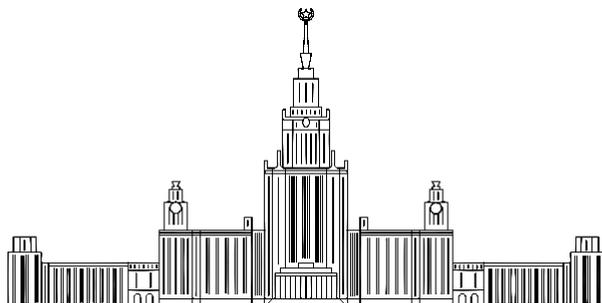
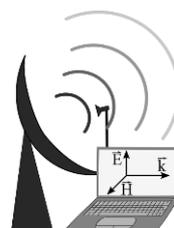


Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова



Актуальные проблемы электродинамики

международная конференция памяти
Алексея Георгиевича Свешникова



(Москва – 28 – 29 марта 2023г.)
Сборник тезисов докладов

Москва 2023

Международная конференция памяти А. Г. Свешникова
«Актуальные проблемы электродинамики»
Сборник тезисов

28 – 29 марта 2023 г. Физический факультет.
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Программный комитет:

1. Боголюбов А.Н. профессор, зав. отделением физического факультета МГУ;
(председатель)
2. Ильинский А.С. Д. ф.-м. н. профессор ВМиК МГУ
(зам. пред.)
3. Бородачев Л.В. Д. ф.-м. н. доцент физического факультета МГУ
4. Еремин Ю.А. Д. ф.-м. н. в.н.с. ВМиК
5. Кравченко В.Ф. Д. ф.-м. н. профессор ИРЭ РАН
6. Тихонравов А.В. Д. ф.-м. н. профессор НИВЦ МГУ

Организационный комитет:

1. Белокуров В.В. профессор, декан физического факультета МГУ
(председатель)
2. Могилевский И.Е. доцент физического факультета МГУ
(зам. председателя)
3. Шапкина Н.Е. доцент физического факультета МГУ
(зам. председателя)
4. Боголюбов Н.А. н.с. физического факультета МГУ
5. Волков В.Т. доцент физического факультета МГУ
6. Ерохин А.И. с.н.с. физического факультета МГУ
7. Коняев Д.А. с.н.с. физического факультета МГУ
8. Мухартова Ю.В. доцент физического факультета МГУ
9. Петухов А.А. вед. программист физического факультета МГУ
10. Попов В. Ю. профессор физического факультета МГУ
11. Хлебников Ф.Б. вед. программист физического факультета МГУ
(секретарь)

Страница конференции: <http://math.phys.msu.ru/actual-electrodynamics>

© Физический факультет МГУ, 2023
© Кафедра математики

Пленарные доклады

Дискретное моделирование плазмы. Метод крупных частиц.

Discrete simulation of plasma. Method of large particles.

Бородачев Л.В.

*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, Москва, РФ
borodach2000@mail.ru*

Аннотация. В работе рассматривается становление метода крупных частиц как основного инструмента кинетического моделирования плазмы. Обсуждаются предпосылки появления, теоретическое обоснование, современное состояние метода. Демонстрируются его приложения в области численных исследований актуальных проблем плазмифизики.

Введение

Метод крупных (Макро) частиц (ММЧ) является представителем специфического класса численных методов, отличительную черту которых составляет имитационный характер моделей, получаемых на их основе. Его появление было связано с необходимостью достоверного виртуального представления сложных физических эффектов в тех областях, где традиционные методы математического исследования оказывались либо бесполезны, либо крайне неэкономичны.

Описание работы

Идеология метода крупных частиц базируется на предпосылке Власова [1] о том, что эволюция начального состояния любой совокупности реальных заряженных частиц достаточно хорошо описывается с помощью фазовых траекторий малого ансамбля макрочастиц (пакетов реальных частиц), движущихся в порождаемых ими самосогласованных электромагнитных полях. В настоящей практике концепция имеет форму РС алгоритма, сочетающего численное интегрирование уравнений движения частиц конечного размера под действием силы Лоренца с вычислением на сетке самосогласованных электромагнитных полей через источники, роль которых играют плотности заряда и тока, обусловленные неравновесным распределением самих частиц.

Физическим основанием замены реальной плазмы ансамблем макрочастиц служит сохранение ее базовых пространственно-временных параметров: плазменных и циклотронных частот, дебаевского и усредненного ларморовского радиусов.

Основные вопросы математического обоснования метода легко обозначаются, если решение по ММЧ рассматривать как аппроксимацию точного решения начальной задачи для уравнения Власова на лагранжевой сетке в виде совокупности взаимодействующих макрочастиц, т.е. вид, область сходимости и погрешность численного решения. Отметим, что в настоящее время доказана слабая локальная сходимость решения по методу макрочастиц к классическому решению системы уравнений Власова - Пуассона. Также установлено, что дискретная функция распределения, полученная по ММЧ аппроксимирует решение уравнения Власова с точностью порядка обратной дебаевской плотности макрочастиц. При этом общая схема ММЧ явно имитирует самосогласованную эволюцию системы зарядов и внутренних электромагнитных полей, точно отражая внутренний смысл терминологии "вычислительный эксперимент".

Оценим вышесказанное с позиций методологии численного расчета. Прежде всего, в реальных численных исследованиях, всегда рассматриваются ограниченные области фазового пространства, конечные временные интервалы и сравнительно небольшие ансамбли модельных (крупных) частиц. При этом как результат расчета нас интересует не столько сама функция распределения частиц, сколько ее первые моменты, имеющие смысл плотности заряда, средней скорости частиц, температуры и т.п. Таким образом, с практической точки зрения достигнутый уровень математического

обоснования ММЧ нас устраивает, несмотря на некоторую его незавершенность (в частности, отсутствуют теоремы сходимости в общей электромагнитной постановке).

Вместе с тем, определенная не конструктивность существующих оценок как скорости сходимости дискретного решения к точному, так и физической адекватности численных результатов (обуславливающая их во многом качественный характер) объясняет необходимость дальнейшего совершенствования метода крупных частиц. В этой связи отметим, что в типичном вычислительном эксперименте порядка 90% вычислительных затрат приходится на продвижение частиц. Таким образом, оптимизация динамической части PIC алгоритма дает существенную экономию счетных ресурсов. Это определило направление и результаты ряда работ, представленных в настоящем докладе. Отметим следующее.

Предложена и алгоритмически реализована методика рационального динамического сопряжения в текущем счетном прогоне явной (экономичной, но условно устойчивой) и неявной (безусловно устойчивой, но менее экономичной) схем [2]. Выбор той или иной схемы определен величиной временного шага τ , физически адекватного конкретной стадии исследуемого процесса. При построении алгоритма использована ранее построенная экономичная неявная симметричная схема 2-ого порядка точности, в основе которой лежит редукция магнитной составляющей силы Лоренца [3]. Результатом использования методики явилось сокращение времени симуляции (в сравнении со “сплошным” проходом по явной схеме) примерно на треть.

Разработан эффективный подход к распараллеливанию PIC алгоритмов, названный Методом Разделения Частиц [4]. Здесь, в отличие от Метода Декомпозиции Области, все частицы дискретной плазменной модели равными долями распределяются по вычислительным узлам, каждый из которых обладает собственной копией сеточных значений полей. По завершении временного шага эволюции самосогласованной системы эти узлы суммируют вклады своих частиц в единые массивы значений источников (плотности заряда, тока и т.д.), которые передаются на корневой узел для решения полевых уравнений с последующей обратной широкополосной рассылкой найденных значений полей, определяющих новое продвижение частиц.

Эти новации были реализованы в разработанном комплексе программ кинетического моделирования разреженной плазмы. Пакет включает 1.5-мерный последовательный код **DC4DF**, ориентированный на компьютеры индивидуального пользования, и 2.5-мерный параллельный код **DarWin**, ориентированный на суперкомпьютеры с распределенной памятью, в частности, кластеры ВЦ МГУ.

На базе созданного аппарата совместно с ведущими НИИ РАН выполнены численные исследования ряда фундаментальных явлений физики плазмы [5-7]. В частности, высокочастотного диамагнетизма потенциальных циклотронных волн (мод Бернштейна) — нелинейного явления, заключающегося в вытеснении магнитного поля из областей локализации электронно-циклотронных колебаний [8]. Эта работа особенно примечательна с позиций идеологии математического моделирования. Здесь методом вычислительного эксперимента, не зависящим от ограничений теории, впервые доказана справедливость ранее выдвинутой концепции высокочастотного диамагнитного эффекта [9], наглядно продемонстрировано его существование и получены оценки параметров [10], позволившие далее обнаружить это явление и в натурном эксперименте [11].

Литература

1. *Власов А.А.* Теория многих частиц. М.-Л.: ГИТТЛ. – 1950. – 348 с.
2. *Бородачев Л.В., Анненков С.С.* Мультиклеточный алгоритм численного решения динамических уравнений модели Власова-Дарвина // Ученые Записки Физического Факультета МГУ – 2021. – № 4. С. 2440801-1-2440801-8.
3. *Бородачев Л.В.* Неявная аппроксимация уравнений движения дарвинской модели плазмы// Журнал Вычислительной Математики и Математической Физики. – 1991. – Т. 31, № 6. – С. 934-939.

4. *Бородачев Л.В., Коломиец Д.О.* Параллельные вычисления в дарвинской PIC-модели// Компьютерные исследования и Моделирование. — 2015. — Т. 7, № 7. — С. 61–69.
5. *Бородачев Л.В., Тихончук В.Т.* Взаимодействие короткого электромагнитного импульса большой амплитуды со слоем плотной плазмы// Физика плазмы. — 1993 — Т. 19, № 6. — С. 813-819.
6. *Borodachev L.V., Kolomiets D.O.* Single-Species Weibel Instability of Radiationless Plasma// Journal of Plasma Physics. — 2011. — V. 77. — P. 277-288.
7. *Бородачев Л.В.* PIC-моделирование параметрической неустойчивости магнитоактивной плазмы // Известия Российской академии наук. Серия изическая. — 2018. — Т. 82, № 1. — С. 92-96.
8. *Бородачев Л.В., Некрасов А.К.* Диамагнитная неустойчивость циклотронных волн в плазме// Вестник МГУ. Сер. 3. — 1984. — Т. 25, №5. — С. 91-98.
9. *Некрасов А.К., Петвиашвили В.И.* Диамагнетизм циклотронных волн в плазме// Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики. — 1979. — Т. 77, №2. — С. 605-616.
10. *Бородачев Л.В., Некрасов А.К., Сигов Ю.С.* Численное исследование диамагнетизма циклотронных волн в плазме. М. — 1981. — 20 с. (Препринт ИПМ АН СССР №23).
11. *Залеский Ю.Г., Зинченко В.И., Назаров Н.И., Демченко В.В.* Экспериментальное наблюдение нелинейных эффектов при возбуждении в плазме циклотронных волн большой амплитуды// Письма в ЖЭТФ. — 1982. — Т. 35, №7. — С. 281-286.

Развитие теории нестационарных условий излучения в работах А. Г. Свешникова

Development of the Non-Stationary Radiation Conditions by A. G. Sveshnikov

Быков А. А.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, Москва, РФ.

abykovmsu@gmail.com

Аннотация. Условия излучения для задачи о распространении нестационарных электромагнитных волн (ЭМВ) в волноведущих системах с уходящими на бесконечность границами были сформулированы и обоснованы коллективом сотрудников кафедры математики физического факультета МГУ под руководством профессора А.Г. Свешникова. В данной работе излагаются основные математические модели распространения ЭМВ, включающие нестационарные условия излучения, в том числе для задач с электронными и плазменными пучками.

Введение

Условия излучения являются неотъемлемой составной частью корректной постановки задачи для уравнений Максвелла в неограниченных областях. Для гармонических полей с зависимостью от времени $e^{-i\omega t}$ условия излучения были сформулированы в работах А.Н. Тихонова, А.А. Самарского, А.Г. Свешникова в 40-е и 50-е годы. Поля в продольно однородных подводных волноводах представляются в виде суммы облучающих и рассеянных полей, условия излучения состоят в задании комплексных амплитуд облучающих полей. В 60-е годы актуальными стали задачи с нестационарными полями, включающие также динамику заряженных частиц. В настоящее время актуальна проблема расчета микроволновых генераторов, основанных на использовании волноводных элементов с релятивистскими электронными пучками. Общие принципы создания полностью консервативных алгоритмов расчета системы поле + частицы были сформулированы в [1] (мы упоминаем не все публикации). В [2] решена задача расчета плазменного СВЧ генератора на основе нестационарной

консервативной математической модели. Дискретная модель построена и обоснована в [3]. В [4], [5] сформулированы и обоснованы условия излучения для задачи излучения из волноведущей системы в пространство. Сильноточные самосогласованные нестационарные модели на основе уравнений Максвелла и Власова построены и обоснованы в [6]. Задача моделирования процессов в плазменном СВЧ генераторе решена в [7]. В [8] развиваются методы исследования ряда задач плазмодинамики, связанных с расчетом динамики электронной компоненты квазинейтральной плазмы. В результате вычислительного эксперимента удалось обнаружить образование внутренних переходных слоев потенциала электрического поля. Дальнейшее усовершенствование алгоритма нестационарных условий излучения дано в [9]. В отличие от условий излучения для гармонических по времени полей, для нестационарных полей реализация точных условий требует хранения в памяти компьютера всей предыстории процесса от запуска генератора. Эффективный алгоритм, основанный на оптимизации схемы накопления информации, построен и реализован в [10], построены и обоснованы точные нелокальные по времени нестационарные парциальные условия излучения для открытых волноводных систем.

Постановка задачи для уравнений Максвелла.

Далее мы сформулируем метод, разработанный под руководством профессора А. Г. Свешникова на кафедре математики физического факультета МГУ для решения прикладной задачи, математическая модель которой соответствует практически используемым объектам. Это так называемая волноводно-лестничная структура, применяемая в генераторах электромагнитных волн сантиметрового и миллиметрового

диапазона. Общее решение уравнений Максвелла $rot \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$, $rot \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$ с

начальными и граничными условиями $\mathbf{E}|_{t=0} = \mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}|_{t=0} = \mathbf{E}_0$, $\mathbf{E}_\tau|_{\partial D} = 0$ можно представить в виде суперпозиции волн ТЕ и ТМ типа, бегущих в каждом из волноводов (занумерованы индексом j). Найдем структуру поля, зависящего по экспоненциальному закону от продольной координаты z : $\mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{e}(x, y)e^{\pm iy z}$, $\mathbf{H}(x, y, z) = \mathbf{h}(x, y)e^{\pm iy z}$.

Пусть (φ_n, α_n) есть полная система собственных функций и собственных значений краевой задачи $\nabla_\perp^2 \varphi + \alpha^2 \varphi = 0, \varphi|_\Gamma = 0$, и (ϕ_n, β_n) задачи $\nabla_\perp^2 \phi + \beta^2 \phi = 0, \partial \phi / \partial \mathbf{n}_\perp|_\Gamma = 0$. Здесь Γ есть полная граница блока (круга или кругового кольца): $\nabla_\perp^2 \mathbf{e} + \chi^2 \mathbf{e} = 0$, $\nabla_\perp^2 \mathbf{h} + \chi^2 \mathbf{h} = 0$, где $\chi^2 = \kappa^2 - \gamma^2$, $\nabla_\perp u = (u_x, u_y, 0)$. Выразим поперечные компоненты полей:

$$\mathbf{e}_\perp = -\frac{i\gamma}{\chi^2} \nabla_\perp \mathbf{e}_z + \frac{i\omega\mu}{\chi^2} [\mathbf{n}_z \times \nabla_\perp \mathbf{h}_z], \quad \mathbf{h}_\perp = -\frac{i\gamma}{\chi^2} \nabla_\perp \mathbf{h}_z - \frac{i\omega\varepsilon}{\chi^2} [\mathbf{n}_z \times \nabla_\perp \mathbf{e}_z], \quad \text{где}$$

$$[\mathbf{n}_z \times \nabla_\perp u] = \left(-\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}, 0\right). \text{ Используем в качестве координатной системы поля ТМ и ТЕ}$$

типов:

$$\mathbf{e}_{n,z}^{TM} = \varphi_n, \quad \mathbf{e}_{n,\perp}^{TM} = -\frac{i\gamma}{\alpha_n^2} \nabla_\perp \varphi_n, \quad \mathbf{h}_{n,z}^{TM} = 0, \quad \mathbf{h}_{n,\perp}^{TM} = -\frac{i\omega\varepsilon}{\alpha_n^2} [\mathbf{n}_z \times \nabla_\perp \varphi_n],$$

$$\mathbf{e}_{n,z}^{TE} = 0, \quad \mathbf{e}_{n,\perp}^{TE} = \frac{i\omega\mu}{\beta_n^2} [\mathbf{n}_z \times \nabla_\perp \phi_n], \quad \mathbf{h}_{n,z}^{TE} = \phi_n, \quad \mathbf{h}_{n,\perp}^{TE} = -\frac{i\gamma}{\beta_n^2} \nabla_\perp \phi_n.$$

Поперечные координаты магнитного поля:

$$\mathbf{H}_\perp^{(j)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{h}_{k,j,\perp}^{TE}(x_j, y_j) A_{k,j}^{TE}(z_j, t) + \mathbf{h}_{k,j,\perp}^{TM}(x_j, y_j) A_{k,j}^{TM}(z_j, t), \text{ аналогичное выражение для } \mathbf{E}_\perp^{(j)}.$$

Нестационарное представление поля в подсоединенных волноводах

Пусть $L_1 > 0$, $L_2 > 0$ и D_L есть вся область, ограниченная металлическими стенками, в том числе область внутри отрезков подводящего и отводящего волноводов, для которой

$z_1 < L_1$ и $z_2 < L_2$, причем z_1 и z_2 есть продольные координаты вдоль оси соответственно подводящего и отводящего волноводов. Тогда для обобщенного решения уравнений Максвелла выполнен закон сохранения энергии:

$$\frac{1}{8\pi} \iiint_{D_L} (\mathbf{E}^2(t_1) + \mathbf{H}^2(t_1)) dv = \frac{1}{8\pi} \iiint_{D_L} (\mathbf{E}^2(t_0) + \mathbf{H}^2(t_0)) dv - \int_{t_0}^{t_1} \iiint_{D_L} (\mathbf{J}, \mathbf{E}) dv + \int_{t_0}^{t_1} \frac{c}{4\pi} \sum_{j=1}^J \iint_{\Sigma_j} \left([\mathbf{E} \times \mathbf{H}]_{z_j=L_j}, \mathbf{e}_{z_j} \right) dx_j dy_j dt.$$

Из уравнений Максвелла следует, что коэффициенты разложения поля по полной системе нормальных волн удовлетворяют уравнению Клейна-Гордона

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z_j^2} + (\gamma_j^{TE, TM})^2 \right) A_{k,j}^{TE, TM} = 0. \text{ Общее решение в продольно однородных участках}$$

$z_j > L_j$ можно найти, используя преобразование Фурье по координате z_j :

$$A_{k,j}(z_j, t) = -c \int_{t_0}^{t - (z_j - L_j)/c} \frac{\partial A_{k,j}}{\partial z_j}(L_j, \tau) J_0 \left(\gamma_j \sqrt{c^2(t - \tau)^2 - (z_j - L_j)^2} \right) d\tau, \quad (1)$$

здесь и далее упоминание о принадлежности к ТЕ и ТМ типам опущено. Поэтому, положив $z_j = L_j$, получим нестационарные условия излучения:

$$A_{k,j}(L_j, t) = -c \int_{t_0}^t \frac{\partial A_{k,j}}{\partial z_j}(L_j, \tau) J_0(\gamma_j c(t - \tau)) d\tau.$$

Таким образом, для электромагнитного поля \mathbf{E}, \mathbf{H} , заданного в $D_L \times [0, T]$, выполнены условия излучения, если в каждом продольно однородном подсоединенном волноводе D_j сужение каждой из компонент поля на поперечное сечение Σ_j принадлежит пространству $L^2(\Sigma_j)$ и коэффициенты Фурье разложения поля по полной системе нормальных волн для каждого индекса k нормальной волны ТЕ и ТМ типов удовлетворяют условиям (1).

Заключение

Под условиями излучения практически всегда подразумевают так называемые парциальные условия излучения для гармонических по времени полей, которые позволяют разделить ЭМ поле на компоненты, представляющие парциальные волны, бегущие в сторону неоднородного участка и в противоположную сторону. В работах А.Г. Свешникова и его учеников условия излучения обобщены на случай нестационарных полей (с произвольной зависимостью от времени). Это значительный вклад в теоретическую и прикладную электродинамику во второй половине 20 века.

Литература

1. Свешников А. Г., Якунин С. А. Математическое моделирование нестационарных процессов в плазмооптических системах. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1983, Т.23. № 5. С.1141–1157.
2. Майков А. Р., Свешников А. Г., Якунин С. А. Математическое моделирование плазменного генератора сверхвысокочастотного излучения. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1985. Т.25. № 6. С.883–895.
3. Майков А. Р., Свешников А. Г., Якунин С. А. Разностная схема для нестационарных уравнений Максвелла в волноводных системах. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1986. Т.26. № 6. С.851–863.
4. Майков А. Р., Поезд А. Д., Свешников А. Г., Якунин С. А. Разностные схемы начально-краевых задач для уравнений Максвелла в неограниченной области. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1989. Т.29. № 2. С.239-250.

5. Майков А. Р., Свешников А. Г., Якунин С. А. Нелокальные условия излучения для нестационарной системы уравнений Максвелла. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1990. Т.30. № 12. С.1785–1796.
6. Майков А. Р., Поезд А. Д., Свешников А. Г., Якунин С. А. Применение консервативного конечно-разностного метода для моделирования сильноточных приборов СВЧ. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1989. Т.29. № 7. С.1000–1011.
7. Кузелев М. В., Поезд А. Д., Рухадзе А. А., Свешников А. Г., Якунин С. А. Математическое моделирование процессов в плазменном СВЧ генераторе. // Матем. моделирование, 1989. Т.1. № 11. С.34–40.
8. Быков А. А., Попов В. Ю., Свешников А. Г., Якунин С. А. Математическое моделирование тока в среде с сильным эффектом Холла. // Матем. моделирование, 1989. Т.1. № 4. С.45–53.
9. Майков А. Р., Поезд А. Д., Якунин С. А. Экономический метод вычисления нестационарных нелокальных по времени условий излучения для волноводных систем. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1990. Т.30. № 8. С.1267–1271.
10. Майков А. Р., Свешников А. Г. Условия излучения для дискретных аналогов нестационарных уравнений Максвелла в случае неоднородной среды. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1995. Т.35. № 3. С.412–426.

Применение метода декомпозиции области для моделирования контактного взаимодействия системы тел в многомерном случае

Using the Domain Decomposition Method to Simulate the Contact Interaction of a System of Bodies in a Multidimensional Case

Галанин М.П., Родин А.С.

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, РФ.

e-mail1 galan@keldysh.ru, e-mail2 rals@bk.ru

Аннотация. Представлена задача определения термомеханического состояния твэла в ядерном реакторе. Работа посвящена решению задачи о механическом контакте. Разработан численный алгоритм, основанный на применении двухуровневого аддитивного метода Шварца, он обобщен для решения задач контактного взаимодействия термоупругопластических тел. В этом случае при решении локальных нелинейных задач в каждой подобласти кроме учета граничных условий на контактных поверхностях нужно учитывать нелинейность, связанную с образованием неупругих (пластических) деформаций. Представлены результаты расчетов.

Введение

Нас интересует задача моделирования термомеханического состояния участка тепловыделяющего элемента (твэла). Область моделирования представляет собой участок цилиндрической оболочки, внутри которой расположен столб из одинаковых топливных таблеток, имеющих внутреннее отверстие и фаски на обоих торцах. При моделировании твэла важную роль играют учет тепловыделения в топливных таблетках и процессы теплообмена. Характеристики материалов существенно зависят от температуры. В начальной конфигурации твэла между таблетками и оболочкой, как правило, существует зазор. При нагревании таблетки расширяются, зазор уменьшается, а затем чаще всего происходит механический контакт между таблетками и оболочкой. Тепловая и механическая задачи являются связанными и их нужно решать вместе. Постановка механической задачи контактного взаимодействия элементов твэла и описание различных методов численного решения приведены в [1, 2]. Данная работа посвящена развитию методов численного решения механической контактной задачи.

Описание работы

Разработан численный алгоритм, основанный на применении двухуровневого аддитивного метода Шварца (вариант метода декомпозиции области (МДО) с перекрытием подобластей), для определения напряженно-деформированного состояния системы термоупругих тел с учетом их контактного взаимодействия [1]. Данный алгоритм предполагает разбиение исходной области на ряд пересекающихся подобластей. Решение глобальной задачи сводится к итерационному процессу, в рамках которого на каждой итерации выполняется решение локальных задач в каждой подобласти. Все локальные задачи решаются независимо друг от друга, в конце итерации вычисляется новое приближение глобального решения. В рассмотренной постановке каждая из подобластей может включать в себя участки нескольких тел, поэтому для получения локального решения нужно учитывать контактное взаимодействие этих участков друг с другом. Для решения контактных задач использован модифицированный метод Нейман-Дирихле (вариант МДО без перекрытия), позволяющий моделировать взаимодействие тел как в двумерной, так и в трехмерной постановке на несогласованных сетках.

Разработанный вариант метода протестирован на решении ряда двумерных и трехмерных задач, для которых известно точное решение для перемещений и напряжений или известны интегральные характеристики (силы). В частности, на рис. 1 показано распределение осевых перемещений (в мм) и осевых напряжений (в МПа) для задачи контактного взаимодействия участка трубы, поставленного на параллелепипед. К верхнему торцу трубы приложено постоянное давление.

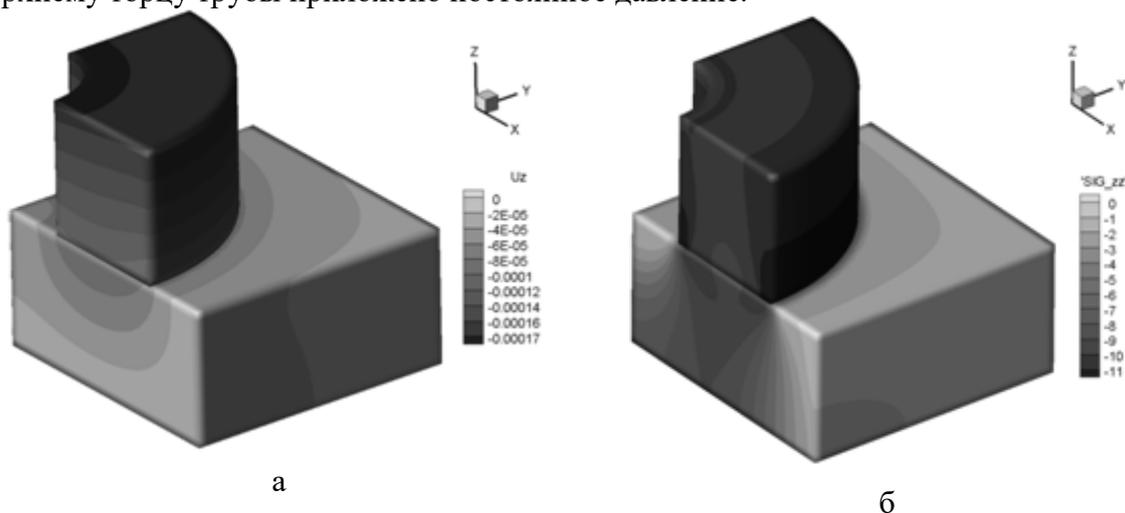


Рисунок 1. Распределения перемещения u_z (а) и напряжения σ_{zz} (б) в контактирующих телах

С помощью разработанного алгоритма решена задача определения напряженно-деформированного состояния участка тепловыделяющего элемента (ТВЭЛ) с учетом контактного взаимодействия топливных таблеток друг с другом и с оболочкой [1]. Задача решена в осесимметричной и трехмерной (для сектора 90°) постановках в термоупругом приближении. Используются реалистичные модели свойств материалов (диоксида урана и сплава циркония), взятые из библиотеки MATPRO [3]. Количество таблеток в расчетной области изменялось от 1 до 100, на контактных поверхностях использованы либо условия скольжения без трения, либо условия прилипания. Проведенные расчеты показали, что предложенный алгоритм обеспечивает достаточно аккуратное выполнения силовых и кинематических граничных условий на контактных поверхностях даже для случая большого количества тел и значительного изменения конфигурации поверхностей.

На рис. 2 показано распределение осевых перемещений (в мм) и осевых напряжений (в МПа) на поверхности топливной таблетки в одном из трехмерных расчетов.

Увеличение количества моделируемых тел может привести к кратному увеличению количества итераций, необходимого для достижения сходимости предложенного алгоритма. Для преодоления этого недостатка использована грубая сетка, которая строилась для участка оболочки и для тела, которое представляло собой объединение всех топливных таблеток (без учета фасок и лунок). На грубой сетке решалась вспомогательная задача, которая позволяла на каждой итерации вычислить дополнительный вклад в вектор глобального решения. Выполненная серия расчетов показала, что количество итераций, требуемое для достижения сходимости, для подобного алгоритма слабо зависит от количества топливных таблеток N и используемого шага сетки. При увеличении N время расчета изменялось по закону, близкому к $O(N)$.

Разработанный численный алгоритм, основанный на применении двухуровневого аддитивного метода Шварца, обобщен для решения задач контактного взаимодействия термоупругопластических тел. В этом случае при решении локальных нелинейных задач в каждой подобласти кроме учета граничных условий на контактных поверхностях нужно учитывать нелинейность, связанную с образованием неупругих (пластических) деформаций.

Проведена серия расчетов для участка твэла в осесимметричной постановке, в которой оболочка моделировалась термоупругопластическим телом. Полученные результаты показали, что количество внешних итераций в двухуровневом методе Шварца по сравнению с термоупругим случаем увеличивается незначительно, но учет пластичности требует большего количества внутренних итераций, проводимых для решения локальных задач.

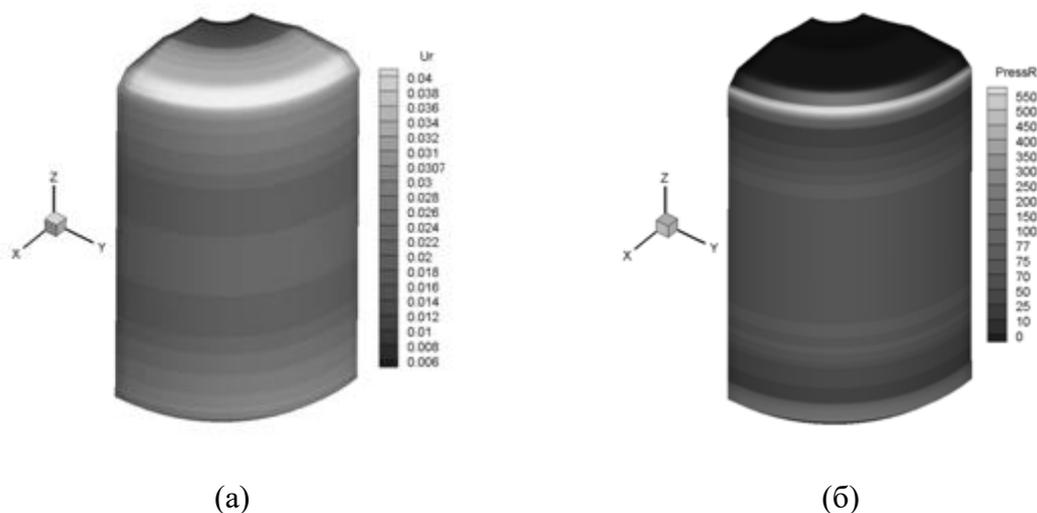


Рисунок 2. Распределения радиальных перемещений (а) и контактных давлений (б) на поверхности топливной таблетки

На рис. 3 показано распределение интенсивности пластических деформаций на внутренней поверхности оболочки в расчете для 10 таблеток.

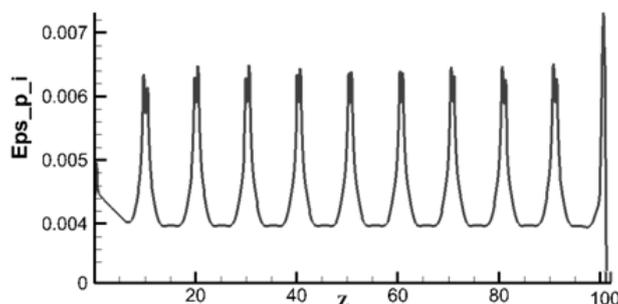


Рисунок 3. Интенсивность пластических деформаций на внутренней поверхности оболочки

Исследование выполнено за счёт Российского научного фонда (грант 22-21-00260).

Литература

1. Галанин М.П., Родин А.С. Исследование и применение метода декомпозиции области для моделирования тепловыделяющего элемента // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2022. — Т. 62, № 4. — С. 659–676. <https://doi.org/10.31857/S004446692204007X>
2. Аронов П.С., Галанин М.П., Родин А.С. Численное решение задачи контактного взаимодействия элементов твэла с помощью mortar-метода и метода декомпозиции области // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. — 2021. — № 3. — С. 4-22.
3. Nagrman D.L. MATPRO — A Library of Materials Properties for Use in the Analysis of Light Water Reactor Fuel Rod Behavior. — NUREG/CR-6150 TREE-1280, 1993.

Регуляризованные уравнения газовой динамики и развитие этого направления в рамках кафедры математики

Regularised gas dynamic equations and the development this direction within the Department of Mathematics

Елизарова Т.Г.

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, РФ.

telizar@mail.ru

Аннотация. В работе представлены регуляризованные, или квазигазодинамические уравнения, и кратко перечислен вклад студентов и аспирантов кафедры математики в развитие этого научного направления.

80-годы прошлого столетия были построены математические модели, обобщающие систему уравнений Навье-Стокса и отличающиеся от нее наличием дополнительных диссипативных слагаемых с малым параметром в качестве коэффициента. Позднее эти уравнения были названы квазигазодинамическими (КГД), или регуляризованными системами. Построенные системы оказались очень удачными для численного моделирования нестационарных течений газа и жидкости [1-4].

Система регуляризованных уравнений газовой динамики в виде уравнений баланса массы, импульса и полной энергии в общепринятых обозначениях выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
\partial_t \rho + \operatorname{div}(\mathbf{j}_m) &= 0, \\
\partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\mathbf{j}_m \mathbf{u}) + \nabla p &= \operatorname{div} \hat{\Pi}, \\
\partial_t(\rho e) + \operatorname{div}[\mathbf{j}_m(e + p/\rho)] + \operatorname{div} \mathbf{q} &= \operatorname{div}(\hat{\Pi} \mathbf{u}), \\
\mathbf{j}_m &= \rho(\mathbf{u} - \mathbf{w}), \mathbf{w} = \frac{\tau}{\rho}(\operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p), \\
\hat{\Pi} &= \hat{\Pi}_{NS} + \tau \mathbf{u} \otimes (\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p) + \tau \hat{I}((\mathbf{u} \cdot \nabla)p + \gamma p \nabla \mathbf{u}), \\
\mathbf{q} &= \mathbf{q}_{NS} - \tau \rho \mathbf{u} \left((\mathbf{u} \cdot \nabla) u_\varepsilon + p(\mathbf{u} \cdot \nabla) \frac{1}{\rho} \right).
\end{aligned}$$

Здесь удельная полная энергия обозначена как $e = u_\varepsilon + \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2$, u_ε — удельная внутренняя энергия, $p = \rho u_\varepsilon (\gamma - 1)$, $T = \frac{p}{\rho R}$ — температура. Знак \otimes обозначает прямое тензорное произведение векторов, \hat{I} — единичный тензор.

Вектор потока массы, тензор вязких напряжений $\hat{\Pi}$ и вектор теплового потока \mathbf{q} представляют собой традиционные величины, дополненные регуляризирующими добавками с малым коэффициентом τ в качестве множителя. При этом значения тензоров вязкости и вектора теплового потока, определяемые законами Ньютона и Фурье, вычисляются как

$$\begin{aligned}
\hat{\Pi}_{NS} &= \mu((\nabla \otimes u) + (\nabla \otimes u)^T) - \frac{2}{3} \hat{I} \operatorname{div} u, \\
\mathbf{q}_{NS} &= -\kappa \nabla T, \\
p &= \rho R T.
\end{aligned}$$

Здесь $\mu = \mu(\rho, T) > 0$ — коэффициент динамической вязкости, $\kappa = \frac{\mu \gamma R}{(\gamma - 1) Pr}$ — коэффициент теплопроводности, Pr — число Прандтля.

Система КГД уравнений включает в себя дополнительную искусственную диссипацию, которая обеспечивает устойчивость и точность разностного алгоритма. Данный алгоритм является явным по времени, применяет метод конечного объема с аппроксимацией всех пространственных производных второго порядка точности с помощью центральных разностей. Вклад искусственной диссипации регулируется коэффициентом

$$\tau = \alpha \frac{\Delta x}{c}.$$

Здесь Δx — локальный размер шага пространственной сетки, c — локальная скорость звука, α — настроечный параметр алгоритма, который обычно лежит в пределах $0 < \alpha < 1$ и определяет точность алгоритма и величину шага по времени явной схемы.

КГД уравнения представляют собой сложную нелинейную систему уравнений, математические свойства которой изучены пока в недостаточной мере. Поэтому понятен интерес к развитию и изучению этих уравнений со стороны сотрудников и руководства кафедры математики. Неоценимую поддержку данной работы оказал Алексей Георгиевич Свешников. Именно поэтому большой вклад в развитие новых уравнений гидродинамики внесли студенты, дипломники и аспиранты кафедры математики.

Далее перечислены студенты, дипломники и аспиранты кафедры, которые принимали участие в КГД-исследованиях, указаны темы их работ и примерные даты защиты дипломов и диссертаций по КГД тематике.

1999 Иван Анатольевич Широков, к.ф.-м.н. — умеренно-разреженные течения вплоть до сверх- и гиперзвуковых режимов;

2004 Мария Евгеньевна Соколова, к.ф.-м.н. – первые тщательно написанные и аккуратно оттестированные алгоритмы для до- и сверхзвуковых задач, двумерные течения в плоской и цилиндрической пространственной постановке;

2005 Серегин Вадим Валерьевич, к.ф.-м.н. – обобщение методов для расчета с использованием неструктурированных треугольных сеток, получение формулы для объемной вязкости на основе КГД подхода;

2006 Ершов Денис Геннадьевич, дипломник - разреженные газы в плоских, цилиндрических и коаксиальных микроканалах;

2007 Хохлов Антон Александрович, к.ф.-м.н. - включение в систему уравнений источников тепла, расчет структуры ударной волны для одноатомных и двухатомных газов, усовершенствование программного комплекса;

2007 Никольский Павел Николаевич, дипломник - моделирование ламинарно-турбулентного перехода за обратным уступом в двумерной постановке;

2014 Булатов Олег Витальевич, к.ф.-м.н., - разработка КГД-приближения мелкой воды;

2018 Истомина (Кирюшина) Мария Александровна к.ф.-м.н. - моделирование волны-убийцы в циркулярной канале, моделирование аккреционного диска с рукавами, первая имплементация КГД алгоритма в качестве решателя в открытый пакет OpenFOAM;

2018 Сабурин Дмитрий Сергеевич, к.ф.-м.н. - практические задачи в приближении мелкой воды, моделирование колебаний в топливных баках, сейшевые колебания в Азовском море;

2019 Стенина Татьяна Вячеславовна, диплом магистра - расчет в приближении вязкой несжимаемой жидкости в рамках комплекса OpenFOAM задачи о течении крови в сердечном насосе;

Настоящее время – Иванов Александр Владимирович - моделирование Северных морей, включение алгоритма мелкой воды в комплекс ОФ.

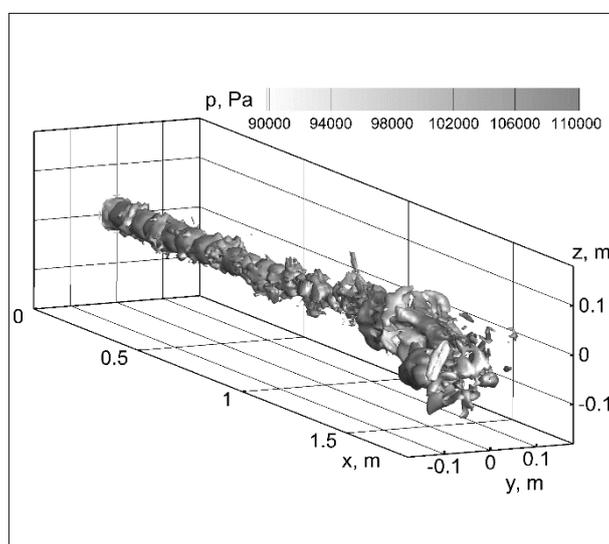


Рисунок 1. Пример моделирования течения воздуха в сверхзвуковой струе.
Результаты Широкова И.А.

Автор выражает свою безмерную искреннюю благодарность руководству, сотрудникам и всем членам кафедры, которые внесли неоценимый вклад в развитие данного перспективного научного направления.

Литература

1. *Chetverushkin B. N. Kinetic Schemes and Quasi-Gas Dynamic System of Equations.* Barselona: CIMNE, 2008. 298 p.

2. *Elizarova T. G.* Quasi-Gas Dynamic Equations. Dordrecht: Springer, 2009. 286 p. 2.
3. *Шеретов Ю. В.* Регуляризованные уравнения гидродинамики. Тверь: Тверской государственный университет, 2016. 222 с. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=30097584>
4. *Елизарова Т. Г., Широков И. А.* Регуляризованные уравнения и примеры их использования при моделировании газодинамических течений. М.: Изд-во МАКС Пресс, 2017. 136 с. <https://elibrary.ru/item.asp?id=29352202>

**Математические модели квантовых эффектов наноплазмоники на основе метода
Дискретных источников**

**Mathematical Models of Quantum Effects of Nanoplasmonics Based on the Discrete
Sources Method**

Еремин Ю.А.

*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК,
Москва, РФ.*

eremin@cs.msu.ru

Аннотация. В работе проводится сравнительный анализ различных теорий, использующихся для описания влияния квантовых эффектов на оптические характеристики плазмонных наночастиц в современной мезоскопической электродинамике. Полученные результаты имеют как теоретическое, так и прикладное значение при разработке современных технологий в медицине, биологии и энергосбережении.

Введение

Квантовая наноплазмоника представляет собой сравнительно новую интенсивно развивающуюся область науки. В рамках наноплазмоники основной интерес представляет исследование эффекта плазмонного резонанса (ПР), который заключается в усилении энергии внешнего возбуждающего поля на порядки величин при определенной частоте возбуждения. Эффект ПР вызывает значительное усиление и локализацию электрического поля вблизи поверхности металла на расстоянии много меньше длины волны, что позволяет концентрировать электромагнитную энергию в сверхмалых объемах существенно превосходя Рэлеевский предел. Это свойство находит широкое практическое применение в биологии, медицине, плазмонных нанолазерах и энергосбережении.

По мере совершенствования технологии синтеза плазмонных наноструктур размеры элементов существенно уменьшаются. Когда размер элемента структуры становится менее 10нм в плазмонных металлах возникают квантовые эффекты, которые не описываются классической теорией Максвелла. Для описания подобных эффектов была разработана теория Обобщенного нелокального отклика, которая позволяет учесть многие экспериментально обнаруженные явления [1]. Однако, даже в рамках этой теории остаются эффекты, которые не описываются этой теорией. Это прежде всего поверхностные эффекты, описывающие поведение индуцированных поверхностных зарядов и токов.

