Семинар–Лекция 7

ПРОСТРАНСТВА $\mathcal{D}$ И $\mathcal{D}'$

§ 1. Вводные замечания

На этом занятии основное внимание будет уделено пространству $\mathcal{D}' \equiv \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ — пространству непрерывных линейных функционалов, действующих на пространстве основных функций $\mathcal{D} \equiv \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$.

Из теоретических основ, изложенных на лекции 5, на практике важно следующее:
1) линейный функционал f, определённый на $\mathcal{D}$, непрерывен тогда и только тогда, когда он секвенциально непрерывен в нуле, т. е.

$$\forall \{\varphi_n\} \subset \mathcal{D} \quad \varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0 \implies \langle f, \varphi_n \rangle \to 0;$$

2) говорят, что $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$, если существует такой компакт $K \subset \mathbb{R}^N$, что при всех $n \in \mathbb{N}$ верно $\varphi_n \in \mathcal{D}(K)$ и $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(K)} \varphi$. Иными словами, носители всех функций последовательности лежат в некотором компакте и все производные функций $\varphi_n(x)$ (включая сами функции) сходятся равномерно в K (а тем самым, и в $\mathbb{R}^N$) к соответствующим производным функции φ.

§ 2. Пространство $\mathcal{D}$: некоторые примеры

ПРИМЕР 1. Функция-«шапочка». Напомним:

$$\omega_\varepsilon(x) = c_\varepsilon \begin{cases} e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x^2|}}, & |x| < \varepsilon, \\ 0, & |x| \geqslant \varepsilon. \end{cases} \tag{2.1}$$

Здесь константа c_ε такова, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \omega_\varepsilon(x)\, dx \equiv \int\limits_{\{x \in \mathbb{R}^N \,|\, |x| \leqslant \varepsilon\}} \omega_\varepsilon(x)\, dx = 1.$$

Рассмотрим случай $N = 1$. Имеем

$$1 = \int\limits_{\mathbb{R}^1} \omega_\varepsilon(x)\,dx = c_\varepsilon \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2-|x^2|}}\,dx =$$

$$= c_\varepsilon \cdot \varepsilon \int\limits_{-1}^{1} e^{-\frac{1}{1-\frac{|x|^2}{\varepsilon^2}}}\,d\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = c_\varepsilon \cdot \varepsilon \int\limits_{-1}^{1} e^{-\frac{1}{1-t^2}}\,dt.$$

Отсюда ясно, что

$$c_\varepsilon = \frac{c}{\varepsilon}, \quad c = \left(\int\limits_{-1}^{1} e^{-\frac{1}{1-x^2}}\,dx\right)^{-1}.$$

П Р И М Е Р 2. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}$. Выяснить, есть ли среди последовательностей

$$1)\,\varphi_k(x) = \frac{1}{k}\varphi(x), \quad 2)\,\varphi_k(x) = \frac{1}{k}\varphi\left(\frac{1}{k}x\right), \quad 3)\,\varphi_k(x) = \frac{1}{k}\varphi(kx)$$

сходящиеся в $\mathcal{D}$.

□

1. Итак, нужно проверить, что:
а) носители всех функций φ_k лежат в некотором компакте K;
б) все производные $\partial^\alpha \varphi_k$, $|\alpha| \geqslant 0$, равномерно на K сходятся к $\partial^\alpha \psi$, $\psi \in \mathcal{D}$.

2. Очевидно, носитель всех функций φ_k совпадает с носителем функции φ и, тем самым, условие а) выполнено. б) Имеем

$$\forall |\alpha| \geqslant 0 \quad \max_{x \in \operatorname{supp}\varphi} |\partial^\alpha \varphi_k(x)| = \frac{1}{k} \max_{x \in \operatorname{supp}\varphi} |\partial^\alpha \varphi(x)| \to 0,$$

поскольку все рассматриваемые производные ограничены в K. Итак, $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$.

3. Очевидно, что при $\varphi(x) \not\equiv 0$ сходимость места не имеет уже потому, что $\operatorname{supp}\varphi_k = k\operatorname{supp}\varphi$ и, следовательно, не существует общего компакта, содержащего носители всех функций последовательности.

