# Глава 2. Некоторые классические задачи математической физики

## §1. Уравнение $\Delta u + cu = -f$ в неограниченной области

### Парциальные условия излучения ($\mathbf{e^{-i\omega t}}$).

$$\int_0^b \left\{\frac{\partial u}{\partial x} + i\gamma_n^{(1)} u\right\}_{x=0} \psi_n(y)dy = 2i\gamma_{n_0} A_{n_0} \delta_{nn_0} \ (44) \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

**Падающая (правая) волна:**

$$u_{n_0}(x, y) = A_{n_0} e^{i\gamma_{n_0} x} \psi_{n_0}(y) \quad \Rightarrow$$

$$\int_0^b \left\{\frac{\partial u_{n_0}}{\partial x} + i\gamma_n^{(1)} u_0\right\}_{x=0} \psi_n(y)dy = \int_0^b \left\{i\gamma_{n_0}^{(1)} A_{n_0} + i\gamma_n^{(1)} A_{n_0}\right\}_{x=0} \psi_{n_0}(y)\psi_n(y)dy =$$

$$= \left\{i\gamma_{n_0}^{(1)} A_{n_0} + i\gamma_n^{(1)} A_{n_0}\right\} \underbrace{\boxed{\int_0^b \psi_{n_0}(y)\psi_n(y)dy}}_{=\delta_{nn_0}} =$$

$= 2i\gamma_{n_0} A_{n_0} \delta_{nn_0} \quad \Rightarrow$ **падающая волна** $u_{n_0}(x, y)$ **проходит сечение** $x$**=0**

**Любая правая волна при** $n \neq n_0$ **пройти сечение** $x$**=0 не может:**

$$\overset{(\rightarrow)}{u_k}(x, y) = A_k e^{i\gamma_k x} \psi_k(y), \quad k \neq n_0 \Rightarrow$$

$$\int_0^b \left\{\frac{\partial \overset{(\rightarrow)}{u_k}}{\partial x} + i\gamma_n^{(1)} \overset{(\rightarrow)}{u_k}\right\}_{x=0} \psi_n(y)dy = \left\{i\gamma_k^{(1)} A_k + i\gamma_n^{(1)} A_k\right\}_{x=0} \underbrace{\boxed{\int_0^b \psi_n(y)\psi_k(y)dy}}_{=\delta_{nk}} =$$

$$= 2i\gamma_k^{(1)} A_k = 2i\gamma_{n_0}^{(1)} A_{n_0} \overset{=0}{\boxed{\delta_{kn_0}}} = 0 \quad \Rightarrow \quad A_k = 0, k \neq n_0$$

**Любая левая волна проходит сечение** $x$=0: $\overset{(\leftarrow)}{u}_k(x,y)=B_k e^{-i\gamma_k x}\psi_k(y) \quad \Rightarrow$

$$= \delta_{nk}$$

$$\int_0^b \left\{ \frac{\partial \overset{(\leftarrow)}{u}_k}{\partial x} + i\gamma_n^{(1)} \overset{(\leftarrow)}{u}_k \right\}_{x=0} \psi_n(y)dy =$$

$$= \left\{ -i\gamma_k^{(1)} B_k + i\gamma_n^{(1)} B_n \right\}_{x=0} \boxed{\int_0^b \psi_n(y)\psi_k(y)dy} =$$

$$= (-i\gamma_n^{(1)} B_n + i\gamma_n^{(1)} B_n) = 0$$

**Заметим, что в каждом сечении распространяются одновременно правая и левая волны.**

## Квадрупольный излучатель

$$p(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \zeta_n^{(1)}(kr) P_n(\cos\theta) \qquad (61)$$

$$\zeta_n^{(1)}(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(kr) \qquad (62)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r}\bigg|_{r=a} = i\omega\rho_0 v_0 P_2(\cos\theta) \quad (58) \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n k \zeta_n^{(1)\prime}(ka) P_n(\cos\theta) = i\omega\rho_0 v_0 P_2(\cos\theta)$$

$$C_2 k \zeta_2^{(1)\prime}(ka) = i\omega\rho_0 v_0 \quad \Rightarrow$$

$$C_2 = i \overset{=c}{\frac{\omega}{k}} \frac{\rho_0 v_0}{\zeta_2^{(1)\prime}(ka)} = ic\rho_0 v_0 \frac{1}{\zeta_2^{(1)\prime}(ka)} \quad \Rightarrow$$