В самое последнее время была предложена теория описания квантовых эффектов на основе мезоскопических граничных условий с квантовыми параметрами Фейбельмана [2]. Эти параметры отвечают за такие поверхностные эффекты как сдвиг центра индуцированного внешним полем поверхностного заряда по отношению к поверхности раздела металл-диэлектрик, а также затухание Ландау.

В данном докладе на основе метода Дискретных источников (МДИ) [3] проведен сравнительный анализ влияния квантовых эффектов на основе моделей Обобщенного

нелокального отклика и мезоскопических граничных условий на оптические характеристики несферических плазмонных наночастиц из благородных металлов.

Математические модели.

Будем рассматривать задачу дифракции поля плоской электромагнитной волны $\{\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0\}$ на однородной плазмонной наночастице с внутренней областью D_i , и внешней D_e , разделенных гладкой поверхностью ∂D_i . Будем предполагать, что все среды не магнитные, а зависимость от времени выбрана в виде $\exp(j\omega t)$. Перейдем к постановке граничных задач дифракции.

Классическая модель теории Максвелла (LRA).

$$\text{rot} \mathbf{H}_{i,e} = jk \varepsilon_{i,e} \mathbf{E}_{i,e}; \text{rot} \mathbf{E}_{i,e} = -jk \mathbf{H}_{i,e}; \quad \text{в } D_{e,i} \quad (1a)$$

$$\mathbf{n}_i \times (\mathbf{E}_i(P) - \mathbf{E}_e(P) - \mathbf{E}_0(P)) = 0; \mathbf{n}_i \times (\mathbf{H}_i(P) - \mathbf{H}_e(P) - \mathbf{H}_0(P)) = 0; P \in \partial D_i \quad (1b)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \cdot \left(\sqrt{\varepsilon_e} \mathbf{E}_e \times \frac{\mathbf{r}}{r} - \mathbf{H}_e \right) = 0; r = |M|. \quad (1c)$$

Граничная задача включает в себя уравнения Максвелла (1a), условия сопряжения для тангенциальных компонент полей (1b), и условия излучения на бесконечности (1c). Здесь $\varepsilon_{i,e}$ - диэлектрические проницаемости сред в соответствующих областях, при этом $\text{Im} \varepsilon_e = 0, \text{Im} \varepsilon_i \leq 0, k = \frac{\omega}{c}$.

Теория Обобщенного нелокального оптического отклика (GNOR). Суть теории нелокальности состоит в том, что локальная связь между электрическим полем и смещением $\mathbf{D}_i(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_i(\omega) \mathbf{E}_i(\mathbf{r}, \omega)$, переходит в интегральную $\mathbf{D}_i(\mathbf{r}, \omega) = \int \varepsilon_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \mathbf{E}_i(\mathbf{r}', \omega) d^3 \mathbf{r}'$. Последнее обстоятельство влечет за собой возникновение внутри продольного поля $\mathbf{E}_i^L: \text{rot} \mathbf{E}_i^L = 0$ в добавление к классическому поперечному $\mathbf{E}_i^T: \text{div} \mathbf{E}_i^T = 0$. Таким образом в области D_i поле представляется в виде суммы полей $\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_i^T + \mathbf{E}_i^L$. Можно показать, что эти поля внутри D_i удовлетворяют следующим уравнениям Гельмгольца

$$\Delta \mathbf{E}_i^T(\mathbf{r}, \omega) + k_T^2(\omega) \mathbf{E}_i^T(\mathbf{r}, \omega) = 0, \quad \Delta \mathbf{E}_i^L(\mathbf{r}, \omega) + k_L^2(\omega) \mathbf{E}_i^L(\mathbf{r}, \omega) = 0, \quad (2a)$$

где поперечное $k_T^2(\omega) = k^2 \varepsilon_i(\omega)$ и продольное волновое число $k_L^2(\omega) = \frac{\varepsilon_i(\omega)}{\xi^2(\omega)}$. Здесь квантовые параметры: ξ - длина корреляции в рамках теории GNOR $\xi^2(\omega) = \varepsilon_b \frac{\beta^2 + D(\gamma + j\omega)}{\omega^2 - j\gamma\omega}$, $\varepsilon_b = \varepsilon_i + \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - j\gamma\omega}$, ω_p - плазменная частота металла, $\beta^2 = \left(\frac{3}{5}\right) v_F^2, v_F$ - скорость Ферми, γ - скорость затухания Друде, D - коэффициент диффузии электронов в металле.

Появление дополнительного поля требует дополнительного граничного условия для однозначного разрешения граничной задачи. Это условие на границе металл-диэлектрик формулируется как обращение в нуль нормальной компоненты тока проводимости и может быть преобразовано к виду [3]:

$$\varepsilon_b \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{E}_i(Q) = \varepsilon_e \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{E}_e(Q), Q \in \partial D_i \quad (2b)$$

Таким образом, граничная задача дифракции в рамках GNOR включает в себя уравнения Максвелла (1a) во вне рассеивателя, уравнения Гельмгольца (2a) в D_i , условия сопряжения для тангенциальных компонент полей (1b), дополнительное условие (2b) на границе рассеивателя и условия излучения на бесконечности (1c).

Граничная задача дифракции с мезоскопическими граничными условиями. В данном случае математическая постановка задачи дифракции включает в себя классическую систему уравнений Максвелла (1a), условия излучения (1c) и мезоскопические условия сопряжения, которые можно записать как [4]

$$\mathbf{n}_i \times (\mathbf{E}_i(P) - \mathbf{E}_e(P) - \mathbf{E}_0(P)) = -d_{\perp} \mathbf{n}_i \times \nabla \{ \mathbf{n}_i \cdot (\mathbf{E}_i(P) - \mathbf{E}_e(P) - \mathbf{E}_0(P)) \}, P \in \partial D_i;$$

$$\mathbf{n}_i \times (\mathbf{H}_i(P) - \mathbf{H}_e(P) - \mathbf{H}_0(P)) = -j\omega d_{\parallel} \{ \mathbf{n}_i \times [\mathbf{D}_i(P) - \mathbf{D}_e(P) - \mathbf{D}_0(P)] \} \times \mathbf{n}_i. \quad (3b)$$

здесь d_{\perp}, d_{\parallel} - параметры Фейбельмана (ПФ). Уместно отметить, что для случая границы металл-диэлектрик параметр $d_{\parallel} = 0$. Параметр d_{\perp} является комплексной функцией, зависящей от длины волны. Его действительная часть описывает положение центра индукции зарядов по отношению к интерфейсу, а мнимая отвечает за поглощение энергии вблизи поверхности (затухание Ландау) [4].

Численные результаты. Рассмотренные выше граничные задачи (1) – (2) были реализованы в виде компьютерных моделей на основе МДИ [3]. Результаты, связанные с задачей (3), представляются впервые. Отметим, что присутствие дифференциального оператора в правой части (3b) никак не осложняет алгоритм МДМ, т.к. представление для решения в рамках метода является аналитической функцией всюду в окрестности поверхности.

Поскольку параметры Фейбельмана учитывают квантовые поверхностные эффекты, то нас будут интересовать рассеиватели, в которых поверхность доминирует над объемом. В частности, мы рассмотрим рассеяние Р-поляризованного излучения вытянутыми и сплюснутыми золотыми сфероидами эквиобъемного диаметра $D=10\text{nm}$ располагающиеся в матрице SiO_2 . ПФ (SRF) были выбраны из эксперимента [5]. Квантовые параметры GNOR для Au содержатся в [3]. На Рис. 1 приведено сечение экстинкции (сумма сечения рассеяния и поглощения) для вытянутого сфероида с соотношением осей $r=3$ при возбуждении плоской волной, распространяющейся перпендикулярно оси симметрии сфероида. В этом случае вектор электрического поля параллелен большей оси сфероида.

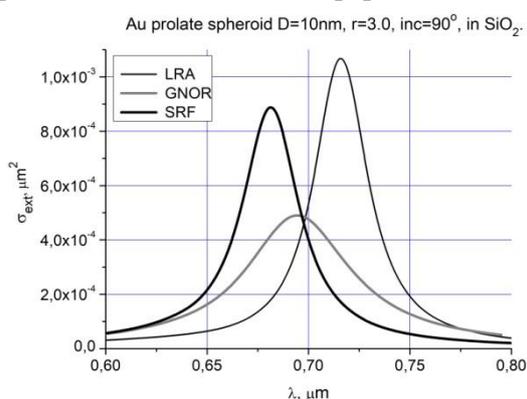


Рисунок 1.

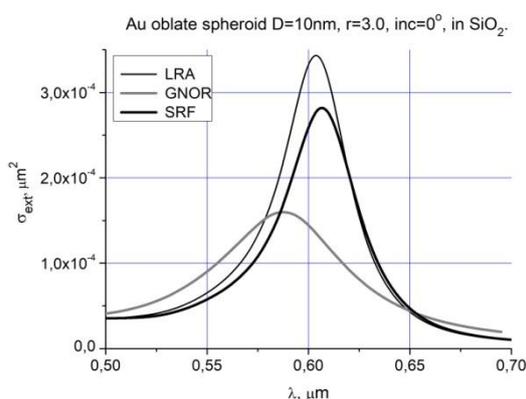


Рисунок 2.

Те же результаты, но для сплюснутого сфероида можно видеть на Рис. 2.

Заключение

Впервые получены сравнительные результаты, включающие в себя различные теории, учитывающие квантовые эффекты в наноплазмонных несферических частицах. Установлено, что GNOR дает сильно заниженные результаты по сравнению с SRF.

Литература

1. *Mortensen N.A., Raza S., Wubs M., et al.* A generalized non-local optical response theory for plasmonic nanostructures // *Nature Commun.* — 2014. — Vol. 5, — 3809.
2. *Yang Y., Zhu D., Yan W., et al.* A general theoretical and experimental framework for nanoscale electromagnetism // *Nature.* — 2019. — Vol.576, — no.7786. — P. 248–252.
3. *Еремин Ю.А., Свешников А.Г.* Квазиклассические модели квантовой наноплазмоники на основе метода Дискретных источников (обзор) // *ЖВМиМФ.* — 2021. — Т. 61, № 4. — С. 34–62.
4. *Mortensen N.A.* Mesoscopic electrodynamics at metal surfaces (Review) // *Nanophotonics.* — 2021. — Vol.10, — no.10. — P. 2563–2616.

5. *Echarri R.A., Gonçalves P.A.D., Tserkezis C., et al.* Optical response of noble metal nanostructures: Quantum surface effects in crystallographic facets // *Optica*. — 2021. — Vol.8, — no.5. — P. 710-721.

Математические модели антенных решёток из волноводов

Mathematical modeling waveguide antenna array

Ильинский А.С.

*Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, факультет
вычислительной математики и кибернетики, Москва, РФ*

celd@cs.msu.su

Аннотация. Рассмотрена возможность улучшения характеристик радиопрозрачных волноводных окон путем использования волноводов со сложной формой поперечного сечения. Проведены численные исследования и сравнительный анализ коэффициентов использования поверхности раскрытия окон из различных типов волноводов в широком диапазоне частот.

Введение

Одним из перспективных путей совершенствования волноводно-рупорных излучателей, а также антенных решеток (АР) и линзовых антенн на их основе является использование гладкостенных волноводов и рупоров со сложной формой поперечного сечения. Изменяя параметры сечений, можно существенным образом влиять на внутренние и внешние характеристики излучателей, а также уменьшать их размеры при обеспечении работы в заданном диапазоне частот.

Проблема создания адекватных математических моделей является одной из ключевых при проектировании и разработке эффективных конструкций таких антенн. В последние годы разработан ряд математических моделей антенн из волноводов произвольного сечения, позволяющих проводить исследования и оптимизацию их характеристик, в том числе: волноводно-рупорных излучателей, бесконечных и конечных АР, линзовых антенн.

Описание работы

Алгоритм расчета бесконечных АР из волноводов произвольного сечения с учетом согласующих элементов в раскрытие решетки (многослойных диэлектрических покрытий и вставок, волноводных ступенчатых трансформаторов и диафрагм) построен на основе проекционного метода сшивания полей, в основе которого лежат проекционные соотношения, отражающие по своему физическому содержанию закон сохранения энергии на границах раздела сред. При решении внутренних (торцевой стык двух или нескольких волноводов) и внешних (стык волновода и канала Флоке) задач электродинамики использован комбинированный метод, представляющий собой сочетание прямого проекционного метода сшивания полей и метода конечных элементов для нахождения собственных функций волновода с произвольной формой поперечного сечения. В качестве проекций сшиваемых полей используется полный ортогональный базис собственных вектор-функций волновода и канала Флоке (пространственного волновода).

Для расчета характеристик конечных антенных решеток из волноводов произвольного сечения использован подход, основанный на строгом решении электродинамической задачи о возбуждении конечной области бесконечной АР. При таком подходе используются два основных допущения: идентичность зависимостей коэффициентов связи в бесконечной и большой конечной АР и пренебрежимо малое влияние бесконечного проводящего экрана, окружающего АР, на связь между элементами. При этом размерность АР практически не влияет на время счёта.

Численный алгоритм расчета волноводных линзовых антенн строится на основе рассмотренных выше. Раскрыв линзы из волноводов произвольного сечения

рассматривается как конечная АР с заданным амплитудно-фазовым распределением поля, что позволяет учесть взаимное влияние элементов в линзе, конечность раскрыва и отражения от ее излучающей поверхности. Тот факт, что на практике волноводные элементы линзы, относящиеся к краевой области, возбуждаются с существенно меньшей амплитудой, чем центральная часть линзы, делает применение использованного метода учета конечности АР тем более целесообразным. Расчет производится в следующей последовательности: с помощью алгоритма расчета характеристик волноводно-рупорного излучателя произвольного сечения либо конечной АР из таких излучателей определяются касательные составляющие электрического поля на внутренней поверхности линзы. Далее определяются амплитуды возбужденных волн в волноводных каналах линзы, а затем решается задача об излучении конечной АР с известным амплитудно-фазовым распределением поля.

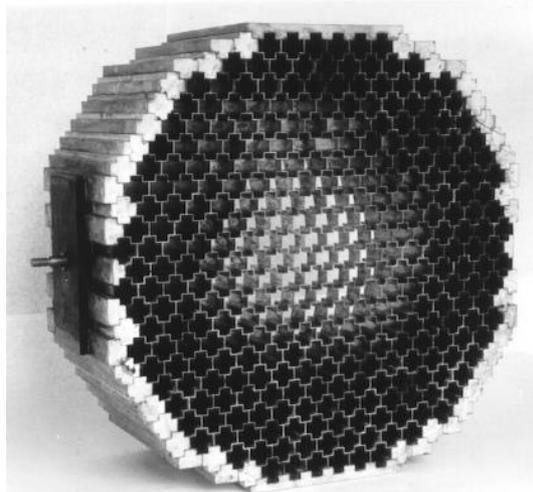
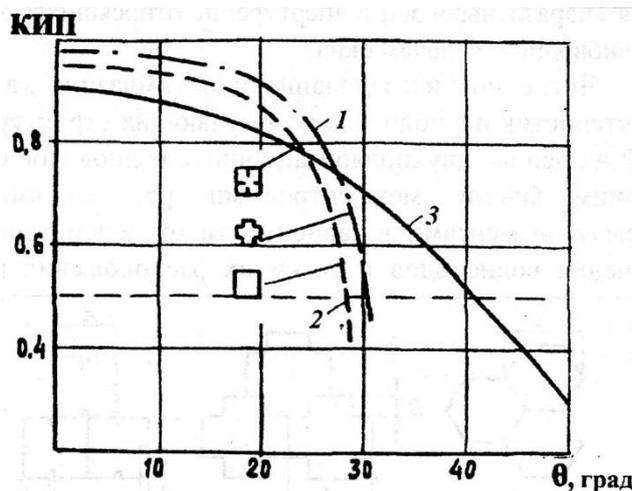
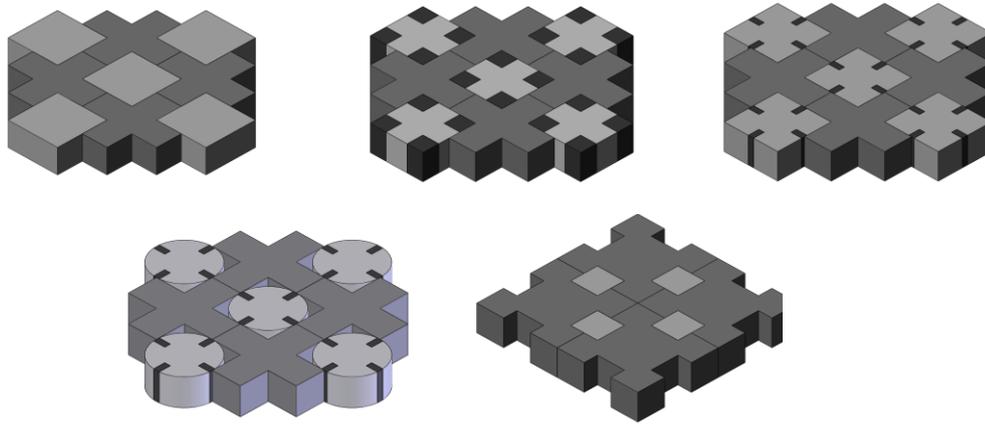
Разработанные математические модели апробированы при проектировании антенных решеток, линзовых антенн и отдельных излучателей из волноводов сложных сечений. Результаты расчетов сопоставлялись с аналогичными результатами для волноводов квадратного и круглого сечений, а также экспериментальными исследованиями волноводно-рупорных излучателей крестообразных, четырехребенчатых и коконообразных сечений и линзовой антенны на основе крестообразных волноводов.

Использование радиопрозрачных волноводных окон (частотно-селективных поверхностей) является перспективным направлением создания антенн с повышенной прочностью и виброустойчивостью для диапазонов сантиметровых и миллиметровых волн. Одним из основных требований, предъявляемых к радиопрозрачным волноводным окнам, является хорошее согласование их поверхностей раскрыва со свободным пространством. Отражения от окна в значительной степени определяются отражениями от раскрывов ее волноводных элементов. В известных конструкциях радиопрозрачных окон используются квадратные, круглые и прямоугольные волноводы, открытые концы которых имеют невысокую степень согласования со свободным пространством. Кроме того, окна на основе квадратных и круглых волноводов не могут быть использованы в широком диапазоне частот, когда коэффициент перекрытия по частоте K_f , равный отношению верхней и нижней рабочих частот волноводного окна, превышает $\sim 1,2 \dots 1,3$. Одним из путей улучшения характеристик радиопрозрачных окон является использование волноводов со сложной формой поперечного сечения [1]. Изменяя параметры сечений, можно существенным образом влиять на внутренние и внешние характеристики излучателей и радиопрозрачных окон на основе таких волноводов.

В докладе приводятся результаты численного исследования коэффициента использования поверхности раскрыва (КИП) радиопрозрачных окон с плоскими поверхностями в виде периодических структур на основе двухполяризационных и широкодиапазонных волноводов сложного сечения с минимальными межцентровыми расстояниями между волноводами.

Для проведения исследований использована математическая модель бесконечной антенной решетки (АР) из волноводов произвольного сечения, построенная на решении внешней задачи проекционным методом сшивания полей, а внутренней - методом конечных элементов [2,3]. Учитывалось прохождение электромагнитных волн через обе поверхности окна. Стенки волноводов полагались бесконечно тонкими.

При относительно небольшой ширине рабочего диапазона частот ($K_f < 1,3 \dots 1,4$) для построения волноводных окон, позволяющих обеспечить работу на вращающейся поляризации поля, наибольший практический интерес представляют квадратные, шестигранные, крестообразные и квадратные четырехребенчатые волноводы. Такие волноводы образуют плотные «упаковки» сотового типа без наличия «паразитных» зон в апертуре, не относящихся к волноводным каналам окна.



Численное исследование и оптимизация характеристик антенных решеток (АР) на основе перечисленных двухполяризационных волноводов с минимальными межцентровыми расстояниями между элементами показали, что наименьший коэффициент отражения достигается при расположении волноводов в апертуре АР по треугольной сетке и выборе их размеров таким образом, чтобы верхняя частота одномодового режима волновода совпадала с верхней частотой рабочего диапазона АР.

Заключение

Результаты анализа, исследований и разработок показывают перспективность применения волноводов сложных сечений для совершенствования характеристик антенн диапазонов СВЧ и эффективность применения разработанных математических моделей.

Литература

1. Василенко Ю.Н., Ильинский А.С., Харланов Ю.Я. Характеристики двухполяризованных волноводно-рупорных излучателей сложного поперечного сечения // Радиотехника и электроника. - 1996. - Т. 41, № 10. - С. 1183-1187.
2. Василенко Ю.Н., Ильинский А.С., Харланов Ю.Я. Крестообразные и четырехгребенчатые волноводно-рупорные излучатели: внутренние и внешние характеристики // Радиотехника и электроника. - 2006.-Т. 51, № 1. - С. 1-14.
3. Гринев А.Ю., Ильинский А.С., Котов Ю.В., Чепурных И.П. Характеристики излучения периодической структуры из волноводов произвольного поперечного сечения // Радиотехника и электроника. – 1979. – Т. 24, № 7. - С. 1291-1300.

Обратные задачи в оптике слоистых сред

Inverse problems in optics of layered media

Тихонравов А. В.

Аннотация. В работе рассматривается вклад Алексея Георгиевича Свешникова в развитие теории решения обратных задач оптики слоистых сред.

Введение

Прямые и обратные задачи оптики слоистых сред составляют специальный, тесно связанный с современными технологиями класс электродинамических задач. Алексей Георгиевич Свешников активно занимался ими на протяжении более чем пятнадцати лет.

Описание работы

Основные работы Алексея Георгиевича Свешникова в этой области связаны с развитием методов синтеза (проектирования) слоистых сред с заданными спектральными свойствами [1-6]. С самого начала эти работы велись с акцентом на практическое применение разрабатываемых методов для решения задач проектирования многослойных оптических покрытий с учетом технологических возможностей создания проектируемых покрытий.

Параллельно с развитием математических методов проектирования покрытий происходило совершенствование технологий их производства в вакуумных напылительных установках. Достигнутый к настоящему времени прогресс в этой области позволяет создавать покрытия с сотнями слоев, что соответственно требует решения задач проектирования и оптимизации с сотнями параметров. Разработанные при активном участии Алексея Георгиевича Свешникова методы позволяют успешно решать эти задачи.

Заключение

Алексей Георгиевич Свешников внес существенный вклад в развитие теории решения прямых и обратных задач оптики слоистых сред. Всего по этой тематике им опубликовано около двадцати научных работ. В приведённом ниже списке литературы представлены шесть из его наиболее значимых публикаций в данной области.

Литература

1. *А.Г. Свешников, А.В. Тихонравов, С.А. Янин*, Синтез оптических покрытий при наклонном падении света // *Ж. вычисл. матем. и матем. физики.* – 1983. - **23**, N4. - с. 929-936.
2. *А.В. Тихонравов, А.Г. Свешников, С.А. Янин* Некоторые задачи проектирования многослойных оптических покрытий // *Вестник МГУ, сер. физика-астрономия.* – 1983. - **24**, N 4. - с. 3-7.
3. *А.Г. Свешников, А.В. Тихонравов, Ш.А. Фурман, С.А. Янин*, "Общий метод синтеза оптических покрытий // *Оптика и спектроскопия.* - 1985. - **59**, N6. - с. 1161-1163.
4. *А.Г. Свешников, А.В. Тихонравов, Ш.А. Фурман, С.А. Янин*, "Общий метод синтеза двухкомпонентных многослойных оптических покрытий // *Вестник МГУ, сер. физика-астрономия.* – 1986. - **27**, N 4. - с. 21-26.
5. *А.Г. Свешников, А.В. Тихонравов*, "Математические методы в задачах анализа и синтеза слоистых сред // *Математическое моделирование.* – 1989. - **1**, N7. - с. 13-38.
6. *А.Г. Свешников, А.В. Тихонравов, М.К. Трубецков*, "Нелокальный метод оптимизации многослойных оптических систем // *Математическое моделирование.* – 1995. - **7**. - с. 105-127.

Математическое моделирование

Сравнение экспериментальных и расчетных данных проплавления октадекана в цилиндрической геометрии

Comparison of experimental and calculated data on penetration of octadecane in cylindrical geometry

Воропаев Р.А.^{1,2}

1) *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, Москва, РФ;* 2) *ПАО «РКК «Энергия», Королев, РФ.*

voropaeffff@yandex.ru

Аннотация. В работе представлены результаты экспериментального и численного исследования процесса плавления, характерного для систем хранения скрытой тепловой энергии. Цель работы — оценить точность численных расчетов, обусловленных естественной конвекцией, с помощью эталонного эксперимента. Исследование сосредоточено на плавлении октадекана [1,2] в цилиндрической стеклянной колбе с теплоизолированными боковыми стенками, нагреваемой с одной стороны постоянной мощностью. Результаты показывают расхожимость (до 30 %) численных расчетов с экспериментальными данными при больших мощностях нагрева. Однако для меньших мощностей таких ошибок не наблюдалось. Полученная расхожимость может быть связана с использованием приближения Буссинеска, не учитывающего объемное расширение теплоаккумулирующего вещества (ТАВ).

Введение

Процесс теплопередачи во время плавления широко исследуется в последнее время с применением расчетных, численного и экспериментальных методов. Особое внимание уделяется валидации численных моделей. Однако такие экспериментально-расчетные исследования, соответствующие трехмерным моделям, немногочисленны.

Решение задач с движущимися границами сложны, так как закон движения раздела фаз определяется конвекцией в жидком ТАВ, граничными условиями и скоростью с которой скрытое тепло поглощается. Положение границы фазового перехода заранее неизвестно и является частью решения. Определение характеристик теплоотвода при фазовом переходе предполагает решение задачи Стефана для ТАВ. Аналитическое решение данной задачи существует только для одномерного случая [3]. Для любых других вариантов геометрии используют численные решения. Поэтому тепловой расчет производится численным методом в среде ANSYS Fluent. В работах [4,5] приведены результаты сравнения двух подходов к моделированию процесса плавления для случая нагрева ТАВ от боковой стенки при постоянной температуре. Первый подход, именуемый методом объема жидкости (VOF), основан на модели, учитывающей зависимость теплофизических свойств от температуры, в частности заполнение воздушной прослойки расплавленным веществом при его расширении. Во втором подходе используется приближение Буссинеска для плотности, в то время как остальные теплофизические свойства принимают постоянные значения. Результаты валидации метода VOF показывают незначительные отклонения расчета (до 4 %) доли жидкой фазы и суммарного теплового потока, однако для скоростей и температур различия более заметны (до 20 %). По мнению авторов работы [4], метод VOF предпочтителен для расчета систем с высоким градиентом температур, однако использование приближение Буссинеска даст достаточно точные результаты на этапе проектирования.

В работе будет использоваться приближение Буссинеска, как более быстрый способ расчетов тепловых аккумуляторов в цилиндрических корпусах. Статья содержит результаты численных и лабораторных экспериментов, которые можно использовать для проверки модели нагрева теплоаккумулирующего вещества с постоянной мощностью.

Описание работы

Лабораторно-исследовательский стенд показан на рисунке 1. ТАВ размещается в вертикально ориентированной колбе с внутренним диаметром и высотой 63,5 мм и 403,8 мм соответственно. Корпус колбы сделан из стекла с толщиной стенки 2,5 мм. Круглый нагреватель из нихромовой нити толщиной 2 мм и диаметром 63,5 мм закреплен на алюминиевую пластину толщиной 7.8 мм для равномерного нагрева ТАВ. Нагреватель питается от лабораторного автотрансформатора с возможностью регулировки мощности нагрева. Большая часть испытательной камеры обмотана пятью слоями теплоизоляции из вспененного полиэтилена, покрытого с одной стороны слоем фольги, и общей толщиной 13,75 мм. В качестве ТАВ используется октадекан ($C_{18}H_{38}$) с температурой плавления $28,18\text{ }^{\circ}\text{C}$.

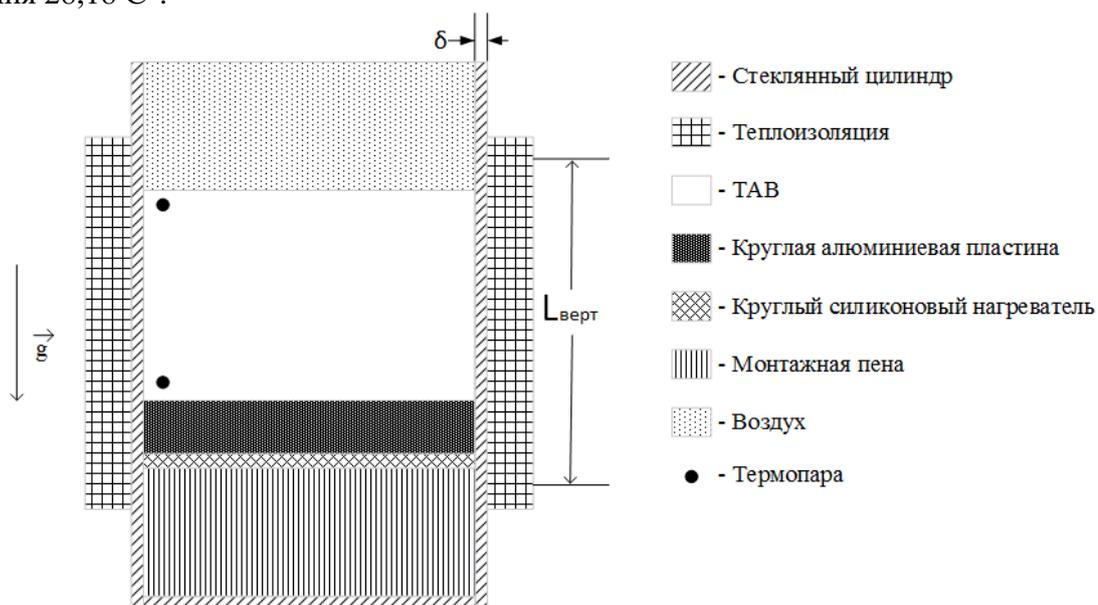


Рисунок 1. Схема лабораторной модели

С помощью датчиков температуры и тепловизора оценивались тепловые потери за счет нагрева конструкции, радиационные и конвективные излучения во внешнее пространство.

Из полученных экспериментальных данных можно сделать оценки коэффициентов теплоотдачи с поверхности теплоизоляции и наружной плоскости ТАВ, и использовать их в качестве ГУ для модели Ansys Fluent.

Было разработано три численные модели с различными ГУ и размерностью. В первой модели использовался двухмерный подход к моделированию и не учитывались внешние потери тепла при нагреве и плавлении ТАВ. Вторая модель от первой отличается лишь учетом теплопотерь на нагрев конструкции и радиационного излучения. Третья модель использует трехмерный подход к моделированию и учитывает потери тепла в окружающее пространство. Для всех случаев применяется приближение Буссинеска и постоянные свойства ТАВ. Постоянная тепловая мощность подводится снизу от ТАВ. Соответствующие дискретные ее значения равны: 7,14 Вт и 34,23 Вт.

Зависимость доли расплавленного ТАВ для различных моделей при мощности нагрева 34,2 Вт представлен на рисунке 2. Характер движения границы фазового перехода имеет линейный характер за исключением начальных (до 0,1) и конечных (от 0,9) значений коэффициента расплавления – нелинейных участков. Такие нелинейности связаны с нагревом конструкции и конвективным излучением с поверхности теплоизоляции и нагретого ТАВ. Оценить среднюю скорость расплавления можно, найдя угловой коэффициент прямой для каждой зависимости. Большая расходимость в средних скоростях движения границ фазового перехода показывает, что для описания 3-х мерных случаев, модель с приближением Буссинеска дает существенную ошибку.

Возможно, модель VOF, учитывающая объемные расширения ТАВ, даст лучшую верификацию с экспериментальными данными. Однако потребует больше вычислительной мощности. Для меньшей мощности нагрева – 7,1 Вт результат расчета лучше верифицируется с экспериментом. Отличие от эксперимента можно отнести к погрешности измерений.

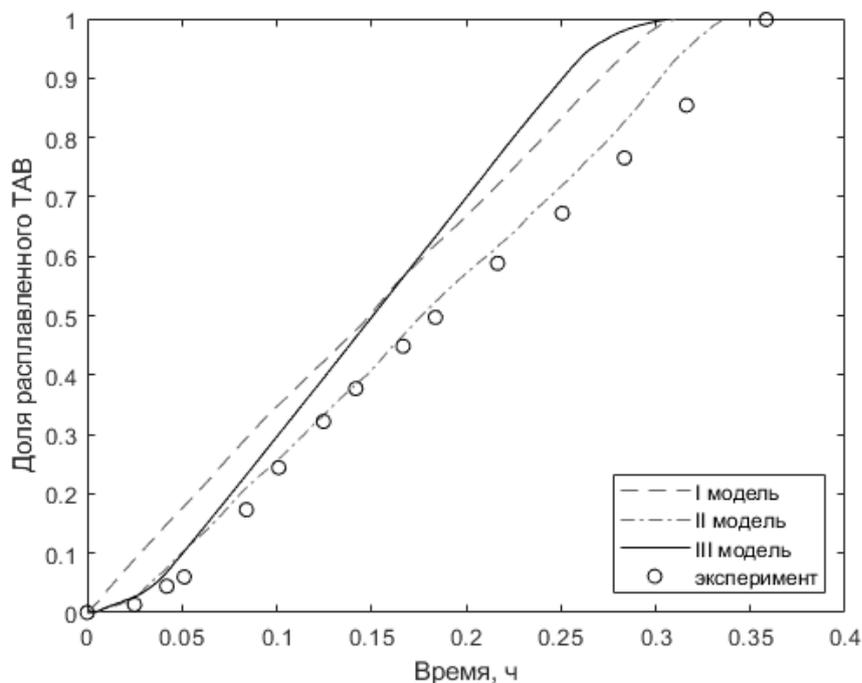


Рисунок 2. Сравнение доли жидкой фазы для 3 численных моделей и эксперимента, мощность 34,2 Вт

Литература

1. *Faden M. et al.* Review of thermophysical property data of octadecane for phase-change studies // *Materials*. — 2019. — Т. 12, № 18. — С. 2974.
2. *Galione PA, Lehmkuhl O, Rigola J, Oliva A.* Fixed-grid numerical modeling of melting and solidification using variable thermo-physical properties – Application to the melting of n-Octadecane inside a spherical capsule // *Int. J. Heat Mass Transf.* — 2015. — Vol 86. — P. 721–764.
3. *Faghri Amir, Zhang Yuwen.* Fundamentals of Multiphase Heat Transfer and Flow. — Springer, 2020.
4. *Vogel Julian, and André Thess.* Validation of a numerical model with a benchmark experiment for melting governed by natural convection in latent thermal energy storage // *Applied Thermal Engineering* — 2019. Vol. 148. — P. 147-159.
5. *Vogel Julian, Dan Bauer.* Phase state and velocity measurements with high temporal and spatial resolution during melting of n-octadecane in a rectangular enclosure with two heated vertical sides // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. — 2018. — Vol. 127. P. — 1264-1291

Пример моделирования течения расплава для выращивания кристаллов методом Чохральского

Example of melt flow simulation for crystal growth by the Chochralsky method

Кирюшина М. А.¹, Елизарова Т. Г.¹

¹*Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, РФ*

m_ist@mail.ru

Аннотация. В работе рассматривается актуальная задача моделирования расплава арсенида галлия GaAs во вращающемся тигле с помощью квазигидродинамических (КГидД) уравнений (метод Чохральского), включенных в открытый программный комплекс OpenFOAM.

Введение

Квазигазодинамические (КГД) и квазигидродинамические (КГидД) алгоритмы, основанные на системе уравнений квазигазодинамики [1], были имплементированы в открытый программный комплекс OpenFOAM. В настоящее время в OpenFOAM существует семейство КГД и КГидД решателей, основными из которых являются два: QGDFoam – решатель для задач газовой динамики [2] и QHDFoam [3] – решатель для моделирования течений вязкой несжимаемой жидкости. Включение этих решателей в пакет OpenFOAM позволяет дополнить возможности КГД и КГидД алгоритмов широким функционалом, заложенными в открытый пакет, в частности, это построение разнообразных сеток, использование специфических уравнений состояния, включение моделей турбулентности и т.д. Заложенное в пакете распараллеливание алгоритма позволяет увеличить скорость расчета задачи.

Описание работы.

Одним из применяемых на практике методов выращивания кристаллов из расплава является так называемый метод Чохральского. При этом в расплав соответствующего вещества помещается небольшая затравка нужного кристалла, которая по мере роста кристалла вытягивается вверх. Для увеличения выхода кристаллического вещества расплав в тигле непрерывно подогревается, сам тигль и затравка кристалла приводятся во вращение в противоположных направлениях. Для последующего использования кристаллов в производстве приборов микроэлектроники выращенный кристалл должен быть максимально однородным. Учитывая высокую стоимость исходных материалов и самой установки, высокие температуры, при которых протекает процесс кристаллизации, невозможность визуализации течения и измерения параметров расплава, а также, как правило, токсичность всего процесса в целом, очевиден интерес к математическому моделированию течения расплава в методе Чохральского.

В реальных промышленных установках течение расплава представляет собой трехмерное нестационарное движение, которое можно описывать в рамках уравнений вязкой несжимаемой жидкости в поле силы тяжести в приближении Буссинеска. Численному описанию этого процесса посвящено большое количество работ, но в силу сложности процесса авторы как правило используют достаточно жесткие упрощающие предположения. Например, рассматриваются задачи для осесимметричного течения в поле силы тяжести без вращения, либо предполагается, что течение осесимметрично и числа Грасгофа потока не велики, ряд расчетов выполнен в предположении стационарности течения в тигле. Все эти предположения не соответствуют реальной картине течения и обусловлены трудностями применения имеющихся численных алгоритмов к расчету движения расплава в методе Чохральского.

Наша работа посвящена прямому численному моделированию нестационарного течения расплава в методе Чохральского в полной трехмерной постановке с учетом вращения и реальных параметров расплава.

Постановка задачи. С помощью уравнений для описания течения вязкой несжимаемой жидкости в приближении Буссинеска решается задачи о моделировании движения расплава арсенида галлия во вращающемся тигле. Общая схема представлена на рис.1. На верхней поверхности темным цветом обозначена область, где растет кристалл. При этом тигль вращается в одну сторону, а область кристалла – в противоположную. В цилиндре по бокам и снизу стоят непроницаемые стенки, нагревающиеся специальным образом. Сверху находится свободная поверхность с областью кристалла в центре. Система находится в поле силы тяжести $g=9.8$ м/сек².

Для численного решения задачи использованы упомянутый КГид алгоритм, включенный в открытый пакет OpenFOAM. Как показали предварительные расчеты и результаты тестирования алгоритма, данный метод позволяет вести устойчивый расчет течения при реалистичных числах Рейнольдса и Грасгофа, достигающих значений 10^3 и 10^8 , соответственно.

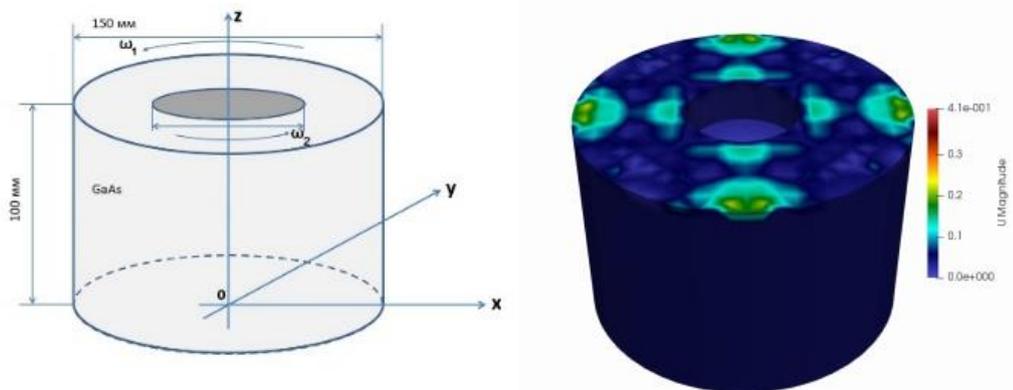


Рисунок 1. Схема вращающегося тигля и пример распределения модуля скорости потока на момент времени $t=0.5$ сек.

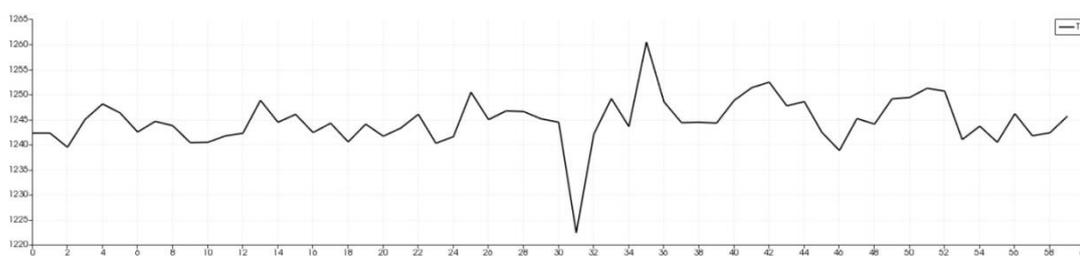


Рисунок 2. Распределение температуры T за 5 оборотов тигля (60 сек) в точке $(0, 0.03, 0.06)$.

Заключение

Первые результаты прямого численного моделирования течения расплава во вращающемся тигле показывают полностью нестационарный характер течения (Рис. 1, 2). Тем самым описание процесса в осесимметричной и, тем более, стационарной постановке представляется нереалистичным.

Литература

1. *Елизарова Т.Г.* Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений — М.: Научный мир, 2007.
2. *Kraposhin M.V., Smirnova E.V., Elizarova T.G., Istomina M.A.* Development of a new OpenFOAM solver using regularized gas dynamic equations // *Computers & Fluids*. — 2018. — V. 166. — 30 April 2018. — P. 163–175. <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2018.02.010>.
3. *Kraposhin M.V., Ryazanov D.A., Elizarova T.G.* Numerical algorithm based on regularized equations for incompressible flow modeling and its implementation in OpenFOAM // *Computer physics Communications*. — 271(2022). — 108216.

Влияние дисперсионности линейных фильтров на вероятностные характеристики приема цифровых сигналов

Effect of linear filter dispersion on error-probabilities of digital signal reception

Назаров Л. Е., Кулиев М. В.

Аннотация. В работе приведены результаты исследований искажающего влияния дисперсионности (нелинейностей группового времени задержки (НГВЗ)) линейных фильтров в составе демодуляторов цифровых сигналов при увеличении их частотной эффективности. Рассмотрено влияние НГВЗ или фазо-частотной характеристики линейных фильтров, которые порождают интерференционные межсимвольные и межканальные помехи. Выполнено моделирование алгоритма посимвольного приема с целью оценивания энергетических потерь для ряда цифровых сигналов с многоуровневой фазовой и амплитудно-фазовой манипуляциями с частотной эффективностью до 4 бит/с/Гц с использованием моделей анализируемых помех и искажений в дополнение к каналному аддитивному белому гауссовскому шуму. Полученные результаты имеют теоретическое и прикладное значение в науке и технике.

