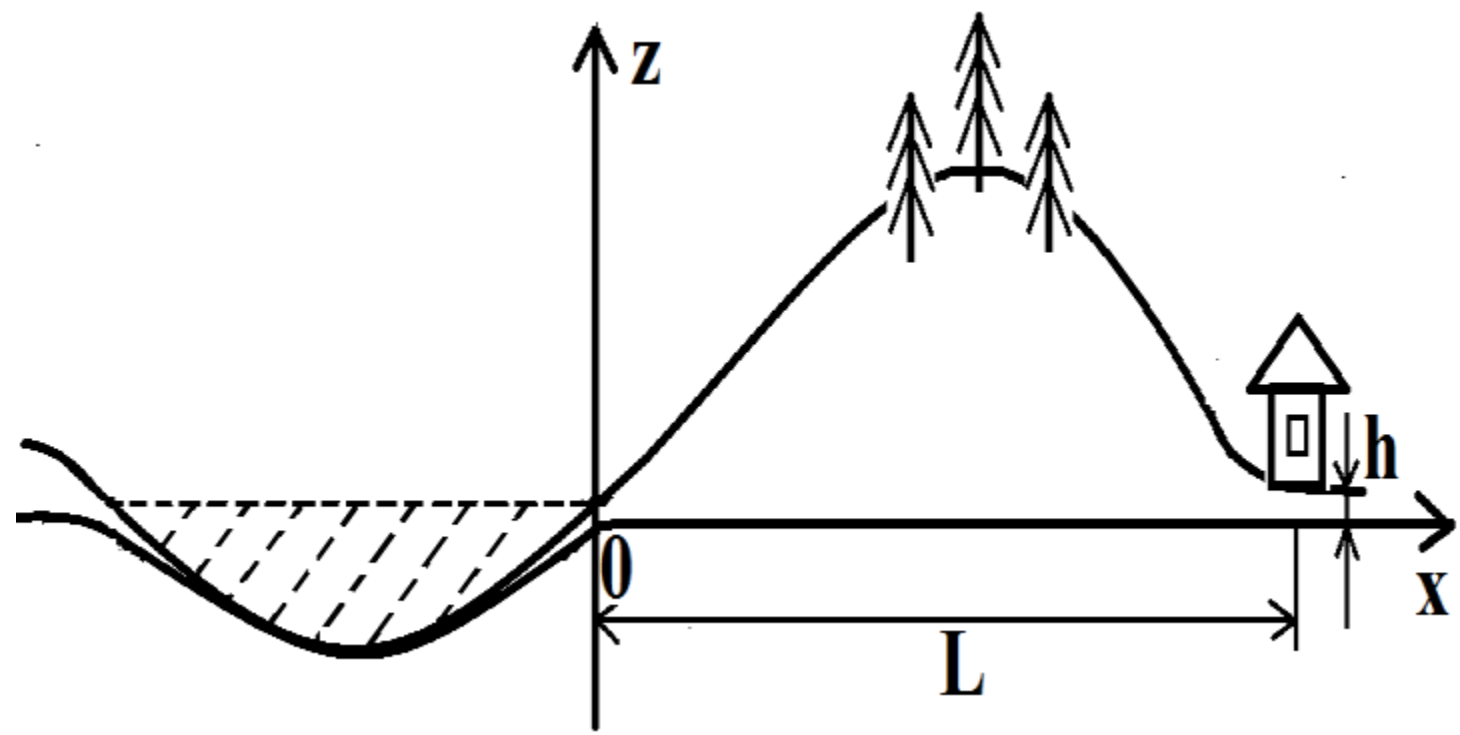