$$p(r,\theta) = ic\rho_0 v_0 \frac{\zeta_2^{(1)}(kr)}{\zeta_2^{(1)\prime}(ka)} P_2(\cos\theta) \qquad (64)$$

$$v_r = \frac{1}{i\omega\rho_0} \frac{\partial p}{\partial r} \qquad (55) \Rightarrow$$

$$= \omega$$

$$v_r(r,\theta) = \frac{1}{i\omega\rho_0} ic\rho_0 v_0 k \frac{\zeta_2^{(1)\prime}(kr)}{\zeta_2^{(1)\prime}(ka)} P_2(\cos\theta) =$$

$$= v_0 \frac{\zeta_2^{(1)\prime}(kr)}{\zeta_2^{(1)\prime}(ka)} P_2(\cos\theta) \qquad (65)$$

$$ka = \frac{2\pi}{\lambda} a \ll 1, \quad kr = \frac{2\pi}{\lambda} r \gg 1$$

$$p(r,\theta) = ic\rho_0 v_0 \frac{\zeta_2^{(1)}(kr)}{\zeta_2^{(1)\prime}(ka)} P_2(\cos\theta) = ic\rho_0 v_0 \frac{-\frac{1}{kr} e^{ikr} e^{-i\frac{\pi}{2}}}{i\frac{9}{(ka)^4}} P_2(\cos\theta) =$$

$$= \frac{ic\rho_0 v_0 k^4 a^4}{i9kr} e^{ikr} e^{-i\frac{\pi}{2}} P_2(\cos\theta) = -\frac{c\rho_0 v_0 k^3 a^4}{9r} e^{ikr} e^{-i\frac{\pi}{2}} P_2(\cos\theta) \quad (67)$$

$$v_r(r,\theta) = v_0 \frac{\zeta_2^{(1)\prime}(kr)}{\zeta_2^{(1)\prime}(ka)} P_2(\cos\theta) = v_0 \frac{-\frac{i}{kr} e^{ikr} e^{-i\frac{\pi}{2}}}{i\frac{9}{(ka)^4}} P_2(\cos\theta) =$$

$$= -\frac{v_0 k^4 a^4}{9kr} e^{ikr} e^{-i\frac{\pi}{2}} P_2(\cos\theta) = -\frac{v_0 k^3 a^4}{9r} e^{ikr} e^{-i\frac{\pi}{2}} P_2(\cos\theta) \quad (68)$$

$$\overline{P}(r,\theta,t)=\mathrm{Re}(p(r,\theta)e^{-i\omega t})=\mathrm{Re}\left(-\frac{c\rho_0 v_0 k^3 a^4}{9r}P_2(\cos\theta)e^{-i\left(\omega t-kr+\frac{\pi}{2}\right)}\right)=$$

$$=-\frac{c\rho_0 v_0 k^3 a^4}{9r}P_2(\cos\theta)\cos\left(\omega t-kr+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\overline{V}_r\left(r,\theta,t\right)=\mathrm{Re}(v_r(r,\theta)e^{-i\omega t})=\mathrm{Re}\left(-\frac{v_0 k^3 a^4}{9r}P_2(\cos\theta)e^{-i\left(\omega t-kr+\frac{\pi}{2}\right)}\right)=$$

$$=-\frac{v_0 k^3 a^4}{9r}P_2(\cos\theta)\cos\left(\omega t-kr+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\overline{Y}=\frac{1}{T}\int_0^T\overline{P}(r,\theta,t)\overline{V}_r\left(r,\theta,t\right)dt=\frac{c\rho_0 v_0^2 k^6 a^8 P_2^2(\cos\theta)}{81r^2}\frac{1}{T}\int_0^T\cos^2\left(\omega t-kr+\frac{\pi}{2}\right)dt=$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T\cos^2\left(\omega t-kr+\frac{\pi}{2}\right)dt=\frac{1}{2T}\int_0^T(1+\cos 2\left(\omega t-kr+\frac{\pi}{2}\right))dt=\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$\overline{Y}=\frac{c\rho_0 v_0^2 k^6 a^8 P_2^2(\cos\theta)}{162r^2}$$