Введение

Наиболее важный параметр информационных систем различного назначения определяется вероятностными характеристиками, например вероятностью ошибки на бит P_6 [1,2]. Для ряда цифровых сигналов известны аналитические выражения, используемые при теоретическом вычислении P_6 для канала с аддитивным белым гауссовским шумом (АБГШ) [2]. Вместе с тем при оценке помехоустойчивости алгоритмов приема сигналов необходимо учитывать искажающее влияние и других факторов каналов передачи, которые могут привести к энергетическим потерям по отношению к распространению в свободном пространстве [1,3].

Среди этих факторов выделяют класс искажений за счет неидеальности демодуляторов сигналов, в частности, рассматриваемая ниже нелинейность группового времени задержки (НГВЗ) или нелинейные фазо-частотные характеристики (ФЧХ) линейных фильтров за счет их дисперсионных свойств, которые порождают интерференционные межсимвольные и межканальные помехи [3,4]. Исследования показывают значимость этих искажений и интерференционных помех для цифровых сигналов при увеличении порядка их манипуляции M и частотной эффективности $k = \log_2 M$ бит/с/Гц [1,3,5,6].

Актуальной является задача развития моделей данных искажений и оценивания энергетических потерь ΔE с использованием этих моделей по отношению к распространению по каналу АБГШ при приеме цифровых сигналов.

Цифровые сигналы с многоуровневой фазовой (ФМ-М), с амплитудно-квадратурной (КАМ-М) и с амплитудно-фазовой (АФМ) манипуляциями задаются в виде $s(t) = \sum_i A_i U(t) \cos(2\pi f t + \varphi_i)$, f – центральная частота; $U(t) = 1$ при $iT < t \leq (i+1)T$, иначе $U(t) = 0$; A_i , φ_i – амплитуда и фаза радиоимпульсов, задаваемых последовательностью информационных символов и представляющих сигнальные «созвездия»; T – временные такты. На рисунке 1 приведены примеры «созвездий» ФМ-16 и АФМ-16 сигналов [5].

При учете искажающего влияния линейных фильтров задача оценивания энергетических потерь ΔE по отношению к каналу АБГШ решается путем моделирования алгоритма посимвольного приема цифровых сигналов [7], что составляет суть задачи.

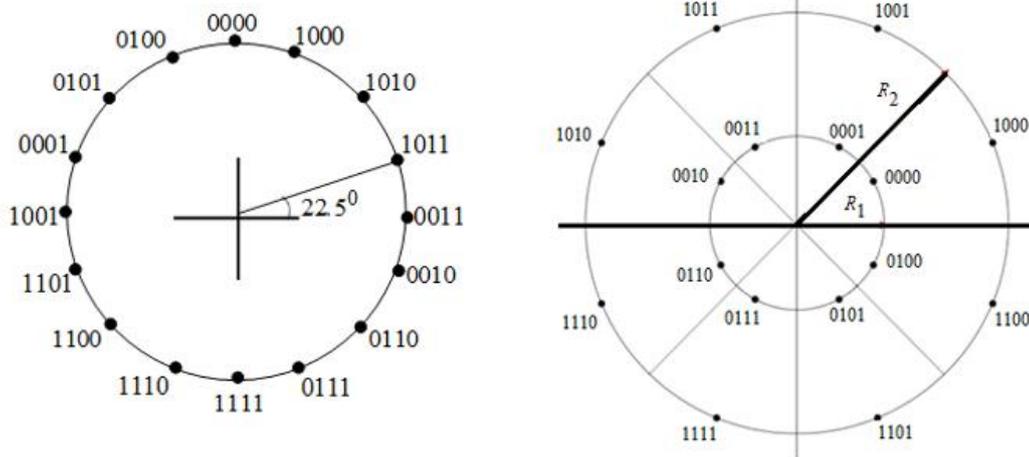


Рисунок 1. Сигнальные «созвездия» ФМ-16 и АФМ-16 сигналов.

Модели линейных фильтров

Передаточные функции линейных фильтров характеризуются линейностью ФЧХ и зависимостью группового времени задержки от частоты в полосе анализа канала передачи. При анализе используют модели ФЧХ для параболического или линейного закона изменения ГВЗ от частоты. Для модели параболического закона изменения ГВЗ от частоты ФЧХ имеет вид $\varphi_{\Pi}(f) = -\frac{3\Delta\varphi f}{f_0} + \frac{4\Delta f}{f_0^3} f^3$, для модели линейного закона ГВЗ

от частоты имеем $\varphi_{\Pi}(f) = -\Delta\varphi + \frac{\Delta f}{f_0} f + \frac{\Delta f}{f_0^2} f^2$. Здесь $\Delta\varphi$ – максимальная неравномерность фазы; f – частота в диапазоне $[-f_0, f_0]$ [1].

Результаты моделирования

В таблице 1 приведены результаты моделирования алгоритма посимвольного приема, полученные для ряда цифровых ФМ, КАМ и АФМ сигналов для рассматриваемых моделей изменения ФЧХ от частоты: задавалось значение $\Delta E = 0.5$ дБ и $P_{\zeta} = 10^{-5}$, для этих параметров оценивалось допустимое значение максимальной неравномерности фазы $\Delta\varphi$ при наличии АБГШ с односторонней спектральной плотностью мощности N_0 .

В таблице также приведены значения сигнал/помеха E_{ζ} / N_0 , (дБ) требуемые для достижения $P_{\zeta} = 10^{-5}$ при наличии лишь АБГШ для рассматриваемых цифровых сигналов, E_{ζ} - энергия сигналов на бит.

Таблица 1. Результаты моделирования алгоритма приема для цифровых сигналов

Тип сигналов	E_{ζ} / N_0 , дБ	$\varphi_{\Pi}(f)$, рад	$\varphi_{\Pi}(f)$, рад
ФМ-4	9.5	0.10	0.155
ФМ-8	12.75	0.04	0.090
АФМ-8	17.50	0.10	0.065
ФМ-16	17.50	0.03	0.065
КАМ-16	16.25	0.045	0.075
АФМ-16	15.75	0.060	0.085

Видно, что для рассматриваемых моделей вычисленные значения максимальных нелинейностей $\varphi_{\Pi}(f)$ и $\varphi_{\Pi}(f)$ отличаются не более чем в 2 раза. Также видно, что сигналы с амплитудно-фазовой манипуляцией наименее подвержены искажающему

влиянию НГВЗ линейных фильтров в составе демодуляторов (максимальные значения нелинейностей $\varphi(f)$ достигают 0.06-0.1 рад), сигналы с многопозиционной фазовой манипуляцией наиболее подвержены влиянию нелинейностей НГВЗ и фазовым искажениям линейных фильтров.

Заключение

Приведены результаты исследований искажающего влияния дисперсионности (нелинейностей группового времени задержки (НГВЗ)) линейных фильтров в составе демодуляторов цифровых сигналов при увеличении их частотной эффективности. Выполнено моделирование алгоритма посимвольного приема с целью оценивания энергетических потерь для ряда цифровых сигналов с частотной эффективностью до 4 бит/с/Гц с использованием моделей анализируемых помех и искажений в дополнение к АБГШ. Полученные результаты относительно максимальных допустимых значений фазовых нелинейностей при допустимых энергетических потерях до 0.5 дБ необходимо учитывать при расчете параметров демодуляторов рассматриваемых цифровых сигналов, интенсивно используемых в информационных системах различного назначения.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН.

Литература

1. Скляр Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение — М.: Издательский дом “Вильямс”, 2003. 1104 с.
2. Proakis J.G., Salehi M. Digital communication — 5 Edition. McGraw-Hill, Higher Education, 2001. 768 p.
3. Meyr M., Moeneclaey M. and Fechtel S.A. Digital communication Receivers — A Wiley-Interscience Publication, New York. John Wiley and Sons, Inc., 1998. 827p.
4. Piemontese A., Colavolpe G., Ericsson T. Phase noise in communication systems: from measures to models. — arXiv:2104.07264v1. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2104.07264>
5. Second generation framing structure, channel coding and modulation systems for Broadcasting, Interactive Services, News Gathering and other broadband satellite applications Part 2: DVB-S2 Extensions (DVB-S2X) DVB. 2020. Document A083-2. European Broadcasting Union CH-1218, Geneva. 159 p.
6. Кулиев М.В., Назаров Л.Е. Исследование влияния нестабильностей модуляторов цифровых частотно-эффективных сигналов на вероятностные характеристики при их приеме // Физические основы приборостроения. — 2022. — №3(45). — С. 37-43.
7. Назаров Л.Е., Батанов В.В. Исследование помехоустойчивости оптимального посимвольного приема фазоманипулированных сигналов с корректирующими кодами в недвоичных полях Галуа // Радиотехника и электроника. — 2022. — Т.67, №8. — С. 782-787.

Математическое моделирование фотонных кристаллов

Mathematical modeling of photonic crystals

Боголюбов А.Н., Домбровская Ж.О., Никитченко А.Д.

*Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова кафедра математики Москва, РФ
nikitchenko.ad15@physics.msu.ru*

Аннотация. Рассматривается задача расчета и сравнении времени жизни блоховских поверхностных волн и таммовских плазмонов-поляритонов в одномерных фотонных кристаллах, а также задача расчета эффективности передачи энергии от падающего импульса связанному состоянию.

Введение

Созданная в 1960 году первая работоспособная интегральная схема положила начало интенсивному развитию интегральной электроники. С тех пор ученым и инженерам удалось значительно повысить надежность приборов, уменьшить их физические размеры и многократно увеличить их производительность. Однако на этом пути встал ряд проблем, таких как значительный рост потребления электроэнергии, более высокий выход тепла и существенный рост стоимости разработки, проектирования и производства вычислительной техники. Одним из наиболее радикальных и перспективных способов разрешения этих проблем является замена электрона в качестве частицы-носителя информации на фотон, что позволит значительно увеличить быстродействие современной вычислительной техники при существенном уменьшении энергозатрат.

В этой связи понятен тот большой теоретический и практический интерес, который вызывает в настоящее время применение метаматериалов – искусственно структурированных композитных материалов, сильно взаимодействующих с электромагнитными волнами [1]. В частности, большой интерес представляет исследование электродинамических систем на основе фотонных кристаллов (ФК). Интенсивно изучаются свойства фотонно-кристаллических структур, разрабатываются методы их исследования, создаются и исследуются различные устройства на таких структурах, реализуются на практике теоретически предсказанные эффекты в фотонных кристаллах. Интерес к таким задачам обусловлен, прежде всего, тем, что фотонные кристаллы позволяют строить приборы и устройства, обладающие уникальными свойствами.

Важнейшей характеристикой для устройств интегральной фотоники является время жизни связанного состояния, которое должно быть максимально большим.

При прохождении электромагнитной волны через одномерный ФК возникают многократные переотражения от границ слоев. Интерференция переотраженных волн приводит к появлению «фотонных запрещенных зон» (photonic band gap, PBG) в спектрах отражения и прохождения. Если запрещенные зоны для всех направлений в кристалле перекрываются, запрещенная зона является полной, что означает, что в определенном спектральном диапазоне свет любой поляризации не может распространяться в кристалле ни в каком направлении в одном, двух или трех измерениях.

Такие свойства фотонно-кристаллические структуры весьма интересны своими приложениями, например:

- волноводы на основе фотонных кристаллов могут быть очень компактны и обладать малыми потерями;
- фотонные сверхпроводники способны работать с большими частотами и отлично совмещаются с фотонными изоляторами и полупроводниками;
- благодаря упорядоченному характеру явления захвата в фотонном кристалле, на основе этих сред возможно построение оптических запоминающих и логических устройств;
- при наклонном падении волны на фотонный кристалл возможно формирование внутри него связанного состояния, распространяющегося вдоль его поверхности; такие связанные состояния широко используются в интегральной фотонике в качестве носителя сигнала.

Последнее свойство позволяет при определенных условиях формировать в ФК как блоховские поверхностные волны, так и таммовские плазмоны-поляритоны.

При исследовании свойств фотонно-кристаллических структур и приборов и устройств на их основе весьма широко применяются методы математического моделирования. В частности, используются методы конечных разностей и конечных элементов, а также матричные методы. Эти методы хорошо зарекомендовали себя при

решении стационарных задач. Однако большинство задач, связанных с математическим моделированием систем и устройств на фотонных кристаллах, являются нестационарными. Простейшим примером такой задачи является задача о падении короткого электромагнитного импульса на поверхность фотонного кристалла. Для решения таких задач в работах [2]-[5] предложен нестационарный матричный метод, позволяющий исследовать распространение в ФК блоховских поверхностных мод и таммовских плазмонов-поляритонов, а также определить их время жизни.

Основная идея нестационарного матричного метода основана на линейности рассматриваемых задач и применения принципа суперпозиции и заключается в решении ряда стационарных задач матричным методом. С помощью численного Фурье-преобразования падающий импульс представляется в виде суперпозиции плоских монохроматических волн. Для каждой из них стационарным матричным методом решается стационарная задача и определяются амплитудные коэффициенты отражения и прохождения. С помощью обратного численного Фурье-преобразования получаются временные развертки прошедшего и отраженного полей.

Возбуждение связанного состояния приводит к образованию в спектре отраженного импульса узкого провала, а во временной зоне у отраженного импульса появляется хвост, что приводит к искажению соответствующей кросскорреляционной функции и появлению у нее экспоненциально убывающего хвоста. Скорость убывания хвоста характеризуется временем жизни связанного состояния, которое определяется как время, за которое величина кросскорреляционной функции уменьшается в e раз.

Для сравнения были выбраны два аналогичных ФК, построенные из бислоев $\text{SiO}_2/\text{Ta}_2\text{O}_5$, в которых были зарегистрированы блоховские поверхностные волны и таммовские плазмоны-поляритоны, времена жизни которых были рассчитаны по разработанной методике. Провал в спектре коэффициента отражения, соответствующий возбуждению блоховских поверхностных волн, оказался гораздо более узким, чем для таммовских плазмонов-поляритонов. Для блоховских поверхностных волн ширина резонанса составила порядка 0,7-0,8 нм, а для таммовских плазмонов-поляритонов резонанс имел ширину порядка 9-10 нм. При сравнимой глубине резонанса это говорит о более высокой добротности и более продолжительном времени жизни блоховских поверхностных волн.

Крайне важным параметром является эффективность передачи энергии от падающего импульса к связанному состоянию. Для обеих ФК, один из которых поддерживал блоховские поверхностные волны, а другой таммовские плазмоны-поляритоны, была рассчитана зависимость от угла падения и длины волны коэффициента поглощения, показывающая, какая доля энергии падающего импульса перешла в связанное состояние. Максимальное значение коэффициента поглощения в области резонанса для ФК, поддерживающего блоховские поверхностные волны составило 0,88, среднее значение – 0,44. Для ФК, поддерживающего таммовские плазмоны-поляритоны, эти значения составили 0,11 и 0,08 соответственно. Таким образом, структуры, поддерживающие блоховские поверхностные волны, оказываются более эффективными в передаче энергии связанному состоянию.

Заключение

В работе разработана, верифицирована и реализована модель для расчета времени жизни связанного состояния в одномерных фотонных кристаллах: блоховской поверхностной волны и таммовского плазмона-поляритона. Показана перспективность фотонных кристаллов, использующих блоховские поверхностные волны, по сравнению с кристаллами, использующими таммовские плазмоны-поляритоны, для создания устройств интегральной фотоники. Построенная и реализованная математическая модель позволяет проводить численные эксперименты по исследованию зависимости времени жизни связанного состояния от параметров фотонного кристалла, что дает

возможность решать обратную задачу синтеза фотонных кристаллов для получения максимального времени жизни поверхностной блоховской волны.

Литература

1. *Solymar L., Shamonina E.* Waves in metamaterials. N.Y.: Oxford University Press, 2000
2. *Belov A.A., Dombrovskaya Zh O., Bogolyubov A.N.* A bicomact scheme and spectral decomposition method for difference solution of Maxwell's equations in layered media // Computers and Mathematics with Applications, издательство Pergamon Press Ltd. (United Kingdom). V. 96. P. 178-187. 2021.
3. *Белов А.А., Боголюбов А.Н., Домбровская Ж.О., Жбанников С.О.* Сверхбыстрый метод расчёта одномерных задач фотоники // Физические основы приборостроения. Т. 9, № 2. 2022. С.2-9.
4. *Боголюбов А.Н., Домбровская Ж.О., Никитченко А.Д.* Динамика блоховских поверхностных волн в фотонных кристаллах // Физические основы приборостроения, том 11, № 2. 2022.
5. *Bogolyubov A.N., Dombrovskaya Zh O., Nikitchenko A.D.* Long-lived Bloch Wave in All-dielectric Photonic Crystal // 2022 Photonics & Electromagnetics Research Symposium (PIERS). P. 1177-1179. Gai suo, 2022.

Анализ влияния пространственной дисперсии на оптические характеристики кластера магнитоплазмонных наночастиц методом дискретных источников

Analysis of the spatial dispersion effect on the optical parameters of magnetoplasmonic nanoparticle's cluster by the discrete sources' method

Пензарь А.С.

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, физический факультет, Москва, РФ

E-mail: sashapenzar@yandex.ru

Аннотация. В настоящей работе рассматривается задача дифракции плоской электромагнитной волны на кластере из двух бесконечных слоистых магнитоплазмонных наноцилиндров. Учет возникающих эффектов пространственной дисперсии в золотой оболочке, также известных как эффекты нелокальности, осуществляется в рамках теории обобщенного нелокального оптического отклика. На основе новой схемы метода дискретных источников проводится анализ влияния деформации частиц и эффекта пространственной дисперсии на положение и амплитуду максимума поглощения энергии. Показано, что положение максимума можно сдвигать в область прозрачности биологических тканей человека за счет вариации толщины золотой оболочки и материала ядра. Установлено, что учет пространственной дисперсии в металлической оболочке приводит к снижению интенсивности поглощения и сдвигу положения максимума в коротковолновую область.

Введение

Явление поверхностного плазмонного резонанса (ПР) заключается в способности металлических частиц из благородных металлов концентрировать и удерживать значительную электромагнитную энергию в сверхмалых объемах, намного превосходящих Рэлеевский предел. Исследование данного явления уже было проведено в случае одной слоистой эллиптической частицы [1], однако управлять положением ПР с целью получить желаемое усиление электромагнитных полей можно не только с помощью варьирования размеров, материала и формы наночастиц, но и с помощью их количества. Кроме того, для управления ПР наиболее эффективным является использование кластера гибридных наночастиц, состоящих из ядра и оболочки.

Описание работы

В данной работе рассматривается решение задачи дифракции плоской электромагнитной волны на кластере из двух частиц со структурой ядро-оболочка:

магнитное ядро Fe_2O_3 или Fe_3O_4 и тонкая металлическая оболочка. В качестве металлов были взяты серебро и золото. Предполагается, что частицы имеют форму бесконечного цилиндра с эллиптическим сечением.

Основным затруднением при решении данного класса задач является возникновение нелокальных эффектов (ЭНЛ) в металлах, которые оказывают существенное влияние на характеристики ПР в случае, когда характерный размер металлического слоя становится сравнимым с длиной волны Ферми электронов в металле [2]. К возникновению ЭНЛ приводит образование объемных зарядов в тонких металлических слоях. Для описания данных эффектов в работе используется модель обобщенного нелокального оптического отклика [2, 3], в соответствие с которой нелокальные параметры записываются следующим образом:

$$\varepsilon_L = \varepsilon_{T_2} + \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\gamma\omega}, k_L^2 = \frac{\varepsilon_L}{\xi^2}, \xi^2 = \frac{\varepsilon_L(\beta^2 + D(\gamma - i\omega))}{\omega^2 + i\gamma\omega}, \quad (1)$$

где ω_p – плазменная частота металла, γ – частота столкновений электронов, ω – частота колебания электромагнитного поля, β – гидродинамическая скорость в плазме, связанная со скоростью Ферми: $\beta^2 = \frac{3}{5}(v_F)^2$, D – коэффициент диффузии электронов. ε_L – вклад в диэлектрическую проницаемость от связанных электронов и ионов с учётом межзонных переходов, k_L – соответствующее волновое число, ξ характеризует масштаб пространственной дисперсии.

Рассмотрим для простоты постановку задачи дифракции плоской Р-поляризованной электромагнитной волны на кластере из двух металлических цилиндрических частиц, расположенных на расстоянии d друг от друга.

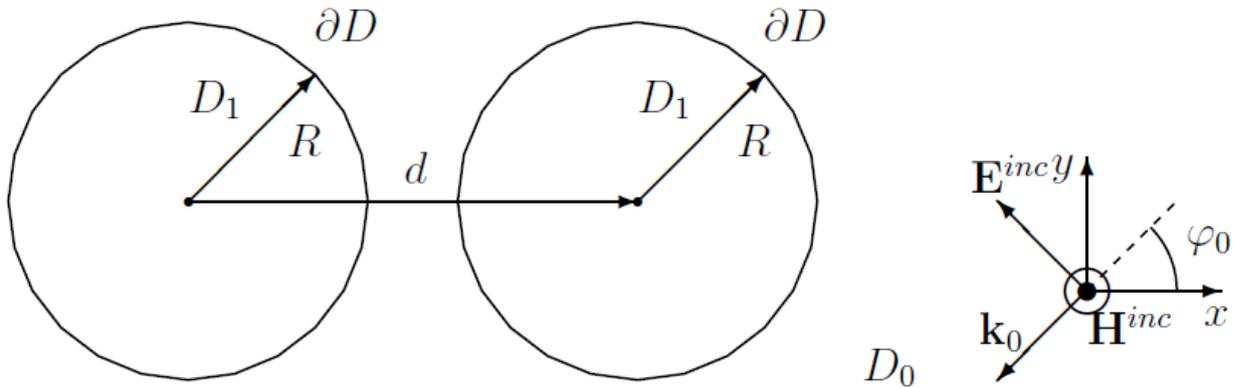


Рисунок 1. Схематическое изображение рассеивающих частиц

$$\begin{cases} U_i^{(1)}(S_1) - U_e^{(1)}(S_1) - U_e^{(2)}(S_1) = U^{(0)}(S_1), \\ U_i^{(2)}(S_2) - U_e^{(1)}(S_2) - U_e^{(2)}(S_2) = U^{(0)}(S_2). \end{cases} \quad (2)$$

Записав граничные условия в матричном виде, можно заметить, что клеточная матрица системы окажется циркулянтной, в соответствие с чем можно разделить задачу на две отдельные [4].

Для решения поставленной задачи дифракции применяется метод дискретных источников [3]. С его помощью проводится анализ влияния вытянутости и конфигурации частиц на поглощение энергии. Также проведено сравнение полученных результатов с результатами, полученными при дифракции на одной частице, и проанализировано влияние эффектов нелокальности на оптические характеристики частиц.

Заключение

В работе представлены результаты, полученные методом дискретных источников для анализа рассеяния электромагнитных волн на кластере двух эллиптических магнитоплазмонных цилиндров. Продемонстрировано, что изменение геометрии, конфигурации и размеров частиц позволяет управлять положением плазмонного

резонанса, и результат значительно отличается от результатов, полученных на одной частице той же конфигурации и того же размера.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ, проект №22-21-00110, «Математические модели квантовых эффектов магнитоплазмоники».

Литература

1. Ю.А. Еремин, А.С. Пензарь. Анализ влияния пространственной дисперсии на поглощение электромагнитной энергии магнитоплазмонными наночастицами // ВМУ. Серия 3. Физика. Астрономия. — 2022. — № 4. — С. 3–10.
2. Raza S., Bozhevolnyi S.I., Wubs M., Mortensen N.A. Nonlocal optical response in metallic nanostructures. Topical Review // J. Phys. Condens. Matter. — 2015. — Vol. 27, № 18. — P. 1–19.
3. Еремин Ю.А., Свешников А.Г. Квазиклассические модели квантовой наноплазмоники на основе метода Дискретных источников // ЖВМиМФ. — 2021. — Т.61, № 4. — С. 34–62.
4. Воеводин В., Кузнецов Ю. Матрицы и вычисления — М.: Наука. 1984. — 123.

Математическое моделирование несимметричного трехмерного зеркального коллиматора со скругленными краями

Mathematical modeling of non-symmetric 3D mirror collimator with rounded edges

Пропой М.И.¹, Хлебников Ф.Б.¹, Коняев Д.А.^{1,2}, Шапкина Н.Е.^{1,2}, Боголюбов А.Н.¹

1) Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, Москва, РФ; 2) Институт теоретической и прикладной электродинамики РАН, Москва, РФ.

mpropoy@gmail.com, mnfkh1@gmail.com

Аннотация. В работе изучается задача дифракции электромагнитной волны на трехмерном несимметричном зеркальном коллиматоре со скругленными краями. Решается задача моделирования поля волны, отраженной от коллиматора, в рабочей зоне компактного полигона.

Введение

Для измерения ЭПР исследуемого объекта и решения ряда других экспериментальных задач прикладной электродинамики требуется получить плоскую электромагнитную волну в заданной области пространства. [1] С помощью открытых полигонов это сделать затруднительно из-за наличия большого количества помех и влияния погодных условий. Применение компактных полигонов, состоящих из безэховой камеры и аппаратуры для физического моделирования поля плоской волны, позволяет устранить эти недостатки.

Компактный полигон — это сравнительно небольшой измерительный комплекс, позволяющий получить квазиплоскую электромагнитную волну от источника в заданной области пространства внутри закрытого помещения (безэховой камеры). Важным элементом большинства компактных полигонов является коллиматор, который может быть основан либо на диэлектрической линзе, либо на зеркале [2]. Коллиматор предназначен для создания электромагнитного поля, близкого к полю плоской волны в некоторой области пространства, называемой рабочей зоной компактного полигона.

Описание работы

В работе [3] были решены задачи дифракции на цилиндрических зеркалах с симметричным и несимметричным поперечными сечениями, граница каждого из которых представляет собой замкнутую кривую сложной формы. Эта кривая для обоих типов сечений состоит из дуги параболы, скруглений на основе дуг эллипса и дополнительной гладкой кривой, замыкающей фигуру в области тени.

Для сечений таких зеркал получены распределения амплитуды и фазы в рабочей зоне компактного полигона для разных частот падающей волны. Также были решены

задачи поиска оптимизированных геометрических параметров (задача синтеза) симметричного и несимметричного зеркал, как в случае одной частоты падающей волны, так и для пучка частот.

В рамках данной работы на основе полученных сечений цилиндрических зеркал был построен трехмерный зеркальный коллиматор сложной формы, для которого были решены задачи дифракции плоской и сферической электромагнитных волн.

Построение трехмерного зеркала по известным вертикальному и горизонтальному сечению. Трехмерный коллиматор был смоделирован в созданном авторами программном комплексе путем трансляции вертикального сечения вдоль параболического участка горизонтального сечения и последующей трансляцией горизонтального сечения вдоль вертикального. С использованием участков скруглений вертикального и горизонтального сечений в качестве образующих и направляющих, построены также углы коллиматора.

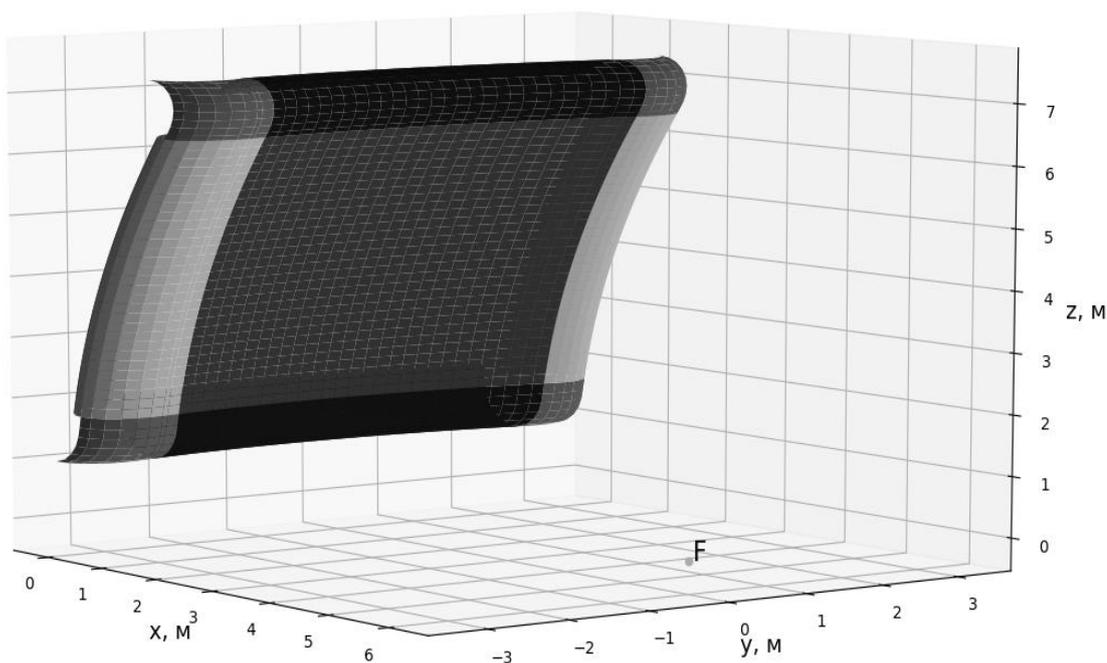


Рисунок 1. Трехмерный зеркальный коллиматор, построенный по двумерным сечениям цилиндрических зеркал

Сетка на поверхности трехмерного зеркала был построена при помощи одномерных равномерных по длине дуги сеток на вертикальном и горизонтальном сечениях, что позволило триангулировать поверхность коллиматора. Треугольники низкого качества (вытянутые вдоль одного из ребер) могут быть расположены лишь в областях отогнутых назад углов зеркала.

Постановка задачи дифракции для трехмерного коллиматора. Для рассматриваемой модели ставится краевая задача дифракции электромагнитных волн, поверхность зеркала считается идеально проводящей. Вводится система координат, ось x которой направлена вдоль оси параболоида вращения, вырез которого является основой коллиматора. Пусть S — поверхность зеркала, \mathbf{n} — единичная нормаль к поверхности S , ω — циклическая частота электромагнитной волны, \mathbf{E}^i и \mathbf{E}^s — комплексные амплитуды (зависимость от времени выбрана в виде $e^{i\omega t}$) падающего и рассеянного поля. Тогда \mathbf{E}^i и \mathbf{E}^s удовлетворяют системе уравнений Максвелла [4] для идеального проводника. Эта система сводится к уравнению (1) для поверхностной плотности тока \mathbf{J} на S , которое затем решается численно методом моментов [5]:

$$\mathbf{n} \times (-i\omega \mathbf{A} \mathbf{r} - \nabla_s \Phi(\mathbf{r})) = \mathbf{n} \times \mathbf{E} \mathbf{i},$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_S \mathbf{J}(\mathbf{r}') \frac{e^{-ikR}}{R} dS',$$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_S \sigma(\mathbf{r}') \frac{e^{-ikR}}{R} dS',$$

$$(\nabla_s, \mathbf{J}(\mathbf{r}')) = -i\omega\sigma(\mathbf{r}').$$

В уравнениях (1) — (4) $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ и $\Phi(\mathbf{r})$ — скалярный и векторный потенциалы, ∇_s — поверхностный градиент, ϵ, μ — диэлектрическая и магнитная проницаемости, $\sigma(\mathbf{r}')$ — поверхностная плотность индуцированного заряда, $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ — расстояние между точкой наблюдения и точкой на поверхности S .

Результаты моделирования поля в рабочей зоне.

Для построенной выше математической модели была решена задачи дифракции сферической электромагнитной волны на зеркале, изображенном на Рисунке 1. Рабочая зона представляет собой прямоугольный параллелепипед, линейные размеры которого примерно равны половинам апертур вертикального и горизонтального сечений. Абсцисса центра параллелепипеда равна двойному фокусному расстоянию от вершины параболоида вращения (Рисунок 2). Качественно поле в рабочей зоне близко к полю плоской волны.

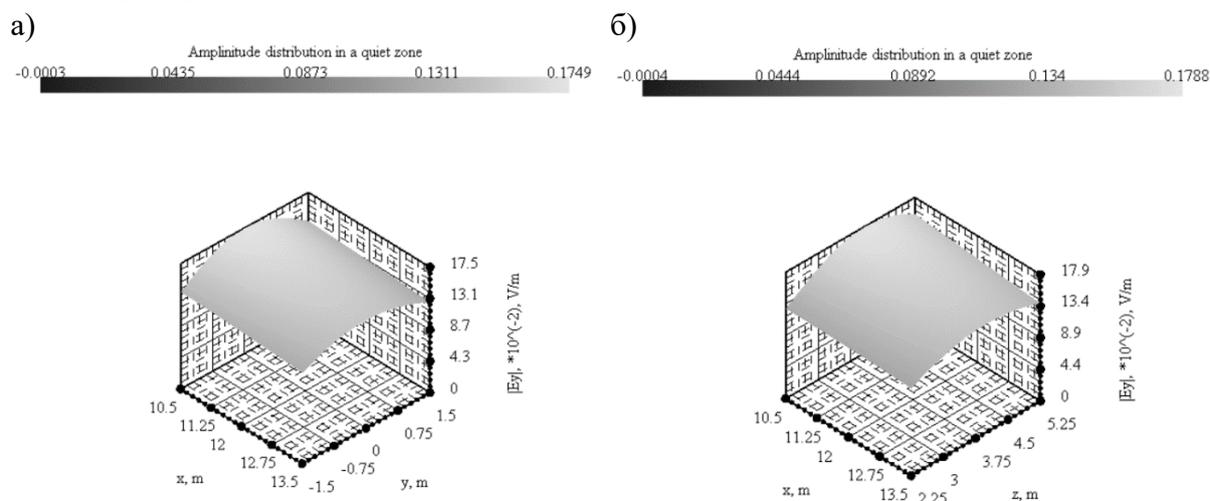


Рисунок 2. Амплитуда поля на срезах рабочей зоны трехмерного коллиматора плоскостями

а) $z = 4.55$ м и б) $y = 0$ м (частота падающей волны 150 МГц)

Заключение

На основе решений двумерных задач синтеза и модификации ранее созданного программного комплекса, было смоделировано трехмерное несимметричное зеркало, для которого затем была решена задача дифракции сферической электромагнитной волны. Показано, что поле в рабочей зоне коллиматора близко по своим характеристикам к полю плоской волны.

Литература

1. Н. П. Балабуха, А. С. Зубов, В. С. Солосин. Компактные полигоны для измерения характеристик рассеяния объектов. – М.: Наука, 2007.

2. *Хлебников Ф.Б., Боголюбов А. Н., Солосин В. С., Шапкина Н. Е.* Математическое моделирование рассеянного поля в рабочей зоне зеркального коллиматора // Вестник Московского университета. Серия 3. Физика. Астрономия. 2015. № 6. С. 43 – 48.
3. *М. И. Пропой, Ф. Б. Хлебников, Д. А. Коняев и др.* Оптимизация формы протяженных зеркальных коллиматоров со скругленными краями // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон.* — 2022., № 6. — С. 26.
4. *А. Г. Свешников, И. Е. Могилевский.* Математические задачи теории дифракции. – М.: Физический факультет МГУ, 2012.
5. Rao S., Wilton D., Glisson A. Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape //IEEE Transactions on antennas and propagation. – 1982. – Т. 30. – №. 3. – С. 409-418.

Математическое моделирование дифракции плоской электромагнитной волны на протяжённом импедансном коллиматоре со скруглёнными краями

Mathematical modeling of the diffraction of a plane electromagnetic wave by an extended impedance collimator with rounded edges

Хлебников Ф.Б.¹, Коняев Д.А.^{1,2}, Шапкина Н.Е.^{1,2}, Боголюбов А.Н.¹.

1) *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, Москва, РФ;* 2) *Институт теоретической и прикладной электродинамики РАН, Москва, РФ.*

mnfkh@gmail.com

Аннотация. Поставлены и решены прямая и обратная задача математического моделирования зеркального коллиматора компактного полигона со скруглёнными краями и импедансным покрытием.

Введение

Точность измерений внутри компактных полигонов, предназначенных для измерений рассеяния плоских электромагнитных волн, напрямую зависит от равномерности самого поля, которым облучается объект исследования. Наиболее распространённые на сегодняшний день однозеркальные параболические коллиматоры выполнены в виде несимметричного выреза параболоида вращения, в фокусе которого находится точечный источник. Поле, отражённое от таких зеркал, должно приближаться по своим характеристикам к полю плоской волны в определённой области пространства, называемой рабочей зоной.

Одним из наиболее значительных источников неоднородности отраженного поля является дифракция волн на кромках коллиматора. Существует два основных подхода, призванных уменьшить влияние этого эффекта. Первый из них — применение зазубренных кромок, рассеивающих поле, падающее на края коллиматора. Другим распространённым способом снижения неоднородности является отгибание краёв зеркала в область тени, позволяет перенаправить рассеянное на краях коллиматора поле за пределы рабочей зоны [1].

В работе рассматривается задача синтеза оптимальной формы коллиматора со скругленными краями на примере модели протяженного цилиндрического зеркала с сечением в виде отрезка параболы, дополненного краевыми скруглениями и замыкающей дугой окружности в теневой области.

Описание работы

Как известно, большинство методов решения задач синтеза основаны на многократном решении прямой задачи с варьируемыми определённым образом параметрами. Прямая задача моделирования электромагнитного поля в рабочей зоне коллиматора ставится следующим образом: протяженное зеркало сложной формы облучается источником, представляющим собой нить тока, расположенную в фокусе коллиматора. На поверхности коллиматора ставятся импедансные граничные условия.

Рабочая зона находится на двойном фокусном расстоянии от коллиматора, за источником. Задача дифракции ставится во внешней по отношению к зеркалу области, причём рассматривается только отражённое от коллиматора поле в рабочей зоне.

В такой постановке внешняя задача дифракции на импедансном зеркале может быть сведена к паре двумерных скалярных задач для уравнения Гельмгольца относительно составляющих E_z и H_z электрического и магнитного полей, параллельных направляющей зеркала, с граничными условиями третьего рода и условиями излучения на бесконечности. Каждая из этих задач сводится к интегральному уравнению Фредгольма, которые решаются численно [2].

Геометрическая модель коллиматора. Отдельное внимание следует уделить построению геометрической модели коллиматора. В работе рассматривается модель протяженного зеркала в виде цилиндра сложного сечения, состоящего из параболической дуги, скруглений специальной формы на основе эллипса и задней стенки. Сечение должно обладать непрерывной кривизной, это следует как из физических соображений, так и является необходимым условием для применения ряда численных методов, использованных в работе. Эти свойства должны сохраняться в как можно более широком диапазоне входных параметров, иначе решение обратной задачи существенно усложнится.

Для выполнения этих условий, форма скруглений была скорректирована при помощи сглаживающей функции специального вида [3]. Также, чтобы не допустить пересечения параболического участка с задней стенкой, последняя была дополнена финитной функцией с нулевыми производными на границе носителя (т.н. функция «шляпка»). Благодаря этим мерам, удаётся корректно построить зеркало практически при всех возможных комбинациях геометрических параметров, имеющих физический смысл.

Задача синтеза скруглённых краёв. Задача оптимизации формы коллиматора в самой общей постановке формулируется следующим образом: требуется построить зеркало, формирующее в рабочей зоне электромагнитное поле, близкое к полю плоской волны. Введя равномерную сетку в рабочей зоне коллиматора и посчитав среднее значение поля в узлах сетки, мы можем рассматривать среднее квадратичное отклонение поля от этого значения как функционал от входных параметров задачи, в частности от параметров скруглений. Тогда минимум этого функционала соответствует оптимальной форме скруглённых краёв коллиматора, имеющего наилучшее распределение поля в рабочей зоне.

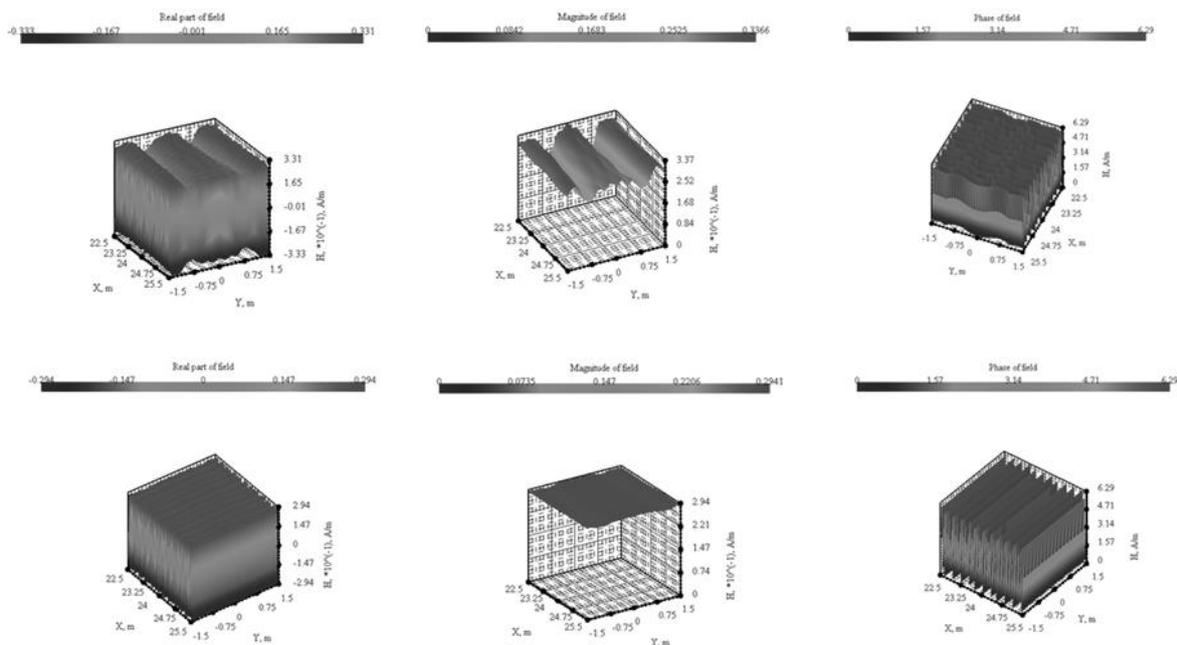


Рисунок 3. Поле в рабочей зоне, его амплитуда и фаза до и после оптимизации.

Для оптимизации функционала, вычисляемого численно и зависящего от двух параметров, хорошо подходит метод Нелдера-Мида [4]. Об эффективности этого симплекс-метода в применении к поставленной задаче можно судить по результатам, представленным на рисунке 1: в верхнем ряду изображены действительная часть, амплитуда и фаза поля в рабочей зоне коллиматора, служившего начальным приближением, а в нижнем — аналогичные результаты для оптимизированного зеркала.

Помимо размеров рабочей зоны и равномерности отражённого поля в ней, ключевое значение для коллиматора имеет и диапазон частот, в котором компактный полигон будет способен выдерживать заданные характеристики. Оптимизация параметров коллиматора на нескольких наперёд заданных частотах требует модификации функционала, к примеру, суммирования среднеквадратичных отклонений, полученных на нескольких частотах. Коллиматор, полученный в результате минимизации такого модифицированного функционала, будет создавать равномерное поле на каждой из заданных частот, однако на каждой конкретной частоте отклонения амплитуды и фазы поля могут возрасти [5].

Заключение

Комплексную проблему математического моделирования зеркального коллиматора со скруглёнными краями можно разделить на прямую задачу расчёта отражённого поля в рабочей зоне и обратную задачу синтеза формы зеркала, напрямую зависящую от прямой. Метод, предложенный в настоящей работе, позволяет оперативно решать эти задачи при помощи современных вычислительных систем и получить важные результаты, необходимые для дальнейшего совершенствования компактных полигонов.