4. Легко видеть, что $\operatorname{supp}\varphi_k \subset \operatorname{supp}\varphi =: K$. Следовательно, условие а) выполнено. б) Очевидно, $\varphi_k \rightrightarrows 0$, т. к.

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} |\varphi_k(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \left|\frac{1}{k}\varphi(kx)\right| \leqslant \sup_{kx \in \mathbb{R}^N} \frac{1}{k}|\varphi(kx)| = \frac{1}{k} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |\varphi(x)|.$$

5. Значит, если $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$, то $\varphi \equiv 0$. Но уже для производных первого порядка имеем:

$$\frac{\partial}{\partial x_l}\varphi_k(x) = k\frac{1}{k}\left(\frac{\partial}{\partial t_l}\varphi(t)\right)\bigg|_{t=kx},$$

откуда следует, что

$$\sup_{x\in K}\left|\frac{\partial}{\partial x_l}\varphi_k(x)\right| = \sup_{t\in K}\left|\frac{\partial}{\partial t_l}\varphi(t)\right| = C \not\to 0,$$

если переменная x_l выбрана так, что производная функции $\varphi(x)$ по этой переменной отлична от тождественного нуля.

6. Итак, условие б) нарушено и последовательность $\{\varphi_k\}$ не стремится к 0 в $\mathcal{D}$, а следовательно, не имеет предела в этом пространстве. ⊠

§ 3. Обобщённые функции из $\mathcal{D}'$: примеры

Далее по тексту, если не оговорено особо, считаем $N = 1$.

ПРИМЕР 3. На лекции 5 были приведены примеры обобщённых функций: $\delta(x)$, $\vartheta(x)$, константа, $\mathcal{P}\frac{1}{x}$, из которых $\delta(x)$ и $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ являются сингулярными обобщёнными функциями, а другие две — регулярными. Оставалось ещё показать, что выражение, входящее в определение функции $\mathcal{P}\frac{1}{x}$, действительно имеет смысл при всех $\varphi(x) \in \mathcal{D}$. Сделаем это.

□

1. Зафиксируем $\varphi(x) \in \mathcal{D}$. В выражении

$$\text{v.p.}\int\limits_{\mathbb{R}^1}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx \equiv \lim_{\gamma\to+0}\left(\int\limits_{-\infty}^{-\gamma} + \int\limits_{\gamma}^{\infty}\right)\frac{\varphi(x)}{x}\,dx,$$

определяющем эту функцию, содержится предел при $\gamma \to +0$. (Заметим ещё, что в силу финитности основной функции интегрирование фактически не распространяется до бесконечности.)

2. Для доказательства существования этого предела можно воспользоваться критерием Коши. Иными словами, достаточно доказать, что

$$\text{при}\quad \gamma_1, \gamma_2 \to +0, \quad \gamma_1 < \gamma_2, \quad \int\limits_{-\gamma_2}^{-\gamma_1}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx + \int\limits_{\gamma_1}^{\gamma_2}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx \to 0. \tag{3.1}$$

3. Для этого воспользуемся формулой конечных приращений Лагранжа, согласно которой для каждого $x > 0$ $(x < 0)$ существует такое $x^* = x^*(x) \in (0; x)$ $(x^{**} = x^{**}(x) \in (x; 0))$, что $\varphi(x) = \varphi(0) + \varphi'(x^*)x$ (соответственно $\varphi(x) = \varphi(0) + \varphi'(x^{**})x$). Тогда сумму интегралов в (3.1) можно переписать в виде

$$I(\gamma_1, \gamma_2) = \int\limits_{-\gamma_2}^{-\gamma_1}\left(\frac{\varphi(0)}{x} + \varphi'(x^{**})\right)dx + \int\limits_{\gamma_1}^{\gamma_2}\left(\frac{\varphi(0)}{x} + \varphi'(x^*)\right)dx.$$

4. Имеем теперь

$$I(\gamma_1,\gamma_2)=\left(\int\limits_{-\gamma_2}^{-\gamma_1}+\int\limits_{\gamma_1}^{\gamma_2}\right)\frac{\varphi(0)}{x}\,dx+\int\limits_{-\gamma_2}^{-\gamma_1}\varphi'(x^{**})\,dx+\int\limits_{\gamma_1}^{\gamma_2}\varphi'(x^*)\,dx.$$