$$\mathit{\Pi}=r^2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\overline{Y}\sin\theta d\theta d\varphi=\frac{2\pi c\rho_0 v_0^2 k^6 a^8}{162}\int_{\pi}^{0}P_2^2(\cos\theta)d\cos\theta=$$

$$=\frac{\pi c\rho_0 v_0^2 k^6 a^8}{81}\int_{-1}^{1}P_2^2(x)dx=\frac{\pi c\rho_0 v_0^2 k^6 a^8}{81}\left\|P_2\right\|^2=$$

$$=\frac{\pi c\rho_0 v_0^2 k^6 a^8}{81}\frac{2}{2\cdot 2+1}=\frac{2\pi c\rho_0 v_0^2 k^6 a^8}{405}$$

$\overline{Y}$ - **интенсивность излучения квадруполя,**

$\Pi$ - **мощность излучения квадруполя.**

## Дифракция звуковой волны на бесконечном жёстком цилиндре

**На цилиндр радиуса *a* падает плоская звуковая волна, давление *p0(x)* в которой можно представить в виде:**

$$p_0 = Ae^{ikx} = Ae^{ikr\cos\varphi} = A\left(J_0(kr) + 2\sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(kr)\cos n\varphi\right) \quad (79)$$

$$e^{ikr\cos\varphi} = a_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n(r)\cos n\varphi + b_n(r)\sin n\varphi\right),$$

$$a_0(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikr\cos\varphi}d\varphi,$$

$$a_n(r) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikr\cos\varphi}\cos n\varphi d\varphi,$$

$$b_n(r) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikr\cos\varphi}\sin n\varphi d\varphi \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

$$a_n(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikr\cos\varphi}\left(e^{in\varphi} + e^{-in\varphi}\right)d\varphi.$$

**Интегральное представление функции Бесселя имеет следующий вид:**

$$J_n(kr) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikr\sin\alpha + in\alpha}d\alpha$$

**Сделаем замену:**

$$\alpha = \varphi - \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad J_n(kr) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikr\sin\alpha + in\alpha}d\alpha =$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikr\cos\varphi+in\varphi}e^{-i\frac{\pi}{2}n}d\varphi=\frac{i^{-n}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikr\cos\varphi+in\varphi}d\varphi.$$

**Мы сохранили пределы интегрирования после замены, так как функция**

$$f(r,\alpha)=e^{-ikr\sin\alpha+in\alpha}$$

**при любом значении $r$ является периодической функцией с периодом с периодом $2\pi$ и поэтому выражение для $J_n(kr)$ можно интегрировать по любому промежутку длиной в $2\pi$. Действительно, если рассмотреть интеграл**

$$I(r,\beta)=\int_{\beta}^{\beta+2\pi} f(r,\alpha)d\alpha \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial I(r,\beta)}{\partial\beta}=f(r,\beta+2\pi)-f(r,\beta)=0,$$

**откуда следует, что $I(r,\beta)$ не зависит от параметра $\beta$.**

**Поскольку**

$$J_n(kr)=\frac{i^{-n}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikr\cos\varphi+in\varphi}d\varphi,$$

**то**

$$a_n(r)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikr\cos\varphi}\left(e^{in\varphi}+e^{-in\varphi}\right)d\varphi=i^nJ_n(kr)+i^{-n}J_{-n}(kr)=$$

$$=i^n\left(J_n(kr)+i^{-2n}J_{-n}(kr)\right)=$$

$$=i^n\left(J_n(kr)+(-1)^nJ_{-n}(kr)\right)=2i^nJ_n(kr).$$

**Аналогично получаем**

$$b_n(r) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikr\cos\varphi}\left(e^{in\varphi} - e^{-in\varphi}\right)d\varphi =$$

$$= i^{-1}\left(i^n J_n(kr) - i^{-n} J_{-n}(kr)\right) = i^{-1} i^{-n}\left(i^{2n} J_n(kr) - J_{-n}(kr)\right) =$$

$$= i^{-(n+1)}\left((-1)^n J_n(kr) - J_{-n}(kr)\right) = 0.$$

**Таким образом, для разложения плоской волны по цилиндрическим функциям имеет место формула**

$$e^{ikr\cos\varphi} = J_0(kr) + 2\sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(kr)\cos n\varphi,$$