Литература

1. Балабуха Н.П., Зубов А.С., Солосин В.С. Компактные полигоны для измерения характеристик рассеяния объектов. М.: Наука, 2007.
2. А. Н. Боголюбов, Н. А. Боголюбов, Д. А. Коняев и др. Оптимизация формы зеркального коллиматора со скругленными краями. // *Физические основы приборостроения*. — 2019. — Т. 8, № 3. — С. 19–27.
3. Gupta I., Ericson K., Burnside W. A method to design blended rolled edges for compact range reflectors IEEE Transactions on antennas and propagation, vol. 38, no.6. June 1990.

4. *Nelder J. A., Mead R.* A simplex method for function minimization //The computer journal. 1965. Т. 7. №. 4. С. 308-313.
5. *Ф. Б. Хлебников, Д. А. Коняев и др.* Задача оптимизации зеркального коллиматора со скруглёнными краями на пучке частот // Сборник трудов XXXII Всероссийской школы-семинара Волновые явления: физика и применения имени А.П. Сухорукова (Волны-2021). — Секция 12. Математическое моделирование в задачах волновой физики. — 2021. — С. 48–50.

Теоретическая электродинамика

Параметрическое семейство КИХ-фильтров на основе сплайнов и поиск оптимального фильтра

Parametric Family of FIR Filters on Splines and the Optimal Filter Search

Будунова К.А.¹, Кравченко В.Ф.^{1,2}

- 1) *Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Москва, РФ;*
2) *Научно-технологический центр уникального приборостроения РАН, Москва, РФ.*

1917schw@mail.ru, kvf-ok@mail.ru

Аннотация. Рассмотрено семейство зависящих от параметра фильтров с амплитудно-частотными характеристиками, приближающимися по форме к финитным сплайнам. Предложен основанный на дискретизации алгоритм поиска параметра, оптимизирующего значение отклонения характеристики фильтра в полосах пропускания и подавления.

Введение

В работе описывается семейство фильтров с конечной импульсной характеристикой (КИХ), амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) которых приближается к финитным сплайнам, аппроксимирующим свертку прямоугольного импульса с атомарной функцией $h_a(x)$ [1,2]. Отклонение фильтров в полосах пропускания и подавления меняется вместе с изменением параметра, в связи с чем возникает задача разработки метода поиска параметра, оптимизирующего отклонение.

1. Параметрическое семейство КИХ-фильтров на основе сплайнов. Пусть $f(\omega)$ – четная неотрицательная финитная интегрируемая функция с носителем $\text{supp } f(\omega) = [-\Omega, \Omega]$ и

$$\int_{-\Omega}^{\Omega} f(\omega) d\omega = 1,$$

а $B_0(\omega)$ – прямоугольный импульс:

$$B_0(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < 1/2, \\ 1/2, & |\omega| = 1/2, \\ 0, & |\omega| > 1/2. \end{cases}$$

Тогда при $\Omega_0 > \Omega$ свертка

$$H(\omega) = \int_{\mathbb{R}} B_0(u / (2\Omega_0)) f(\omega - u) du \quad (1)$$

является четной финитной неотрицательной функцией, удовлетворяющей условиям

$$H(\omega) = 0, \quad |\omega| > \Omega_0 + \Omega,$$

$$H(\omega) = 1, \quad |\omega| < \Omega_0 - \Omega.$$

Перечисленные свойства позволяют рассматривать $H(\omega)$ в качестве идеальной АЧХ некоторого фильтра низких частот.

Рассмотрим для фиксированных частот ω_0 и ω_1 , $0 < \omega_0 < \omega_1 < \pi$, семейство фильтров $H_{a,L}(\omega)$, образуемое правой частью (1) в случае, когда $\Omega_0 = (\omega_1 + \omega_0) / 2$ и

$$f(\omega) = \frac{2\Omega_L}{\omega_1 - \omega_0} f_{a,L} \left(\frac{2\Omega_L \omega}{\omega_1 - \omega_0} \right),$$

где $a > 1$ – параметр, $f_{a,L}(\omega)$ – финитный сплайн с носителем $[-\Omega_L, \Omega_L]$, полученный в результате свертки L прямоугольных импульсов разной длины

$$f_{a,L}(\omega) = \left(\frac{a}{2} B(a\omega/2) \right) * \dots * \left(\frac{a^L}{2} B(a^L\omega/2) \right),$$

$$\Omega_L = \sum_{l=1}^L a^{-l}.$$

Сплайны $f_{a,L}(\omega)$ представляют собой аппроксимации известной атомарной функции $h_a(\omega)$, которая применяется при синтезе дискретных и непрерывных фильтров низких частот с быстро затухающей импульсной характеристикой [3].

Функция $H_{a,L}(\omega)$ при $\omega \in [-\pi, \pi]$ представляется рядом Фурье

$$H_{a,L}(\omega) = \frac{\omega_1 + \omega_0}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{sinc} \left(\frac{\omega_1 + \omega_0}{2} k \right) \right) \left[\prod_{l=1}^L \operatorname{sinc} \left(\frac{\omega_1 - \omega_0}{2(1+a+\dots+a^{L-1})} a^{l-1} k \right) \right] \cos(k\omega).$$

Коэффициенты

$$h(k) = \frac{\omega_1 + \omega_0}{2\pi} \operatorname{sinc} \left(\frac{\omega_1 + \omega_0}{2} k \right) \left[\prod_{l=1}^L \operatorname{sinc} \left(\frac{\omega_1 - \omega_0}{2(1+a+\dots+a^{L-1})} a^{l-1} k \right) \right], \quad k = -N, \dots, N,$$

определяют КИХ-фильтр с АЧХ $|\tilde{H}_{a,L}(j\omega)|$

$$|\tilde{H}_{a,L}(j\omega)| = \frac{\omega_1 + \omega_0}{\pi} \left| \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^N \operatorname{sinc} \left(\frac{\omega_1 + \omega_0}{2} k \right) \left[\prod_{l=1}^L \operatorname{sinc} \left(\frac{\omega_1 - \omega_0}{2(1+a+\dots+a^{L-1})} a^{l-1} k \right) \right] \cos(k\omega) \right|. \quad (2)$$

2. Отклонение АЧХ фильтров в полосах пропускания и подавления. Отклонение $\varepsilon(a, \omega)$ характеристики (2) в полосах пропускания $0 \leq \omega \leq \omega_0$ и подавления $\omega_1 \leq \omega \leq \pi$ задается суммой (при условии, что $|\tilde{H}_{a,L}(j\omega)| \neq 0$ на $\omega \in (0, \omega_0)$)

$$\varepsilon(a, \omega) = \frac{\omega_1 + \omega_0}{\pi} \left| \sum_{k=N+1}^{\infty} \operatorname{sinc} \left(\frac{\omega_1 + \omega_0}{2} k \right) \left[\prod_{l=1}^L \operatorname{sinc} \left(\frac{\omega_1 - \omega_0}{2(1+a+\dots+a^{L-1})} a^{l-1} k \right) \right] \cos(k\omega) \right|. \quad (3)$$

Обозначим

$$\varphi_l(a) = \frac{\omega_1 - \omega_0}{2(1+a+\dots+a^{L-1})} a^{l-1}, \quad 1 \leq l \leq L,$$

$$\varphi_{L+1}(a) = \frac{\omega_1 + \omega_0}{2}.$$

Справедлива формула

$$\sin \left(n\varphi + \frac{\pi}{2} \right) \prod_{l=1}^{L+1} \sin(n\varphi_l) = \frac{1}{2^{L+1}} \sum_{k=1}^{2^{L+1}} (-1)^{s_k+1} \cos \left(\frac{\pi}{2} (L+1) + n\varphi + \sum_{m=1}^{L+1} (-1)^{s_k(m)} n\varphi_m \right), \quad (4)$$

где $m \in \mathbb{N}$, а $s_k(m)$ – $(m-1)$ -й разряд двоичного представления числа $k-1$,

$$k-1 = \sum_{r=0}^L 2^r s_k(r+1),$$

и

$$S_k = \sum_{m=1}^{L+1} s_k(m).$$

Используя (4), погрешность $\varepsilon(a, \omega)$ (3) можно представить в форме суммы 2^{L+1} сдвигов функции Ψ_L

$$\varepsilon(a, \omega) = \frac{1}{\pi} \frac{(1+a+\dots+a^{L-1})^L}{a^{(L-1)L/2} (\omega_1 - \omega_0)^L} \left| \sum_{l=1}^{2^{L+1}} (-1)^{S_l+1} \Psi_L \left(\omega + \sum_{m=1}^{L+1} (-1)^{S_l(m)} \varphi_m(a) \right) \right|, \quad (5)$$

определяемой выражением

$$\Psi_L(x) = \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\cos\left(kx + \frac{\pi}{2}(L+1)\right)}{k^{L+1}}, \quad L \in \mathbb{N}.$$

Функция $\Psi_L(x)$ при $x \in [0, 2\pi]$ может быть вычислена по формуле

$$\Psi_L(x) = (-1)^L \frac{(2\pi)^{L+1}}{2(L+1)!} B_{L+1}\left(\frac{x}{2\pi}\right) - \sum_{k=1}^N \frac{\cos\left(kx + \frac{\pi}{2}(L+1)\right)}{k^{L+1}},$$

где $B_l(x)$ – многочлен Бернулли порядка l .

3. Задача поиска параметра, оптимизирующего отклонение. На конечном отрезке $a \in [1, A]$ можно поставить задачу поиска минимума функции

$$M(a) = \max_{\omega} \varepsilon^2(a, \omega).$$

Для функции $\varepsilon(a, \omega)$ справедливо $\lim_{a \rightarrow +\infty} \varepsilon(a, \omega) = \tilde{\varepsilon}(\omega)$, где

$$\tilde{\varepsilon}(\omega) = \frac{\omega_1 + \omega_0}{\pi} \left| \sum_{k=N+1}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_1 + \omega_0}{2} k\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_1 - \omega_0}{2} k\right) \cos(k\omega) \right|,$$

поэтому при достаточно больших A для всех $a > A$

$$\left| M(a) - \max_{\omega} \tilde{\varepsilon}^2(\omega) \right| < \lambda, \quad (6)$$

где λ – сколь угодно малое число.

Непрерывную задачу поиска минимума

$$M(a_0) = \min_{a \in [1, A]} M(a)$$

можно заменить дискретной задачей, используя при построении сетки на $[1, A]$ неравенство для шага дискретизации Δa

$$\Delta a \leq \frac{M_0}{10} \frac{1}{\mu},$$

где M_0 – оценка функции $M(a)$ снизу на $[1, A]$, а μ – оценка сверху модуля производной $|M'(a)|$ при $a \in [1, A]$. При этом решение непрерывной задачи будет отличаться от решения дискретной не более чем на $M_0/10$.

Для получения оценок μ и M_0 разработаны алгоритмы, основанные на использовании выражения для отклонения $\varepsilon(a, \omega)$ вида (5). Для задания числа A применяется свойство (6).

Заключение

Описано параметрическое семейство КИХ-фильтров с АЧХ, аппроксимирующими финитные сплайны. Для определения фильтра с наименьшим отклонением АЧХ предложен метод, основанный на замене непрерывной задачи оптимизации дискретной задачей.

Литература

1. Кравченко В.Ф., Кравченко О.В. Конструктивные методы алгебры логики, атомарных функций, вейвлетов, фракталов в физике и технике. Под ред. В.Ф. Кравченко. — М.: Техносфера, 2018.

2. Кравченко В.Ф., Чуриков Д.В. Цифровая обработка сигналов атомарными функциями и вейвлетами. — М.: Техносфера, 2019.
3. Будунова К.А., Кравченко В.Ф. О новом методе аппроксимации квадратов атомарных функций $h_a(x)$ неотрицательными рациональными дробями // Радиотехника и электроника. — 2021. — Т. 66, №11. — С. 1085–1099

**Об одной задаче дифракции электромагнитных волн
на тонком идеально проводящем экране**

**On the Electromagnetic Waves Diffraction Problem on
Thin Perfectly Conducting Screen**

Долбнин А. А.¹, Головина С. Г.¹, Захаров Е. В.¹

1) *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, факультет
вычислительной математики и кибернетики, Москва, РФ.*

andredolbnin@gmail.com, sgolovina-msu@mail.ru

Аннотация. В работе рассмотрена трёхмерная задача дифракции электромагнитного поля на идеально проводящем экране. Краевая задача сведена к интегральному уравнению, для решения которого использован метод кусочно-непрерывных аппроксимаций и коллокаций. Численное исследование задачи показало её неустойчивость. Для получения устойчивого решения использован метод регуляризации А. Н. Тихонова. Приведён пример решения модельной задачи дифракции.

Введение

Решение задачи дифракции является актуальной проблемой в различных областях физики: радиофизики, акустики, оптики, теории упругости и т.д.

В настоящее время исследованию задачи дифракции посвящено большое число монографий и статей. Фундаментальной литературой по теории дифракции являются [1], [2], в которых описаны основные методы решения задачи дифракции. Численные методы для решения задачи дифракции, характеризующиеся большей универсальностью по сравнению с аналитическими методами, стали использоваться сравнительно недавно. Исследования численных методов для решения задачи дифракции изложены, например, в [3], [4]. Одной из проблем решения задачи дифракции методом интегральных уравнений является особенность в ядре сингулярных интегральных уравнений. Численные методы решения таких интегральных уравнений изложены, например, в [5], [6].

Описание работы

Постановка задачи. Рассматривается трёхмерная задача дифракции монохроматического поля на идеально проводящем экране Σ в однородной окружающей среде Ω , характеризующейся параметрами (ε_0, μ_0) , (ε', μ') . Первичное поле описывается напряжённостями электрического и магнитного полей $\mathbf{E}^0(P)e^{-i\omega t}$, $\mathbf{H}^0(P)e^{-i\omega t}$, $P = P(x, y, z) \in \mathbb{R}$. Под воздействием первичного поля на экран наводятся поверхностные электрические токи, которые порождают вторичное поле $\mathbf{E}(P)e^{-i\omega t}$, $\mathbf{H}(P)e^{-i\omega t}$, $P \in \Omega$.

Запишем уравнения Максвелла в предположении, что в среде отсутствуют внешние заряды $\rho(P) = 0$ и плотность электрических токов $\mathbf{j} = 0$:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = i\mu\omega \mathbf{H}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = -i\varepsilon\omega \mathbf{E}. \end{cases} \quad (1)$$

Из (1) следует, что $\Delta \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0$, где $k = w \sqrt{\varepsilon\mu}$ – волновое число. На Σ ставится граничное условие $\mathbf{E} \times \mathbf{n} = -\mathbf{E}^0 \times \mathbf{n}$, где $\mathbf{n} = \mathbf{n}(P)$, $P \in \Sigma$, – внешний вектор нормали к Σ . Также ставятся условие Майкснера на ребре и условия излучения Зоммерфельда на бесконечности. Таким образом, получаем краевую задачу для уравнения Гельмгольца:

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0, P \in \Omega, \\ \mathbf{E} \times \mathbf{n} = -\mathbf{E}^0 \times \mathbf{n}, P \in \Sigma, \\ \mathbf{E} \in L_2^{loc}(\Omega), \\ \mathbf{E} = O\left(\frac{1}{|P|}\right), \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \boldsymbol{\tau}} - ik\mathbf{E} = o\left(\frac{1}{|P|}\right), \boldsymbol{\tau} = \frac{P}{|P|}, |P| \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (2)$$

Сведение задачи к интегральному уравнению. Решение краевой задачи (2) будем искать в виде поверхностного интеграла:

$$\mathbf{E}(P) = \text{grad div} \iint_{\Sigma} \mathbf{j}(M) F(P, M) dS_M + k^2 \iint_{\Sigma} \mathbf{j}(M) F(P, M) dS_M, P \in \Omega, \quad (3)$$

где $F(P, M) = e^{ikR}/R, R = |P - M|$, - фундаментальное решение уравнения Гельмгольца, \mathbf{j} - плотность токов (с точностью до константы).

Для $P \notin \Sigma$ векторный потенциал (3) запишем в виде

$$(P) = \iint_{\Sigma} \mathbf{K}(\mathbf{j}(M), P, M) dS_M \quad (4)$$

Обозначим $\mathbf{r} = (P - M)/R$ и представим ядро (4) в виде $\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1$,

$$\mathbf{K}_0 = (-\mathbf{j} + 3\mathbf{r}(\mathbf{r}, \mathbf{j}))/R^3, \quad (5)$$

$$\mathbf{K}_1 = (\mathbf{j} - 3\mathbf{r}(\mathbf{r}, \mathbf{j}))((1 - e^{ikR} + ikRe^{ikR})/R^3) + (\mathbf{j} - 3\mathbf{r}(\mathbf{r}, \mathbf{j}))(k^2 e^{ikR}/R), \quad (6)$$

$$|\mathbf{K}_0| \leq O(1/R^3), |\mathbf{K}_1| \leq O(1/R), R \rightarrow 0. \quad (7)$$

Получаем интегральное уравнение

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{n}(P) \times \mathbf{K}(\mathbf{j}(M), P, M) dS_M = -\mathbf{n}(P) \times \mathbf{E}^0(P), P \in \Sigma. \quad (8)$$

Численный метод решения. Поделим экран Σ на n ячеек σ^i . В каждой ячейке выберем точку коллокации $P^i \in \sigma^i$ и правую тройку векторов $\mathbf{n}_i, \mathbf{e}_i^1, \mathbf{e}_i^2$, где \mathbf{n}_i - орт нормали к ячейке. Обозначим $\mathbf{j}_i = \mathbf{j}(P_i)$, $i = \overline{1, n}$. Тогда поле $\mathbf{E}(P)$ (4) аппроксимируем (см. [6]) как

$$\tilde{\mathbf{E}}(P) = \sum_{k=1}^n \mathbf{E}_k(\mathbf{j}_k, P) = \sum_{k=1}^n (\mathbf{E}_k^0(\mathbf{j}_k, P) + \mathbf{E}_k^1(\mathbf{j}_k, P)), \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_k^0(\mathbf{j}, P) &= \text{grad} \oint_{\partial \sigma^k} \frac{1}{|P - M|} (\mathbf{n}(M) \times \mathbf{j}(M), \boldsymbol{\tau}(M)) dl_M, \mathbf{E}_k^1(\mathbf{j}, P) = \\ &= \iint_{\sigma^k} \mathbf{K}_1(\mathbf{j}, P, M) dS_M. \end{aligned} \quad (10)$$

Будем искать векторы \mathbf{j}_k в виде $\mathbf{j}_k = j_k^1 \mathbf{e}_k^1 + j_k^2 \mathbf{e}_k^2$. Таким образом, задача сводится к решению системы $2n$ уравнений, где $2n$ неизвестных j_k^l :

$$\sum_{\substack{k=1, n, \\ l=1, 2}} a_{ik}^{ml} j_k^l = (-\mathbf{E}_i \times \mathbf{n}_i, \mathbf{e}_i^m), a_{ik}^{ml} = (\mathbf{E}_k(\mathbf{e}_k^l, P^i) \times \mathbf{n}_i, \mathbf{e}_i^m), i = \overline{1, n}, m = 1, 2. \quad (11)$$

Численные результаты. В качестве первичного поля рассматривается плоская волна ($\mathbf{E}^0(P) = e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{r})}$, где \mathbf{r} - радиус-вектор точки P).

Расчёты проведены при длине волны, составляющей треть от размера пластины. Расчёты показали, что решение \mathbf{j} интегрального уравнения неустойчиво. Для решения системы предложен регуляризованный метод LU-разложения.

На Рис. 1 схематично приведены вектора, которые указывают направление тока и его величину в нескольких точках пластины. На Рис. 1 на пластину падает плоская волна:

слева рисунок без использования регуляризации, справа – регуляризованное решение с параметром регуляризации $\alpha = 0,5$.

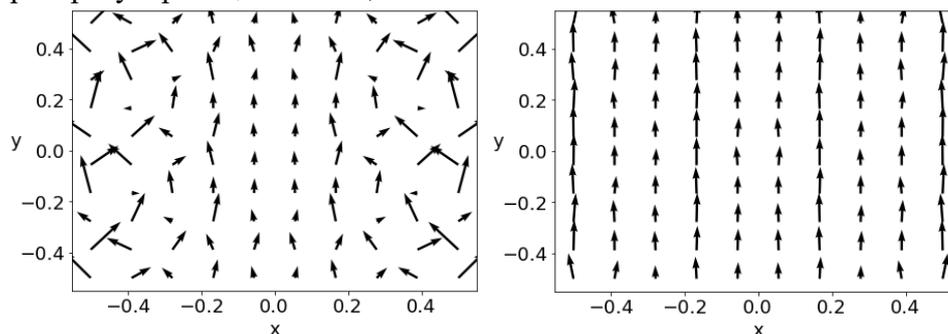


Рисунок 1.

Эффективность применения регуляризации заметна и для значений эффективной площади рассеяния (ЭПР). Из Рис. 2 для ЭПР нулевого угла падения плоской волны видно, что регуляризованное решение ближе к ожидаемому результату. Можно утверждать, что при увеличении шага сетки, регуляризованное решение сходится к ожидаемому результату.

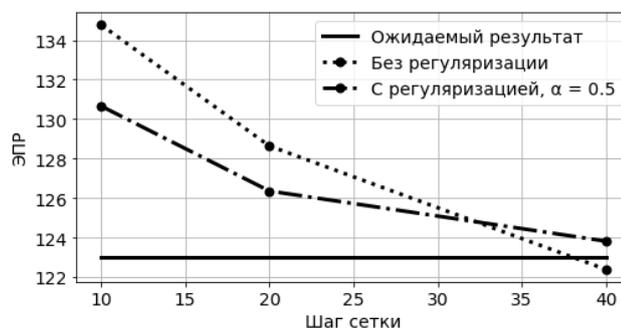


Рисунок 2.

Заключение

В работе рассмотрена трёхмерная задача дифракции электромагнитных волн на идеально проводящем экране. Поставлена краевая задача для уравнения Гельмгольца, которая сведена к интегральному уравнению по поверхности экрана и численно решена с помощью регуляризованного метода кусочно-непрерывных аппроксимаций и коллокаций. Приведён анализ численного решения интегрального уравнения.

Литература

1. Хёнл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. — М.: Мир, 1964. — 428 с.
2. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. — М.: Мир, 1987. — 311 с.
3. Захаров Е. В., Пименов Ю. В. Численный анализ дифракции радиоволн. — М.: Радио и связь, 1982. — 184 с.
4. Дмитриев В. И., Захаров Е. В. Метод интегральных уравнений в вычислительной электродинамике. — М.: МАКС Пресс, 2008. — 316 с.
5. Назарчук З. Т. Численное исследование дифракции волн на цилиндрических структурах. — К.: Наукова думка, 1989. — 256 с.
6. Захаров Е. В., Рыжиков Г. В., Сетуха А. В. Численное решение трехмерных задач дифракции электромагнитных волн на системе идеально проводящих поверхностей методом гиперсингулярных уравнений // Дифференциальные уравнения. — 2014. — Т. 50. — С. 1–11.

Моделирование рассеяния электромагнитной волны трёхмерным телом с помощью метода интегральных уравнений в спектральной области

Modeling the scattering of an electromagnetic wave by a three-dimensional body using the spectral domain integral equation method

Лопушенко В. В, Зыкова М. А.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, факультет ВМиК, Москва, РФ.

lopushnk@cs.msu.ru, s02210101@gse.cs.msu.ru

Аннотация. На основе метода интегральных уравнений с переходом в область пространственных частот построена математическая модель, позволяющая проводить анализ рассеивающих свойств объектов произвольной формы в свободном пространстве. В случае объекта эллипсоидальной формы получены аналитические представления для всех функций, входящих в интегральное уравнение. Показано, что диаграмма рассеяния может быть вычислена непосредственно из решения интегрального уравнения. Метод апробирован в случае однородного диэлектрического эллипсоида. Сравнение с результатами, полученными методом дискретных источников, показало хорошее соответствие.

Введение

В данной работе предложено обобщение метода [1] для решения задач рассеяния плоских электромагнитных волн на объектах произвольной формы в свободном пространстве. Предлагается решать интегральное уравнение в спектральной области с применением теоремы отсчётов и быстрых алгоритмов вычисления свёрток. Интегральное уравнение сводится к системе линейных алгебраических уравнений, которая решается итерационным методом GMRES в системе MATLAB. На основе полученного решения построена диаграмма рассеяния диэлектрического эллипсоида с различным соотношением полуосей. В численной схеме метода удалось избавиться от особенностей в интегральном уравнении и получить прямой способ вычисления диаграммы рассеяния.

Описание работы

Для однородного рассеивателя V с диэлектрической проницаемостью ϵ_1 и достаточно гладкой границей, расположенного в однородном пространстве с диэлектрической проницаемостью ϵ_0 , задача рассеяния сводится к интегральному уравнению [2]:

$$\mathbf{E}(M_0) + \int_V (k_0^2 - k_1^2) \mathbf{G}(M, M_0) \mathbf{E}(M) dV_M = \mathbf{E}^0(M_0), M_0 \in V \quad (1)$$

где \mathbf{E}^0 - поле плоской электромагнитной волны, падающей на рассеиватель под углом θ_0 , $k_i^2 = k^2 \epsilon_i$, $i = 0, 1$ – квадраты соответствующих волновых чисел, $\mathbf{G}(M, M_0)$ - функция Грина свободного пространства.

Умножив уравнение (1) на функцию диэлектрического контраста

$$\Delta K = \begin{cases} k_0^2 - k_1^2, M \in V_M \\ 0, M \notin V_M \end{cases}$$

и переходя в спектральную область, получим уравнение типа свёртки для $\mathbf{V} = \Delta K \cdot \mathbf{E}$:

$$\hat{\mathbf{V}} + \frac{1}{(2\pi)^3} [\hat{\mathbf{K}} * (\hat{\mathbf{G}}\hat{\mathbf{V}})] = \hat{\mathbf{V}}^0. \quad (2)$$

Здесь $\hat{\mathbf{V}}, \hat{\mathbf{K}}, \hat{\mathbf{G}}, \hat{\mathbf{V}}^0$ - Фурье-образы соответственно искомого решения уравнения, функции области, функции Грина и внешнего возбуждения.

Для функции области, соответствующей эллипсоидальному телу V с полуосями a, b, c ,

$$\hat{\mathbf{K}}(p, q, s) = \iiint_V (k_0^2 - k_1^2) e^{-i(px+qy+sz)} dV_{x,y,z} \quad (3)$$

используется аналитическое представление:

$$\begin{aligned}\widehat{K} &= 4\pi \frac{abc}{v^2} (k_0^2 - k_1^2) \left(\frac{\sin v}{v} - \cos v \right), \\ v^2 &= (pa)^2 + (qb)^2 + (sc)^2, \\ \lim_{v \rightarrow 0} \widehat{K}(p, q, s) &= \frac{4\pi}{3} abc (k_0^2 - k_1^2).\end{aligned}\quad (4)$$

Фурье-образ функции Грина свободного пространства имеет особенность. Построим функцию с ограниченным носителем [3], совпадающую с исходной функцией Грина в шаре $V_{R\varphi} = \{(x, y, z): |x^2 + y^2 + z^2| \leq R\varphi\}$, который содержит область изменения аргументов при интегрировании по области V . Тогда в пределах области интегрирования новая функция будет идентична исходной. Фурье-образ построенной таким образом эквивалентной функции Грина может быть записан в виде:

$$\widehat{\Phi}_0 = 4\pi \left(\frac{1 - e^{ik_0 R\varphi} \cos \rho R\varphi}{\rho^2 - k_0^2} + \frac{ik_0 R\varphi e^{ik_0 R\varphi} \sin \rho R\varphi}{(\rho^2 - k_0^2)\rho R\varphi} \right), \quad (5)$$

где $\rho^2 = p^2 + q^2 + s^2$.

Как видно из (5), функция $\widehat{\Phi}_0$ особенности не имеет.

Функция внешнего возбуждения \widehat{V}^0 также записывается аналитически через функцию области (4), учитывая $\mathbf{V}^0 = \Delta \mathbf{K} \cdot \mathbf{E}^0$. Таким образом, все входящие в уравнение (2) величины представлены аналитическими выражениями.

Дискретизация уравнения (2) осуществляется с помощью теоремы Котельникова [4] с отбрасыванием высокочастотных слагаемых. В результате система линейных уравнений запишется следующим образом:

$$\widehat{V}_{mnl} + \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{i=-N_p}^{N_p} \sum_{j=-N_q}^{N_q} \sum_{k=-N_s}^{N_s} \Delta_p \Delta_q \Delta_s \widehat{K}_{i-m, j-n, k-l} \widehat{G}_{ijk} \widehat{V}_{ijk} = \widehat{V}_{mnl}^0. \quad (6)$$

Это уравнение типа свёртки решается методом обобщённых невязок GMRES в системе MATLAB.

На основе полученного решения можно выписать представление для диаграммы рассеяния:

$$\mathbf{E}^{sc}(\theta, \varphi) = \frac{e^{ik_0 R}}{4\pi R} (k_1^2 - k_0^2) \overline{\mathbf{G}} \widehat{\mathbf{V}}(k_0 \sin \theta \cos \varphi, k_0 \sin \theta \sin \varphi, k_0 \cos \theta). \quad (7)$$

Как следует из (7), для вычисления диаграммы не требуется никаких дополнительных преобразований.

Результаты тестирования предложенного метода представлены на рисунках 1 и 2, соответствующих сплюснутому ($a = 0.2, b = 0.2, c = 0.1$) и вытянутому ($a = 0.1, b = 0.1, c = 0.2$) сфероидам:

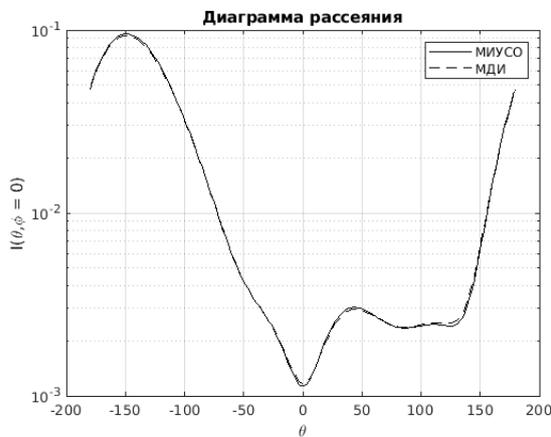


Рисунок 1. Диаграмма рассеяния для сплюснутого сфероида:
 $a = 0.2, b = 0.2, c = 0.1$

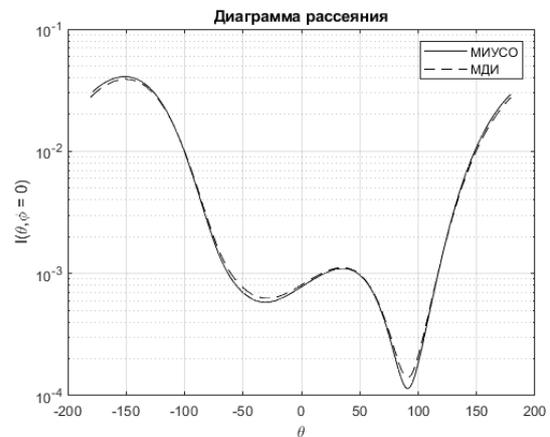


Рисунок 2. Диаграмма рассеяния для вытянутого сфероида:
 $a = 0.1, b = 0.1, c = 0.2$

$$\sqrt{\varepsilon_1} = 1.59, \theta_0 = 30^\circ$$

$$\sqrt{\varepsilon_1} = 1.59, \theta_0 = 30^\circ$$

Кривые, полученные с помощью двух методов (Метод интегральных уравнений в спектральной области – МИУСО и Метод дискретных источников – МДИ [5]) показывают очень хорошее соответствие.

Заключение

В работе рассмотрен метод решения задачи дифракции на трехмерной неоднородности в спектральной области, имеющий ряд преимуществ.

1) Алгоритм построения интегрального уравнения в спектральной области позволяет избежать появления особенностей при вычислении функции Грина.

2) В численной схеме метода используются быстрые алгоритмы вычисления трёхмерных свёрток, что обеспечивает его высокую производительность.

3) Диаграмма рассеяния вычисляется непосредственно из полученного решения без дополнительных преобразований.

4) Метод может быть обобщен на случай неоднородных рассеивателей.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00110, <https://rscf.ru/project/22-21-00110/>

Литература

1. Еремин Ю. А., Лопушенко В. В. Метод интегральных уравнений в спектральной области для анализа плоских дефектов подложки // Дифференциальные уравнения. — 2014. — Т. 50, № 9. — С. 1187-1195.
2. Дмитриев В. И., Захаров Е. В. Интегральные уравнения в краевых задачах электродинамики — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987.
3. Felipe Vico, Leslie Greengard, Miguel Ferrando. Fast convolution with free-space Green's functions // Journal of Computational Physics. — V. 323. — 15 October 2016. — P. 191-203.
4. Басараб М. А., Зелкин Е. Г., Кравченко В. Ф., Яковлев В. П. Цифровая обработка сигналов на основе теоремы Уитаккера-Котельникова-Шеннона — М.: Радиотехника, 2004.
5. Еремин Ю. А., Свешников А. Г. Метод дискретных источников в задачах электромагнитной дифракции. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1992. — 182 с.

Использование методов компьютерной алгебры для решения задачи рассеяния электромагнитных волн на плазмонном шаре

Usage of computer algebra methods to solve the problem of electromagnetic wave scattering by a plasmonic sphere

Лопушенко И. В.

Университет Оулу, факультет информационных технологий и электротехники,
г. Оулу, Финляндия

lopushenko.ivan@yandex.ru

Аннотация. В работе рассматривается одновременно несколько возможных постановок задач дифракции электромагнитных (э/м) волн оптического диапазона на шаре, чей размер не превышает десятка нанометров. Рассматриваемые постановки задачи отличаются видом уравнений Максвелла для установившихся колебаний, наличием оболочки у шара, и видом граничных условий. Предполагается, что либо шар, либо его оболочка изготовлены из благородного металла, что при указанном масштабе приводит к наличию в них нелокальных эффектов пространственной дисперсии. Для всех задач предлагается единый алгоритм решения на основе методов компьютерной алгебры, позволяющий автоматически найти коэффициенты разложения решения в ряд

по базису векторных сферических гармоник для заданного пользователем вида граничных условий.

Введение

Численное решение новых задач, возникающих в самых различных областях электродинамики, естественным образом приводит либо к созданию новых алгоритмов и высокопроизводительных программных комплексов, либо к разработке модификаций уже существующих методов. В каждом из этих случаев первоочередной проблемой является проверка полученного решения на корректность. Как правило, для этого используется несколько основных инструментов: сравнение результатов с результатами экспериментальных измерений, сравнение с результатами расчётов на основе уже имеющихся методов, и апостериорная оценка погрешности – в тех вычислительных подходах, которые позволяют осуществлять таковую. Тем не менее, в ряде случаев верифицировать решение задачи может оказаться затруднительно – в силу отсутствия или трудной доступности как экспериментальных данных, так и расчётных методов.

Одним из таких примеров ещё совсем недавно являлась задача дифракции э/м волн на наноразмерных (диаметр $< 10\text{нм}$) частицах из благородных металлов, в которых появление эффектов пространственной дисперсии приводит к физически некорректным результатам при решении классической задачи дифракции [1-5]. В силу сложности эксперимента данные измерений до сих пор доступны в весьма ограниченном объёме, а численные реализации алгоритмов для решения подобных задач, как правило, отсутствуют в общем доступе, хотя сами алгоритмы известны [3]. В связи с этим в настоящей работе предлагается подход на основе методов компьютерной алгебры, позволяющий автоматически построить аналитическое решение задачи дифракции электромагнитных волн на прозрачном шаре как в её классической постановке, так и для постановок, соответствующих шару с пространственной дисперсией. Различные постановки задач обусловлены выбором физического способа описания особенностей поведения э/м полей в наноструктуре и, соответственно, могут приводить к различным решениям. Здесь мы будем использовать теорию обобщенного нелокального отклика (ОНО) [4], однако аналогичным образом можно решить любую задачу (например, см. работу [5]), в основе решения которой лежит метод разделения переменных.

Постановка задач

Перечислим некоторые из возможных постановок задачи э/м дифракции на металлическом шаре, которые будут рассматриваться в настоящей работе. Начнём с классической постановки задачи на однородном шаре [6], в которую включены: уравнения Максвелла внутри (область D_1) и вне (область D_0) шара

$$\text{rot}\mathbf{H}_\zeta(M) = -j\omega\varepsilon_\zeta\mathbf{E}_\zeta(M), \quad (1)$$

$$\text{rot}\mathbf{E}_\zeta(M) = j\omega\mu_\zeta\mathbf{H}_\zeta(M), \text{div}\mathbf{E}_\zeta(M) = 0, \text{div}\mathbf{H}_\zeta(M) = 0, \quad (2)$$

граничные условия (ГУ) на поверхности шара ∂D_1

$$[\mathbf{E}_1(P) \times \mathbf{n}] = [(\mathbf{E}_i(P) + \mathbf{E}_s(P)) \times \mathbf{n}], [\mathbf{H}_1(P) \times \mathbf{n}] = [(\mathbf{H}_i(P) + \mathbf{H}_s(P)) \times \mathbf{n}] \quad (3)$$

и условия на бесконечности вне шара

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \cdot \left(\sqrt{\varepsilon_0} \mathbf{E} \times \frac{\mathbf{r}}{r} - \sqrt{\mu_0} \mathbf{H} \right) = 0, r = |M| \rightarrow \infty, M \in D_0. \quad (4)$$

Здесь $M \in D_\zeta, \zeta = 1, 2, P \in \partial D_1, \varepsilon_\zeta, \mu_\zeta$ – диэлектрическая и магнитная проницаемости в D_ζ, j – комплексная единица, ω – круговая частота поля, \mathbf{n} – единичный вектор внешней нормали к $\partial D_1, \mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i$ – падающее поле, $\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s$ – рассеянное поле, $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_s, \mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_i + \mathbf{H}_s$. Таким образом, постановка задачи 1 состоит из уравнений (1) – (4).

Учтём присутствие в металлической среде ($\zeta = 1$) эффектов пространственной дисперсии. Для этого воспользуемся теорией ОНО, позволяющей учесть движение свободных зарядов внутри шара. Этот подход приводит к новому виду материальных уравнений, и в итоге сводится к модификации первого уравнения Максвелла [4]

$$\text{rot}\mathbf{H}_\zeta(M) = jk \left(\varepsilon_\zeta + \frac{\beta_\zeta^2 (\varepsilon'_\zeta + d_\zeta (\gamma_\zeta - j\omega))}{\omega(\omega - j\gamma_\zeta)} \text{graddiv} \right) \mathbf{E}_\zeta(M), \quad (5)$$

где $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$, а также к возникновению дополнительного ГУ [3,4]

$$\varepsilon'_1 \mathbf{E}_1(P) \cdot \mathbf{n}_P = \varepsilon_0 (\mathbf{E}_i(P) + \mathbf{E}_s(P)) \cdot \mathbf{n}_P. \quad (6)$$

Таким образом, полная постановка задачи 2 содержит уравнения (2)–(6). Здесь $\varepsilon'_\zeta = \varepsilon_\zeta + \omega_p^2/(\omega(\omega - j\gamma_\zeta))$, d_ζ – коэффициент диффузии электронов, ω_p – плазменная частота металла, γ_ζ – коэффициент релаксации, β_ζ^2 – квадрат скорости Ферми с дополнительным коэффициентом, в нашем случае равным 3/5 [4]. Уравнение (5) предполагает присутствие продольных э/м полей внутри металла, которые являются дополнительной неизвестной в задаче, в силу которых и возникает необходимость в новом ГУ (6).

В качестве третьего примера рассмотрим классическую постановку задачи дифракции на шаре D_1 с оболочкой D_2 во внешней диэлектрической среде D_0 . В этом случае условия (3) в задаче (1)–(4) трансформируются в условия на границе раздела ∂D_1 шар-оболочка и условия на границе ∂D_2 оболочки и внешней среды D_0 :

$$[\mathbf{E}_{(\zeta-1)}(M) \times \mathbf{n}] = [\mathbf{E}_\zeta(M) \times \mathbf{n}], [\mathbf{H}_{(\zeta-1)}(M) \times \mathbf{n}] = [\mathbf{H}_\zeta(M) \times \mathbf{n}], M \in \partial D_{(\zeta-1)}. \quad (7)$$

В каждой из областей $D_\zeta, \zeta = 1, 2, 3$ справедливы уравнения Максвелла (1)–(2). Таким образом, постановка задачи 3 включает уравнения (1),(2),(7),(4). Полностью аналогично могут быть поставлены задачи с большим количеством концентрических слоёв, причём каждый слой может опционально включать дисперсионные эффекты.

Построение решения методами компьютерной алгебры

Каждая из поставленных задач допускает аналитическое решение, которое заключается в разложении полей $\mathbf{E}_\zeta, \mathbf{H}_\zeta$ в ряд по базису векторных сферических гармоник $\mathbf{M}_{\varepsilon mn}, \mathbf{N}_{\varepsilon mn}$ [6]. При этом для полноты системы функций к стандартным гармоникам необходимо добавить гармоники $\mathbf{L}_{\varepsilon mn}$, соответствующие продольным э/м волнам [3]. Суть предлагаемого алгоритма полностью следует классическому способу построения решений граничных задач математической физики и заключается в том, что разложение полей по базису и поиск коэффициентов можно автоматизировать с помощью символьной алгебры. Для этого достаточно определить с помощью символьных переменных базисные функции с необходимым количеством производных, выписать представления для полей во всех областях D_ζ , и предусмотреть возможность конструирования системы ГУ на основе заданных компонент полей. Тогда ГУ будут представлять собой систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов. Методы компьютерной алгебры позволяют получить решение системы ГУ как в символьном представлении (формулы для коэффициентов), так и в числовом виде с точностью до произвольного знака после запятой.

Примеры решений и выводы

Предлагаемый алгоритм реализован в среде MATLAB/Octave. Для его апробации рассмотрим шар в среде с показателем преломления $n_0 = 1$. Падающее поле определим как плоскую волну. В качестве решения построим сечения экстинкции σ_{ext} и рассеяния σ_{sca} , представления которых через коэффициенты Ми для $\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s$ хорошо известны [6].

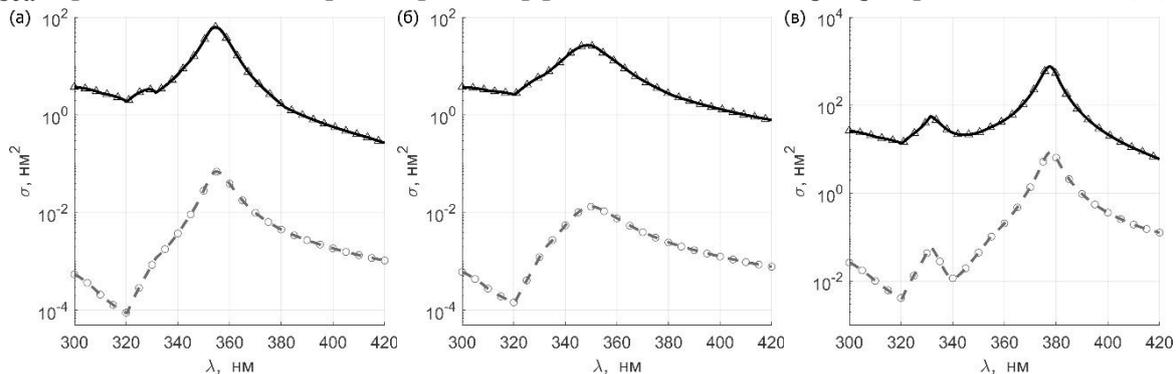


Рисунок 1. (а) решение задачи (1)–(4) для однородного Ag шара радиусом 3 нм, (б) решение задачи (2)–(6) для Ag шара радиусом 3 нм с пространственной дисперсией, (в) решение задачи (1),(2),(7),(4) для шара с ядром 3 нм $n_1 = 1.4$ и Ag оболочкой толщиной 3 нм. Сплошные линии – сечение экстинкции σ_{ext} , пунктирные линии – сечение рассеяния σ_{sca} . Символы соответствуют эталонным решениям: классическая теория Ми [6] для случаев (а) и (в), и теория Ми с продольными сферическими гармониками [3] для случая (б).