Первое слагаемое обращается в ноль как интеграл от нечётной функции, второе же оценивается величиной $\sup_{x\in\mathbb{R}^1}|\varphi'(x)|\cdot 2\gamma_2\to 0$ при $\gamma_2\to 0$, поскольку первый множитель в силу свойств основных функций ограничен. ⊠

ПРИМЕР 4. Рассмотрим теперь обобщённую функцию $\mathcal{P}\frac{1}{x^2}$, определяемую выражением

$$\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x^2},\varphi(x)\right\rangle=\mathrm{v.\,p.}\int\limits_{\mathbb{R}^1}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}\,dx. \tag{3.2}$$

□

1. Аналогично предыдущему можно доказать, что выражение (3.2) имеет смысл для всех $\varphi(x)\in\mathcal{D}$ (см. задачу 4). Докажем теперь, что оно действительно представляет непрерывный линейный функционал. Поскольку линейность в силу свойств интеграла и предела очевидна, остаётся проверить лишь непрерывность.

2. Итак, пусть последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ сходится к нулю в $\mathcal{D}$, т. е. эти функции равны нулю вне некоторого компакта $[-R;R]$ и сходятся в нём вместе со всеми производными к нулю равномерно.

3. Для каждой из функций $\varphi_n(x)$ запишем разложение по формуле Тейлора до первого порядка включительно с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$\varphi_n(x)=\varphi_n(0)+\varphi_n'(0)x+\frac{\varphi_n''(x_n^*(x))}{2}x^2.$$

4. Тогда можем переписать (3.2) в виде

$$\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x^2},\varphi(x)\right\rangle=\mathrm{v.\,p.}\int\limits_{[-R;R]}\frac{\varphi_n'(0)}{x}\,dx+\int\limits_{[-R;R]}\frac{\varphi_n''(x_n^*(x))}{2}\,dx,$$

где во втором слагаемом по понятной причине символ главного значения снят. Первое слагаемое равно нулю как предел интегралов от нечётной функции по симметричному множеству, а правое ограничено величиной $R\sup_{x\in\mathbb{R}^1}|\varphi_n''(x)|$ и стремится к нулю в силу равномерной сходимости производных.

5. Доказательство того факта, что данная обобщённая функция является сингулярной, остаётся в качестве самостоятельного упражнения (см. задачу 4). ⊠

ПРИМЕР 5. Рассмотрим обобщённую функцию

$$f=\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_n\delta(x-n),$$

где a_n — произвольные числовые коэффициенты. Здесь полагается по определению

$$\langle \delta(x - x_0), \varphi \rangle \equiv \varphi(x_0) \tag{3.3}$$

(подробнее о линейной замене переменных в аргументе обобщённых функций мы поговорим в следующей лекции) и, тем самым,

$$\langle f, \varphi \rangle \equiv \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \varphi(n). \tag{3.4}$$

□

1. Заметим прежде всего, что выражение (3.4) определено для всех $\varphi \in \mathcal{D}$. Действительно, в силу финитности основной функции в $\langle f, \varphi \rangle$ войдёт лишь конечное число слагаемых:

$$\langle f, \varphi \rangle = \sum_{|n| \leqslant m[\varphi]} a_n \varphi(n). \tag{3.5}$$

2. Линейность рассматриваемого функционала очевидна. Непрерывность тоже, поскольку, во-первых, при $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$ все функции последовательности обращаются в нуль вне некоторого общего компакта и, тем самым, в (3.5) можно взять некоторое общее $m[\varphi]$, а во-вторых, в силу сходимости $\varphi_k(x) \rightrightarrows \varphi(x)$ при каждом $x = n$ (здесь даже несущественно, что сходимость равномерна) имеем

$$\sum_{|n| \leqslant m[\varphi]} a_n \varphi_k(n) \to \sum_{|n| \leqslant m[\varphi]} a_n \varphi(n).$$

⊠

ПРИМЕР 6. Пусть $f(x) \in C^1(x \leqslant x_0) \cap C^1(x \geqslant x_0)$, что понимается следующим образом: $f(x) \in C^1(x < x_0) \cap C^1(x > x_0)$ и существуют (вообще говоря, различные) конечные предельные значения производной $f'(x)$ при $x \to x_0 - 0$ и $x \to x_0 + 0$.