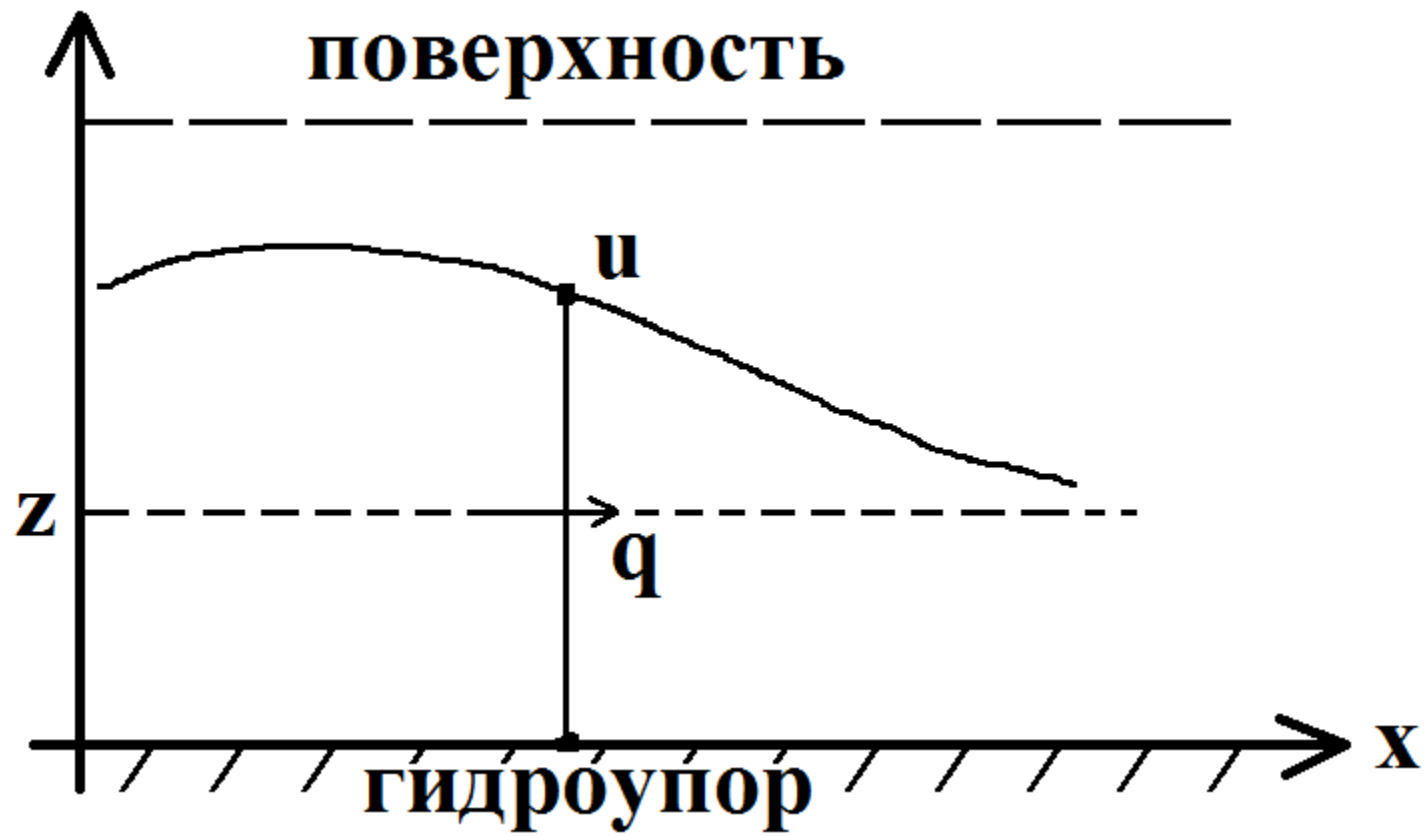