Данные результаты демонстрируют, что программа на основе компьютерной алгебры позволяет решать задачи с разными наборами ГУ и/или видоизмененным уравнением Максвелла (5) без необходимости модификации алгоритма – достаточно указать во входных данных соответствующие набор ГУ и функциональный базис. К недостаткам такого подхода, безусловно, следует отнести скорость расчёта, которая вырастает в разы (а для шара с большим количеством слоёв – и в десятки раз) по сравнению с численными методами решения. Однако даже время расчёта порядка нескольких минут является вполне приемлемым, если перед исследователем стоит проблема построения эталонного решения нестандартной задачи, допускающей разделение переменных. Это представляется необходимым как для верификации более производительных алгоритмов, так и в случаях, когда требуется быстро оценить решение и нет возможности тратить ресурсы на реализацию собственной программы.

Литература

1. Еремин Ю. А., Свешников А. Г. Квазиклассические модели квантовой наноплазмоники на основе метода Дискретных источников (обзор) // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2021. — Т. 61, № 4. — С. 34–62.
2. Lopushenko I. V., Svishnikov A. G. Discrete sources method to solve nonlocal scattering problems in plasmonic applications // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2020. — Vol. 41, no. 7. — P. 1337–1353.
3. Tserkezis C., Stefanou N., Wubs M., Mortensen N. A. Molecular fluorescence enhancement in plasmonic environments: exploring the role of nonlocal effects // Nanoscale. — 2016. — Vol. 8, no. 40. — P. 17532–17541.
4. Raza S. et al. Nonlocal optical response in metallic nanostructures // Journal of Physics: Condensed Matter. — 2015. — Vol. 27, no 18. — P. 183204.
5. Babaze A. et al. Quantum surface effects in the electromagnetic coupling between a quantum emitter and a plasmonic nanoantenna // Optics Express. — 2022. — Vol. 30, no. 12. — P. 21159–21183
6. Борен К., Хафмен Д. Поглощение и рассеяние света малыми частицами. — М.: Мир, 1986. — 664 с.

Представление функций Грина волнового уравнения на отрезке в конечном виде и метод А.Н. Крылова ускорения сходимости рядов

Representation of the Green functions of the wave equation on a segment in finite terms and A.N. Krylov series convergence acceleration

Малышев К.Ю.^{1,2}

- 1) Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, НИИЯФ, Москва, РФ; 2) Российский университет дружбы народов, Москва, РФ.

kmalyshev08102@mail.ru

Аннотация. Рассматриваются начально-краевые задачи для одномерного волнового уравнения на конечном отрезке, содержащие особенности в начальных данных. Решения этих задач могут быть получены в виде рядов Фурье или рядов по функциям Хевисайда. Ряды Фурье оказываются медленно сходящимися, но применение к ним метода А.Н. Крылова ускорения сходимости в некоторых случаях приводит к

выражениям в конечном виде. В работе представлено исследование этих конечных выражений. Изучен вопрос применимости метода к одномерным гиперболическим уравнениям, характерным для задач теории волноведущих систем.

Введение

Решения начально-краевых задач математической физики обычно имеют вид бесконечных рядов, получаемых по методу Фурье. Вместе с тем, широкий класс задач для уравнения колебаний конечного отрезка может быть решён в конечном виде, с помощью формул, аналогичных формуле Даламбера для бесконечной прямой [1]. Вопросам получения решений уравнения колебаний методами, не использующими собственные функции, посвящено большое количество работ, укажем для примера [2].

В настоящей работе исследуются решения задач о возбуждении колебаний точечным мгновенно действующим источником, называемые функциями Грина уравнения колебаний. Нахождение функций Грина по методу Даламбера связано с некоторыми трудностями: вместо конечного выражения метод Даламбера приводит к бесконечному ряду из функций Хевисайда [3, стр. 208]. Поэтому обычно их выписывают с помощью метода Фурье [4].

Ряды Фурье, представляющие функции с особенностями, сходятся медленно. Естественно поставить вопрос об улучшении их сходимости известными методами. Оказалось [5], что если применить к рядам Фурье для функций Грина метод А.Н. Крылова [6, 7] улучшения сходимости, то в некоторых случаях это приводит к выражениям в конечном виде. Тем самым функции Грина подпадают под утверждение А.Н. Крылова о том, что указанный метод улучшения сходимости «часто приводит к представлению суммы предложенного ряда в замкнутой форме под видом разрывной функции» [6].

В работе представлены конечные выражения для функций Грина и их исследование в системах компьютерной алгебры. Изучается вопрос использования этих результатов в задачах теории волноводов, в которых возникают уравнения колебаний, отличные от уравнения Даламбера.

Метод А.Н. Крылова ускорения сходимости

Рассмотрим ряд Фурье:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} A\left(\frac{1}{n}\right) \sin nz, \quad (1)$$

где A – достаточно гладкая функция, равная нулю при нулевом значении своего аргумента. Следуя монографии Л.В. Канторовича и В.И. Крылова [7, стр. 98-100], заменим $A\left(\frac{1}{n}\right)$ на сумму многочлена Тейлора порядка k и остаточного слагаемого F . Остаточное слагаемое следует находить в явном виде, как разницу между многочленом Тейлора и функцией A . Меняя порядок суммирования, получаем:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} A\left(\frac{1}{n}\right) \sin nz = a_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nz}{n} + a_2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nz}{n^2} + \dots + \sum_{n=1}^{\infty} F\left(\frac{1}{n}\right) \sin nz.$$

Ряды вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nz}{n^{2m+1}}$$

представляют кусочно-полиномиальные функции, если $m \in \mathbb{N}$ или $m = 0$. Их нетрудно найти в явном виде. Слагаемые ряда $\sum_{n=1}^{\infty} F\left(\frac{1}{n}\right) \sin nx$ убывают как $O(n^{-k})$. Возникает возможность перехода от ряда (1) с медленной сходимостью к ряду, сходящемуся быстрее. Решения задач о возбуждении колебаний конечного отрезка точечным источником – являются частным случаем этой схемы.

Функция Грина

Математическая постановка задачи о влиянии точечного мгновенно действующего источника имеет вид:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}, 0 < x < \pi, t > 0; \quad (2)$$

$$P[g]|_{x=0} = 0, Q[g]|_{x=\pi} = 0, t \geq 0; \quad (3)$$

$$g|_{t=0} = 0, \frac{\partial g}{\partial t}|_{t=0} = \delta(x-s), 0 < s < \pi, 0 \leq x \leq \pi. \quad (4)$$

Здесь $\delta(x-s)$ – дельта-функция Дирака. Значение s является параметром. Операторы граничных условий (P и Q) соответствуют условиям первого рода или, второго рода. Рассматривались также условия периодичности. Этот класс граничных условий позволяет получить формальное решение задачи (2) – (4) в виде ряда Фурье. Для случая условий Дирихле на обоих концах формальное решение по методу Фурье имеет вид:

$$g = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n} \sin nx \sin ns. \quad (5)$$

Нетрудно заметить, что этот ряд преобразуется к сумме четырёх рядов вида (1). При этом Тейлоровское разложение функции A содержит всего одно слагаемое. Это имеет место во всех рассмотренных случаях постановки граничных условий. При этом имеет место равенство [5]:

$$2\pi g = \arctg \operatorname{ctg} \frac{t+x-s}{2} + \arctg \operatorname{ctg} \frac{t-x+s}{2} - \arctg \operatorname{ctg} \frac{t-x-s}{2} - \arctg \operatorname{ctg} \frac{t+x+s}{2}.$$

Это выражение позволяет вычислить сумму ряда Фурье всюду, включая и точки разрыва функции Грина. С помощью функции «целая часть числа» можно записать

$$2g = \left[\frac{t-x+s}{2\pi} \right] + \left[\frac{t+x-s}{2\pi} \right] - \left[\frac{t-x-s}{2\pi} \right] - \left[\frac{t+x+s}{2\pi} \right].$$

Это выражение существенно проще, но не позволяет найти величину суммы ряда Фурье в точках разрыва искомой функции.

Можно сформулировать *теорему* [5]: Ряды Фурье функций Грина волнового уравнения на отрезке представляются в конечном виде для случая граничных условий первого, второго рода, смешанной постановки условий – когда один конец закреплён, а другой свободен, для случая условий периодичности.

Замечание. Эти результаты не могут быть получены [8] с помощью обычных функций работы с рядами, встроенных в современные системы компьютерной алгебры. Фундаментальная причина этого – функции Грина волновых уравнений не являются аналитическими функциями своих аргументов, поэтому их выражения в конечном виде не являются элементарными функциями в смысле теории Лиувилля, являющейся основой теории решения задач в конечном виде, реализованной в современных системах.

Гиперболические уравнения теории волноводов

Результаты исследования функций Грина обычных волновых уравнений предполагается использовать для анализа распространения разрывов в задачах электродинамики волноводов. Здесь возникает целый ряд трудностей: в теории волноводов наряду с обычным одномерным волновым уравнением (2) встречаются другие уравнения гиперболического типа [9], [10]:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - m^2 g, \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + f(x) \frac{\partial g}{\partial x}. \quad (7)$$

Некоторые свойства решений этих уравнений могут быть изучены при помощи конечных выражений для функций Грина уравнения (2). Вопрос применения метода А.Н. Крылова усиления сходимости рядов для уравнений (6) и (7) представляет и самостоятельный интерес.

Заключение

В работе даны конечные выражения решений задач математической физики для случая дельтаобразной особенности в начальных данных. Способ их получения основан на идеях А.Н. Крылова ускорения сходимости рядов. В докладе представлено исследование этих выражений в современных системах компьютерной алгебры и приложение этих результатов в гиперболических задачах теории волноведущих систем.

Литература

1. *Dolya P. G.*, Solution to the homogeneous boundary value problems of free vibrations of a finite string // *Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry*. — 2008. — Vol. 4, no. 2. — P. 237–251.
2. *Рогожников А. М.* Смешанная задача о возбуждении колебаний в составном стержне с присоединенными точечными массами // *Доклады Академии наук*. — 2013. — Т. 450, № 4. — С. 389.
3. *Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н.*, Сборник задач по математической физике. — Наука, М., 1972. — 688 с.
4. *Свешников А. Г., Боголюбов А. Н., Кравцов А. В.*, Лекции по математической физике. — Наука, М., 2004. — 416 с.
5. *Мальшев К.Ю.* Представление функций Грина волнового уравнения на отрезке в конечном виде // *Изв. Саратов. Ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика*. — 2022. — Т. 22, №4. — С. 430–446.
6. *Крылов А.Н.* О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики. — ГИТТЛ, М.–Л., 1950. — 368 с.
7. *Канторович Л. В., Крылов В. И.*, Приближённые методы высшего анализа, ГИТТЛ, М.–Л., 1950, 696 с.
8. *Malykh M.D., Malyshev K.Yu* Solving the hyperbolic equation in elementary functions. В сборнике: *Computer Algebra. 4th International Conference Materials*. — Макс-пресс, М., 2021. — 125 с.
9. *Свешников А. Г., Боголюбов А. Н., Боголюбов Н. А., Быков А. А.* Полностью консервативные алгоритмы расчета клистронов миллиметрового диапазона // *Физические основы приборостроения*. — 2022. — Т. 11, № 2. — С. 26–33..
10. *Малых М.Д.* О решениях уравнений Максвелла на базе геометрической оптики // *Вестник РУДН. Серия: Математика, информатика, физика*. . — 2015. — № 1. — С. 37-44.

Задачи математической теории дифракции на телах со сложной границей

Mathematical Problems Diffraction Theory On Bodies With Complicated Boundary

***Могилевский И.Е.¹, Боголюбов А. Н.¹, Боголюбов Н.А.¹, Ерохин А.И.¹,
Ровенко В.В.¹, Шушарин М.М.¹***

1) *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, Москва, РФ;*

mogilevsky@physics.msu.ru, bogan7@yandex.ru

Аннотация. Рассмотрен ряд задач математической теории дифракции на телах сложной формы, для которых выделена сингулярная часть электромагнитного поля в окрестности ребер границы, поверхностей разрыва диэлектрической проницаемости, в окрестности ребра металло-диэлектрического клина, в окрестности конической точки. В основе построения лежит общий метод выделения сингулярной части решения эллиптических краевых задач, впервые предложенный В.А. Кондратьевым.

Введение

В настоящее время весьма актуальными являются задачи дифракции электромагнитного поля на сложных диэлектрических структурах при наличии ребер на их границах. В частности, применение волноводов сложного сечения позволяет создавать устройства, превосходящие по своим параметрам их аналоги на прямоугольных и круглых волноводах [1]. Включение продольных металлических выступов в волновод позволило улучшить ряд его характеристик, в частности, существенно расширить полосу частот одномодового режима работы [2].

Начало строгой математической теории волноведущих систем было положено в 1947-1948 гг. классическими работами А.Н. Тихонова и А.А. Самарского [3-4]. В опубликованной в 1948 году работе «О представлении поля в волноводе в виде суммы полей ТЕ и ТМ» [3], вышедшей в «Журнале технической физики», было строго доказано, что любое поле в регулярном волноводе в области, свободной от зарядов и токов, может быть представлено в виде суперпозиции поперечноэлектрических и поперечномагнитных волн. В работе «О возбуждении радиоволноводов» [4], также опубликованной в «Журнале технической физики» в 1947 году, проведены фундаментальные исследования, послужившие основой для создания строгой математической теории возбуждения радиоволноводов произвольным распределением заданного тока.

После ряда фундаментальных работ А.Н. Тихонова, А.А. Самарского [3-4], А.Г. Свешникова [5-7], А.С. Ильинского [8], В.Г. Кисунько, П.Е. Краснушкина и ряда других ученых высокочастотная электродинамика волноведущих систем превратилась в бурно развивающуюся строгую математическую теорию, определившую новое научное направление в математической физике.

Описание работы

Хорошо известно, что наличие ребер на границах и поверхностях разрывов диэлектрической проницаемости приводит к появлению особенностей у электромагнитного поля в окрестности особой точки границы или неоднородности заполнения [9,10]. Одним из способов преодоления этих проблем является выделение особенности решения в явном виде, то есть построение асимптотики по гладкости электромагнитного поля в окрестности ребра в волноводе [10]. При этом существенно используются результаты по асимптотике решения эллиптических краевых задач, представленные в работе В.А. Кондратьева [11], а также С.А. Назарова и Б.А. Пламеневского [12]. Здесь и далее под словом «асимптотическое представление» имеется в виду запись решения в виде суммы сингулярной и гладкой частей.

В научной группе кафедры математики физического факультета МГУ, созданной профессором А.Г. Свешниковым, профессором А.Н. Боголюбовым и его учениками проведен большой цикл теоретических исследований сингулярной части электромагнитного поля в окрестности особых точек. Рассмотрен ряд задач, посвященных выделению сингулярной части электромагнитного поля волновода в окрестности ребер границы [10], поверхностей разрыва диэлектрической проницаемости [9,13], в окрестности ребра металло-диэлектрического клина в волноводе [14,15]. Помимо выделения сингулярной части электромагнитного поля в закрытых волноведущих системах с помощью данного метода удается получить сингулярную часть электромагнитного поля в ряде задач дифракции, в частности, в задаче дифракции электромагнитного поля на телах с диэлектрическими ребрами в окрестности ребра [9,13,16-17], в окрестности конической точки для задачи дифракции на идеально проводящем теле, содержащем коническую точку [18]. Рассмотренный подход может быть также применен для более сложного вида особой точки границы, в частности, для границы оживальной формы. Данная задача является весьма актуальной для проектирования безэховых камер — закрытых помещений, в которых различными способами имитируются условия открытого пространства. Они проектируются таким

образом, чтобы волны при отражении от стен затухали как можно сильнее. Однако помехи при измерениях могут также создаваться и оборудованием, необходимым для проведения эксперимента. В частности, подставка — пилон, на которой располагают исследуемый объект, имеет специфическую (оживальную) форму, подобранную для уменьшения отражения электромагнитных волн обратно к излучателю из соображений геометрической оптики. Для увеличения точности измерений, требуется учесть вклад, вносимый в электромагнитное поле подставкой, поэтому весьма важной и востребованной задачей является исследование поля в окрестности ребра пилона. Сингулярная часть электромагнитного поля в окрестности ребра тела оживальной формы также может быть выделена [20] с помощью обобщения метода, впервые предложенного В.А. Кондратьевым в работе [11].

На основе полученного асимптотического представления электромагнитного поля в окрестности особых точек удается существенно увеличить скорость сходимости метода конечных элементов, вводя в пространство пробных функций сингулярные функции, имеющие особенность заданного вида и точно аппроксимирующие сингулярную часть решения [19]. В этой работе показано, что знание сингулярной части решения позволяет получить скорость сходимости метода конечных элементов не ниже, чем для гладкого случая, поскольку сингулярность аппроксимируется точно. Применение этого подхода на практике рассмотрено в работах [15-16]. На основе априорной информации о сингулярной части решения удалось модифицировать метод конечных элементов, что существенно повысило скорость его сходимости.

Заключение

Рассмотрен ряд задач математической теории дифракции, в которых выделена сингулярная часть электромагнитного поля в окрестности особой точки. Хотя физические и математические постановки этих задач значительно различаются, каждая из них приводит к эллиптическому дифференциальному уравнению с различными дополнительными условиями, и в основе построения сингулярной части электромагнитного поля лежит общий метод выделения сингулярной части решения эллиптических краевых задач, впервые предложенный В.А. Кондратьевым [11].

Литература

1. Земляков В.В., Заргано Г.Ф. Одно- и многомодовые селективные СВЧ-устройства на волноводах сложного сечения и перспективы их развития в структурах многослойных интегральных микросхем // Известия ЮФУ. Технические науки. — 2016. №5. — С. 126-134.
2. Заргано Г.Ф., Земляков В.В., Кривоустенко В.В. Анализ модового состава прямоугольного волновода с двумя перекрывающимися L-выступами // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. — 2012. — Т.15. №1. — С.7-17.
3. Самарский А.А., Тихонов А.Н. О представлении поля в волноводе в виде суммы полей ТЕ и ТМ // Журнал технич. физики. — 1948. — Т.28, вып. 7. — С. 959-970.
4. Самарский А.А., Тихонов А.Н. О возбуждении радиоволноводов // Журнал технич. физики. — 1947. — Т.27, вып. 11, 12. — С. 1283-1296; 1431-1440.
5. Свешников А.Г. Принципы излучения // ДАН СССР. - 1950. - Т. 3, №5. — С. 517-520.
6. Свешников А.Г. К обоснованию метода расчета нерегулярных волноводов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1963. — Т. 3. № 1. — С.170-179.
7. Свешников А.Г. К обоснованию метода расчета распространения электромагнитных колебаний в нерегулярных волноводах // Журнал выч. мат. и мат. физ. 1963. Т. 3, № 2, с. 314-326.
8. Свешников А.Г., Ильинский А.С. Задачи проектирования в электродинамике // ДАН СССР. — 1972. — Т. 204, № 5. — С. 1077-1080.
9. Боголюбов А.Н., Могилевский И.Е., Свешников А.Г. Асимптотическое представление электромагнитного поля диэлектрического волновода в окрестности

- угловой точки линии разрыва диэлектрической проницаемости // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*— 2015.— Т.55. № 3.— С.446.
10. *Боголюбов А.Н., Делицын А.Л., Могилевский И.Е., Свешников А.Г.* // *Радиотехника и электроника.*— 2003.— Т.48. №7.— С.787.
 11. *Кондратьев В.А.* // *Труды Московского Математического Общества.*— 1967.— Т.16. С.227.
 12. *Назаров С.А., Пламеневский Б.А.* *Эллиптические задачи в областях с кусочно-гладкой границей.* М.: Наука — 1991.
 13. *Боголюбов А. Н., Могилевский И. Е.* Математическое исследование особенности электромагнитного поля волновода в окрестности угловой точки линии разрыва диэлектрической проницаемости // *Физические основы приборостроения.* — 2016. — Т. 5, № 2. — С. 72–79.
 14. *Боголюбов А.Н., Могилевский И.Е.* Сингулярность поля в окрестности ребра металло-диэлектрического клина // *Труды российского научно-технического общества радиотехники, электроники и связи им. А.С. Попова, серия Акустооптические и радиолокационные методы измерений и обработки информации.* Т. 9. С. 33-35.
 15. *Боголюбов А.Н., Ерохин А.И., Могилевский И.Е., Светкин М.И.* Гибридный метод решения уравнения Пуассона в области с металло-диэлектрическими углами // *Вестник МГУ. Серия 3. Физика. Астрономия.*— 2017.— № 1.— С. 17-22.
 16. *Боголюбов А. Н., Ерохин А. И., Могилевский И. Е., Светкин М. И.* Гибридный метод численного решения уравнения Пуассона в области с диэлектрическим углом // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*.. — 2017. — Т. 57, № 8. — С. 1321–1330.
 17. *Боголюбов А. Н., Могилевский И. Е.* Сингулярности электромагнитного поля волновода в окрестности особых точек // *Ученые Записки Физического Факультета МГУ.* — 2017. — № 4. — С. 1740303–1–1740303–7.
 18. *Боголюбов А. Н., Могилевский И. Е., Ровенко В. В.* Асимптотическое разложение решения задач электромагнитной теории дифракции на объектах с коническими точками // *Известия Российской академии наук. Серия физическая.* — 2021. — Т. 85, № 1. — С. 59–63.
 19. *Могилевский И. Е.* Применение метода смешанных конечных элементов и оценки скорости сходимости для расчета электромагнитного поля волновода с входящими ребрами // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 2012. — Т. 52, № 11. — С. 2071–2079.
 20. *M. M. Shusharin, I. E. Mogilevskiy and A. N. Bogolyubov,* Behaviour of the Electromagnetic Field Near the Edge of a Cylinder with Ogival Cross-section. *2021 Photonics & Electromagnetics Research Symposium (PIERS).*— 2021.— pp. 2509-2518.

Влияние магнитной диффузии на параметрический резонанс в простейшей модели солнечного динамо

Influence of magnetic diffusion on parametric resonance in the simplest model of solar dynamo

Серенкова А.Ю.¹, Соколов Д.Д.^{1,2}, Юшков Е.В.^{1,2,3}

1) *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, Москва, РФ;* 2) *Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, РФ;* 3) *Институт космических исследований РАН, Москва, РФ*
serenkova.ai19@physics.msu.ru, yushkov.msu@mail.ru

Аннотация. В работе исследуются свойства нелинейного параметрического резонанса на примере динамо-модели Паркера и её маломодового разложения. Обсуждается влияние диффузионных слагаемых на вид резонанса.

Введение

Одной из первых моделей, предложенных для описания 11-летнего солнечного цикла, была динамо-модель Юджина Паркера 1955 года [1], и, несмотря на кажущуюся для настоящего времени простоту, она смогла дать ответы на два основных вопроса — почему происходит генерация среднего магнитного поля и почему среднее поле осциллирует со временем. Именно поэтому данная модель активно используется и в современных работах, особенно когда идет речь о явлениях, связанных не конкретно с Солнцем, а с магнитными полями звезд и планет вообще. В нашем докладе мы как раз и исследуем такой общий вопрос: если модель Паркера описывает процессы генерации одновременно с осцилляциями, то возможно ли при периодическом изменении параметров системы появление параметрического резонанса [2]. При этом мы не пытаемся ответить на другие важные вопросы, например, что могло послужить причиной такого параметрического влияния — внутренние процессы в звезде или влияние других астрофизических тел, а сосредотачиваемся на исследовании возможности резонанса.

Описание работы

Вопрос о параметрическом резонансе поднимался в теории динамо неоднократно [3, 4], однако попытка конкретизировать динамо-систему приводила к тому, что в разных работах даются разные ответы. В одних параметрический резонанс имеет классический вид, то есть происходит на удвоенной частоте и кратных частотах, в других работах — классического резонанса в динамо-системах нет вообще. Мы наоборот идем путем упрощения, в частности, нами была рассмотрена не только модель Паркера, которая получается из усреднённого по турбулентному зеркально-несимметричному потоку плазмы уравнения магнитной индукции, соответствующему конвективной оболочке Солнца, при котором к тому же происходит разделение магнитного поля на полоидальную и тороидальную компоненты — а было рассмотрено одно из наиболее известных упрощений данной системы, так называемая маломодовая модель, в которой обе компоненты поля раскладываются по первым двум членам ряда Фурье по углу с учетом их симметрии относительно экватора, остальные же гармоники отбрасываются. Такой подход сводит задачу к системе из четырёх обыкновенных дифференциальных уравнений, которую можно рассмотреть с точки зрения выделения резонансных эффектов. Нами было показано, что при симметричных диссипативных слагаемых в такой системе наблюдается так называемый неизбирательный резонанс, отличительной чертой которого является отсутствие четко выделенного узкого максимума резонанса на кратных частотах. В то же время, в общем случае видна суперпозиция избирательного и неизбирательного резонанса. Для системы Паркера без маломодового упрощения резонансных пиков не наблюдается, в ней диссипация отсутствует. Таким образом, именно диссипативные слагаемые отвечают за вид параметрического резонанса.

Заключение

В рамках работы мы отвечаем на следующий вопрос: как именно наличие и вид диссипативных слагаемых влияет на параметрический резонанс в системе Паркера, а также обсуждаем возможную применимость полученных результатов к экзопланетным системам, для которых планеты находятся близко к соответствующим звёздам, и к системам двойных звёзд.

Численный анализ параметрического резонанса в динамо-системах выполнен при поддержке Минобрнауки РФ в рамках программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики (проект № 075-15-2019-1621). Асимптотический анализ периодического воздействия на генерацию крупномасштабных структур проводился при поддержке фонда БАЗИС (грант № 21-1-3-63-1).

Литература

1. *Parker, E. N. Hydromagnetic Dynamo Models // Astrophys. J. — 1955. — Vol. 122. — P. 293.*

2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Курс теоретической физики I. Механика. — Москва. Наука, 1973. — С. 103—109.
3. D. Moss and D. Sokoloff. // Astr. and Astrophys. — 2013. — 553, A37.
4. Л.Л. Кичатинов, А.А. Непомнящих.// Письма в Астрон. Ж. — 2015. — Том 41, №7. — С. 409

Построение сингулярной части электромагнитного поля в окрестности ребра границы оживальной формы для различных типов граничных условий

Construction of the singular part of the electromagnetic field near an edge of a ogival boundary for various types of boundary conditions

Шушарин М.М, Могилевский И.Е.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, Москва, РФ;

Nirashush1999@gmail.com, imogilevsky@mail.ru

Аннотация. В работе исследуется сингулярная часть электромагнитного поля в окрестности ребра границы оживальной формы. При этом поле может рассматриваться как в ограниченной, так и в неограниченной области, что позволяет применять результаты как при математическом моделировании поля в безэховой камере, так и для расчёта поля внутри волноведущих систем. Как известно, электромагнитное поле может иметь особенность вблизи особых точек границы, что может ухудшить сходимость численных методов. Однако, сходимость можно повысить, если априорно учесть вид особенности решения. С помощью метода, впервые предложенного в работах В.А. Кондратьева, поле представлено в виде суммы сингулярной части и гладкой добавки, для которой дана оценка через норму соответствующего функционального пространства.

Введение

При математическом моделировании безэховых камер и волноведущих систем нередко встречаются задачи, где на границе области присутствуют рёбра и другие особые точки. При этом, наличие особых точек на границе области может приводить [1] к возникновению сингулярности у электромагнитного поля в их окрестности, что в свою очередь приводит к необходимости произведения численных расчётов на очень густых сетках. Для ускорения сходимости численных методов необходимо учесть наличие особенности у решения вблизи особых точек границы.

В данной работе проводится теоретическое исследование поведения электромагнитного поля в окрестности ребра границы оживальной формы. Изучаемая область может быть как ограниченной, что соответствует задаче поиска собственных частот волновода, так и неограниченной, что соответствует задаче дифракции в свободном пространстве или в безэховой камере. На границе области рассматриваются условия идеальной проводимости и импедансные граничные условия, также сингулярность исследуется в окрестности ребра поверхности разрыва параметров среды.

Используя метод, впервые предложенный в работах В.А. Кондратьева [2], решение вблизи ребра границы представляется в виде суммы сингулярной части, получаемой явно, и гладкой добавки, для которой производится оценка через норму соответствующего функционального пространства. При этом показано, что на главную особенность поля не влияет кривизна боковых поверхностей. Теоретически полученный вид особенности решения позволяет модифицировать метод конечных элементов для повышения сходимости [3].

Описание работы

Постановка задачи. Рассмотрим следующую задачу дифракции. Пусть плоская гармоничная волна произвольной поляризации под произвольным углом ψ падает на бесконечный вертикальный цилиндр (так, например, можно приблизить подставку, на которой располагается исследуемый объект в безэховой камере), где ψ - угол между осью

z и волновым вектором. Граница цилиндра содержит ребро и имеет оживальную форму в его окрестности (представима в виде объединения дуг окружностей). На границе цилиндра будем рассматривать три вида условий: условия идеальной проводимости, условия Щукина-Леонтовича или условия согласования. Пусть внешний угол между касательными плоскостями на ребре равен α . При таких условиях задача может быть сведена к двумерной краевой задаче для уравнения Гельмгольца.

Теоретическое исследование электромагнитного поля в окрестности ребра проводится с помощью метода построения асимптотического представления решения эллиптической краевой задачи в окрестности конической особой точки границы, который впервые был предложен В.А. Кондратьевым [2].

Учитывая, что решение является периодическим по времени с частотой ω и периодическим вдоль оси z (либо, в противном случае, можно произвести преобразование Фурье по оси z), задачу можно свести к двумерному уравнению Гельмгольца для вертикальных компонент электромагнитного поля. Для дифрагированной части поля на бесконечности справедливы условия излучения Зоммерфельда.

Для случая идеально проводящего цилиндра полное электромагнитное поле может быть представлено как сумма полей с вертикальной и горизонтальной поляризацией. Из условий идеальной проводимости на границе можно получить однородные граничные условия Дирихле для вертикальной поляризации и однородные условия Неймана для горизонтальной. Таким образом, мы получаем две отдельные корректно поставленные краевые задачи для поляризаций ТМ и ТЕ соответственно:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta E_z + k^2 E_z = 0, \\ E_z|_{\partial\Omega} = 0, \\ \frac{\partial E_z^{(s)}}{\partial r} - ikE_z^{(s)} = o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \Delta H_z + k^2 H_z = 0, \\ \frac{\partial H_z}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \\ \frac{\partial H_z^{(s)}}{\partial r} - ikH_z^{(s)} = o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \end{array} \right. \quad (1)$$

где $k = \frac{\omega}{c} \sin \psi$, Ω — область вне цилиндра, $\partial\Omega$ — его граница, а \vec{n} — нормаль к ней.

В случае импедансных граничных условий, невозможно в общем случае разделить вертикальную и горизонтальную поляризации. Граничные условия Щукина-Леонтовича имеют вид:

$$[\vec{n} \times \vec{E}]|_{\partial\Omega} = -w [\vec{n} \times [\vec{n} \times \vec{H}]]|_{\partial\Omega} \quad (2)$$

где w — поверхностный импеданс.

В случае, когда цилиндр состоит из диэлектрика, на границе раздела сред необходимо поставить условия сопряжения. В этом случае задачу для произвольной поляризации также можно разбить на две отдельные — для вертикальной и горизонтальной. Рассмотрение задачи можно производить тем же образом, что и для случая идеальной проводимости.

Для задачи поиска собственных мод волновода вид граничных условий будет тем же. Вместо краевой задачи для уравнения Гельмгольца будет решаться задача Штурма-Лиувилля на собственные значения. Однако, как особенность решения, так и метод её выделения будут иметь схожий вид.

Построение сингулярной части решения. Сперва перейдём в область в виде бесконечного сектора. Для этого сперва рассмотрим срезающую функцию χ (ребро расположено в точке $r = 0$):

$$\chi \in C^\infty(\Omega), \chi(r, \varphi) = \begin{cases} 1, & r < \frac{d}{2}, \\ 0, & r > d, \end{cases} \quad (3)$$

и будем исследовать не само решение, а его произведение с функцией χ . Как несложно убедиться, такое произведение будет вести себя также, как само решение в некоторой окрестности $\frac{d}{2}$.

Для того, чтобы учесть кривизну боковых поверхностей, проведём дробно-линейное преобразование. Оно добавит в уравнение гладкий в окрестности ребра коэффициент.

Перебросим все слагаемые уравнения Гельмгольца кроме главной части в правую часть уравнения и переобозначим за некоторую функцию f , для которой сделаем оценку через норму соответствующего функционального пространства. Затем, следуя методу В.А. Кондратьева, сделаем замену переменных $\tau = -\ln r$. Она переведёт бесконечный сектор в бесконечную полосу. Проведём вдоль полосы преобразование Фурье по переменной τ . Посредством этих действий, переходим от двумерной задачи к одномерной задаче, где сопряжённая к τ переменная λ играет роль параметра:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \hat{E}_z}{\partial \varphi^2} - \lambda^2 \hat{E}_z = \hat{F}(\lambda, \varphi), \\ \hat{E}_z|_{\varphi=0} = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Эта задача допускает решение в виде ряда:

$$\hat{E}_z(\lambda, \varphi) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{F}_n^s(\lambda)}{\lambda^2 + \left(\frac{\pi n}{\alpha}\right)^2} \sin \frac{\pi n \varphi}{\alpha}. \quad (5)$$

Вид ряда указывает на наличие полюсов у Фурье-образа решения на комплексной плоскости в точках $\lambda = \pm i \frac{\pi n}{\alpha}, n \in N$. При этом, проводя соответствующие оценки, можно показать, что обратное преобразование Фурье можно проводить не только по действительной оси, но и по прямой параллельной ей, чьё положение определяется из начальной оценки на функцию f . При этом, на функцию, получаемой при взятии этого интеграла, через норму соответствующего пространства можно сделать более сильную оценку, чем на само решение. Следовательно, сингулярность решения задаётся вычетами в полюсах, лежащих между прямыми. Таким образом, приходим к асимптотическому представлению решения:

$$E_z(r, \varphi) = \sum_{0 < \frac{\pi n}{\alpha} < 2} C_n r^{\frac{\pi n \varphi}{\alpha}} \sin \frac{\pi n \varphi}{\alpha} + R_E(r, \varphi), \quad (6)$$

где функция R_E является гладкой в окрестности ребра.

Для других типов граничных условий асимптотическое представление имеет схожий вид, но отличается показателем степени в сингулярной части решения (для случая диэлектрика) или числом слагаемых в сингулярной части (для импедансных условий).

Заключение

Вблизи ребра цилиндра электромагнитное поле было представлено в виде суммы сингулярной части и гладкой добавки, для которой была получена оценка через соответствующую норму. Сингулярная часть электромагнитного поля для цилиндра с сечением оживальной формы имеет ту же главную особенность, что и сингулярность поля вблизи ребра клина соответствующего угла раствора. Теоретически полученный вид особенности решения может быть использован для повышения сходимости численных методов.

Литература

1. *Свешников А. Г., Могилевский И. Е.* Избранные математические задачи теории дифракции. М. Физический факультет МГУ. 2012.

2. *Кондратьев В. А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Труды Московского Математического Общества, Т.16, 1967, С. 227-313.
3. *Боголюбов А. Н., Ерохин А. И., Могилевский И. Е., Светкин М. И.* Гибридный метод решения уравнения Пуассона в области с металло-диэлектрическими углами // Вестник МГУ. Серия 3. Физика. Астрономия. 2017. No 1. С. 17-22.

Численные методы

Численное решение нестационарных задач с памятью

Numerical solution of nonstationary problems with memory

Вабищевич П.Н.^{1,2}

1) *Институт проблем безопасного развития атомной энергетики, Москва, РФ*

2) *Северо-Кавказский центр математических исследований, СКФУ, Ставрополь, РФ*

vabishchevich@gmail.com

Классические прикладные математические модели основаны на системах дифференциальных уравнений. Нестационарные процессы описываются параболическими и гиперболическими уравнениями. Более общие модели, которые частично наследуют свойства параболических и гиперболических уравнений, связаны с эволюционными интегро-дифференциальными уравнениями. Простейшие нелокальные по времени задачи порождаются дробными производными по времени, приближенные методы для которых активно обсуждаются в последнее десятилетие.

Численное исследование многомерных краевых задач для уравнений с памятью проводится с помощью стандартных конечно-элементных или конечно-объемных аппроксимаций по пространству. Основное внимание уделяется построению аппроксимаций по времени. Для интегро-дифференциальных уравнений первого порядка наиболее простой подход связан с использованием тех или иных квадратур для интегрального члена и обычных двухслойных аппроксимаций производной по времени: неявная схема Эйлера и схема Кранка-Николсон. Такие аппроксимации не очень удобны для применения. Решение зависит от полной истории и поэтому при переходе на новый слой по времени необходимо работать с решением на всех предыдущих слоях во времени. Наиболее интересные возможности предоставляют методы, основанные на аппроксимации ядра, что приводит нас к более простым задачам.

Выполнен цикл исследований [1]-[4] по проблемам численного решения задачи Коши для эволюционных уравнений первого и второго порядка с памятью, когда ядро интегрального члена является разностным. Рассматриваемая нелокальная задача преобразуется в локальную, при этом решается слабо связанная система уравнений с дополнительными обыкновенными дифференциальными уравнениями. Предложенный подход основан на аппроксимации разностного ядра суммой экспонент. Получены оценки устойчивости решения относительно начальных данных и правой части для соответствующей задачи Коши. Построены и исследованы безусловно устойчивые двух- и трехслойные схемы с весами, которые удобны для вычислительной реализации. Теоретические результаты подтверждены данными численных экспериментов для модельных двумерных задач.

Литература

1. *Petr N. Vabishchevich. Numerical solution of the Cauchy problem for Volterra integrodifferential equations with difference kernels // Applied Numerical Mathematics. — 2022. — Vol. 174. — P. 177-190.*
2. *Petr N. Vabishchevich. Numerical solution of the heat conduction problem with memory // Computers & Mathematics with Applications. — 2022. — Vol. 118. — P. 230-236.*
3. *Petr N. Vabishchevich. Approximate solution of the Cauchy problem for a first-order integrodifferential equation with solution derivative memory // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2023. — Vol. 422, 114887. — P. 1–11.*
4. *П.Н. Вабищевич. Об устойчивости приближенного решения задачи Коши для некоторых интегродифференциальных уравнений первого порядка // ЖВМ и МФ. — 2023. — Т. 63, № 2. — С. 142–149.*

Вейвлеты на основе сверток функций $\text{hup}(x)$ и $\text{scup}(x)$ с прямоугольным импульсом

Wavelets constructed from convolutions of $\text{hup}(x)$ and $\text{scup}(x)$ functions with rectangular pulse

Коновалов Я.Ю.¹, Кравченко В.Ф.²

1) Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, РФ; 2) Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Москва, РФ.

kon20002000@mail.ru, kvf-ok@mail.ru

Аннотация. В работе рассматривается новая конструкция вейвлетов на основе сверток атомарных функций $\text{hup}(x)$ и $\text{scup}(x)$ с прямоугольным импульсом. Найдены константы неопределенности для новых вейвлетов.

Введение

Вейвлеты нашли применение в различных областях науки и техники, в том числе в цифровой обработке сигналов и изображений, численных методах решения дифференциальных и интегральных уравнений, при сжатии данных. В данной работе предложена модификация вейвлетов Мейера на основе свертки атомарных функций $\text{hup}(x)$ и $\text{scup}(x)$ с прямоугольным импульсом.

Описание работы

Вейвлеты Мейера. Рассмотрим известную конструкцию вейвлетов Мейера [1,2]. В начале строится преобразование Фурье масштабирующей функции $\hat{\phi}(\omega)$ со следующими свойствами: $\hat{\phi}(\omega)$ четная неотрицательная функция, носитель $\hat{\phi}(\omega)$ — отрезок $[-\frac{4\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}]$, $\hat{\phi}(\omega) \equiv 1$ на отрезке $[-\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}]$ и $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi n)|^2 = 1$. Затем строится сопряженный зеркальный фильтр $H_0(\omega) = \hat{\phi}(2\omega)/\hat{\phi}(\omega) = \hat{\phi}(2\omega)$. Далее функция $H_0(\omega)$ периодически продолжается с периодом 2π для выполнения условия $|H_0(\omega)|^2 + |H_0(\omega + \pi)|^2 = 1$. После этого преобразование Фурье вейвлета может быть найдено в виде

$$\hat{\psi}(\omega) = e^{\frac{i\omega}{2}} \overline{H_0\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)} \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right). \quad (1)$$

При построении вейвлетов Мейера [1,2] в качестве $\hat{\phi}(\omega)$ используются тригонометрические многочлены специального вида.

Вейвлеты Кравченко. При построении вейвлетов Кравченко [3-6] $\hat{\phi}(\omega) = \sqrt{\chi(\omega)}$, где $\chi(\omega)$ — сумма масштабированных сдвигов атомарных функций, обладающая следующими свойствами: $\text{supp}(\chi(\omega)) = [-\frac{4\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}]$, $\chi(\omega) = 1$ на отрезке $[-\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}]$, $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \chi(\omega + 2\pi n) = 1$. Дальнейшие шаги аналогичны рассмотренным выше. Заметим, что построение вейвлетов по такой схеме возможно лишь при использовании функций, сдвиги которых образуют разложение единицы.

Вейвлеты на основе свертки. В [7-9] и данной работе $\chi(\omega)$ строится как свертка $\chi(\omega) = \phi(\omega/2\pi) * g(\omega)$, где $\phi(x)$ стандартный прямоугольный импульс, а $g(x)$ четная неотрицательная функция с носителем $[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}]$ и интегралом, равным единице. Тогда $\hat{\chi}(t) = 2\pi \text{sinc}(\pi t) \hat{g}(t)$. Дальнейшие шаги аналогичны рассмотренным выше. В отличие от конструкции Кравченко данная конструкция не опирается на свойство разложения

единицы и в качестве $g(x)$ может быть выбрана любая функция, удовлетворяющая перечисленным выше требованиям.

Семейство атомарных функций $\text{hur}_a(x)$ [10-11]. Атомарные функции $\text{hur}_a(x)$, $a > 0$ имеют носитель $[-2; 2]$, их преобразование Фурье имеет вид

$$\text{hur}_a(t) = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{a^2 + 1 - 2a \cos(t2^{-k})}{(a-1)^2 \left(1 + \frac{t^2}{2^{2k} \ln^2 a}\right)}.$$

Кроме того, $\text{hur}_a(x) = \text{hur}_{1/a}(x)$, при $a \rightarrow 1$ в пределе имеем $\text{hur}_1(x) = \text{сир}(x)$.

Рассмотрим $\hat{\chi}(t) = 2\pi \text{sinc}(\pi t) \text{hur}_a(\pi t/6)$ и построим вейвлеты по описанной схеме. На рис. 1 представлены значения констант неопределенности полученных вейвлетов (жирная линия) при $a \in [1; 9]$. Видно, что минимум достигается при $a = 1$, а при $a > 3$ значение превышает порог (пунктирная линия), определенный по вейвлету Мейера.