□

1. Отметим, что отсюда сразу следует, что $f'(x)$ ограничена при $x \to x_0 - 0$ и при $x \to x_0 + 0$, а поэтому (в силу критерия Коши существования предела функции в точке) существуют конечные предельные значения $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$.

2. Имеем далее (с учётом (3.3))

$$\begin{aligned}\langle f', \varphi \rangle = -\langle f, \varphi' \rangle = -\int\limits_{\mathbb{R}^1} f(x)\varphi'(x)\,dx = \\ = -\int\limits_{-\infty}^{x_0} f(x)\varphi'(x)\,dx - \int\limits_{x_0}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx = \\ = -\left(f(x)\varphi(x)\right)\Big|_{-\infty}^{x_0-0} - \left(f(x)\varphi(x)\right)\Big|_{x_0+0}^{+\infty} +\end{aligned}$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{x_0} f'(x)\varphi(x)\,dx + \int\limits_{x_0}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx =$$

$$= f(x_0+0)\varphi(x_0) - f(x_0-0)\varphi(x_0) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \{f'(x)\}\varphi(x)\,dx =$$

$$= \langle \{f'(x)\} + [f]_{x_0}\delta(x-x_0), \varphi\rangle\,.$$

⊠

§ 4. Операции над обобщёнными функциями из $\mathcal{D}'$: умножение на $a(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$

Пусть $a(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ —произвольная функция.

О п р е д е л е н и е 1. *Произведением обобщённой функции f на функцию $a(x)$ называется обобщённая функция af, действующая по правилу*

$$\langle af, \varphi\rangle = \langle f, a(x)\varphi(x)\rangle. \tag{4.1}$$

Это определение есть не что иное, как естественное обобщение равенства

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} (a(x)f(x))\varphi(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x)(a(x)\varphi(x))\,dx,$$

верного для регулярной обобщённой функции с представителем $f(x) \in \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$.

Легко видеть, что полученная операция всякую обобщённую функцию из $\mathcal{D}'$ преобразует в обобщённую функцию из $\mathcal{D}'$. В самом деле, для всякой $\varphi(x) \in \mathcal{D}$ имеем $a(x)\varphi(x) \in \mathcal{D}$. Поэтому выражение в правой части (4.1) — значение обобщённой функции f на $a\varphi \in \mathcal{D}$ — заведомо имеет смысл. Линейность полученного функционала очевидна. Для доказательства непрерывности достаточно заметить, что в силу ограниченности функции $a(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ и всех её производных на компакте K, содержащем носители всех функций последовательности $\{\varphi_n(x)\}$, функции $a(x)\varphi_n(x)$ со всеми производными равномерно в K сходятся к $a(x)\varphi(x)$, а их носители, очевидно, содержатся в K.

П Р И М Е Р 7. Пусть $a(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$. Тогда $a(x)\delta(x) \in \mathcal{D}$. Покажем, более того, что $a(x)\delta(x) = a(0)\delta(x)$, т. е.

$$\forall \varphi(x) \in \mathcal{D}\ \ \langle a(x)\delta(x), \varphi(x)\rangle = a(0)\varphi(0).$$

□ Действительно, по определению 1 для произвольной $\varphi(x) \in \mathcal{D}$ имеем

$$\langle a(x)\delta(x), \varphi(x)\rangle = \langle \delta(x), a(x)\varphi(x)\rangle = (a(x)\varphi(x))|_{x=0} = a(0)\varphi(0).$$

$\boxtimes$

ПРИМЕР 8. 1) Очевидно, $x\mathcal{P}\frac{1}{x} \in \mathcal{D}'$. Покажем, что $x\mathcal{P}\frac{1}{x} = 1$.

