# 7. Задачи газодинамики и гидродинамики

## 1) Уравнения малых акустических колебаний в сплошной среде

Во многих задачах газодинамики газ можно рассматривать как сплошную среду. При этом, говоря о бесконечно малом объеме, **предполагается, что объем мал по сравнению с характерными размерами системы, но содержит очень большое число молекул.** Когда говорят о движении частицы газа, то имеют в виду не движение отдельной молекулы газа, а смещение элемента объема, содержащего много молекул, но который в газодинамике рассматривается как точка.

Пусть газ движется о скоростью $\mathbf{V}(M,t) = \mathbf{V}(x,y,z,t)$, проекции которой на оси координат обозначим $v_x, v_y, v_z$. Отметим, что $\mathbf{V}(M,t)$ есть скорость газа в данной точке $M$ пространства и времени $t$ . .

Таким образом скорость **V** $(M,t)$ относится к определенным точкам пространства, а не к определенным частицам газа, перемещающемся в пространстве.

Вводим: $\rho(M,t)$ плотность газа, $p\ (M,t)$- давление, $F(M,t)$ -

- плотность внешних действующих сил, рассчитанных на единицу массы.

**Введенные нами координаты называются координатами Эйлера.**

**Уравнение движения газа**. Выделим элементарный объем газа $\Delta V$ с границей $\Delta S$.

Используя формулы Остроградского, равнодействующую сил давления приложенных к поверхности $\Delta S$ можно записать следующим образом:

$$-\int_{\Delta S} p\mathbf{n}d\sigma = -\int_{\Delta V} grad\ p\ dV,$$

где $\mathbf{n}$ - единичный вектор внешней нормали к поверхности $\Delta S$.

**Замечание.** Формулы Остроградского имеют следующий вид:

$$\int\limits_{\Delta S} p\cos(n,x)\,d\sigma = \int\limits_{\Delta V} \frac{\partial p}{\partial x} dV,$$

$$\int\limits_{\Delta S} p\cos(n,y)\,d\sigma = \int\limits_{\Delta V} \frac{\partial p}{\partial y} dV,$$

$$\int\limits_{\Delta S} p\cos(n,z)\,d\sigma = \int\limits_{\Delta V} \frac{\partial p}{\partial z} dV.$$

Поскольку $p\mathbf{n} = p\cos(n,x)\mathbf{i} + p\cos(n,y)\mathbf{j} + p\cos(n,z)\mathbf{k}$, где **i**, **j**, **k** – единичные векторы ортонормированного базиса, то, умножая первую формулу на вектор **i,** вторую на вектор **j**, а третью на вектор **k** и складывая, получим формулу

$$-\int\limits_{\Delta S} p\mathbf{n}\,d\sigma = -\int\limits_{\Delta V} grad\ p\ dV.$$

**Уравнение движения** для объема газа $\Delta V$ :

$$\int_{\Delta V} \rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} dV = -\int_{\Delta V} grad\ p\ dV + \int_{\Delta V} \rho \mathbf{F} dV.$$

При вычислении ускорения $\dfrac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}$ некоторой частицы газа **нужно учесть перемещение самой этой частицы.** Траектории отдельных частиц определяются уравнениями

$$\frac{\partial x}{\partial t} = v_x, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = v_y, \quad \frac{\partial z}{\partial t} = v_z,$$

откуда

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z}\frac{dz}{dt} =$$

$$= \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} v_x + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} v_y + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} v_z = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \left(\mathbf{V}\nabla\right)\mathbf{V}.$$

Оператор $\mathbf{V}\nabla$ определяется следующим образом

$$\mathbf{V}\nabla = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Предполагая, что функции, входящие в интегральную формулу, являются достаточно гладкими, применяя формулу среднего значения и переходя к пределу, стягивая объем в точку, получим **уравнение движения газа форме Эйлера**

$$\mathbf{V}_t + \left(\mathbf{V}\nabla\right)\mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} grad\ p + \mathbf{F}.$$

**Уравнение непрерывности.** Выражает закон сохранения вещества. Если в выделенном объеме $\Delta V$ отсутствуют источники и стоки, то изменение в единицу времени количества газа, заключенного внутри выделенного объема, равно потоку газа через границу:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Delta V}\rho dV = -\int\limits_{\Delta S}\rho \mathbf{V}\mathbf{n}d\sigma.$$

Преобразуя правую часть по формуле Остроградского – Гаусса

$$\int\limits_{\Delta S}\rho \mathbf{V}\mathbf{n}d\sigma = \int\limits_{\Delta V} div\left(\rho \mathbf{V}\right)dV,$$

получим

$$\int\limits_{\Delta V}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\left(\rho \mathbf{V}\right)\right)dV = 0.$$

Применяя формулу среднего значения и переходя к пределу, получим уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\left(\rho \mathbf{V}\right) = 0.$$

**Термодинамическое уравнение состояния.** В наиболее общем виде имеет вид $p = C\left(\rho\right)$, где $C\left(\rho\right)$ - заданная функция.