Семейство атомарных функций $\text{scup}_b(x)$. Данное семейство [10-11] может быть получено формальной подстановкой $\text{scup}_b(x) = \text{hur}_{\exp(2\pi i b)}(x)$, соответственно

$$\text{scup}_b(t) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(t2^{1-k}) - \cos(2\pi b)}{(1 - \cos(2\pi b)) \left(1 - \frac{t^2}{2^{2k} \pi^2 b^2}\right)},$$

носитель $[-2; 2]$, $\text{scup}_b(x) = \text{scup}_{-b}(x)$, $\text{scup}_0(x) = \text{сир}(x)$. Аналогично предыдущему рассмотрим $\hat{\chi}(t) = 2\pi \text{sinc}(\pi t) \text{scup}_a(\pi t/6)$. Заметим, что в то время как $\text{hur}_a(x)$ при всех значениях a представляет собой колоколообразную функцию, вид $\text{scup}_b(x)$ качественно меняется в зависимости от b . Эмпирически было найдено, что $\text{scup}_b(x)$ неотрицательна при $b \in [0; 0,75] \cup [1,25; 1,75] \cup [2,25; 2,75] \cup \dots$. Из рис. 1 видно, что минимумы констант неопределенности (тонкие сплошные линии) достигаются на серединах отрезков и они заметно ниже порогового значения.

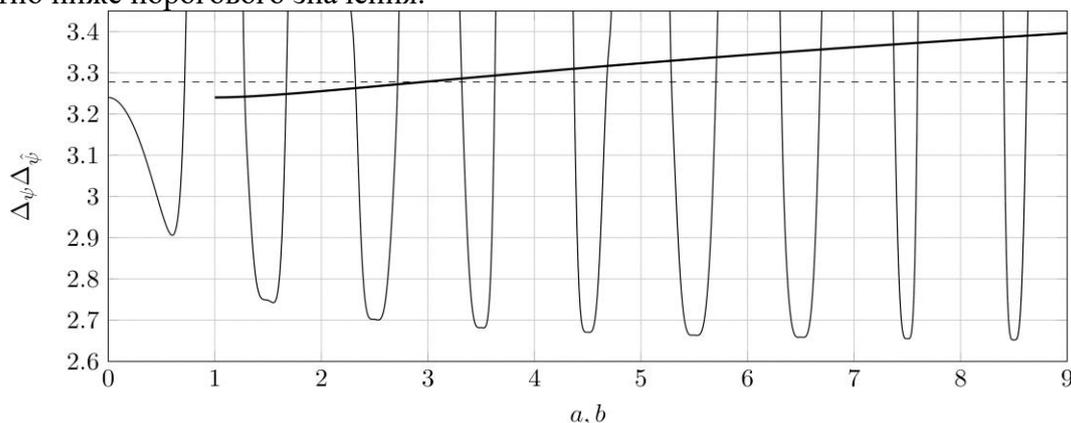


Рисунок 4. Зависимость значений констант неопределенности вейвлетов на основе свертки с прямоугольным импульсом $\text{hur}_a(x)$ от параметра a (жирная линия) и $\text{scup}_b(x)$ от параметра b (тонкая сплошная линия) соответственно.

Заключение

В работе впервые представлены вейвлеты, построенные на основе свертки атомарных функций $\text{hur}_a(x)$ и $\text{scup}_b(x)$ с прямоугольным импульсом. Низкие значения констант неопределенности вейвлетов, построенных на основе свертки атомарных

функций $\text{scpr}_b(x)$ позволяют предположить, что эти вейвлеты будут эффективны при решении практических задач.

Литература

1. Новиков И. Я., Протасов В. Ю., Скопина М. А. Теория всплесков. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006 — 616 с.
2. Малла С. Вейвлеты в обработке сигналов. Пер. с англ. — М.: Мир, 2005. — 671 с.
3. Кравченко В. Ф., Юрин А. В. Новый класс вейвлет-функций в цифровой обработке сигналов и изображений // Успехи современной радиоэлектроники. — 2008. — № 5. — С. 3-64.
4. Кравченко В. Ф., Кравченко О. В. Конструктивные методы алгебры логики, атомарных функций, вейвлетов, фракталов в задачах физики и техники. — М.: ТЕХНОСФЕРА, 2018. — 696 с.
5. Кравченко В. Ф., Чуриков Д. В. Атомарные функции $h_a(x)$ и новые ортогональные вейвлеты на их основе. // Успехи современной радиоэлектроники. — 2008. — № 6. — С. 67-85.
6. Кравченко В. Ф., Чуриков Д. В. Цифровая обработка сигналов атомарными функциями и вейвлетами. — М.: ТЕХНОСФЕРА, 2018. — 182 с.
7. Кравченко В. Ф., Коновалов Я. Ю. Новая конструкция вейвлетов на основе свертки финитных функций с прямоугольным импульсом // Радиотехника и электроника. — 2022. — Т 67, № 8. — С. 761–773.
8. Kravchenko V. F. and Kononov Y. Y. Generalization of Orthogonal Kravchenko Wavelets with Convolutions of Rectangular Pulse and Atomic Functions // Photonics & Electromagnetics Research Symposium (PIERS), Hangzhou, China. — 2021. — P. 204-213. doi: 10.1109/PIERS53385.2021.9695100.
9. Кравченко В. Ф., Коновалов Я. Ю. Ортогональные вейвлеты на основе свертки функции $\text{fir}_{a,n}(x)$ с прямоугольным импульсом // Материалы 14-й Международной научно-технической конференции «Акустооптические и радиолокационные методы измерений и обработки информации». Том. XIV. Астрахань. — 5-7 октября 2021. — С. 97-100.
10. Зелкин Е. Г., Кравченко В. Ф., Гусевский В. И. Конструктивные методы аппроксимации в теории антенн. — М.: Сайнс-пресс, 2005. — 512 с.
11. Горшков А. С. Цифровая обработка сигналов: атомарные функции и теория чисел. — М.: Машиностроение, 1994. — 224 с.

Нахождение двухпозиционной диаграммы рассеяния объекта при помощи значений рассеянного поля в ближней зоне, заданного на усечённой цилиндрической поверхности

Object bistatic radar cross section obtaining by using the values of the scattered near-field, defined on a truncated cylindrical surface

Балабуха Н. П.¹, Коняев Д. А.^{1,2}, Шапкина Н. Е.^{1,2}

1) Институт теоретической и прикладной электродинамики РАН, Москва, РФ;

2) Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, Москва, РФ;

n_bala@mail.ru, konyaev@physics.msu.ru, neshapkina@mail.ru

Аннотация. В работе численно исследуется основанный на идеях метода дискретных источников способ определения двухпозиционных диаграмм рассеяния объектов по значениям комплексной амплитуды напряжённости электрического поля, заданного на участке цилиндрической поверхности, расположенной в ближней зоне.

Введение

Задача нахождения двухпозиционной диаграммы рассеяния (ДДР) или двухпозиционной эффективной площади рассеяния (ЭПР) различного рода тел является актуальной теоретической, а также и практической задачей в связи с проблемами радиолокации [1 – 4]. В общем случае ДДР рассеивателя можно получить согласно определению следующим образом:

$$RCS(\theta_{\text{изл}}, \varphi_{\text{изл}}, \theta_{\text{прм}}, \varphi_{\text{прм}}) = 10 \log \left(\frac{4\pi}{S_0} \left(\lim_{r \rightarrow +\infty} r \frac{|E(r, \theta_{\text{изл}}, \varphi_{\text{изл}}, \theta_{\text{прм}}, \varphi_{\text{прм}})|}{E_0} \right)^2 \right), \quad (1)$$

где углы $\theta_{\text{изл}}$ и $\varphi_{\text{изл}}$ сферической системы координат определяют направление на источник, $\theta_{\text{прм}}$ и $\varphi_{\text{прм}}$ – на приёмник, E – комплексная амплитуда напряжённости электрического поля рассеянной волны, E_0 – амплитуда падающей плоской волны, а S_0 – нормировочный коэффициент.

Типичные на сегодняшний день измерительные стенды (компактные полигоны) позволяют находить диаграммы обратного рассеяния ДОР, или, что тоже самое, однопозиционные ЭПР [1]. В связи с этим стоит вопрос о модернизации существующих компактных полигонов для осуществления измерения ДДР. Как правило, прямое измерение ДДР при помощи компактного полигона не реализуемо в силу невозможности размещения дополнительной приёмной антенны на достаточном расстоянии от рассеивателя (либо размещения дополнительного коллиматора). Эту проблему обычно решают, измеряя рассеянное поле в ближней зоне, затем рассчитывая поле в дальней зоне на основании полученных значений. Измерения электромагнитного поля в ближней зоне исследуемого объекта в компактных полигонах осуществляют при помощи плоских, цилиндрических или сферических сканеров [2]. Размещение зонда, очевидно, нежелательно в области между источником и исследуемым объектом, поэтому даже поле в ближней зоне, как правило, известно лишь на усечённой поверхности. Эти обстоятельства приводят к необходимости исследования и разработки методов сканирования на усечённых поверхностях.

Постановка задачи

Пусть E – напряжённость электрического поля рассеянной объектом волны. Конфигурация рассматриваемой задачи пересчёта поля в дальнюю зону представлена на рисунке 5а.

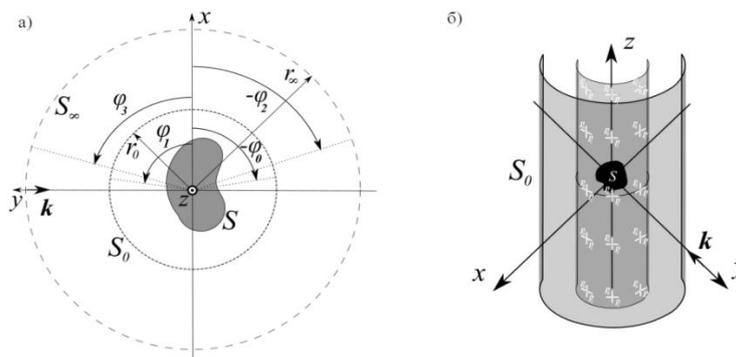


Рисунок 5. а) конфигурация задачи (вид сверху): S – поверхность рассеивателя, S_0 и r_0 – поверхность и радиус сканирования соответственно, $[-\varphi_0; \varphi_1]$ – сектор сканирования, $[-\varphi_2; \varphi_3]$ – сектор, в котором требуется восстановить ДДР, k – направление распространения падающей волны, S_∞ – условное обозначение сферы, радиус которой r_∞ стремится к бесконечности; б) пример расположения диполей фиктивных вспомогательных источников (красными и зелёными стрелочками изображены направления дипольного момента дискретных источников)

Сформулируем задачу: по известным значениям компонент электромагнитного поля E_φ и E_z , заданным на участке цилиндрической поверхности конечной высоты и радиуса r_0 : $\{M(r, \varphi, z) | r = r_0, \varphi \in [-\varphi_0; \varphi_1], z \in [-L/2; L/2]\}$, найти сечение ДДР рассеивателя плоскостью Oxy в диапазоне бистатических углов, соответствующих углам $-\varphi_0 \leq -\varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi_3 \leq \varphi_1$. Для вычисления ДДР необходимо рассчитать рассеянное поле в дальней зоне (рисунок 5).

Метод нахождения значений рассеянного поля в дальней зоне, основанный на идеях метода дискретных источников

Идея метода, как и при использовании метода дискретных источников при решении задач дифракции [5], состоит в приближении рассеянного поля линейной комбинацией точных решений уравнений Максвелла – набором полей дискретных источников. В данной работе рассматривается набор полей электрических диполей, расположенных на цилиндрической поверхности меньшего, чем поверхности сканирования радиуса. Пример такой конфигурации представлен на рисунке 5б.

Сразу отметим, что теоретическое обоснование данного подхода не является предметом данной работы. В данной работе рассматривается лишь численное исследование метода.

Поле идеального диполя, расположенного в начале координат, можно записать в виде [6]:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{p}{4\pi\epsilon} \frac{e^{ikr}}{r} \left\{ \mathbf{e}_r(\mathbf{e}_p, \mathbf{e}_r) 2 \left[\frac{ik}{r} + \frac{2}{r^2} \right] + (\mathbf{e}_r(\mathbf{e}_p, \mathbf{e}_r) - \mathbf{e}_p) \left[\frac{1}{r^2} + \frac{ik}{r} - k^2 \right] \right\}, \quad (2)$$

где $p = -i \frac{I\Delta l}{\omega}$ – дипольный момент, ω – круговая частота, \mathbf{e}_r – орт сферической системы координат, k – волновое число, ϵ – диэлектрическая проницаемость среды.

Асимптотическое представление поля идеального диполя, расположенного в точке \mathbf{r}_0 , на бесконечности может быть записано в следующем виде [6]:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{p}{4\pi\epsilon} \frac{e^{ikr}}{r} (-k^2) e^{ik(\mathbf{e}_r, \mathbf{r}_0)} (\mathbf{e}_r(\mathbf{e}_p, \mathbf{e}_r) - \mathbf{e}_p), \text{ при } r \rightarrow +\infty. \quad (3)$$

Предположим, что рассеянное поле можно приблизить следующим образом:

$$\mathbf{E} = \sum_{l=0}^{N-1} (a_l \mathbf{E}_l^\perp + b_l \mathbf{E}_l^\parallel), \quad (4)$$

где \mathbf{E}_l^\perp – поле горизонтально расположенного диполя, размещенного в точке на вспомогательной поверхности с номером l , а \mathbf{E}_l^\parallel – соответственно поле вертикально расположенного диполя в этой же точке. Воспользовавшись методом коллокации, получим СЛАУ для отыскания коэффициентов a_j и b_j , которую будем решать методом наименьших квадратов, используя метод сопряжённых градиентов.

Численные результаты

Пусть частота падающего излучения 400МГц; падающая волна горизонтально поляризована (вектор напряжённости электрического лежит в плоскости Oxy) поверхность сканирования: $R = 2.5$ м, $L = 5$ м. Рассеиватель – идеально проводящий цилиндр радиуса $R_{cyl} = \lambda \approx 0.75$ м и высоты $H_{cyl} = 3\lambda \approx 2.25$ м. Поверхность расположения диполей представляет собой копию поверхности сканирования, меньшего радиуса $R_{dip} = 0.25R$. Диполи располагаются на пересечении радиальных линий цилиндрической системы координат, проведённых из точек измерения, со вспомогательной поверхностью (цилиндрической поверхностью радиуса R_{dip}).

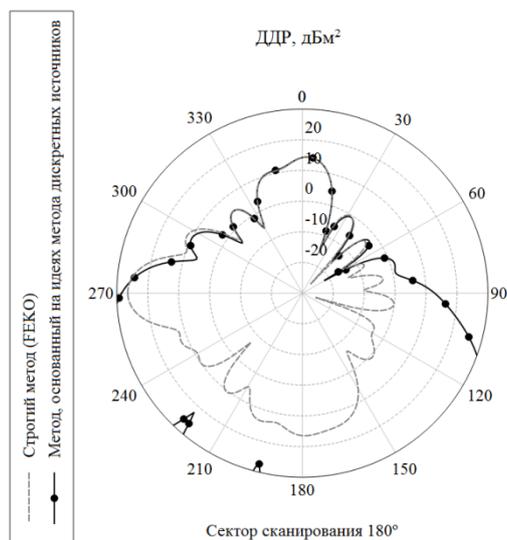


Рисунок 6. Сравнение результатов расчёта ДПР при сканировании в ближней зоне на цилиндрической поверхности размером в 180 градусов по угловой переменной

Заключение

Метод, основанный на идеях метода дискретных источников, может давать неплохие результаты, однако увеличение восстановленного с заданной точностью сектора диаграммы ЭПР не гарантируется увеличением сектора сканирования.

Литература

1. Балабуха Н.П., Зубов А.С., Солосин В.С. Компактные полигоны для измерения характеристик рассеяния объектов. – М.: Наука, 2007 – 266 с.
2. Бахрах Л. Д. Методы измерений параметров излучающих систем в ближней зоне, Издательство "Наука", Ленинградское отделение – 1985 – 272 с.
3. T. B. Hansen, R. A. Marr, U. H. W. Lammers, T. J. Tanigawa, R. V. McGahan. Bistatic RCS calculations from cylindrical near-field measurements—Part I: Theory //IEEE transactions on antennas and propagation. – 2006. – Т. 54. – №. 12. – С. 3846-3856.
4. R. A. Marr, U. H. W. Lammers, T. B. Hansen, T. J. Tanigawa, R. V. McGahan. Bistatic RCS calculations from cylindrical near-field measurements—Part II: Experiments //IEEE transactions on antennas and propagation. – 2006. – Т. 54. – №. 12. – С. 3857-3864.
5. Еремин Ю.А. Свешников А.Г. Метод дискретных источников в задачах электромагнитной дифракции. М.: МГУ, 1992.
6. Никольский В. В., Никольская Т. И. Электродинамика и распространение радиоволн. – «Наука», М. 1973

Синтез высокоэффективных многослойных дифракционных решеток для спектрального сложения лазерных пучков

Synthesis of Highly Efficient Multilayer Diffraction Gratings for Spectral Combining of Laser beams

Петухов А.А.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, Москва, РФ
petukhov@physics.msu.ru

Аннотация. Доклад посвящен синтезу многослойных диэлектрических отражательных дифракционных решеток, с высокой эффективностью обеспечивающих спектральное сложение пучков с различной длиной волны в заданном дифракционном порядке. Приводятся результаты решения задачи синтеза многослойных диэлектрических дифракционных решеток, обеспечивающих спектральное сложение в

первом или минус первом порядке дифракции. Решается задача синтеза для таких решеток с учетом возможных технологических ограничений на высоту профиля (глубину травления). Решение задачи синтеза проводится путем минимизации зависящего от параметров решетки целевого функционала методом Нелдера-Мида. Решение прямой задачи на каждом шаге минимизации осуществляется при помощи комбинации неполного метода Галеркина и метода матриц рассеяния.

Введение

Спектральное сложение пучков является одним из наиболее эффективных методов увеличения мощности лазеров, в первую очередь – волоконных лазеров. При спектральном сложении увеличение мощности выходного излучения обеспечивается за счет пространственного наложения пучков с различной длиной волны. Такой подход является достаточно простым для технической реализации и в то же время позволяет сохранить высокое качество выходного пучка.

Основным оптическим элементом, обеспечивающим спектральное сложение пучков, является дифракционная решетка (как правило, отражательная, реже – пропускающая): падающие на решетку под различными углами пучки с различной длиной волны после дифракции на ней распространяются в одном и том же направлении, соответствующем дифракционному порядку с некоторым заранее выбранным отличным от нуля номером. При этом решетка должна обладать высокой дифракционной эффективностью, т.е. обеспечивать высокий коэффициент отражения или пропускания падающего излучения в нужный дифракционный порядок, а также иметь высокий порог разрушения под воздействием лазерного излучения. Уменьшить возможное воздействие лазерного излучения на решетку можно за счет использования диэлектрических материалов для ее изготовления. При этом при использовании отражательных диэлектрических дифракционных решеток требуется дополнительно между самим профилем решетки и подложкой размещать многослойное покрытие, которое обеспечивало бы эффективное отражение падающего излучения, в то время как сама решетка обеспечивала бы направление волновой энергии в нужный дифракционный порядок. Эффективность решетки в выбранном дифракционном порядке в конечном счете определяется ее геометрическими параметрами (период, форма профиля). Перед непосредственным изготовлением дифракционной решетки необходимо проводить ее математическое моделирование, получая решение соответствующей задачи синтеза, в результате чего могут быть определены оптимальные значения ее параметров [1].

Описание работы

В данной работе решаются задачи синтеза многослойных диэлектрических отражательных дифракционных решеток с прямоугольной формой профиля, обладающих высокой дифракционной эффективностью в первом или минус первом порядке дифракции и обеспечивающих спектральное сложение пучков с различной длиной волны в диапазоне от 1054 до 1064 нм.

Математическая постановка этой задачи сводится к уравнению Гельмгольца для одной из компонент электромагнитного поля волны, дополненному периодическими граничными условиями в поперечном направлении, а также парциальными условиями излучения на границах решетки в продольном направлении. Для получения численного решения поставленной математической задачи используется разработанный автором гибридный численный метод, основанный на совместном применении неполного метода Галеркина и матричных методов [2-3]. Этот метод позволяет рассчитать дифракционную эффективность в различных порядках дифракции, эффективно учитывая многослойное строение рассматриваемой дифракционной решетки.

Математическая постановка задачи синтеза многослойных диэлектрических дифракционных решеток для спектрального сложения пучков формулируется как задача минимизации целевого функционала, зависящего от параметров дифракционной решетки и представляющего собой ее интегральную характеристику в заданном

диапазоне длин волн – квадратичного отклонения дифракционной эффективности в выбранном дифракционном порядке от желаемого значения (единицы, или 100%). Минимизация функционала осуществляется методом Нелдера-Мида.

Приводятся результаты решения задачи синтеза в двух случаях: в первом случае рассматривается спектральное сложение в первом порядке, во втором случае – в минус первом порядке. Полученные результаты обсуждаются с учетом возможных технологических ограничений. В частности, для практически более предпочтительного случая спектрального сложения в минус первом порядке решается также задача синтеза с дополнительными ограничениями на допустимую глубину травления решетки. Результаты вычислительных экспериментов демонстрируют возможность обеспечить выполнение такого рода требований, т.е. уменьшить глубину травления решетки, сохранив достаточно высокую дифракционную эффективность (выше 92%) в выбранном порядке в рассматриваемом диапазоне длин волн.

Литература

1. *Артемяева М.В., Боголюбов А.Н., Петухов А.А.* Решение задач синтеза дифракционных решеток для практических приложений // Физические основы приборостроения. – 2020. – Т.9, №3. – С. 4-13.
2. *Петухов А.А.* Совместное применение неполного метода Галеркина и метода матриц рассеяния для моделирования многослойных дифракционных решеток // Математическое моделирование. – 2013. – Т. 25, №6. – С. 41-53.
3. *Артемяева М.В., Боголюбов А.Н., Петухов А.А.* Метод матриц переноса для решения задачи дифракции плоской волны с ТЕ-поляризацией на одномерной бинарной дифракционной решетке // Физические основы приборостроения. – 2022. – Т.11, №2. – С. 40-48.
4. *Петухов А.А.* Синтез высокоэффективных многослойных диэлектрических дифракционных решеток для спектрального сложения лазерных пучков // Вычислительные методы и программирование. – 2021. – №22 (3). – С. 201-210.

О численном моделировании электромагнитного рассеяния на кусочно-однородных объектах методом граничных интегральных уравнений

On Numerical Simulation of Electromagnetic Scattering by Piecewise Homogeneous Objects by the Boundary Integral Equations Method

Сетуха А.В.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, НИВЦ, Москва, РФ.

setuhaav@rambler.ru

Аннотация. Решается задача дифракции монохроматической электромагнитной волны на системе объектов, которая может включать в себя кусочно-однородные диэлектрические тела и идеально проводящие тела и экраны. Задача сводится к системе поверхностных интегральных уравнений относительно эквивалентных токов, которая решается численно методом кусочно-постоянных аппроксимаций и коллокаций. Приводятся результаты решения модельных примеров.

Введение

Рассматривается задача дифракции монохроматической электромагнитной на системе кусочно-однородных диэлектрических и идеально проводящих тел. Каждое диэлектрическое тело может состоять из одной или нескольких областей, в каждой из которых характеристики среды являются постоянными и определяются значениями диэлектрической и магнитной проницаемостей, а также коэффициентом проводимости. Также могут рассматриваться идеально проводящие тела и экраны, причем, как расположенные вне диэлектрических тел, так и погруженные в них. На границах раздела подобластей с различными электродинамическими свойствами возможен как прямой

контакт сред, так и случай, когда эти среды разделены тонкой металлической прослойкой.

Описание работы

Напряженности электрического и магнитного полей ищутся в виде $\vec{E} = \vec{E}_\omega(x) e^{-i\omega t}$ и $\vec{H} = \vec{H}_\omega(x) e^{-i\omega t}$ соответственно, где t – время, $x = (x_1, x_2, x_3)$ – точки пространства, ω – частота поля. Источником первичного поля может быть проходящая из бесконечности плоская волна, или поле, создаваемое заданной системой токов, сосредоточенных вне исследуемых объектов. Неизвестные напряженности электрического и магнитного полей описывается уравнениями Максвелла:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = i\omega\mu\vec{H}, \operatorname{rot} \vec{H} = -i\omega\varepsilon\vec{E}, \quad (1)$$

где ε и μ – диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, соответственно. Значения этих проницаемостей постоянны в каждой из областей, и могут отличаться в различных областях. Проводимость среды учитывается за счет рассмотрения комплексной диэлектрической проницаемости вида $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$, где ε' – собственно диэлектрическая проницаемость, ε'' – коэффициент, отвечающий за проводимость среды.

На границах раздела сред в случае прямого контакта ставится граничное условие отсутствия скачка тангенциальных составляющих электрического и магнитного полей. На идеально проводящих телах и экранах, а также на границах, где среды разделены тонкой металлической прослойкой, ставится условие равенства нулю касательной компоненты полного электрического поля.

Для решения такой задачи предлагается использовать метод граничных интегральных уравнений. В статье [1] был предложен подход, при котором в каждой из диэлектрических областей напряженности электрического и магнитного полей выражаются по формулам Стреттона-Чу через электрические и магнитные токи. При этом на каждой границе раздела сред размещаются электрические и магнитные поверхностные токи, причем, на каждой стороне каждой такой поверхности сначала размещается различная пара токов. На идеально проводящих телах и экранах размещаются только электрические токи. Далее для этих токов записываются граничные условия (граничные условия сразу позволяют исключить половину неизвестных токов на границах раздела сред) и записываются интегральные уравнения, возникающие при выражении краевых значений электрического и магнитного полей с применением формул Стреттона-Чу. В результате возникает система граничных интегральных уравнений относительно неизвестных поверхностных токов, записанная на границах раздела сред и поверхностях идеально проводящих тел и экранов. Отметим, что возникшие уравнения содержат как слабосингулярные, так и гиперсингулярные интегралы.

Для численного решения возникшей системы граничных интегральных уравнений применены методы кусочно-постоянных аппроксимаций и коллокаций, причем гиперсингулярные интегралы трактуются в смысле конечного значения по Адамару. Поверхности идеально проводящих тел (экранов) и границы раздела сред аппроксимируются системой четырехугольных ячеек (возможны треугольные ячейки как вырожденный случай четырехугольной ячейки со сдвоенной вершиной). Далее на ячейках выбираются точки коллокации. При аппроксимации интегральных уравнений неизвестные поверхностные токи на каждой ячейке аппроксимируются постоянным вектором, ортогональным нормали к ячейке. Интегральные уравнения записываются для таких кусочно-постоянных токов в точках коллокации.

Такой подход обладает универсальностью, позволяя записывать в единообразном виде дискретную систему уравнений для различных конфигураций диэлектрических и идеально проводящих объектов.

Для примера приведены диаграммы рассеяния для диэлектрической сферы и для идеально проводящей сферы с диэлектрическим покрытием при облучении плоской волной, полученные на основании численных решений соответствующих задач.

На рисунках 1 и 2 приведены зависимости величины

$$\sigma(\alpha) = 10 \lg \frac{\sigma_0(\vec{\tau})}{\pi r^2} \text{ дБ}, \sigma_0(\vec{\tau}) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{4\pi R^2}{|\vec{E}_{inc}|^2} |\vec{E}(R\vec{\tau})|^2, \quad (2)$$

от угла α , где $\sigma_0(\vec{\tau})$ – эффективная площадь рассеяния (ЭПР) в направлении вектора наблюдения $\vec{\tau}$, α – угол между векторами $-\vec{\tau}$ и волновым вектором (вектором распространения волны), r – радиус сферы, $\sigma(\alpha)$ – ЭПР, выраженная в децибеллах.

На рисунке 1 приведена диаграмма рассеяния для диэлектрической сферы радиуса r с параметрами диэлектрика $\varepsilon = 4 \varepsilon_0, \mu = \mu_0$ (ε_0 и μ_0 – диэлектрическая и магнитная проницаемости вакуума, в окружающей среде $\varepsilon = \varepsilon_0, \mu = \mu_0$) при облучении плоской волной с длиной волны $\lambda = 2r$ и поляризацией, при которой вектор электрического поля лежит в плоскости изменения вектора $\vec{\tau}$. Для сравнения приведены теоретическая зависимость и зависимость, полученная в расчете по разработанной модели. Видно, что отличие результатов не превосходит 0.5 дБ.

На рисунке 2 приведены диаграммы рассеяния (полученная в расчете и теоретическая) для идеально проводящей сферы радиуса r , покрытой слоем диэлектрика толщиной $h = 0.02r$ при облучении плоской волной с длиной волны $\lambda = \pi r/5$ (волновое число $k = 10/r$). Поляризация лежит в плоскости изменения вектора $\vec{\tau}$, параметры диэлектрика $\varepsilon = 4 \varepsilon_0, \mu = \mu_0$. Также для сравнения приведена диаграмма рассеяния для сферы без покрытия (теоретическая зависимость). Сравнение этих результатов показывает, что покрытие оказывает влияние на диаграмму рассеяния (различие до 3-5 дБ). При этом для случая сферы с покрытием различие расчетных и теоретических результатов существенно меньше.

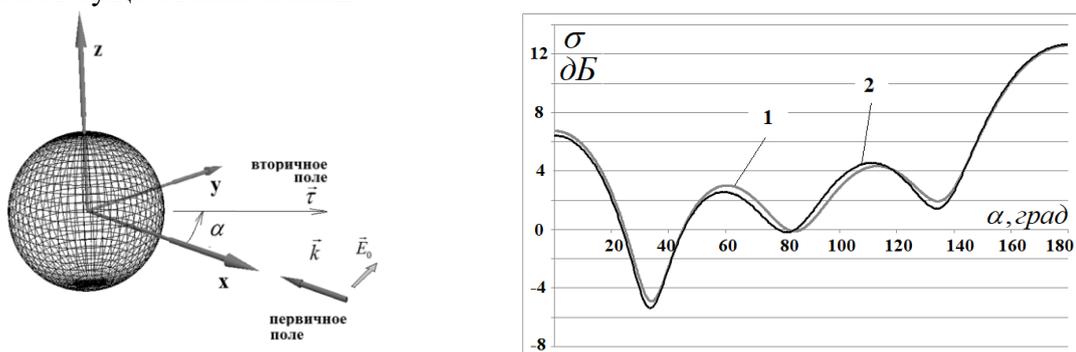


Рисунок 1. Диаграмма рассеяния (бистатическая). Диэлектрическая сфера.
1 – теоретическое решение, 2 – расчет.

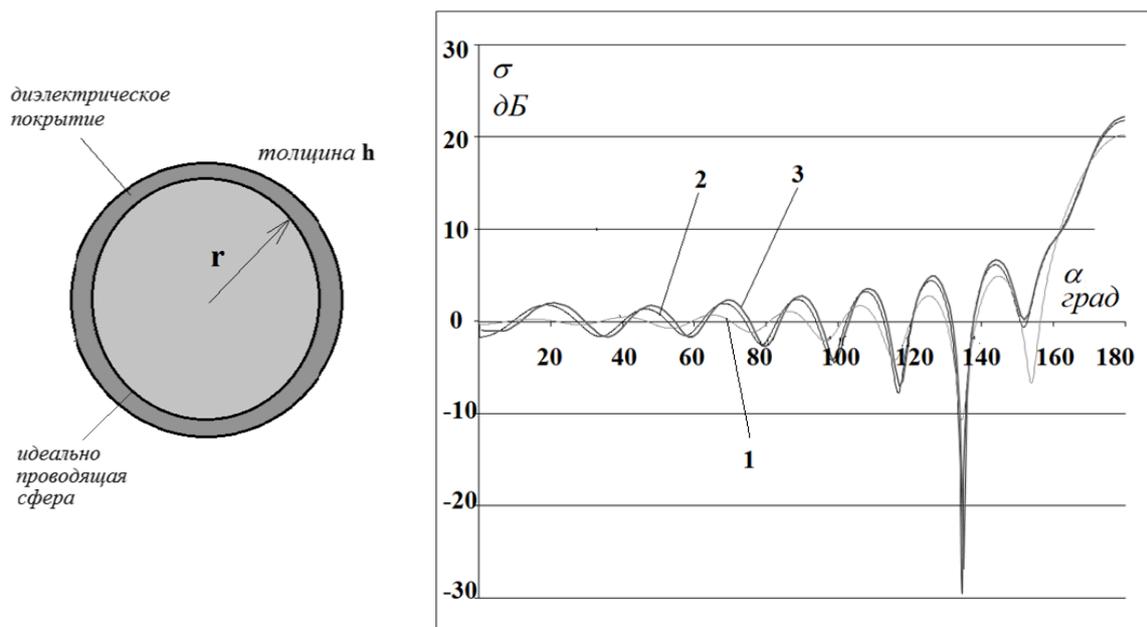


Рисунок 2. – Диаграмма рассеяния (бистатическая). Идеально проводящая сфера с покрытием. 1 – сфера без покрытия (теоретическое решение), 2 – сфера с покрытием (теоретическое решение), 3 – сфера с покрытием (расчет).

Литература

1. Захаров Е. В., Сетуха А. В. Метод граничных интегральных уравнений в задаче дифракции монохроматической электромагнитной волны на системе идеально проводящих и кусочно-однородных диэлектрических объектов // Дифференциальные уравнения. — 2020. — Т. 56, № 9. — С. 1187–1200.
2. Захаров Е. В., Сетуха А. В., Безобразова Е. Н. Метод гиперсингулярных интегральных уравнений в трехмерной задаче дифракции электромагнитных волн на кусочно-однородном диэлектрическом теле // Дифференциальные уравнения. — 2015. — Т. 51, № 9. — С. 1206–1219.
3. Setukha A. V., Bezobrazova E. N. The method of hypersingular integral equations in the problem of electromagnetic wave diffraction by a dielectric body with a partial perfectly conducting coating // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. — 2017. — Vol. 32, no. 6. — P. 371–380.

Применение метода мозаично скелетных аппроксимаций к решению задачи дифракции на идеально проводящих телах

The mosaic skeleton approximation method for solving diffraction problem on perfect conductive surfaces

Ставцев С. Л.¹, Сетуха А. В.^{1,2}

- 1) ФГБУН Институт вычислительной математики им. Г.И. Марчука РАН, Москва, РФ; 2) Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, НИВЦ, Москва, РФ.

sstass2000@mail.ru, setukhaav@rambler.ru

Аннотация. В работе рассматриваются особенности применения метода мозаично-скелетных аппроксимаций к решению задачи дифракции электромагнитных волн на идеально проводящих телах.

Введение

В ИВМ РАН разработаны численные методы аппроксимации больших плотных матриц (например, метод мозаично скелетных аппроксимаций [1]). Эти методы

получили свое развитие благодаря решению задач дифракции, в которых возникает необходимость работать с большими плотными матрицами. Подобного рода матрицы встречаются при решении интегральных уравнений, в том числе уравнений с сильными особенностями.

Основное достоинство метода мозаично скелетных аппроксимаций заключается в том, что его можно использовать как «черный ящик», что дает определенное преимущество перед другими известными методами аппроксимаций. Во-первых, для его реализации достаточно знать информацию о взаимном расположении источников относительно расчетных точек и функцию вычисления взаимного влияния дискретных элементов. Во-вторых, для построения приближения достаточно вычислить малое число значений приближаемой функции. В-третьих, приближение строится с заранее заданной точностью. В-четвертых, алгоритм построения малоранговой аппроксимации матрицы легко параллелизуется. Разработанный быстрый метод позволяет вычислить и хранить только $O(n \log(n))$ элементов матрицы вместо $O(n^2)$, а также быстро умножать матрицу на вектор – за $O(n \log(n))$ операций вместо $O(n^2)$.

Интегральное уравнение и алгебраические методы её решения

При решении задач дифракции необходимость быстрого решения возникающих систем алгебраических уравнений выходит на первое место. В этих задачах размер матрицы определяется не только формой объекта, но и частотой рассеиваемого излучения: размерность матрицы растет пропорционально квадрату частоты. В результате необходимо вычислить большую матрицу (размера 10^5 - 10^6), а также решить систему с такой матрицей. При расчёте диаграммы обратного рассеивания необходимо решать систему со многими правыми частями.

Задача дифракции электромагнитной волны на идеально проводящем теле Σ сводится к решению интегрального уравнения (см. [2]):

$$\frac{i}{\omega \varepsilon} \int_{\Sigma} \{ \text{grad}_x \text{div}_x [\vec{j}(y) \Phi(|x-y|)] + k^2 \vec{j}(y) \Phi(|x-y|) \} d\sigma_y = -\vec{E}_0 \times \vec{n} \quad (1)$$

относительно неизвестных поверхностных токов $\vec{j}(y)$, где k – волновое число, а $\Phi(x) = \frac{1}{4\pi} \frac{\exp(ikx)}{x}$, \vec{E}_0 – электрическое поле волны, падающей на тело. Интеграл в левой части (1) понимается в смысле конечного значения по Адамару [3]. Для численного решения этого уравнения используется метод Галеркина, в котором в качестве базисных функций берутся кусочно-линейные функции специального вида, называемые функциями RWG [4].

После дискретизации решение задачи (1) сводится к решению системы уравнений $Ax = b$, (2)

где матрица A аппроксимируется с использованием мозаично скелетных аппроксимаций.

Согласно методу мозаично скелетных аппроксимаций, матрица иерархически разбивается на блоки, которые соответствуют взаимодействию группы источников и группы расчетных точек. К блокам, соответствующим разделённым источникам и приемникам, применялся алгоритм неполной крестовой аппроксимации [5]. Так как блоки вычисляются независимо, то алгоритм легко распараллеливается на высокопроизводительных вычислительных системах с распределенной памятью.

Для решения системы (2) применялся метод GMRES [6]. При решении системы (2) со многими правыми частями применялся GMRES с общими Крыловскими базисами для правых частей [7].

Пример расчета

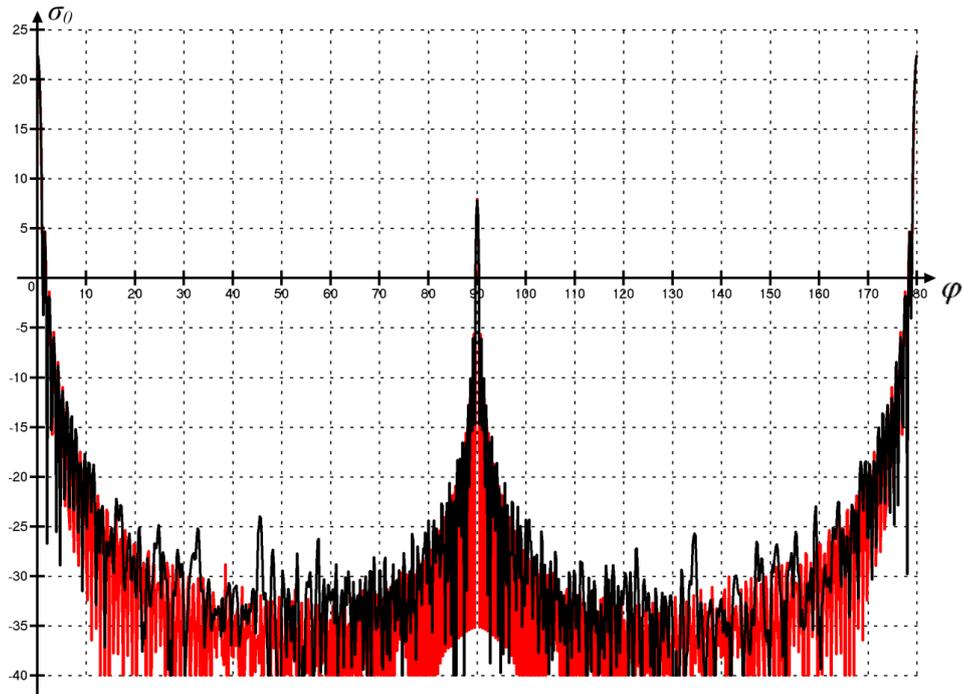


Рисунок 7. Диаграмма обратного рассеивания для круглого цилиндра: физоптика (красная линия) и интегральное уравнение (черная линия)

В качестве примера расчёта рассматривалось облучение плоской поляризованной волной круглого цилиндра высотой 25 см и радиусом 7,5 см под разными углами φ , определяемыми векторами $\vec{\tau}(\varphi) = -\vec{k}(\varphi)$, лежащими в плоскости поляризации. При этом с учётом дискретного представления интеграла из уравнения (1) рассчитывалась эффективная площадь рассеивания (ЭПР)

$$\sigma_0(\varphi) = 10 \lg(\sigma(\varphi)), \quad \sigma(\varphi) = \frac{4\pi}{|\vec{E}_0|^2} \left| \sum_l e^{-ik(\vec{\tau}, x_l)} \left[\frac{ik^2}{\omega\epsilon} (\vec{J}_l - \vec{\tau}(\vec{J}_l, \vec{\tau})) \right] |\sigma_l| \right|^2, \quad (3)$$

где $|\sigma_l|$ – площадь l -ой ячейки, по которым строились базисные функции.

На рисунке 1 приведены результаты расчёта (черная линия) для частоты 64 ГГц (длина волны $\lambda = 4,69$ мм), вертикальная поляризация. Для сравнения на рисунке красной линией показана та же величина при расчёте через физическую оптику [8]. Из рисунка видно хорошее совпадение результатов расчетов разными методами. Таким образом, решалась задачи дифракции на объекте с характерным размером в $53,3\lambda$.

При решении задачи через интегральные уравнения была построена сетка из расчёта 6 ячеек на длину волны. Это привело к необходимости решать систему (2) с 924120 неизвестными. При построении графика на рисунке 1 решалась система с 1024 правыми частями. Точность построения аппроксимации 10^{-3} , а относительная точность решения системы (по невязке) составляла 10^{-2} . Для хранения матрицы в малоранговом формате потребовалось 89,6 Гб оперативной памяти (матрица без сжатия заняла бы 6362,8 Гб). Для построения аппроксимации на 120 потоках потребовалось 5 часов. Для решения системы со всеми правыми частями потребовалось 41780 умножений матрицы на вектор (в малоранговом формате), что на 120 потоках заняло 23,7 часа.

Для расчёта использовался кластер ИВМ РАН. Пиковая производительность кластера $R_{peak} = 92,16$ Тфлопс. Узлы кластера состоят из Node Arbyte Alkazar R2Q50 G5, содержащих по 40 ядер (два 20-ядерных процессора Intel Xeon Gold 6230@2.10 ГГц). Каждый узел содержит не менее 256 Гб оперативной памяти.

Заключение

Современные численные методы решения интегральных уравнений, основанные на малоранговых аппроксимациях и реализованные на вычислительных системах с распределенной памятью, позволяют решать задачи дифракции электромагнитных волн на идеально проводящих телах до 60 длин волн.