$\square$ Действительно, имеем в силу определения обобщённой функции $\mathcal{P}\frac{1}{x}$, а также определения произведения обобщённых функций:

$$\left\langle x\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi(x)\right\rangle = \left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, x\varphi(x)\right\rangle = \\ = \text{v. p.} \int\limits_{\mathbb{R}^1} \frac{x\varphi(x)}{x} dx = \int\limits_{\mathbb{R}^1} \varphi(x)\, dx = \langle 1, \varphi(x)\rangle.$$

2) $x^2\mathcal{P}\frac{1}{x^2} = 1$. Имеем

$$\left\langle x^2\mathcal{P}\frac{1}{x^2}, \varphi(x)\right\rangle = \left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x^2}, x^2\varphi(x)\right\rangle = \\ = \text{v. p.} \int\limits_{\mathbb{R}^1} \frac{x^2\varphi(x) - 0^2\varphi(0)}{x^2} dx = \int\limits_{\mathbb{R}^1} \varphi(x)\, dx = \langle 1, \varphi(x)\rangle.$$

3) $x^3\mathcal{P}\frac{1}{x^3} = 1$. Имеем

$$\left\langle x^3\mathcal{P}\frac{1}{x^3}, \varphi(x)\right\rangle = \left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x^3}, x^3\varphi(x)\right\rangle = \\ = \text{v. p.} \int\limits_{\mathbb{R}^1} \frac{x^3\varphi(x) - 0^3\varphi(0) - (x^3\varphi(x))'\big|_0 \cdot x)}{x^3} dx = \\ = \text{v. p.} \int\limits_{\mathbb{R}^1} \frac{x^3\varphi(x) - 0^3 \cdot \varphi(0) - 0 \cdot x)}{x^3} dx = \int\limits_{\mathbb{R}^1} \varphi(x)\, dx = \langle 1, \varphi(x)\rangle.$$

$\boxtimes$

ПРИМЕР 9. $x^2\mathcal{P}\frac{1}{x^3} = \mathcal{P}\frac{1}{x}$.

$\square$ Действительно,

$$\left\langle x^2\mathcal{P}\frac{1}{x^3}, \varphi(x)\right\rangle = \left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x^3}, x^2\varphi(x)\right\rangle = \\ = \text{v. p.} \int\limits_{\mathbb{R}^1} \frac{x^2\varphi(x) - 0^2\varphi(0) - (x^2\varphi(x))'\big|_0 \cdot x)}{x^3} dx = \\ = \text{v. p.} \int\limits_{\mathbb{R}^1} \frac{x^2\varphi(x) - 0}{x^3} dx = \text{v. p.} \int\limits_{\mathbb{R}^1} \frac{\varphi(x)}{x} dx \quad \boxtimes$$

§ 5. Операции над обобщёнными функциями из $\mathcal{D}'$: дифференцирование

Определение 2. *Производной порядка α $\partial^\alpha f$ обобщённой функции $f \in \mathcal{D}$ называется обобщённая функция, действующая по правилу*

$$\langle \partial^\alpha f, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle f, \partial^\alpha \varphi\rangle.$$

В частности, при $N = 1$ имеем

$$\langle f^{(n)}, \varphi\rangle = (-1)^n\langle f, \varphi^{(n)}\rangle.$$

Это определение является естественным обобщением формулы интегрирования по частям

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \partial^\alpha f(x)\varphi(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x)\partial^\alpha\varphi(x)\,dx$$

для регулярных обобщённых функций, заданных бесконечно дифференцируемой функцией $f(x)$. Здесь в силу финитности основной функции $\varphi(x)$ интегрирование фактически ведётся по компакту.

ПРИМЕР 10. $\vartheta' = \delta(x)$ (здесь и далее равенство понимается в смысле равенства обобщённых функций).

$\square$ Имеем

$$\left\langle \frac{d}{dx}\vartheta(x), \varphi(x)\right\rangle = -\langle \vartheta(x), \varphi'(x)\rangle = -\int\limits_{\mathbb{R}^1}\vartheta(x)\,\varphi'(x)\,dx = -\int\limits_0^{+\infty}\varphi'(x)\,dx =$$

$$= -\varphi(x)\big|_0^{+\infty} = -(-\varphi(0)) = \varphi(0) = \langle\delta(x), \varphi(x)\rangle.$$

$\boxtimes$

ПРИМЕР 11. $\frac{d}{dx}\mathcal{P}\frac{1}{x} = -\mathcal{P}\frac{1}{x^2}$.

