
1.3. особой точки плоской кривой, заданной: а) уравнением $F(x,y)=0$; б) параметрически;
1.4. огибающей однопараметрического семейства плоских кривых;
1.5. кривизны плоской кривой.

2. Основные теоремы и формулы (без доказательства).

2.1. Сформулируйте теорему о необходимых и достаточных условиях для того, чтобы порядок касания двух плоских кривых в данной точке был равен n.
2.2. Сформулируйте теорему о необходимых условиях огибающей однопараметрического семейства плоских кривых.
2.3. Запишите формулу для вычисления кривизны плоской кривой, заданной уравнением $y=f(x)$.
2.4. Запишите формулу для вычисления в данной точке радиуса кривизны кривой, заданной уравнением $y=f(x)$.
2.5. Запишите формулу для вычисления кривизны плоской кривой, заданной в параметрической форме.

3. Теоремы с доказательством.

3.1. Докажите теорему о необходимых и достаточных условиях для того, чтобы порядок касания двух плоских кривых в данной точке был равен n.
3.2. Докажите теорему о необходимых условиях огибающей однопараметрического семейства кривых.
3.3. Выведите формулу для вычисления в данной точке кривизны кривой, заданной уравнением $y=f(x)$.
3.4. Выведите формулу для вычисления в данной точке кривизны кривой, заданной в параметрической форме.

4. Вопросы и задачи.

4.1. Какой порядок касания с осью Ox имеет в начале координат кривая, заданная уравнением:
4.1.1. $y=1-\cos x$;
4.1.2. $y=e^x-\left(1+x+\dfrac{x^2}{2}\right)$;
4.1.3. $y=\operatorname{tg} x-\sin x$.
4.2. При каком выборе коэффициентов a, b и c порядок касания параболы $y=ax^2+bx+c$ и кривой $y=e^x$ в точке с абсциссой $x=x_0$ равен 2?
4.3. Найдите огибающую однопараметрического семейства плоских кривых (C – параметр):

4.3.1. $y = Cx + \dfrac{a}{C} \quad (a = \text{const})$;

4.3.2. $y = Cx - \ln C$;

4.3.3. $2C^2(y - Cx) = 1$;

4.3.4. $y^2 = 2Cx + C^2$.

4.4. Найдите радиус кривизны параболы $y^2 = 2px$ в точке $(x_0, \sqrt{2px_0})$.

5. Задачи повышенной трудности.

5.1. Выведите формулу для вычисления в данной точке кривизны плоской кривой, заданной в неявной форме.

5.2. Выведите формулу для вычисления в данной точке радиуса кривизны плоской кривой, заданной в неявной форме.

5.3. Определите радиус кривизны кривой в произвольной точке, если кривая задана уравнением:

5.3.1. $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$;

5.3.2. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;

5.3.3. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Литература.

1. В.Ф. Бутузов. Лекции по математическому анализу. Часть 2. Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, 2014.
2. В.А.Ильин, Э.Г.Позняк. Основы Математического анализа. Ч.1-2. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.
3. Б.М.Будак, С.В.Фомин. Кратные интегралы и ряды. ФИЗМАТЛИТ, 2002.
4. Г.М.Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. М.: ФИЗМАТГИЗ, 1960.
5. В.Ф.Бутузов, Н.Ч.Крутицкая, Г.Н.Медведев, А.А.Шишкин. Математический анализ в вопросах и задачах. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2000.
6. Б.П.Демидович. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: АСТ, 2002.
7. И.А.Виноградова, С.Н.Олехник, В.А.Садовничий. Задачи и упражнения по математическому анализу. В 2 кн. М.: Высш.шк. 2000.