8. Уравнение Буссинеска. Задача о наводнении

Предположим, что рядом с населенным пунктом расположен водоем, под которыми находится **гидроупорный слой (глина)**. Введем декартову систему координат (x, z) , ось x которой направим параллельно поверхности водоема, а ось z перпендикулярно этой поверхности. Предположим, что населенный пункт находится в области $0 < x$, в которой **уровень грунтовой воды описывается функцией $u(x, t)$** . Водоем занимает область $x < 0$. Пусть к моменту $t=0$ вода в водоеме поднялась до отметки $z=0$ и продолжает пребывать по закону $u(0, t) = kt$. **Вопрос:** насколько быстро вода дойдет до населенного пункта, имеющего координату $x=L$, если населенный пункт расположен на высоте h ?





Получим уравнение, описывающее изменение уровня грунтовых вод над гидроупором $u(x, t)$.

Плотность горизонтального потока воды q равна

$$q = -D \frac{\partial P}{\partial x} \quad (1)$$

где P – давление, а D – коэффициент проводимости среды.

Давление на высоте z , где $0 < z < u$ равно

$$P(z) = \rho g (u - z), \quad (2)$$

где ρ - плотность воды.

Следовательно, плотность горизонтального потока q воды равна

$$q = -D\rho g \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3)$$

и не зависит от z .

Полный поток, идущий через сечение, будет равен

$$Q = -D\rho g u \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (4)$$

Интегральное уравнение баланса воды в слое, заключенном между сечениями x и $x + \Delta x$ за промежуток времени от момента t до $t + \Delta t$, будет иметь следующий вид:

$$\int_x^{x+\Delta x} \varepsilon (u(\xi, t + \Delta t) - u(\xi, t)) d\xi = \quad (5)$$

$$= \int_t^{t+\Delta t} D\rho g \left(u(x, \tau) \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} - u(x, \tau + \Delta \tau) \frac{\partial u(x, \tau + \Delta \tau)}{\partial x} \right) d\tau,$$

где ε - **порозность** среды. Из уравнения (5) при $\Delta x \rightarrow 0$
 И $\Delta t \rightarrow 0$ получаем **уравнение Буссинеска:**

$$u_t = \frac{D\rho g}{\varepsilon} (uu_x)_x. \quad (6)$$

Уравнение Буссинеска (6) описывает высоту уровня грунтовых вод над гидроупором.

Сделаем замену переменных: $\tau = \frac{\varepsilon}{D\rho g} t$ и $K = \frac{k\varepsilon}{D\rho g}$.

В новых переменных задача имеет следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{\tau} = (uu_x)_x, \end{array} \right. \quad (7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, 0) = 0, \end{array} \right. \quad (8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u(0, \tau) = K\tau \end{array} \right. \quad (9)$$

Построим автомодельное решение задачи (7)-(9) в виде бегущей волны:

$$\begin{cases} u = f(v\tau - x), & v\tau - x > 0, \\ u = 0, & v\tau - x < 0, \end{cases} \quad (10)$$

где v - постоянная скорость, которую нужно определить.

Подставив (10) в (7), получим обыкновенное дифференциальное уравнение для определения функции $f(\alpha)$, $\alpha = v\tau - x$:

$$vf' = (ff')'. \quad (11)$$

Интегрируем уравнение (11) от 0 до $\alpha > 0$:

откуда

$$vf = ff', \quad (12)$$

$$f' = v. \quad (13)$$

Вид функции f находим из граничного условия (9):

$$u(0, \tau) = K\tau = f(v\tau - 0). \quad (14)$$

Отсюда

$$f(\alpha) = \frac{K\alpha}{v}. \quad (15)$$

Поскольку $f' = v$, то $\frac{K}{v} = v$ и $v = \sqrt{K}$, а $f(\alpha) = \alpha\sqrt{K}$.

Решение задачи (7)-(9) имеет вид:

$$\begin{cases} u(x, \tau) = K\tau - \sqrt{K}x, & x < \sqrt{K}\tau, \\ u(x, \tau) = 0, & x \geq \sqrt{K}\tau. \end{cases} \quad (16)$$

**Наводнение дойдет до населенного пункта в момент τ ,
который определяется равенством**

$$h = K\tau - \sqrt{KL}. \quad (17)$$