$\square$ Имеем

$$\left\langle \frac{d}{dx}\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi(x)\right\rangle = -\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi'(x)\right\rangle =$$

$$= -\int\limits_{\mathbb{R}^1}\frac{\varphi'(x)}{x}dx = -\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int\limits_{+\varepsilon}^{+\infty}\right)\frac{\varphi'(x)}{x}dx =$$

$$= \left\{\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}\right\} =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\frac{\varphi(x)}{x}\bigg|_{-\infty}^{-\varepsilon} + \frac{\varphi(x)}{x}\bigg|_{+\varepsilon}^{+\infty} + \left(\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int\limits_{+\varepsilon}^{+\infty}\right)\frac{\varphi(x)}{x^2}dx\right] =$$

$$
= -\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\frac{\varphi(-\varepsilon)}{-\varepsilon}-\frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon}+\right.
$$

$$
\left.+\left(\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon}+\int\limits_{+\varepsilon}^{+\infty}\right)\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}dx+\left(\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon}+\int\limits_{+\varepsilon}^{+\infty}\right)\frac{\varphi(0)}{x^2}dx\right]=
$$

$$
=-\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x^2},\varphi(x)\right\rangle-\lim_{\varepsilon\to+0}\left[-\frac{\varphi(\varepsilon)+\varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon}+\varphi(0)\left(-\left.\frac{1}{x}\right|_{-\infty}^{-\varepsilon}-\left.\frac{1}{x}\right|_{+\varepsilon}^{+\infty}\right)\right]=
$$

$$
=-\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x^2},\varphi(x)\right\rangle+
$$

$$
+\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\frac{\varphi(\varepsilon)+\varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon}+\varphi(0)\left(\frac{1}{-\varepsilon}-\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]=
$$

$$
=-\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x^2},\varphi(x)\right\rangle+\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{\varphi(\varepsilon)-\varphi(0)}{\varepsilon}+\frac{\varphi(-\varepsilon)-\varphi(0)}{\varepsilon}\right)=
$$

$$
=-\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x^2},\varphi(x)\right\rangle+\varphi'(0)-\varphi'(0)=-\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x^2},\varphi(x)\right\rangle.
$$

⊠

З а м е ч а н и е 1. Как видно, в основе техники работы с обобщёнными функциями лежит интегрирование по частям, а также учёт свойств гладкости основных функций (применяем теорему Лагранжа либо определение производной, стандартные пределы и т. п.).

П Р И М Е Р 12. Докажем, что решением уравнения $x^m u = 0$ является в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ являются функции $u(x)=\sum_{k=0}^{m-1}c^k\delta^{(k)}(x)$, где c_k, $k = 0,\ldots,m-1$, — произвольные постоянные.

□ Действительно,

1. Очевидно, что $u(x)=\sum_{k=0}^{m-1}c_k\delta^{(k)}(x)$ является решением рассматриваемого уравнения, поскольку

$$
\left\langle x^m\delta^{(k)}(x),\varphi(x)\right\rangle=\left\langle \delta^{(k)}(x),x^m\varphi(x)\right\rangle=(-1)^k\left\langle \delta(x),(x^m\varphi(x))^{(k)}\right\rangle=0
$$

при всех $k=0,\ldots,m-1$.

2. Докажем, что найдено общее решение рассматриваемого уравнения. Пусть $\eta(x)$ — основная функция, равная 1 в окрестности точки $x=0$ (вопрос о её построении сейчас обсуждать не будем). Тогда для любой основной функции $\varphi(x)$ верно представление

$$
\varphi(x)=\eta(x)\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}x^k+x^m\psi(x),
$$

где

$$
\psi(x)=\frac{1}{x^m}\left[\varphi(x)-\eta(x)\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}x^k\right].
$$

3. Заметим, что $\psi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$. В самом деле, она финитна (поскольку финитны $\varphi(x)$ и $\eta(x)$); её бесконечная дифференцируемость во всех точках $x \neq 0$ очевидна; в точке $x = 0$ она следует из формулы Тейлора

$$\psi(x) = \sum_{k=m}^{p} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^{k-m} + O(|x|^{p+1-m}),$$

справедливой в той окрестности точки $x = 0$, где $\eta = 1$, при всех $p \geqslant m$.