**откуда следует формула (79).**

**Введем следующие обозначения:**

$p(r,\varphi) = p_0(r,\varphi) + p_s(r,\varphi) -$ **полное давление.**

$p_0(r,\varphi) -$ **давление в падающей волне,**

$p_s(r,\varphi) -$ **давление в отраженной волне.**

**Для давления в отраженной волне получается краевая задача:**

$$\begin{cases} \Delta p_s + k^2 p_s = 0, \quad r > a, & (80) \\ \dfrac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial p_s}{\partial r} = -\dfrac{\partial p_0}{\partial r}, \quad r = a, & (81) \\ p_s = \underline{\underline{O}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{r}}\right), & (82) \\ \dfrac{\partial p_s}{\partial r} - ikp_s = \overline{\overline{o}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{r}}\right). & (83) \end{cases}$$

**Решение краевой задачи (80)-(83) во внешней области с учетом условий излучения (82), (83) можно записать следующим образом:**

$$p_s(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n H_n^{(1)}(kr)\cos n\varphi. \qquad (84)$$

**Из граничного условия (81) получим**

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n k H_n^{(1)'}(ka)\cos n\varphi = -Ak\left( J_0^{'}(ka) + 2\sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n^{'}(ka)\cos n\varphi \right) =$$

$$= AkJ_1\left(ka\right) - 2Ak\sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n^{'}(ka)\cos n\varphi,$$

**откуда следует. что**

$$C_0 = \frac{J_1(ka)}{H_0^{(1)'}(ka)}A, \quad C_n = -\frac{2i^n J_n'(ka)}{H_n^{(1)'}(ka)}A, \qquad (85)$$

$$(n=1,2,...).$$

**Решение задачи (80)-(83) имеет следующий вид:**

$$p_s(r,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}C_nH_n^{(1)}(kr)\cos n\varphi=$$

$$=A\left(\frac{J_1(ka)}{H_0^{(1)\prime}(ka)}H_0^{(1)}(kr)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2i^nJ_n'(ka)}{H_n^{(1)\prime}(ka)}H_n^{(1)}(kr)\cos n\varphi\right), \qquad (86)$$

**Радиальная составляющая отраженной волны выражается через давление в отраженной волне следующим образом:**

$$V_{sr}(r,\varphi)=\frac{1}{i\omega\rho_0}\frac{\partial p_s(r,\varphi)}{\partial r}=\frac{1}{ic\rho_0}\sum_{n=0}^{\infty}C_nH_n^{(1)\prime}(kr)\cos n\varphi= \qquad (87)$$

$$=\frac{1}{ic\rho_0}A\left(\frac{J_1(ka)}{H_0^{(1)\prime}(ka)}H_0^{(1)}(kr)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2i^nJ_n'(ka)}{H_n^{(1)\prime}(ka)}H_n^{(1)}(kr)\cos n\varphi\right)$$

**Рассмотрим волновую (дальнюю) зону** $(kr\gg 1)$**:**

$$H_n^{(1)}(kr)\simeq\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}e^{i(kr-\frac{\pi}{2}n-\frac{\pi}{4})}; \qquad (88)$$

$$p_s(r,\varphi)\simeq\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}e^{i(kr-\frac{\pi}{4})}\sum_{n=0}^{\infty}C_ni^{-n}\cos n\varphi=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}e^{i(kr-\frac{\pi}{4})}A\left(\frac{J_1(ka)}{H_0^{(1)'}(ka)}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2J_n'(ka)}{H_n^{(1)'}(ka)}\cos n\varphi\right); \qquad (89)$$

$$V_{sr}(r,\varphi)=\frac{1}{i\omega\rho_0}\frac{\partial p_s(r,\varphi)}{\partial r}\simeq\frac{1}{c\rho_0}\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}e^{i(kr-\frac{\pi}{4})}\sum_{n=0}^{\infty}C_ni^{-n}\cos n\varphi=$$

$$=\frac{1}{c\rho_0}A\left(\frac{J_1(ka)}{H_0^{(1)\prime}(ka)}H_0^{(1)'}(kr)+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_n'(ka)}{H_n^{(1)\prime}(ka)}H_n^{(1)'}(kr)\cos n\varphi\right). \qquad (90)$$