Литература

1. Tyrtysnikov E. Incomplete cross approximation in the mosaic-skeleton method // Computing. — 2000. — Vol. 64, no. 4 — P. 367-380.
2. Colton, D., Kress, R. Integral methods in scattering theory. — Philadelphia: SIAM, 2013. — 269 p.
3. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. — М.: Наука. 1978. — 352с.
4. Rao S. M., Wilton D. R., Glisson A. W. Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. — 1982. — Vol. 30, no. 3 — P. 409- 418.
5. Stavtsev S. L., Tyrtysnikov E. E. Application of mosaic-skeleton approximations for solving EFIE // PIERS, Proceedings. — 2009. — P. 1752-1755.
6. Saad Y., Martin H. GMRES: A Generalized Minimal Residual Algorithm for Solving Nonsymmetric Linear Systems // SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing. — 1986. — Vol. 7, no. 3 — P. 856–869.
7. Ставцев С. Модификация метода минимальных невязок для решения динамических задач // В сборнике: Современные проблемы физико-математических наук. Материалы III Международной научно-практической конференции. Под общ. ред. Т.Н. Можаровой. — 2017. — С. 186-190.
8. Сетуха А.В., Ставцев С.Л., Третьякова Р.М. Применение мозаично-скелетонных аппроксимаций матриц в методе физической оптики для задач электромагнитного рассеяния. // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2022. — Т. 62. № 9. — С. 1458-1472.

Результаты применения методов Градиентной Морфологии

Results of application of Gradient Morphology methods

Терентьев Е.Н., Приходько И.Н., Алешин П.Е., Романов Д.Р., Шацков И.А.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, Москва, РФ;

en.teren@mail.ru, prihodko_in@mail.ru, r0manuch2003@yandex.ru, maxvps@yandex.ru

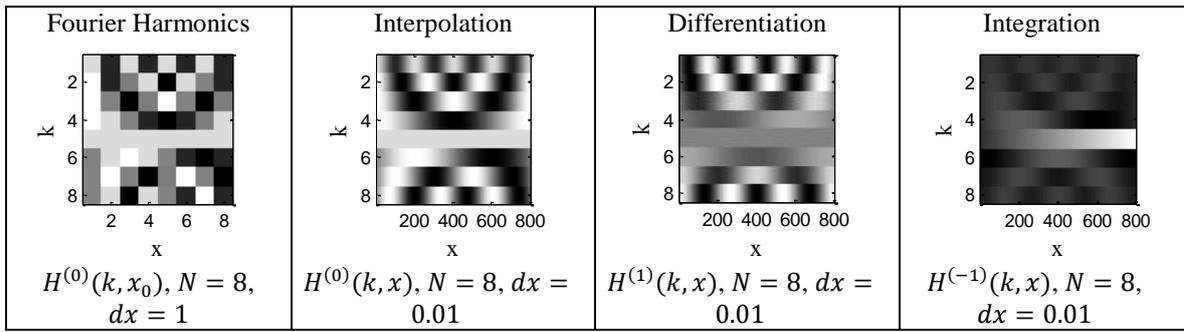
Annotation. The results of applying the methods of Gradient Morphology (GM) in field theory and in the analysis of vortexes, fire plumes, ship wakes are considered.

Introduction

The methods of Gradient Morphology (GM) are based on the Finite Dimensional Sampling Theorem (FDST) [1,4], which allows us to calculate partial derivatives of arrays of numbers, almost with the accuracy of the mantissa (without the use of finite difference schemes), in particular, to calculate gradient fields $B = \text{grad } P$ from scalar images P .

1D FDST

Theorem (Terentiev): 3 objects are given: an array (row) of samples $D = f(x_0)$ and two matrices: Fourier harmonics $H^{(0)}(k, x_0)$, $x_0 = 0: N - 1$ и $H^{(n)}(k, x)$, $x = 0: dx: N - dx$. Then the “continuous” function $dx < 1$ $f^{(n)}(x) = (H^{(0)}(x_0) * D')' * H^{(n)}(x)$ for $n = 0$ passes through the samples points $D = f(x_0)$ [1,4].



In $f^{(n)}(x)$ the first asterisk implements the direct Fourier Transform with harmonics $H^{(0)}(x_0) = \{H^{(0)}(k, x_0, dx = 1)\}$ and the second asterisk implements the inverse FT with $H^{(n)}(x) = \{H^{(n)}(k, x), dx < 1\}$.

For $n > 0$, we realize the n -th order derivative, and for $n < 0$, the $-n$ order integral with the result in the form of an interpolated “continuous” function with digitization step $dx < 1$ [1-4].

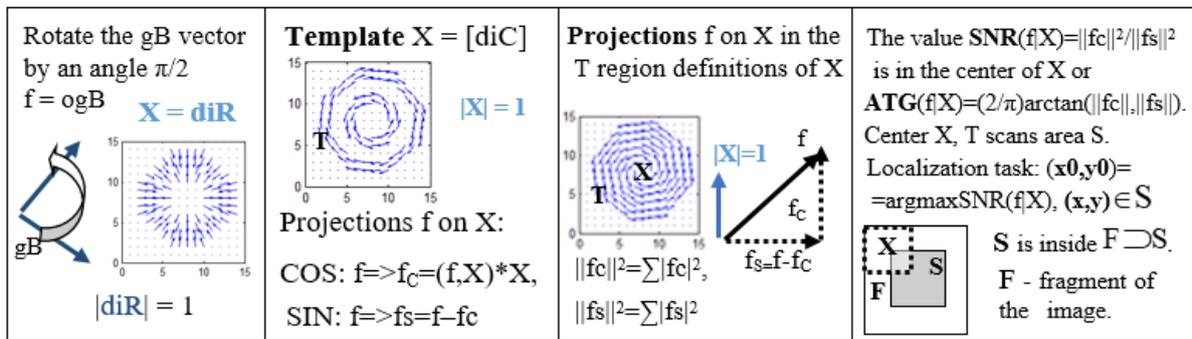


Fig. 1. Operations on vector fields, templates, COS-SIN projections, SNR function and statement of the localization task (template X) of the object.

Field theory operations in the spatial and frequency domains. Below we demonstrate (template-free) GM methods in discrete field theory in the spatial and frequency domains, $P = \{P_x, P_y, P_z\}$ – three 3D arrays of numbers.

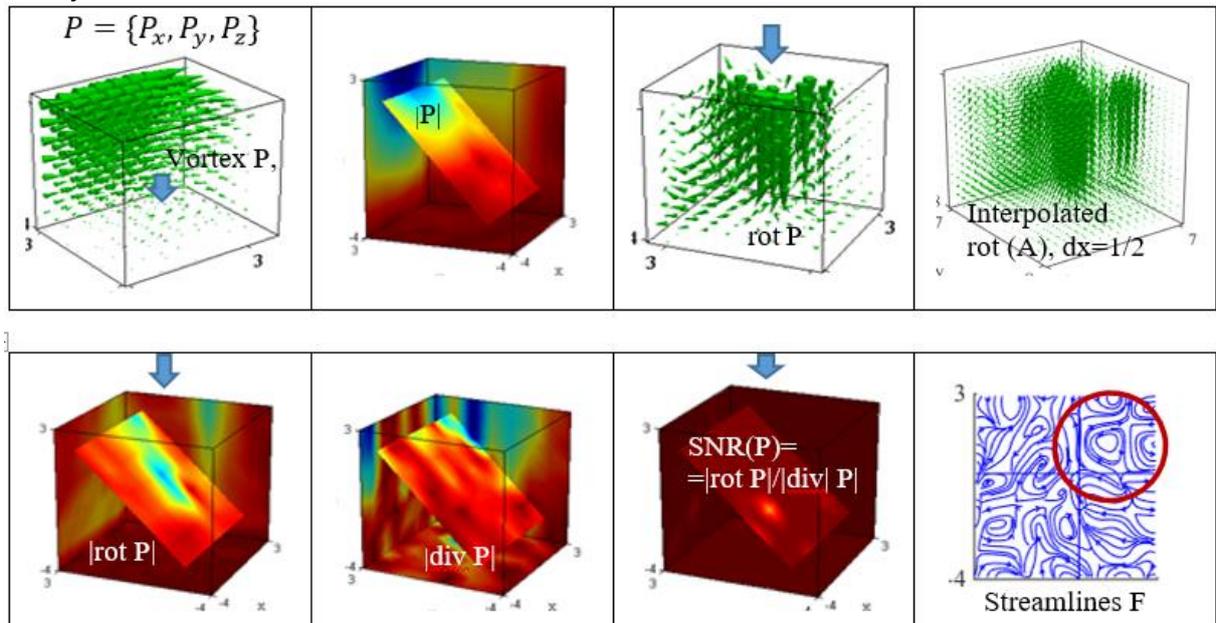


Fig. 2. The vortex axis is detected by the maximum Signal Noise Ratio - SNR values in points: $\text{argmax} SNR(P), SNR(P) = |\text{rot } P| / |\text{div } P|$.

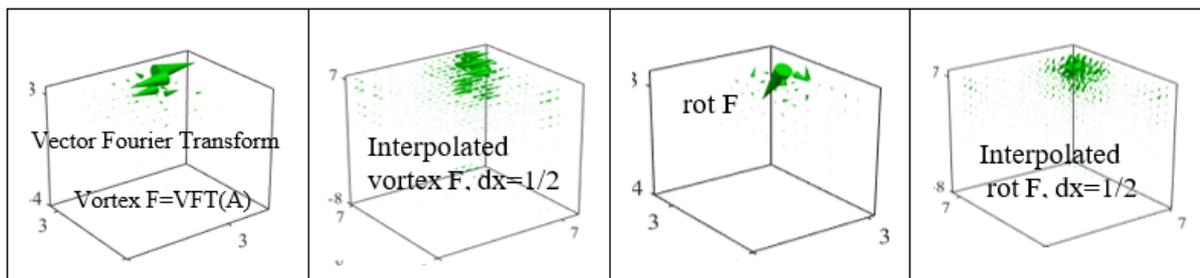


Fig. 3. Rotor operations in spatial and frequency domains with interpolation to identify objects - vortices.

Estimation of two vortices in Jupiter's atmosphere

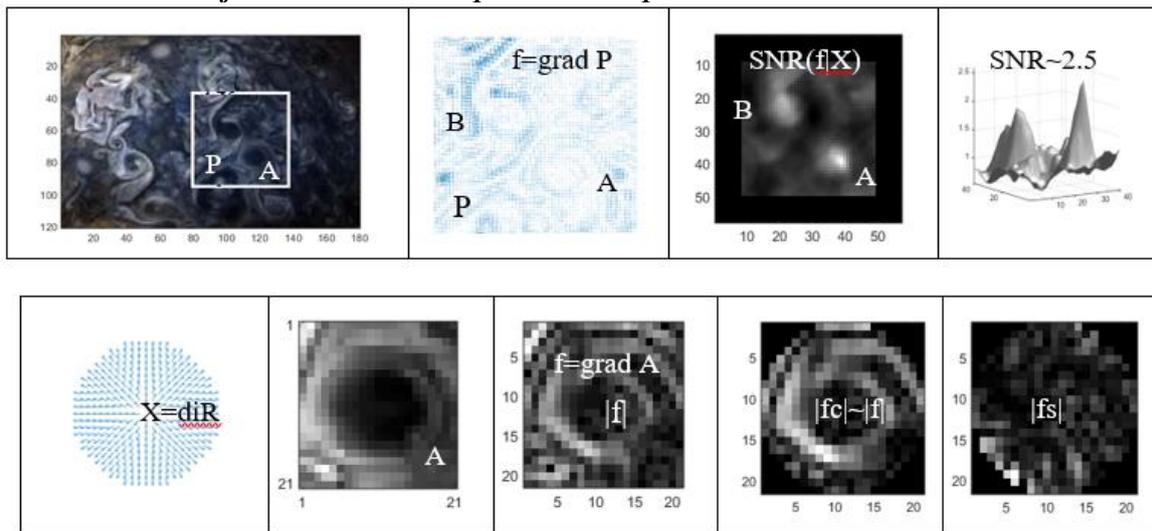


Fig. 4. An example of the resolution of two vortices in Jupiter's atmosphere, $pF=0.55$.

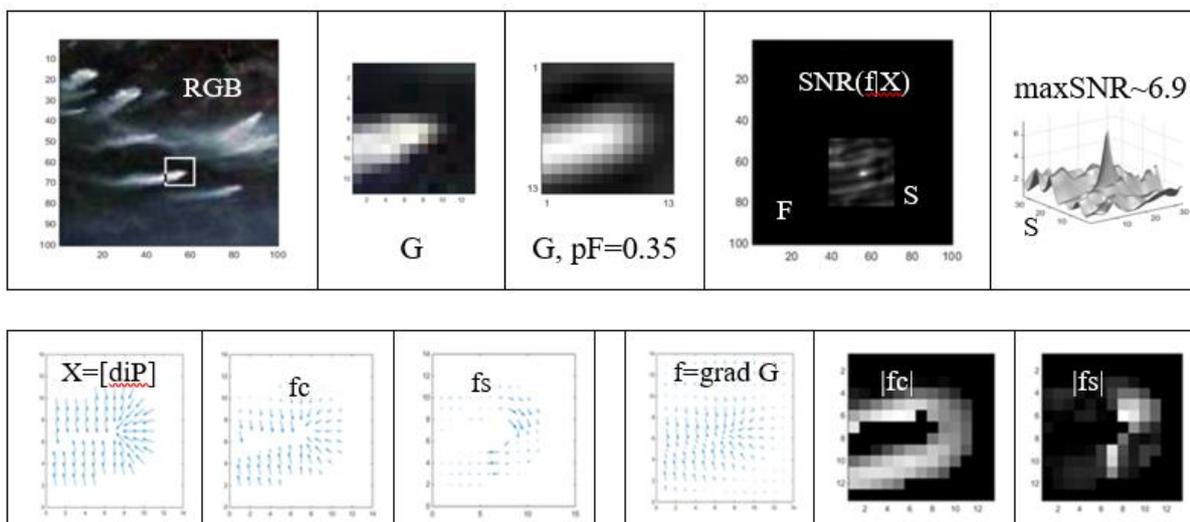


Fig. 5. Robust localization of fires with smoke plumes in images, $pF=0.35$.

Ship wake parameters

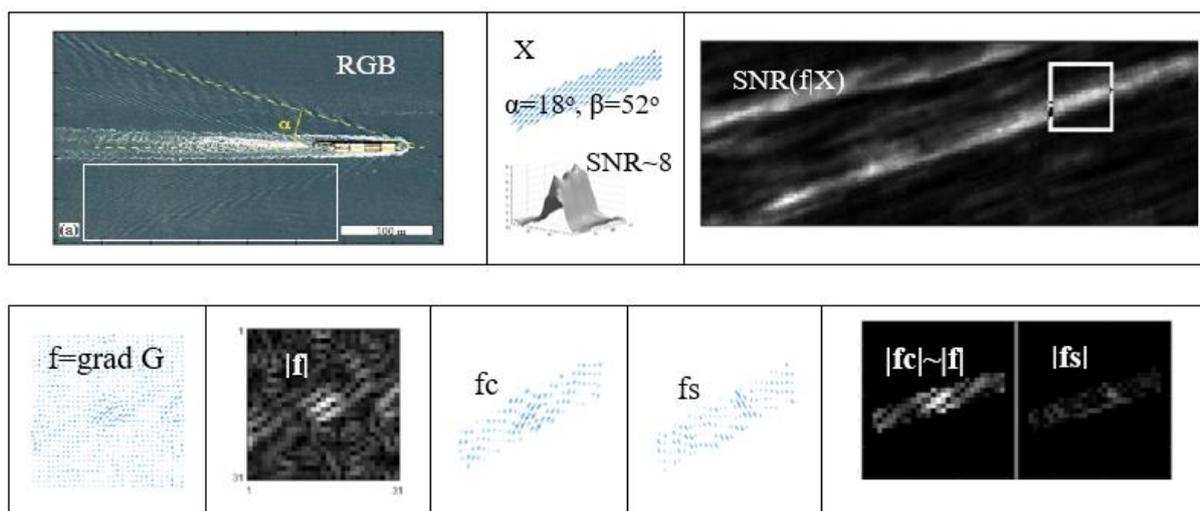


Fig. 6. The left wake of the ship is estimated similarly.

Conclusion

GM methods have prospects for application in modeling solutions to problems of wave physics, in electrodynamics, astrophysics, etc.

Literature

1. Terentiev E.N., <https://orcid.org/0000-0003-1024-2575>
2. Terentiev E.N., Prikhodko I.N., Farshakova I.I., Kuznetsov I. D., Shilin-Terentyev N.E. (2019), Localization of the Vortices and Road Signs in Images, https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-030-11533-3_30
3. Terentiev E.N., Prikhodko I.N., Farshakova I.I. (2019) Problems of accurate localization objects in imagers, AIP Conference Proceedings 2171, 110009 <https://doi.org/10.1063/1.5133243>
4. Terentiev E.N., Prikhodko I.N., Farshakova I.I. (2019) Applications of finite dimensional sampling theories, AIP Conference Proceedings 2195, 020019; <https://doi.org/10.1063/1.5140119>

Разработка и применение библиотеки атомарных функций и вейвлетов для задач цифровой обработки сигналов

Development and application of a library of atomic functions and wavelets for digital signal processing tasks

Труфанов Н. Н.¹, Чуриков Д.В.¹, Кравченко О.В.²

- 1) Научно-технологический центр уникального приборостроения, Москва, РФ;
- 2) Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, Москва, РФ.

tru17v@gmail.com

Аннотация. В работе рассматривается программная реализация библиотеки атомарных функций и вейвлетов, а также их приложений к цифровой обработке сигналов. Помимо непосредственного вычисления атомарных функций, реализуются соответствующие вейвлеты Мейеровского типа с вычислением коэффициентов разложения. Библиотека разработана на языке Python с поддержкой стандартных паттернов обработки данных, что позволяет её легко интегрировать в существующие проекты.

Введение

Методы цифровой обработки сигналов являются важным компонентом анализа и предварительной обработки данных для задач машинного обучения. От качества

проводимой обработки зависит точность построенных моделей, также задачи данного типа предполагают большой объём обрабатываемых данных, что приводит к необходимости гибкой автоматизации обработки. Из этих соображений началась разработка библиотеки на python, реализующей необходимый функционал.

Описание работы

Библиотека состоит из нескольких модулей:

1. Kernel – реализует атомарные функции как непрерывные.
2. Wavelet – реализует вычисление вейвлетов $\psi(x)$ и коэффициентов разложения и восстановления.
3. Analytics – реализует основные инструменты для анализа и сравнения функций и результатов вычислений предыдущих модулей.
4. Example – содержит различные примеры практических приложений.

Рассмотрим атомарные функции на примере $up_m(x)$, которая является финитным решением функционально-дифференциального уравнения

$$y'(x) = a \sum_{k=1}^m (y(2mx + 2m - 2k + 1) - y(2mx - 2k + 1)), \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad (1)$$

и представима в виде

$$up_m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \prod_{k=1}^m \frac{\text{sinc}^2\left(\frac{mt}{(2m)^k}\right)}{\text{sinc}\left(\frac{t}{(2m)^k}\right)} dt. \quad (2)$$

Вейвлеты. В разрабатываемой библиотеке аналогично вейвлету Мейера, образ масштабирующей функции вейвлета определяется выражением

$$\hat{\varphi}(\omega) = \begin{cases} 1, & 0 \leq |\omega| \leq \pi - \frac{\pi}{N}, \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} \nu\left(\frac{N}{2\pi} |\omega| - \frac{N-1}{2}\right)\right), & \pi - \frac{\pi}{N} \leq |\omega| \leq \pi + \frac{\pi}{N}, \\ 0, & \text{для остальных } \omega, \end{cases} \quad (3)$$

где $\nu(x) = x^4(35 - 84x + 70x^2 - 20x^3)$. В [1-4] показано, что масштабирующую функцию также $\varphi(x)$ можно определить с помощью атомарных функций, например, на основе $up_m(x)$ как

$$\hat{\varphi}(\omega) = \sqrt{\sum_{k=1}^1 up_m\left(\frac{3}{2\pi} \omega + k\right)}. \quad (4)$$

Дальнейшее построение вейвлета $\psi(x)$ происходит аналогично вейвлету Мейера. Для сравнения характеристик атомарных вейвлетов с вейвлетом Мейера, рассмотрим константы неопределенности, которые дают полную информацию о частотно-временном разрешении функции и распределении энергии.

Таблица 1. Константы неопределенности

Вейвлет	$\Delta_\varphi \Delta_{\hat{\varphi}}$	$\Delta_\psi \Delta_{\hat{\psi}}$
up_1	0.87264	2.83008
up_2	0.89211	2.90813
up_3	0.88188	2.91559

cr_4	0.95148	3.09372
Мейера	1.01148	3.27802

Меньшим значениям констант соответствует лучшая локализация функции, а, значит, вейвлеты, построенные на основе атомарных функций имеют преимущество над классическим. Также сравним рассчитанные значения коэффициентов разложения и восстановления со значениями, представленными в библиотеке PyWavelets, результаты которого отображены на рисунке 1.

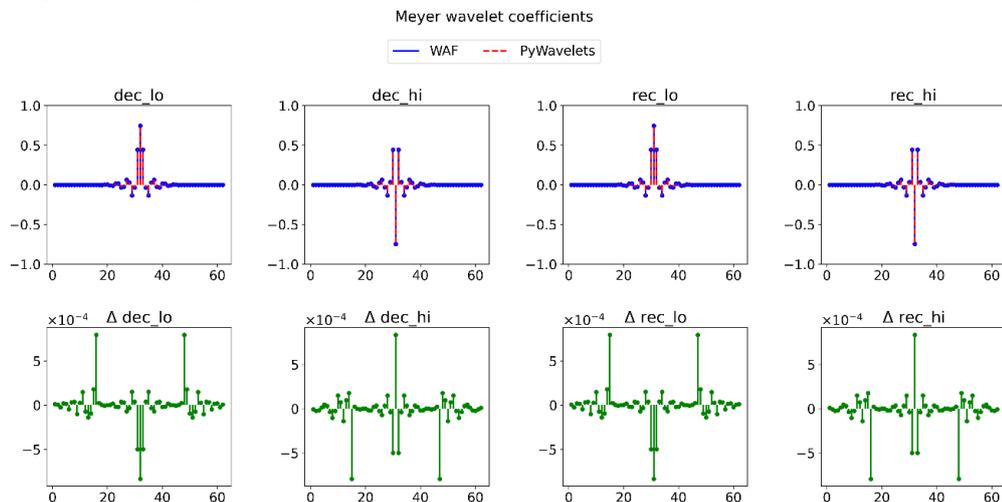


Рисунок 8. Сравнение рассчитанных коэффициентов разложения вейвлета Мейера (показаны синим цветом) с известными коэффициентами из библиотеки PyWavelets (показаны красным).

Отметим, что в библиотеке PyWavelets коэффициенты не вычисляются, а хранятся в памяти, что позволяет лишь использовать заранее вычисленные наборы, это существенно снижает гибкость инструментария и вынуждает использовать только ограниченный набор классических вейвлетов, без возможности синтеза вейвлетов с заданными параметрами. Указанный недостаток снимается представленной в работе библиотекой вейвлетов на атомарных функциях.

Приложения. Вейвлет-анализ позволяет проводить множество важных операций, таких как сжатие и фильтрация данных, представление сигнала в частотно-временной области, что в свою очередь находит применение при формировании пространства признаков в искусственных нейронных сетях. Рассматривая изображения как матрицу, приведём пример одномерной фильтрации данных, в котором каждая строка рассматривается как одномерный сигнал и раскладывается по базисным функциям, которые получены посредством сжатий и сдвигов вейвлета $\psi(x)$ и масштабирующей

функции $\varphi(x)$. Рассматривая изображения как матрицу, проведём одномерную фильтрацию по строкам (рис. 2).

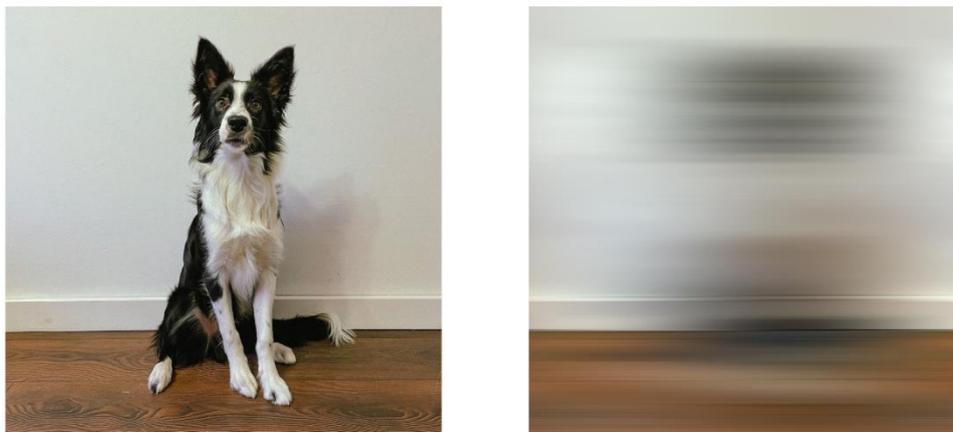


Рисунок 2. Пример фильтрации изображения по строкам

Заключение

В работе представлена библиотека, реализующая атомарные функции, а также вейвлеты на их основе. Произведено сравнение различных вейвлетов, а также представлено сравнение предлагаемых решений с существующими аналогами. Приведены примеры результатов вычислений, которые подкреплены графически.

Литература

1. *Кравченко В. Ф., Кравченко О. В.* Конструктивные методы алгебры логики, атомарных функций, вейвлетов, фракталов в задачах физики и техники. М.: ТЕХНОСФЕРА, 2018. 696 с.
2. *Кравченко В. Ф., Чуриков Д. В.* Атомарные функции $h_n(x)$ и новые ортогональные вейвлеты на их основе. // Успехи современной радиоэлектроники. № 6, 2008, С. 67-85.
3. *Кравченко В. Ф., Чуриков Д. В.* Цифровая обработка сигналов атомарными функциями и вейвлетами. М.: ТЕХНОСФЕРА, 2018. 182 с.
4. *Горшков А. С.* Цифровая обработка сигналов: атомарные функции и теория чисел. М.: Машиностроение, 1994. 224 с.

Экспериментальная электродинамика

Высокодобротные оптические резонаторы с прореженным спектром для лазерных гравитационных антенн

High-Q Optical Resonators with Thinned Spectrum for Laser Generator Antennas

Вятчанин С.П.¹, Мацко А.Б.², Поплавский М.В.³

1) *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, Москва, РФ;* 2) *Институт теоретической и прикладной электродинамики РАН, Москва, РФ;* 3) *Университетская Гимназия Московского государственного университета, РФ.*

svyatchanin@phys.msu.ru

Для повышения чувствительности лазерных наземных гравитационных антенн требуется увеличивать мощность света, циркулирующего в антенне. Нежелательный эффект параметрической неустойчивости препятствует этому. Он сводится к параметрическому возбуждению стоксовой моды частоты ω_1 и акустической моды зеркала частоты ω_m , которые удовлетворяют условию синхронизма

$$\omega_0 = \omega_1 + \omega_m, \quad (1)$$

где ω_0 — частота основной моды, возбуждаемой в антенне.

Для его ослабления мы предлагаем использовать резонаторы Фабри Перо с прореженным спектром, в которых искусственно увеличены оптические дифракционные потери мод высокого порядка. При этом оптические потери основной моды поддерживаются на обычном высоком уровне (менее 5 ppm за оборот).

Для этого мы предлагаем использовать зеркала, форма которых отличается от сферической. Используя математическое моделирование на основе преобразования Ганкеля, мы численно подобрали параметры зеркал, при которых оптические дифракционные потери основной моды остаются на уровне 5 ppm, тогда как потери мод высокого порядка увеличены до уровня 5000 ppm.

Применение линзового коллиматора для измерения бистатических характеристик рассеяния объектов

Development of a lens collimator for measuring bistatic scattering characteristics

Гильмутдинов Р. В.^{1,2}, Меньших Н. Л.², Фёдоров С. А.²

1) *Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)* 2) *Институт теоретической и прикладной электродинамики РАН, Москва, РФ.*

psevduch777@gmail.com

Аннотация. В работе исследовалась модификация бистатического измерительного стенда сантиметрового диапазона длин волн с помощью системы антенна – линза. Данная модификация позволяет создать распределение поля с приемлемыми характеристиками в области размещения исследуемого объекта в широкой полосе частот. При проведении измерения коэффициента зеркального отражения материала в свободном пространстве большое влияние на результаты измерения оказывают дифракционные эффекты, которые можно уменьшить, сформировав оптимальное поле в области объекта. Было проведено численное моделирование с использованием метода моментов измерения коэффициента зеркального отражения на модернизированном бистатическом стенде с линзой. Результаты расчетов показали, что применение линзы позволяет повысить точность измерения коэффициента зеркального отражения в широком частотном и угловом диапазоне.

Введение

Эффекты взаимодействия электромагнитных волн с различными объектами вызывают значительный интерес в связи с активным развитием многопозиционной радиолокации. Для измерений свойств объектов создаются все новые трехмерные бистатические стенды [1-2] с высокой степенью свободы вращения антенн и исследуемых объектов. В [3] описана бистатическая установка, позволяющая измерять бистатическую эффективную площадь рассеяния малых объектов. При бистатических исследованиях характеристик рассеяния объектов возникает множество препятствий, не позволяющих получить приемлемую точность результатов. К основным погрешностям относятся инструментальные и методические [4]. Последние связаны с выбранным методом измерения характеристик. Методическая погрешность вызвана конечными размерами образца. Линза позволяет снизить это влияние за счет уменьшения амплитуды поля на краях образца при обеспечении широкой зоны с относительно небольшим изменением фазы поля в области объекта измерения. В данной работе описывается моделирование модернизированной бистатической установки [5] для проведения измерений бистатических характеристик рассеяния и свойств материалов. Целями настоящей работы являются: создание распределения поля с приемлемыми характеристиками в области размещения измеряемого объекта; уменьшение методической погрешности, вызванной краевыми эффектами при измерении значения модуля коэффициента зеркального отражения (МКО) материала за счет применения линзового коллиматора.

Описание работы

Рассмотрена гиперболическая линза с постоянной диэлектрической проницаемостью материала для данного диапазона частот. Численные исследования зеркального отражения от образцов материалов проводились методом моментов в программе FEKO. Результаты численного моделирования с линзой и в плоском поле сравнивались между собой, а также с аналитическим расчетом по формулам Френеля [6] для бесконечного слоя материала.

Исследование системы антенна – линза. На рисунке 1а изображена схема применения линзы для измерений характеристик рассеяния. На рисунке 1б изображена характерная схема системы антенна – линза. Точка O_1 – начало координат, совпадает с геометрическим центром основания антенны (задняя крышка). Расстояние между антенной и исследуемым образцом L , фокусное расстояние F – расстояние от вершины гиперболической поверхности линзы до примерного положения фазового центра антенны для заданного частотного диапазона. Линза сделана из материала с $\epsilon=2.3$, что примерно соответствует некоторым пластикам в радиочастотном диапазоне частот.

Вокруг линзы расположена диафрагма из широкополосного радиопоглощающего материала (РПМ) поролонового типа. Параметры РПМ в исследуемом диапазоне считаются заданными. Предполагается, что система антенна – линза жестко связана с тележкой, на которой они одновременно вращаются вокруг измеряемого образца.

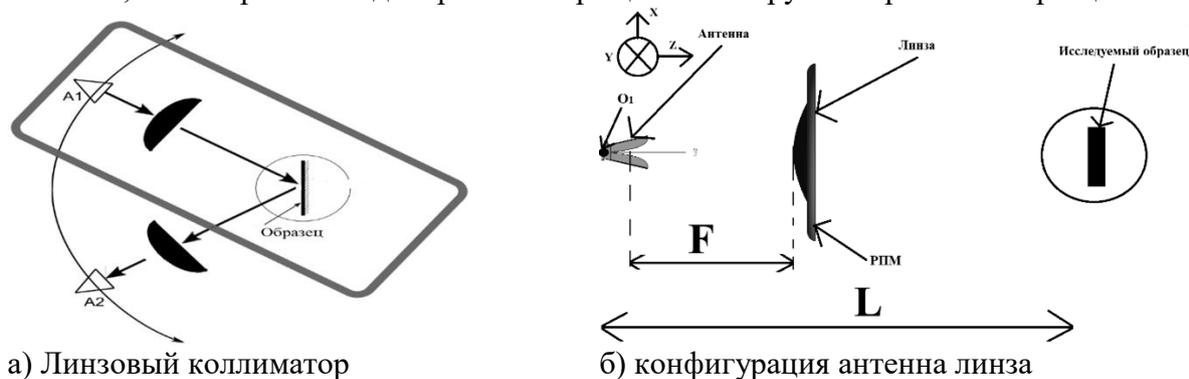


Рисунок 1. Схема модернизации бистатического стенда

Моделирование эксперимента и результаты расчётов. Рассмотрим модель численного эксперимента по исследованию МКО образцов. В модель заложено несколько приближений, которые сразу следует оговорить.

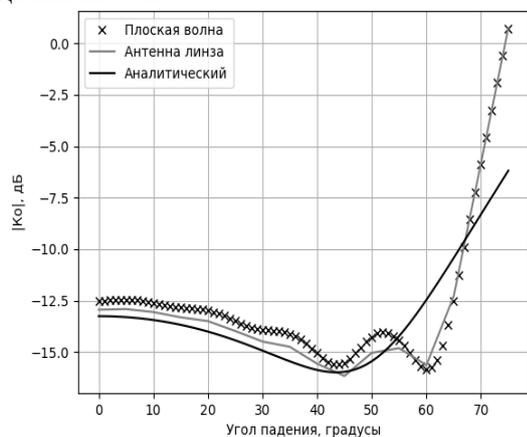
В реальном эксперименте есть большое количество помеховых сигналов, в первую очередь это прямое попадание сигнала из передающей антенны в приемную. Обычно такие сигналы стараются отсеять применением фильтрации во временной области. В данной модели помеховых сигналов нет, потому что не рассматривается приемная антенна. Вместо нее исследуется поле в дальней зоне. Передающая антенна боковыми и задними лепестками также давала бы помеховый сигнал в дальнюю зону. Но этого практически не происходит за счет разбиения задачи по исследованию $|R|$ образца при облучении системой антенна – линза на две отдельные подзадачи. В первой подзадаче получаем распределение поля в небольшой области пространства на плоскости прямо за линзой, сформированного системой антенна – линза. Во второй подзадаче данное поле используется как источник излучения вместо системы формирования поля. В качестве исследуемых образцов исследовались модельные магнитодиэлектрики без частотной дисперсии.

Из полученных данных выбирались те, в которых угол падения был равен углу отражения. МКО (в децибелах) представлен следующей формулой:

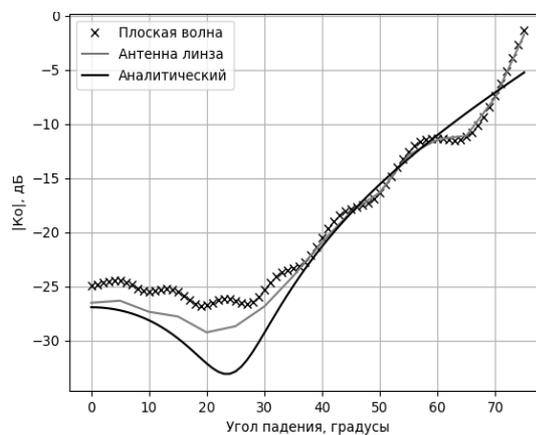
$$K_0(f, \varphi) = 20 \lg \left| \frac{E_{\text{diel}}(f, \varphi)}{E_{\text{norm}}(f, \varphi)} \right|$$
, где $E_{\text{diel}}(f, \varphi)$ – поле, отраженное от образца, $E_{\text{norm}}(f, \varphi)$ – поле, отраженное от металлической пластины.

На рисунке 2 показаны графики зависимости МКО, полученные различными способами: при облучении плоской волной, в поле системы антенна – линза и аналитический расчет по формулам Френеля.

Видно, что в диапазоне углов $0-40^\circ$ значения МКО, полученные с использованием модифицированного поля ближе к аналитическим значениям МКО, чем результаты, полученные при облучении плоской волной. Отраженный сигнал рассчитывался в дальней зоне.



а) Материал 1 – 6 ГГц



б) Материал 2 – 9 ГГц

Рисунок 2. Графики зависимости МКО от угла падения на различных частотах, Н-поляризация

Применение системы антенна-линза уменьшило методическую погрешность метода замещения с 0.8 дБ до 0.4 дБ на уровне значений МКО -10 дБ, и уменьшение погрешности с 1.3 до 0.6 дБ на уровне значений МКО -15 дБ.

Заключение

Проведенные численные эксперименты показывают, что использование линзового коллиматора обеспечивает необходимые характеристики электромагнитного поля в рабочей зоне измерительного стенда в широкой полосе частот. Это дает возможность использовать линзу для уменьшения методической погрешности при измерении МКО

материалов. Показано, что применение системы антенна-линза в сантиметровом диапазоне позволяет уменьшить методическую погрешность МКО.

Литература

1. *Röding M., Sommerkorn G., Häfner S., Ihlow A., Jovanoska S., Thomä R. S.* A Double-Arch Positioner for Bistatic RCS Measurements with Four Degrees of Freedom. // Proc. of the 47th European Microwave conf. Oct. 2017.
2. *Saleh H., Geffrin J.-M., Tortel H.* Bistatic scattering measurement on low permittivity spheroidal objects // 2017 11th European Conference on Antennas and Propagation (EUCAP), Paris, 2017, pp. 259-262.
3. *Daout F., Schmitt F.* Analysis of a bistatic Radar Cross Section measurement capability for the Boris Vian anechoic chamber // Antenna Measurements & Applications (CAMA): 2014 IEEE Conference, pp. 1-4, 2014.
4. *Gilmutdinov R.V., Krasnolobov I.I., Menshikh N.L., Fedorov S.A.* Procedural Measurement Error in Specular Reflection Coefficient from Planar Samples Using Two Different Types of Test Stands. MEASUREMENT TECHNIQUES. V 64, N.6, Pp. 481-487. DOI: 10.1007/s11018-021-01957-7
5. *S. A. Fedorov, N. L. Menshikh, R. V. Gilmutdinov and V. S. Solosin,* "Comparison of the Measurement Accuracy of Material Sample Specular Reflection Coefficient for Two Types of Measuring Facilities," 2021 Radiation and Scattering of Electromagnetic Waves (RSEMW), 2021, pp. 332-336, doi: 10.1109/RSEMW52378.2021.9494032.
6. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 503 с.

Оптимизация толщины поглощающей пластины в экспериментах по рассеянию электромагнитного поля методами математического моделирования

Optimization of the thickness of the absorbing plate in experiments on the dispersion of the electromagnetic field methods of mathematical modeling

Евстафьев Е.Е.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, Москва, РФ.

egorezbalka@gmail.com

Аннотация. В работе рассматривается задача уменьшения ошибок, связанных со взаимодействием опоры и исследуемого объекта, возникающих во время проведения экспериментов по рассеянию электромагнитного поля на объекте.

Введение

Для проведения высокоточных экспериментальных исследований свойств рассеяния объектов необходимы соответствующие измерительные стенды. Возможности измерительного стенда характеризуются его важнейшими параметрами: размером рабочей зоны, диапазоном рабочих частот и точностью измерения эффективной площади рассеяния (ЭПР) и других параметров объектов [1]. Точность измерения характеристик рассеяния объектов зависит не только от неравномерности распределения поля в рабочей зоне измерительного стенда, но и от других факторов, в частности, от влияния конструкций, находящихся вблизи объекта измерения [2].

Для проведения измерений требуется поместить исследуемый объект в рабочую зону безэховой камеры (БЭК). Для этого может использоваться подвес или опора в виде металлического пилона. Использование опоры обеспечивает хорошую стабилизацию и высокую точность позиционирования исследуемого объекта, а также позволяет размещать на измерительном стенде тяжелые объекты [2-3].

Можно выделить две основные причины, вызывающие искажения результатов измерений, связанные с присутствием пилон в рабочей зоне БЭК. [2,3]. Первая – рассеяние падающей волны непосредственно на пилоне, и, поскольку его размеры могут быть сравнимы или же превышать размеры исследуемого объекта, влияние рассеянного

на нём поля на измерения может оказаться значительным. Второй причиной является взаимодействие объекта и пилона, а именно переотражение между ними.

Для уменьшения влияния поддерживающего устройства на точность измерения характеристик рассеяния объекта пилон обычно имеет оживальную форму, которая позволяет минимизировать его ЭПР [3]. Однако полностью исключить влияние невозможно.

Существует целый ряд способов уменьшения погрешностей, связанных с переотражением между опорой и объектом. Например, в [4] исследовались защитные экраны в виде диэлектрического щита и диэлектрической пластины с поглощением.

Описание работы

Для эффективного уменьшения переотражений между исследуемым объектом и опорой (пилоном) можно разместить между ними слой радиопоглощающего материала (РПМ) (рис.1), который поглотит излучение, отражённое от объекта в сторону опоры.

Такой слой будет работать эффективно, если подобрать его характеристики (параметры материала, толщину) таким образом, чтобы минимизировать коэффициенты прохождения и отражения. Достаточно очевидно, что более толстый материал будет обеспечивать эффективное снижение влияния переотражений между объектом и опорой на более низких частотах. Прохождение отражённой волны через слой РПМ можно устранить, разместив РПМ на тонком листе металла. Но тогда, чтобы сохранить коэффициент отражения от пластины на прежнем значении, придётся увеличивать толщину слоя РПМ. К тому же, увеличение толщины слоя РПМ приводит к увеличению погрешностей, связанных с отражением волны от боковой поверхности пластины. Электромагнитная волна, падающая на торец пластины, будет отражаться обратно и попадать в приемную антенну, что может вызвать искажения в результатах измерения ЭПР объекта. Напряженность отражённого поля будет тем больше, чем толще будет слой РПМ. Поэтому для эффективной работы пластины из РПМ требуется при минимальной толщине слоя РПМ достичь таких значений коэффициентов прохождения и отражения материала, которые позволят практически устранить влияние переотражения между объектом и пилоном на точность измерения ЭПР.

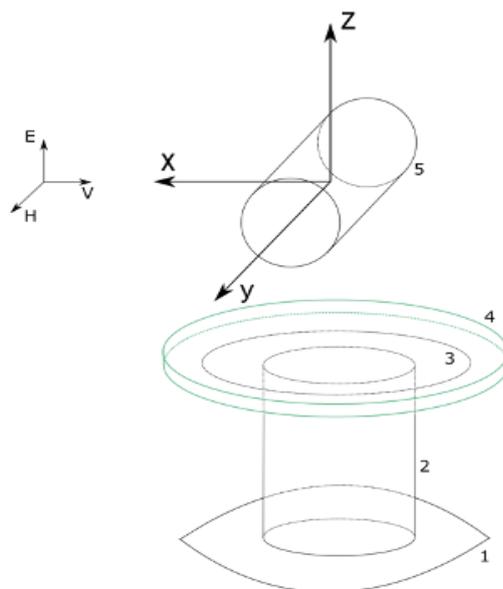


Рисунок 1. Геометрия модели расчета рассеяния волны на пилоном с пластиной и объектом. 1-верхний торец пилона, 2-опорно-поворотный вал, 3-металлический слой, 4-пластина из РПМ, 5-цилиндрический объект

В данной работе будут рассмотрены две пластины: слой РПМ, лежащий на тонком листе металла и слой РПМ, лежащий на слое ABS-пластика. Пластина с металлическим слоем будет иметь нулевой коэффициент прохождения, поскольку падающая электромагнитная волна, дошедшая до металлической пластины сквозь слой РПМ, отразится обратно в слой РПМ. Таким образом, электромагнитная волна, поглощаясь, дважды пройдёт через слой РПМ, но при этом вся непоглощённая энергия будет отражена обратно. В случае пластины из РПМ и пластика коэффициент прохождения всегда будет ненулевой, но при этом при одинаковых толщинах слоя РПМ коэффициент отражения будет ниже, чем для пластины с металлом, поскольку непоглощённая энергия волны распределится между отражённой и прошедшей волной.