4. Следовательно, если $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ — решение уравнения $x^m u = 0$, то

$$\begin{aligned}\langle u, \varphi\rangle = \left\langle u, \eta(x) \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k \right\rangle + \langle u, x^m \psi(x)\rangle = \\ = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} \langle u, \eta(x) x^k\rangle + \langle x^m u, \psi\rangle = \\ = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k c_k \varphi^{(k)}(0) + 0 = \sum_{k=0}^{m-1} c_k \langle \delta^{(k)}, \varphi\rangle\end{aligned}$$

с $c_k = \frac{(-1)^k}{k!} \langle u, x^k \eta(x)\rangle$, $k = 0, \ldots, m-1$. ⊠

Важное замечание. При использовании рядов Тейлора для функций из $\mathcal{D}$ необходимо учитывать, что эти ряды, вообще говоря, лишь асимптотические и могут не сходиться к функции на интересующем нас множестве. В самом деле, в силу единственности аналитического продолжения с действительной прямой финитная функция, отличная от тождественного нуля, не может являться аналитической.

§ 6. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. С помощью замены переменной установить вид зависимости нормировочного коэффициента в (2.1) от ε при произвольном N.

Задача 2*. Доказать, что $\omega_\varepsilon(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ при 1) $N = 2$; 2) произвольном N.

Задача 3. Выяснить, задают ли функции 1) e^x, 2) $e^{\frac{1}{x}}$ (после произвольного доопределения в нуле) обобщённые функции из $\mathcal{D}'$. Регулярными или сингулярными будут эти обобщённые функции?

Задача 4. Положим

$$\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x^m}, \varphi(x) \right\rangle \equiv \text{v. p.} \int\limits_{\mathbb{R}^1} \frac{\varphi(x) - \sum_{l=0}^{m-2} \frac{x^l}{l!} \varphi^{(l)}(0)}{x^m}\, dx. \tag{6.1}$$

Доказать, что:

1) правая часть формулы (6.1) определена при всех $\varphi(x) \in \mathcal{D}$;

2) она задаёт непрерывный линейный функционал на $\mathcal{D}$;
3) этот функционал является сингулярной обобщённой функцией.

Задача 5. Продолжение. Показать, что:
1) $x\mathcal{P}\frac{1}{x} = 1$;
2) при всех $m \in \mathbb{N}$

$$x^m \mathcal{P}\frac{1}{x^m} = 1.$$

Задача 6. 1) Показать, что

$$x\mathcal{P}\frac{1}{x^2} = \mathcal{P}\frac{1}{x}.$$

2*) Сформулировать и доказать общее утверждение (ср. пример 9).

Задача 7. Показать, что $\frac{d}{dx}\,\mathbf{sgn}\,x = 2\delta(x)$ (Здесь и далее производная понимается в смысле обобщённых функций.)

Задача 8. 1) Показать, что

$$\frac{d}{dx}\mathcal{P}\frac{1}{x^2} = -2\mathcal{P}\frac{1}{x^3}.$$

2) Показать, что

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \mathcal{P}\frac{1}{x}.$$

(Как корректно придать смысл интегралу с логарифмом?)

Задача 9*. Положим для всех $\varphi(x,y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$

$$\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x^2+y^2}, \varphi \right\rangle = \int\limits_{x^2+y^2 \leqslant 1} \frac{\varphi(x,y)-\varphi(0,0)}{x^2+y^2}\,dx\,dy + \int\limits_{x^2+y^2>1} \frac{\varphi(x,y)}{x^2+y^2}\,dx\,dy.$$

1) Доказать, что это выражение определено для всех $\varphi(x,y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$.
2) Доказать, что оно задаёт непрерывный линейный функционал на $\mathcal{D}$.
3) Доказать, что

$$(x^2+y^2)\mathcal{P}\frac{1}{x^2+y^2} = 1,$$

где равенство понимается в смысле обобщённых функций.