В результате получается замкнутая система из пяти скалярных уравнений относительно пяти неизвестных функций $v_x, v_y, v_z, p, \rho$ – **система уравнений газовой динамики**

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t} + \left(\mathbf{V}\nabla\right)\mathbf{V} = \mathbf{F} - \dfrac{1}{\rho} grad\ p, \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + div\left(\rho \mathbf{V}\right) = 0, \\ p = C\left(\rho\right). \end{cases}$$

Колебательные движения газа с малыми амплитудами называются **звуковыми волнами**. В каждой точке звуковой волны происходит попеременное сжатие и разрежение газа.

В силу малости колебаний в звуковой волне скорость $\mathbf{V}$ ней мала, так что в первом уравнении системы можно пренебречь членами второго порядка вида $v_x \dfrac{\partial v_x}{\partial x}$ и т.д.

Относительные изменения плотности и давления газа также малы. Положим:

$$p(M,t) = p_0(M) + \bar{p},\ \rho(M,t) = \rho_0 + \bar{\rho},\ \bar{p} \ll p_0,\ \bar{\rho} \ll \rho_0.$$

Здесь $p_0(M),\ \rho_0(M)$ - равновесные значения давления и плотности газа, а величин $\bar{p}(M,t),\ \bar{\rho}(M,t)$- их изменения в звуковой волне.

Величина $\bar{p}(M,t)$ называется **звуковым давлением**.

**Линеаризованная система уравнений.** Пренебрегая в системе уравнений газодинамики членами второго порядка, получим линеаризованную систему уравнений газодинамики.

Функцию $C(\rho)$ разложим в ряд по степеням $\rho$ и учтем члены первого порядка: $p_0 + \bar{p} = C(\rho_0) + C'(\rho_0)\bar{\rho}$. Так как $p_0 = C(\rho_0)$, то $\bar{p} = C'(\rho)\bar{\rho}$

Замкнутая система малых акустических колебаний в сплошной среде имеет вид:

$$\begin{cases} \rho_0 \dfrac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -grad\ \bar{p} + \rho_0 \mathbf{F}, \\ \dfrac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + div(\rho_0 \mathbf{V}) = 0, \\ \bar{p} = C'(\rho)\bar{\rho}. \end{cases}$$

**Уравнение второго порядка относительно функции $\bar{\rho}$.**

Продифференцируем второе уравнение системы по $t$: $\bar{\rho}_{tt} + div\left(\rho_0 \mathbf{V}_t\right) = 0$

и подействуем оператором div на первое уравнение системы:

$$div\left(\rho_0 \mathbf{V_t}\right) = -div\ grad\ \bar{p} + div\left(\rho_0 \mathbf{F}\right).$$

Из третьего уравнения системы в линейном приближении получим:

$$grad\ \bar{p} = C'\left(\rho_0\right) grad\ \bar{\rho}.$$

Обозначим $k\left(M\right) = C'\left(\rho_0\right),\ f\left(M,t\right) = -div\left(\rho_0 \mathbf{F}\right)$. Тогда из трех последних уравнений получаем уравнение второго порядка относительно функции $\bar{\rho}\left(M,t\right)$:

$$\bar{\rho}_{tt} = div\left(k\left(M\right) grad\,\bar{\rho}\right) + f\left(M,t\right).$$

Это уравнение является уравнением колебаний в трехмерном случае. Оно часто называется **уравнением акустики.**

В случае адиабатического процесса уравнение газового состояния имеет вид:

$$p = p_0 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma},$$

где постоянная $\gamma$ - показатель адиабаты, $\gamma = \frac{c_p}{c_V}$, $c_p$ - теплоемкость при постоянном давлении, $c_V$ - теплоемкость при постоянном объёме.

Линейное приближение:

$$p = p_0 + \overline{p} = p_0 \left( \frac{\rho_0 + \overline{\rho}}{\rho_0} \right)^{\gamma} \cong p_0 \left( 1 + \gamma \frac{\overline{\rho}}{\rho_0} \right),$$

откуда $\overline{p} = \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \overline{\rho}$ и $k(M) = \gamma \frac{p_0(M)}{\rho_0(M)}$.

## 2) Динамика несжимаемой жидкости

Полученная система уравнений газодинамики описывает не только динамику газа, но и движение жидкости, то есть является и **системой уравнений гидродинамики**. Будем рассматривать **идеальную жидкость, то есть жидкость, в которой отсутствуют силы внутренней вязкости**.

В случае однородной среды уравнения несжимаемой жидкости имеют вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \left(\mathbf{V}\nabla\right)\mathbf{V} = \mathbf{F} - \dfrac{1}{\rho_0}\nabla p, \\ div\left(\mathbf{V}\right) = 0. \end{cases}$$

Последнее уравнение есть **условие несжимаемости, то есть условие сохранение объема жидкости.**

Пусть внешняя сила потенциальная

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla U,$$

где $U\,(x,y,z,t)$ - некоторая скалярная функция, и рассматривается потенциальное движение жидкости, для которого вектор скорости $\mathbf{V}$ может быть также представлен как градиент по пространственным переменным некоторой скалярной функции $\Phi(x,y,z,t)$, называемая потенциалом скоростей, $\mathbf{V} = \nabla\Phi.$

Первое уравнение системы приобретает вид

$$\nabla\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0}\nabla p + (\nabla\Phi\nabla)\nabla\Phi + \frac{1}{\rho_0}\nabla U = 0.$$

С помощью очевидного равенства $(\nabla\Phi\nabla)\nabla\Phi = \nabla\left(\frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2\right)$,

последнее уравнение преобразуется к виду $\nabla\left\{\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 + \frac{1}{\rho_0}U + \frac{1}{\rho_0}p\right\} = 0$,

и получается **интеграл Бернулли-Коши** $\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 + \frac{1}{\rho_0}U + \frac{1}{\rho_0}p = C(t)$.

С помощью интеграла Бернулли-Коши давление $p(x,y,z,t)$ определяется через потенциал скоростей $\Phi$ с точностью до произвольной функции $C(t)$ одной и той же для всего объема жидкости.

Для потенциала $\Phi$ из второго уравнения системы получаем **уравнение Лапласа**:

$$div(\mathbf{V}) = div(\nabla\Phi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta\Phi = 0.$$

Интеграл Бернулли-Коши и уравнение Лапласа описывают **данный класс** потенциальных движений идеальной несжимаемой жидкости.

Для однозначного определения потенциала скоростей уравнение Бернулли-Коши нужно дополнить начальными и граничными условиями. Если стенка S твердая, то естественное граничное условие равенства нулю нормальной составляющей скорости приводит к однородному граничному условию второго рода (условию Неймана):

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right|_{s} = 0, \qquad t \in [0, \infty),$$

где **n** - вектор нормали к поверхности S.

На свободной поверхности жидкости граничное условие становится гораздо более сложным.

Пусть в равновесном состоянии свободная поверхность жидкости совпадает с плоскостью декартовой прямоугольной системы координат ($x$,$y$,$z$). Тогда в процессе движения свободная поверхность жидкости будет описываться неизвестной функцией $z=\eta(x,y,t)$. Граничные условия на этой поверхности должны устанавливать связь между функциями $\eta(x,y,t)$ и $\Phi(x,y,z,t)\big|_{z=\eta(x,y,t)}$. Так как на свободной поверхности функция $\varsigma(x,y,z,t)=\eta(x,y,t)-z=0$, то будет равно нулю и ее полная производная по времени

$$\frac{d\varsigma}{dt}=\frac{\partial\varsigma}{\partial t}+\frac{\partial\varsigma}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\varsigma}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial\varsigma}{\partial z}\frac{dz}{dt}=0.$$

Поскольку $\mathbf{V}=\left\{\frac{\partial x}{\partial t},\frac{\partial y}{\partial t},\frac{\partial z}{\partial t}\right\}$ и $\frac{\partial\varsigma}{\partial t}=\frac{\partial\eta}{\partial t}$, то последнее уравнение принимает вид:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \mathbf{V}\nabla \varsigma = 0.$$

Учитывая, что $\mathbf{V} = \nabla\Phi,$ **первое (кинематическое) условие на свободной поверхности** принимает вид

$$\left.\left\{\frac{\partial \eta}{\partial t} + \Phi_x \eta_x + \Phi_y \eta_y - \Phi_z\right\}\right|_{z=\eta(x,y,t)} = 0, \quad t \in [0,\infty).$$

**Второе (динамическое) условие** получим из интеграла Бернулли-Коши. Будем рассматривать случай, когда внешней силой является сила тяжести. Тогда потенциал внешней силы имеет вид $U = gz,$

где $g$ – ускорение силы тяжести. Условие равенства давления жидкости на свободной поверхности заданному внешнему давлению (например, атмосферному) $\left. p_0\left(x, y, z, t\right)\right|_{z=\eta(x,y,t)}$, используя интеграл Бернулли-Коши, можно записать в виде

$$\left\{\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{1}{2}\left|\nabla\Phi\right|^2+\frac{g}{\rho_0}\eta\left(x,y,t\right)\right\}\Bigg|_{z=\eta(x,y,t)}=-\frac{1}{\rho_0}p_0\left(x,y,z,t\right)\Big|_{z=\eta(x,y,t)}$$

Заметим, что полученное условие оказывается нелинейным, что сильно усложняет решение соответствующих задач.

Кроме граничных условий должны быть поставлены начальные условия:

$$\Phi\left(x,y,z,t\right)\Big|_{t=0}=\Phi_0\left(x,y,z\right),$$

$$\eta\left(x,y,t\right)\Big|_{t=0}=\eta_0\left(x,y\right).$$