Таким образом, цель работы – для обеих конфигураций определить минимальную толщину пластины, при которой коэффициент отражения материала будет близок к коэффициенту отражения от полупространства, а коэффициент прохождения будет на достаточно низком уровне – 10 дБ.

Поскольку полностью устранить отражение волны от материала невозможно, будем считать предельным значением коэффициента отражения R_{lim} его величину на минимальной частоте для наиболее толстого слоя РПМ, когда значение коэффициента практически перестаёт изменяться и он эквивалентен коэффициенту отражения от полупространства. Для коэффициента прохождения предельное значение T_{lim} будет на уровне -10 дБ.

Далее, для каждой толщины пластины рассчитывается разность между полученным коэффициентом и R_{lim} для всех частот, причём все коэффициенты, которые будут меньше, чем R_{lim} , будут считаться равными R_{lim} , поскольку их учёт не повысит точность расчёта на всем спектре частот (т.к. они меньше чем R_{lim} , а результата лучше чем R_{lim} нельзя получить сразу на всём спектре частот).

$$R_{analyze} = \max_f \left(\begin{cases} R - R_{lim}, R > R_{lim} \\ 0, R \leq R_{lim} \end{cases} \right)$$

Чтобы найти оптимальную толщину РПМ сразу на всём диапазоне частот, нужно найти толщину, при которой максимальная по частотам разность между значением коэффициента отражения и R_{lim} минимальна.

Для решения задачи поиска минимума толщины слоя РПМ в пластине «РПМ-металл» был выбран метод золотого сечения, поскольку он не накладывает строгих требований на исследуемую функцию. Задача поиска минимума для пластины «РПМ-пластик» является двумерной, поскольку минимизировать надо одновременно толщину РПМ и толщину пластика, для чего можно применять метод координатного спуска.

Исследования методом математического моделирования показали, что для пластины «РПМ-металл» первый минимум будет при толщине 84,4 мм, но, отклонение от R_{lim} в -35 дБ может быть избыточным, поскольку в качестве R_{lim} был выбран уровень в -16,8 дБ, и толщина РПМ 84,4 мм слишком велика. На толщинах 30-35 мм практически достигается уровень отражения от полупространства, что уже может дать хороший результат. В случае, если требуется сделать коэффициент отражения ниже, то следует брать толщину РПМ около 80 мм вблизи оптимума, поскольку меньшие толщины не дадут выигрыша в результатах.

Теперь перейдём к пластине РПМ-пластик. Даже для сравнительно тонкой пластины РПМ в 30 мм можно добиться приемлемых отклонений от R_{lim} в -29,5 дБ при толщине пластика 30,2 мм. Использование более тонкого слоя РПМ достаточно важно, поскольку, в отличие от пластика, он достаточно дорог в изготовлении.

Заключение

Таким образом, можно сделать вывод, что:

1. Для пластины «РПМ-металл», в зависимости от условий проведения эксперимента, следует использовать слой РПМ толщиной 30-35 мм. Если же требуется

точность выше, чем отклонение на уровне -16,8 дБ, то потребуется изготавливать пластину значительно большей толщины, приблизительно, 80 мм.

2. При использовании пластины «РПМ-пластик» для толщины слоя РПМ 30 мм можно добиться значительно меньших отклонений для коэффициента отражений на уровне -29,5 дБ. Это может иметь практическое значение при невозможности изготовления слоя РПМ достаточной толщины. Но, толстый слой пластика может вызывать отражения от своей торцевой части, что требует дальнейшего исследования.

Литература

1. *L. Hemming*. Electromagnetic Anechoic Chambers: A Fundamental Design and Specification Guide. — Wiley-Interscience, John Wiley and Sons and IEEE Press. Piscataway, New Jersey, 2002
2. *N.P. Balabukha, A.S. Zubov, V.S. Solosin*. Compact range for measurements of object scattering characteristics — Moscow, Nauka Publ, 2007. — 266p.
3. *E. F. Knot*. Radar cross section measurements. — Springer Science & Business Media, 2012.
4. *Balabukha N.P., Evstafev E.E., Menshikh N.L., Shapkina N.E.* Comparison of Two Methods for Reducing the Support Influence on the Electromagnetic Field Scattered by an Object Using the Method of Mathematical Modeling // Photonics & Electromagnetics Research Symposium (PIERS). — 2021. — DOI: 10.1109/piers53385.2021.9695111.

Применение интегрального коэффициента отражения для оптимизации покрытия стенок металлической полости

Use of integral reflection coefficient to optimize coating of the walls of metallic cavity

Кисель В.Н.¹, Кожеко А.С.^{1,2}

1) *Институт теоретической и прикладной электродинамики РАН, Москва, РФ;*

2) *Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Москва, РФ*

kis_v@mail.ru

Аннотация. Выбор параметров покрытий, предназначенных для изменения полей рассеяния электромагнитной волны от металлических полостей, осложняется наличием сложных дифракционных явлений внутри полости. В докладе представлен разработанный подход для случая, когда требуется оптимизировать параметры покрытия криволинейной внутренней поверхности полости в заданных частотном и угловом диапазонах. Способ выбора параметров покрытия основан на энергетических соображениях, его критерием служит величина мощности, переносимой от электромагнитной волны в объем покрытия. В результате удастся получить интегральные оценки эффективности покрытий с учетом особенностей электромагнитной дифракции внутри полости; обсуждаются результаты расчетов.

Введение

Исследованию радиолокационных характеристик полостей, в частности, таких как сопло или воздухозаборник реактивного двигателя, традиционно уделяется большое внимание [1], [2]. Очевидным путем снижения уровня электромагнитного рассеяния от полости является применение радиопоглощающего покрытия (РПП) на ее стенках. Но если диаметр полости многократно превосходит длину волны, то эффект от нанесения покрытия может быть замечен лишь в том случае, когда устранена прямая видимость основного рассеивающего элемента — двигателя, например, путем использования криволинейного воздушного канала. Ниже предлагается способ оптимизации параметров покрытия в заданных частотном и угловом диапазонах для этого случая.

Интегральный коэффициент отражения

Поскольку стенка полости является криволинейной, а также из-за сложных дифракционных процессов внутри полости разные фрагменты РПП облучаются под

разными углами. Можно предположить, что основное поглощение волны обеспечивается при локально параллельной поляризации волны, в окрестности угла Брюстера, а совокупную эффективность РПП охарактеризовать интегралом от квадрата коэффициента отражения в некотором угловом диапазоне, включающем угол Брюстера. Очевидно, эта величина будет соответствовать энергии рассеянного поля. Будем далее называть интегральным коэффициентом отражения R_{int} квадратный корень из этого интеграла.

В качестве примера построим двухмерные диаграммы R_{int} (в дБ), рассчитанные в координатах $Re(\varepsilon) - Im(\varepsilon)$ для двух частот: 3 ГГц и 10 ГГц, рисунок 1 (верхние графики). Здесь интегрирование проведено в диапазоне углов θ от 45 до 89 градусов, отсчитывая от нормали. На нижних графиках в тех же координатах показаны значения R_{min} (в дБ) – коэффициента отражения в минимуме, т.е. в точке, соответствующей углу Брюстера. Цифрами от 1 до 4 на диаграммах показаны точки, координаты которых (т.е. вещественная и мнимая части диэлектрической проницаемости) соответствуют модельным (демонстрационным) диэлектрическим покрытиям С1, С2, С3 и С4, электрофизические характеристики этих РПП представлены в таблице 2. На диаграммах хорошо заметна область, соответствующая минимальным значениям интегрального коэффициента отражения.

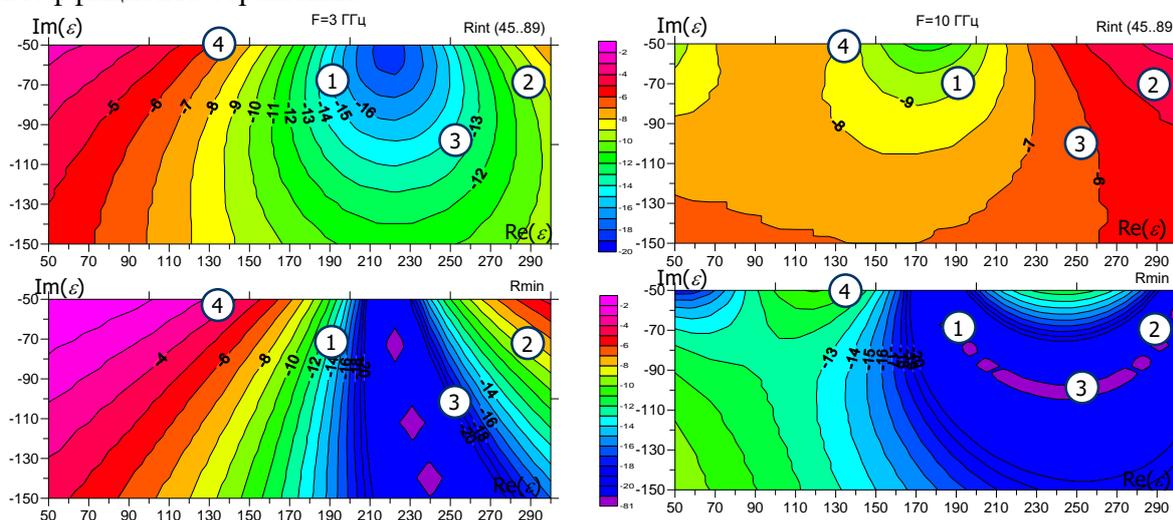


Рисунок 1. Диаграммы интегрального (R_{int}) и минимального (R_{min}) коэффициентов отражения (дБ) на частотах 3 ГГц и 10 ГГц

Таблица 2. Электрофизические характеристики РПП

Тип	ε	$\text{tg } \delta$	F = 10 ГГц		F = 3 ГГц	
			R_{min} , дБ	$R_{int}(45..89)$, дБ	R_{min} , дБ	$R_{int}(45..89)$, дБ
С1	190 - i 70	0,37	-40,7	-9,3	-12,4	-14,5
С2	290 - i 70	0,24	-35,1	-4,6	-7,9	-9,6
С3	250 - i 100	0,4	-51,4	-6,3	-20,8	-13,8
С4	135 - i 50	0,37	-10,7	-8,4	-3,6	-6,5

Отметим, что покрытие С1 обладает такими параметрами, которые делают его предпочтительным одновременно в двух частотных диапазонах. Интересно, что наличие глубокого провала R_{min} при угле Брюстера (покрытия С2 и С3, см. рисунок 1) не гарантирует ни широкополосности покрытия, ни минимума его интегрального коэффициента отражения. Не является надежным индикатором эффективности и

параметр $\text{tg}\delta = |\text{Im}(\epsilon)/\text{Re}(\epsilon)|$: покрытие С4 обладает худшими свойствами по сравнению с С1, несмотря на то же самое значение $\text{tg}\delta$.

Очевидно, что имея информацию о преимущественных значениях углов падения волны, а также о поглощении энергии в стенках полости для обеих поляризаций, можно построить более точные алгоритмы оптимизации параметров РПП. Это можно сделать, в частности, за счет выбора подходящих весовых функций и ширины интервала интегрирования при расчете R_{int} (рисунок 2).

Пример угловой гистограммы распределения поглощаемой мощности в покрытии стенок модельной полости цилиндрической формы с отношением длины к диаметру 3:1 при падении плоской волны параллельной поляризации под углом 30 градусов к оси полости показан на рисунке 3. Здесь рассматривается поглощение энергии при «прямом ходе» волны (в сторону проводящего торца), на начальном фрагменте длиной 2/3 от общей длины полости. Видно, что эта величина имеет четко выраженный максимум в окрестности углов θ около 60 градусов. Наибольшей эффективности покрытия следует ожидать, если в этот же угловой диапазон попадет и угол Брюстера. Отметим, что при «обратном ходе» гистограмма существенно меняет свой вид, что обусловлено сложными дифракционными явлениями и сопутствующей деполяризацией волны.

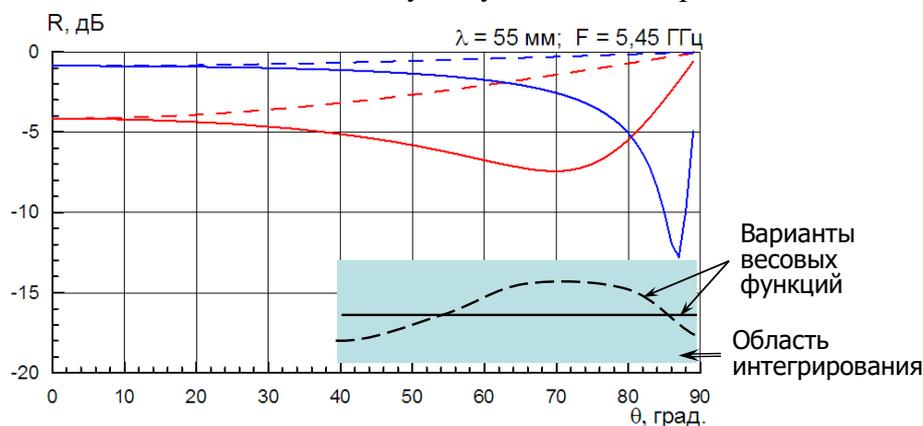


Рисунок 2. Параметры интегрирования отраженной энергии

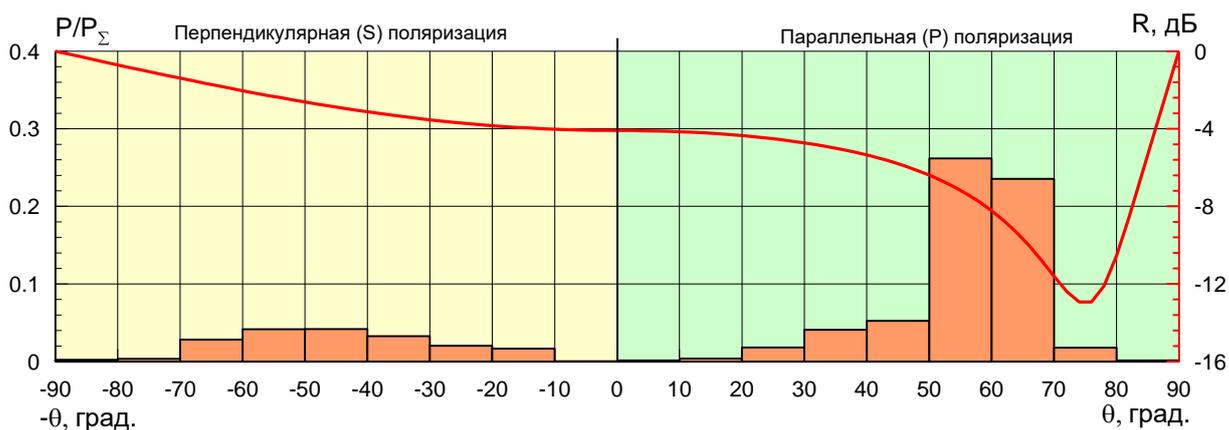


Рисунок 3. Угловое распределение поглощения (прямой ход), частота 3 ГГц

Таким образом, анализ угловых зависимостей поглощаемой мощности дает возможность прогнозировать эффективность работы РПП в данных условиях, т.е. для конкретной полости и заданных условий облучения.

Заключение

В ходе исследований было показано, что:

- оптимальные параметры покрытия стенок полости определяются многими факторами: геометрией, параметрами облучения, частотным диапазоном и др.;

- минимизация интегральной отраженной мощности может служить критерием выбора свойств РПП для конкретных условий применения;
- разработанные электродинамические модели, вычислительные алгоритмы и программы позволяют получать большие массивы данных об условиях работы РПП в каждой точке полости.

В качестве дальнейших шагов предполагается развивать методы обработки этих данных с целью выработки критериев эффективности РПП при их применении для изменения полей рассеяния полостей сложной формы.

Литература

1. Радиолокационная заметность самолетов. Обзор по материалам открытой иностранной печати // Сост. Монин М.А., Язудина И.М. – М.: ЦАГИ, 1986. – 75 с.
2. Справочник по радиолокации. Пер. с англ. // ред. М. Сколника. Т.1. – М.: Сов. радио, 1977. – 455 с.

Уменьшение влияния взаимодействия линзы и объекта при измерении его ЭПР в рупорной безэховой камере за счет поворота линзы

Reducing the influence of the interaction of the lens and the object when measuring its RCS in a tapered anechoic chamber by rotating the lens

Балабуха Н. П.¹, Меньших Н. Д.¹, Солосин В. С.¹

1) Институт теоретической и прикладной электродинамики РАН, Москва, РФ.

n_bala@mail.com, nl_menshikh@itae.ru, svsl5105@yandex.ru

Аннотация. В работе рассматривается влияние переотражений между линзой и объектом измерения, помещенным в рабочую зону рупорной безэховой камеры, на результаты определения его эффективной площади рассеяния (ЭПР). Показано, что за счет поворота линзы можно существенно снизить влияние таких помеховых сигналов. Определены погрешности измерения ЭПР объекта, связанные с этими переотражениями в случае линзы, установленной нормально оси камеры и в случае линзы с поворотом относительно оси.

Ключевые слова: рупорная безэховая камеры, линза радиочастотного диапазона, измерения ЭПР

Введение

В литературе почти не обсуждаются рупорные безэховые камеры (РБЭК) [1] с линзами, хотя интерес к низкочастотным камерам заметен, в том числе по части моделирования их характеристик [2]. С ростом частоты размер рабочей зоны будет быстро убывать если не выполнить коррекцию фазы с помощью коллимирующего устройства типа зеркала или линзы [3]. Для геометрии РБЭК предпочтительнее линза [4].

РБЭК с гиперболической линзой, установленной в апертуре рупорной части камеры, рассматривалась нами ранее [5]. Плоская поверхность линзы обращена к объекту, который устанавливается в рабочей зоне камеры, что может приводить к появлению нежелательных переотражений между ними. В работе [6] было показано, что данное взаимодействие может быть достаточно значимым.

Целью данной работы является исследование возможности уменьшения влияния переотражений между линзой и объектом на точность измерения его ЭПР путем поворота линзы. При отклонении линзы на небольшой угол распределение поля, формируемое ею в рабочей зоне, изменится слабо, но при этом лучи, соответствующие переотражениям внутри линзы и между линзой и объектом, уже не будут попадать обратно в источник излучения, отклоняясь от первоначального хода луча.

Описание работы

Схема РБЭК представлена на рис. 1. Длина рупорной части камеры составляет 15 м, длина части с постоянным сечением – 10 м. Стенки камеры покрыты

радиопоглощающим материалом (РПМ), который моделируется плоским слоем диэлектрика с заданными параметрами. Параметры диэлектрика подбираются для каждой исследуемой частоты, чтобы соответствовать примерным характеристикам реального РПМ. Диапазон рабочих частот камеры: 0,1 ГГц – 1 ГГц.

В апертуре рупорной части камеры установлена гиперболическая линза плоской поверхностью к рабочей зоне. Диэлектрическая проницаемость линзы 1,6, диаметр линзы составляет 4 м, фокусное расстояние – 17 м.

В качестве объекта выбран плоский проводящий диск диаметром 1 м (треть размера рабочей зоны). Диск устанавливался в рабочей зоне, центр которого располагался на расстоянии 4 м от апертуры рупорной части камеры. Ось симметрии диска совпадала с осью камеры.

Расчеты проводились в программе FEKO строгим методом моментов. Для всех металлических тел ставились граничные условия для идеального проводника. Рассматривалось поле в двух областях: внутри камеры, где среда считается воздухом, и внутри диэлектрика с заданными для каждой частоты параметрами среды. В качестве источника излучения использовался диполь. Диапазон исследуемых частот: 400 – 800 МГц.

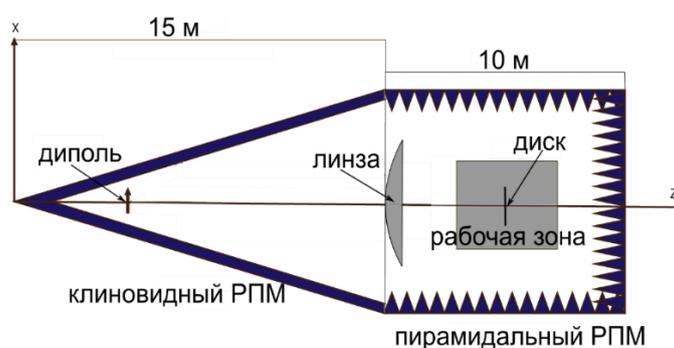
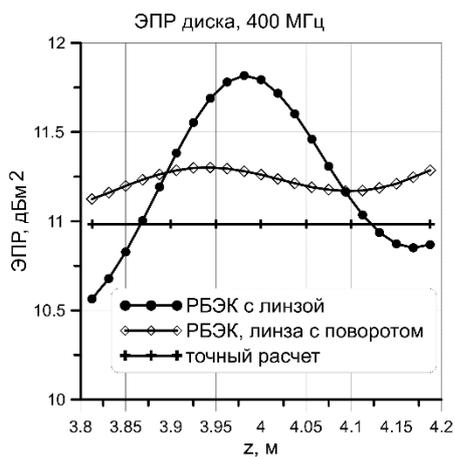


Рисунок 1. Геометрия рупорной камеры с линзой, в рабочей зоне которой установлен объект измерения – проводящий диск

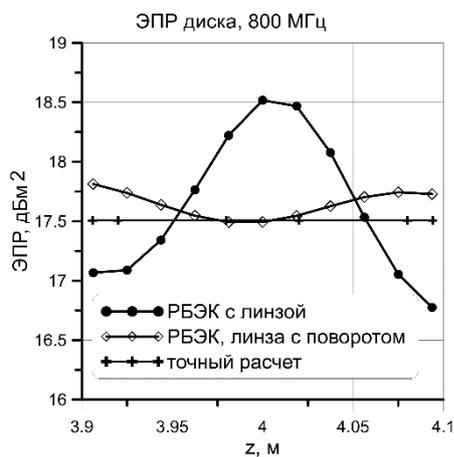
Задача решалась в несколько этапов. На первом этапе рассчитывалось поле в апертуре рупорной части камеры на ряде частот. На втором этапе полученные поля использовались в качестве источника излучения и рассматривалась система линза + диск в свободном пространстве, где диск стоит на расстоянии, соответствующем его положению в рабочей зоне камеры. Для учета фона рассматривалась линза в свободном пространстве без диска.

В измерениях ЭПР важно сделать корректную нормировку поля. Предложена следующая процедура. Поле после линзы в исходном виде используется как источник излучения. В этом поле исследуется отражение от этого же диска, стоящего нормально к оси камеры. Линзы и остальных элементов камеры в этой подзадаче нет. Результатом расчета является распределение рассеянного поля в сечении, близком к положению поля излучения. Используя это поле как источник излучения проходящей через линзу волны, получаем значение поля в дальней зоне.

Такая нормировка позволяет оценить точность измерения ЭПР диска в идеализированной ситуации: при нормировке на сам этот же диск. В этом случае неравномерность распределения поля в области расположения диска практически полностью компенсируется, и точность измерения обуславливается именно переломом между линзой и диском.



а)



б)

Рисунок 2. «Измеренная» ЭПР диска в зависимости от его положения на оси РБЭК на частоте а) 400 МГц и б) 800 МГц

На рис. 2 приведены результаты моделирования измерения ЭПР диска при различном его позиционировании на оси РБЭК. Ось симметрии диска всегда совпадает с осью камеры, положение диска меняется вдоль оси на $\pm\lambda/4$, чтобы зафиксировать максимальное и минимальное измеренные значения.

Как видно из графиков, поворот линзы на 10° существенно уменьшает влияние переотражений между линзой и объектом. В таблице 1 приведены численные значения для погрешности определения ЭПР диска при его установке в разных положения вдоль оси камеры на трех частотах исследуемого диапазона.

Таблица 1. Погрешности «измерения» ЭПР диска

Частота, МГц	Усредненные погрешности, дБ		Максимальные погрешности ЭПР, дБ	
	Линза без поворота	Линза с поворотом на 10°	Линза без поворота	Линза с поворотом на 10°
400	0,14	0,07	1,26	0,18
600	0,30	0,08	1,01	0,22
800	0,11	0,02	1,73	0,32

Для линзы с поворотом влияние переотражений между диском и линзой практически не зависит от частоты и всегда остается примерно постоянным и существенно меньшим, чем для линзы без поворота. Для линзы без поворота максимальные погрешности определения ЭПР все-таки зависят от частоты, средние же значения тоже зависят слабо.

Заключение

Итак, исследования показали, что поворот линзы может существенно повысить точность за счет нивелирования влияния переотражений между линзой и объектом. При этом полученные точности измерения ЭПР очень слабо зависят от частоты падающей волны.

Отметим, что в данной работе рассматривалось только влияние переотражения, влияние неравномерности распределения поля на точность измерения в данной работе не рассматривались.

Литература

1. *L.H. Hemming*. Electromagnetic Anechoic Chambers. NY, USA: IEEE Press and Wiley Interscience, 2002. – p. 239.

2. Z. Xiong and Z. Chen. Modeling of tapered anechoic chambers // Proceedings of the Conference of Antenna Measurement Techniques Association, Williamsburg, VA, Nov. 4–9, 2018 (IEEE, New York, 2018), p. 13.
3. Н.П. Балабуха, Н.Л. Меньших, В.С. Солосин. Математическое моделирование электромагнитных характеристик рупорной безэховой камеры // Антенны. – 2015. - №9, с.61-66.
4. Н.П. Балабуха, А.С. Зубов, В.С. Солосин. Компактные полигоны для измерения характеристик рассеяния объектов. 2007
5. Н.П. Балабуха, Н.Л. Меньших, В.С. Солосин. Моделирование распределения электромагнитного поля в рабочей зоне рупорной безэховой камеры с линзой // Антенны. – 2017. - №2. - с. 42-49.
6. Н.П. Балабуха, Н.Л. Меньших, В.С. Солосин. Влияние переотражений между линзой и объектом на точность измерения его ЭПР в рупорной безэховой камере. Современная электродинамика. Т. 1 №2, с. 10-15.

Математическая модель коллиматора для оценки поля в рабочей зоне на частотах 3 ГГц и выше

Mathematical model of a collimator for estimating of the field in the quiet zone at frequencies 3 GHz and above

Никитенко А. В.¹, Зубов А. С.¹

1) *Институт теоретической и прикладной электродинамики РАН, Москва, РФ.*
kocheku@gmail.com

Аннотация. В работе рассматривается модель коллиматора, позволяющая с высокой точностью находить поле в рабочей зоне, при этом в модели явным образом выделены механизмы формирования поля, что облегчает анализ недостатков и оптимизацию конструкции коллиматоров.

Введение

Рассматриваемый коллиматор представляет собой зеркало с зубчатыми краями – несимметричную вырезку из параболоида, и облучателя, расположенного в фокусе зеркала, повернутого на некоторый угол β , таким образом, чтобы максимум облучения попадал в центр вырезки. Эта система формирует так называемое квазиплоское поле. Область пространства камеры, в которой неравномерность поля не превышает заданного уровня, называют рабочей зоной [1]. Задача нахождения электромагнитного поля в рабочей зоне может быть решена различными численными методами, например методом моментов [2], или методом физической оптики [3]. Однако, эти методы не лишены недостатков – например, в них не выделены явным образом механизмы формирования поля. В данной работе предложена математическая модель коллиматора, которая помимо хорошей точности приближения к точному решению, в явном виде выделяет зависимость поля от параметров коллиматора.

Описание работы

В предлагаемой модели полагается, что поле в рабочей зоне коллиматора \vec{E}_{QZ} формируется из трех частей – поля \vec{E}_1 , отраженного от параболической части зеркала (рассчитываемого в геометро-оптическом приближении), поля \vec{E}_2 , рассеянного на ребрах зубцов (рассчитываемого методом геометрической теории дифракции) и поля \vec{E}_3 , рассеянного на устьях и кончиках зубцов:

$$\vec{E}_{QZ} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3.$$

Кроме того, известно, что зубцы располагают таким образом, чтобы рассеянное на их ребрах поле практически не попадало в рабочую зону. Расчет этого поля с хорошей точностью может быть выполнен с помощью метода геометрической теории

дифракции[4]. Для примера на рис. 1 показаны лучи, образованные рассеянием на ребрах зубцов зеркала коллиматора. Поэтому, в данной работе мы положим $\vec{E}_2 = 0$.

Выражение для поля \vec{E}_1 зависит от поляризации и угла поворота β облучателя. На рис. 2 представлена геометрия задачи. Приведем выражение для поля в случае поляризации $\vec{p} = (0, \sin \beta, \cos \beta)$:

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - (\sin \varphi \sin \theta \sin \beta + \cos \theta \cos \beta)^2}} \cdot G_f(\theta, \varphi) C_2(r, \theta, L) \left(\sin \beta \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \varphi (1 + \cos \theta) \\ -\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} + \cos \beta \begin{pmatrix} -\cos \varphi \sin \theta \\ -\sin \varphi \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \right),$$

где $C_2(r, \theta, L) \sim \frac{e^{-jk((1+|\cos \theta|)+L)}}{r(1+|\cos \theta|)+L}$, L – расстояние вдоль оси Z от начала координат до рабочей зоны, а функция $G_f(\theta, \varphi)$ – диаграмма направленности облучателя.

В случае поляризации $\vec{p} = (1, 0, 0)$ выражение для поля \vec{E}_1 можно найти аналогично, используя выражения для поля на поверхности зеркала [5].

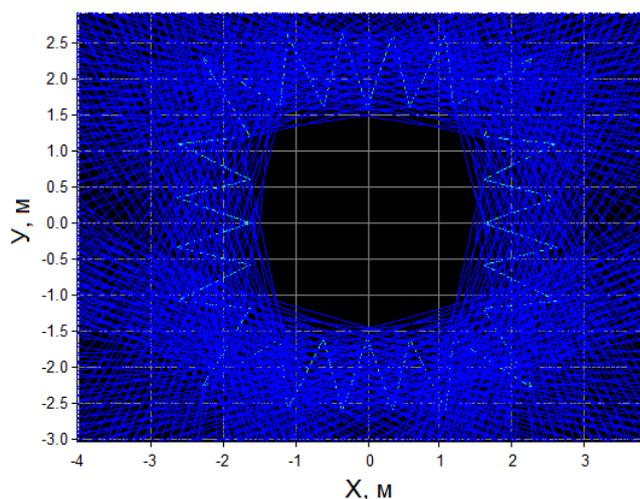


Рисунок 1. К модели поля \vec{E}_2 .

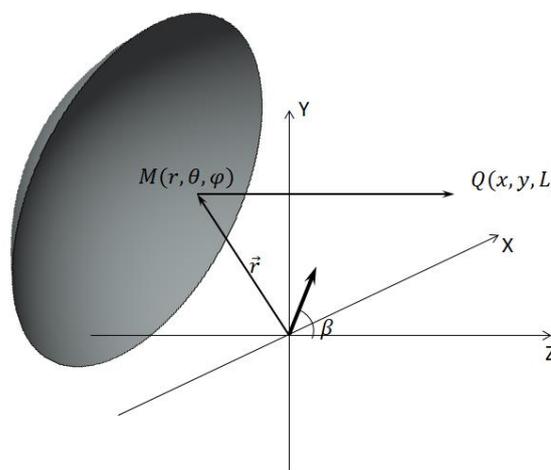


Рисунок 2. К расчету \vec{E}_1 .

Для численных расчетов рассматривался коллиматор с размерами зеркала 5x5 м, предполагаемая рабочая зона представляет собой горизонтальный цилиндр диаметром 1.8 метра и высотой 1.8 метра, центр рабочей зоны расположен на расстоянии, равном двум фокусным, вдоль оптической оси зеркала.

Был проведен расчет на частоте 3 ГГц. На рис. 3 представлены графики амплитуд поля в центральном сечении рабочей зоны, перпендикулярном оптической оси. на горизонтальной прямой, проходящей через центр рабочей зоны. Для сравнения также приведен тот же результат, рассчитанный методом физической оптики. Область рабочей зоны выделена серым цветом.

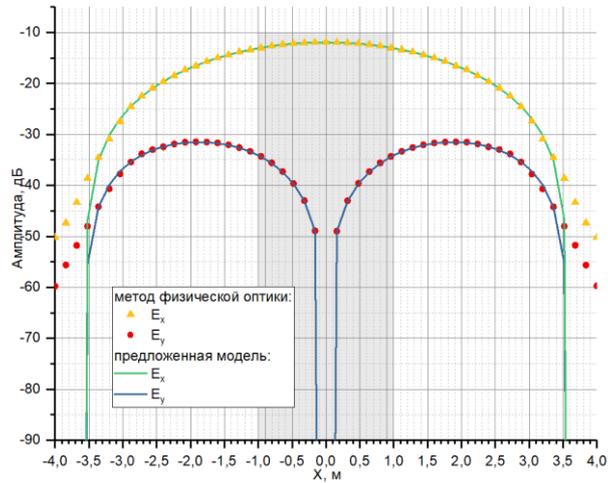


Рисунок 3. Компоненты поля \vec{E}_1 .

Выражение для поля \vec{E}_3 было получено с помощью вспомогательной задачи рассеяния плоской волны на металлическом ромбе:

$$\vec{E}_3 = \sum_i \vec{E}_{3i},$$

$$E_{3i} \sim \frac{1}{(k'_{iy})^2 \tan \alpha_i - (k'_{ix})^2 \cot \alpha_i} e^{j(\vec{k}'_i, \vec{\rho}_i)},$$

где \vec{k}'_i - разность падающего на i -ый кончик (устье) \vec{k}_{0i} и рассеянного \vec{k}_i волнового вектора, $\rho_{ш}$ - расстояние от i -ого кончика (устья) до точки в рабочей зоне, 2α - угол раскрытия i -ого зубца (устья между зубцов).

Для сравнения с методом физической оптики была рассмотрена следующая модельная задача (см. рис. Н). Из металлического параболоида вырезана площадка в форме сектора в проекции на плоскость XY , угол сектора 2α (см. рис. 4). На рис. 5 представлены графики амплитуды поля \vec{E}_3 в центральном сечении рабочей зоны на вертикальной прямой, проходящей через центр рабочей зоны. Область рабочей зоны выделена серым цветом. Приведены результаты расчета с помощью предложенной модели и методом физической оптики. Видно, что в пределах рабочей зоны погрешность предложенной модели для поля \vec{E}_3 составляет 0.5 дБ за исключением верхнего края, где она может достигать 2 дБ.

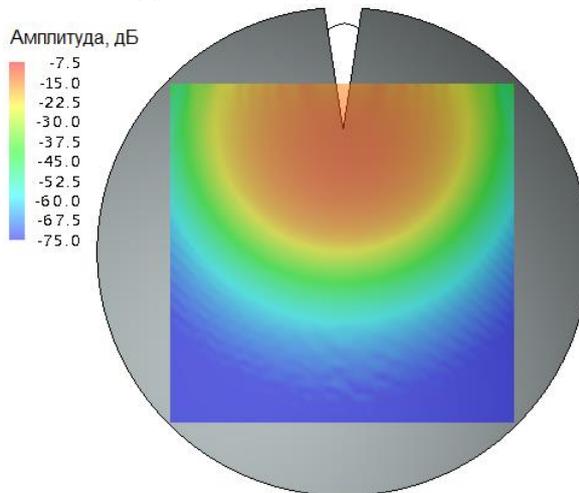


Рис. 4. К расчету поля \vec{E}_3

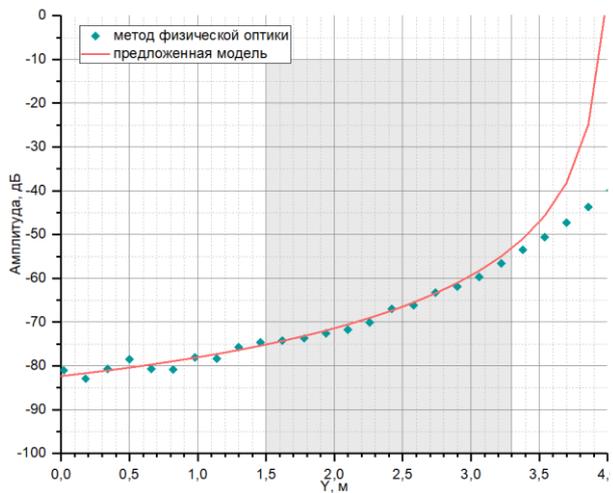


Рис. 5. Поле \vec{E}_3 .

Заключение

Предложенная математическая модель зеркала коллиматора позволяет оценить величину поля в области рабочей зоны, за исключением краев, на частотах 3 ГГц и выше. Формулировка модели включает явный вид зависимости выражения для электромагнитного поля от параметров коллиматора. За счет высокой скорости счета модель может быть использована для оптимизации геометрической формы зеркала коллиматора.

Литература

1. Балабуха Н.П., Зубов А.С., Солосин В.С. Компактные полигоны для измерения характеристик рассеяния. — М.:Наука, 2007.
2. Вычислительные методы в электродинамике. Под ред. Митры. — М.: Мир, 1977.
3. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. М.: Радио и связь, 1988.
4. Боровиков В.А., Кинбер Б.Е. Геометрическая теория дифракции. М.: Связь, 1978.
5. C. A. Balanis *Antenna Theory Analysis and Design* 2nd Edition — John Wiley & Sons, Inc., New York, 1997.

Исследование влияния выдвижения источника на электромагнитное поле в рабочей зоне конической и пирамидальной безэховых камерах

Investigation of the influence of the source extension on the electromagnetic field in the quiet zone of the conical and pyramidal anechoic chambers

Сахно А. Д.¹, Балабуха Н. П.², Меньших Н. Л.², Шапкина Н. Е.^{1,2}

1) Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, Москва, РФ; 2) Институт теоретической и прикладной электродинамики РАН, Москва, РФ.

sakhno.ad18@physics.msu.ru, nikolay.bala@gmail.com, n.menshikh@gmail.com, neshapkina@mail.ru

Аннотация. В работе рассматривается два типа рупорных безэховых камер (РБЭК): пирамидальная и коническая. При помощи математического моделирования исследуется влияние выдвижения источника вдоль оси РБЭК на неравномерность амплитуды и фазы в ее рабочей зоне. В качестве источника излучения используется диполь. Для конической РБЭК находится положение источника, при котором размеры рабочей зоны будут максимальными. Моделирование проводилось для частот от 500 МГц до 1 ГГц. Электромагнитное поле в рабочих зонах РБЭК вычисляется с помощью метода моментов в программном комплексе ФЕКО.

Введение

Исследование характеристик рассеяния объектов при облучении электромагнитными волнами является одним из основных направлений прикладной и фундаментальной электродинамики. Численно смоделировать характеристики рассеяния объектов сложной формы не всегда возможно, поэтому на практике чаще применяют экспериментальные методы.

Безэховая камера (БЭК) – помещение, стенки которого покрыты радиопоглощающим материалом (РПМ), что позволяет создать в ней рабочую зону – объем, в котором на объект изучения падает квазиплоская волна [1].

Для измерений на низких частотах (до 1 ГГц) зачастую используются РБЭК. Из-за специальной формы РБЭК уменьшается отражение от стенок камеры, что позволяет получить более равномерную амплитуду и фазу внутри рабочей зоны. Коническая и пирамидальная формы являются наиболее широко используемыми типами РБЭК.

В [2], [3] было показано, что для частот свыше 400 МГц в РБЭК требуется фазовая коррекция, так как размер рабочей зоны определяется исключительно фазовым распределением, а размер рабочей зоны не превышал 3 метра в каждой из плоскостей.

В работе [3] было проведено сравнение характеристик рассеяния пирамидальной и конической РБЭК с линзой. В [4] исследовалось выдвигание источника в конической и пирамидальной РБЭК без линзы.

Целью данной работы является объединить 2 подхода к увеличению рабочей зоны: использование линзы и выдвигание источника излучения.

Описание работы

Углы раскрыва пирамидальной и конической камер совпадают и равны $33,4^\circ$, площади апертур камер также практически совпадают; при этом сечение рупорных частей пирамидальной и конической камер - квадрат со стороной 9 м и круг радиуса $R = 5.08$ м, соответственно. Длина рупорной части пирамидальной камеры составляет 15 м. Коническая камера имеет немного большую длину для сохранения одинаковых углов раскрыва и площадей апертур. Части камеры постоянного поперечного сечения покрыты высокоэффективным радиопоглощающим материалом (РПМ), поэтому в задаче данная часть РБЭК заменена свободным пространством для уменьшения времени расчетов (рис. 1). Будем называть описанные выше РБЭК эквивалентными.

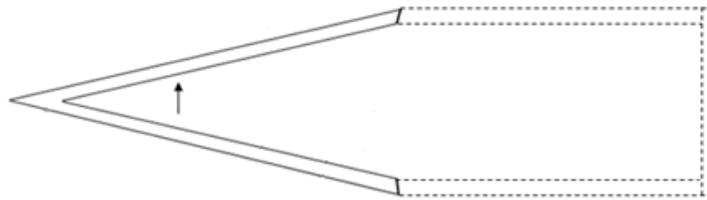


Рисунок 1. Модель рупорной безэховой камеры, стрелкой отмечен источник излучения

Для расчета характеристик камер использовался вычислительный пакет FEKO. В обеих моделях рупорная часть является идеально проводящей и покрыта РПМ, который в модели представлен однородным диэлектрическим слоем. Моделирование проводилось на частотах 500 и 800 МГц.

При частотах, на которых проводилось моделирование, необходима коррекция фазы [2]. В работе в качестве корректора фазы используется диэлектрическая линза. Освещенная поверхность линзы имеет форму гиперboloида вращения, другая поверхность – плоская. Так как расчет поля, прошедшего через линзу, очень ресурсоемкий, использовалась следующая схема расчета. Сама линза находится в свободном пространстве, а на нее падает электромагнитное поле, рассчитанное в апертуре РБЭК без линзы при помощи метода моментов (рис. 2).

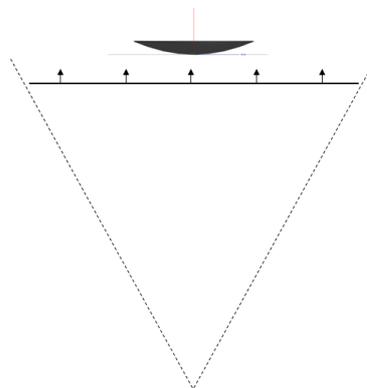


Рисунок 2. Модель расчета поля, прошедшего через линзу

Исследовалось влияние выдвигания источника на электромагнитное поле в рабочей зоне РБЭК. Начальное положение источника на оси РБЭК на расстоянии $d_0 = 1.62$ м от устья камер. Анализируется выдвигание источника до двух длин волн с шагом

$\lambda/2$ для каждой частоты. Неравномерность амплитуды 2 дБ и неравномерность фазы $22,5^\circ$ будем считать приемлемыми в рабочей зоне РБЭК.

При выдвигании источника на частоте 500 МГц в конической РБЭК удается получить значительно большую рабочую зону, чем при первоначальном положении. Так, удается достичь рабочей зоны $3,5 \text{ м} \times 4 \text{ м}$ при выдвигании источника на расстояние $3\lambda/2$ (рис. 3). Значительное ухудшение амплитудного распределения электромагнитного поля в рабочей зоне наблюдаются только при дальнейшем выдвигании источника на расстояние двух длин волн. В пирамидальной же камере не удается получить значительного выигрыша в размере рабочей зоны при выдвигании источника, а значительное ухудшение амплитудного распределения происходит при выдвигании на $3\lambda/2$.

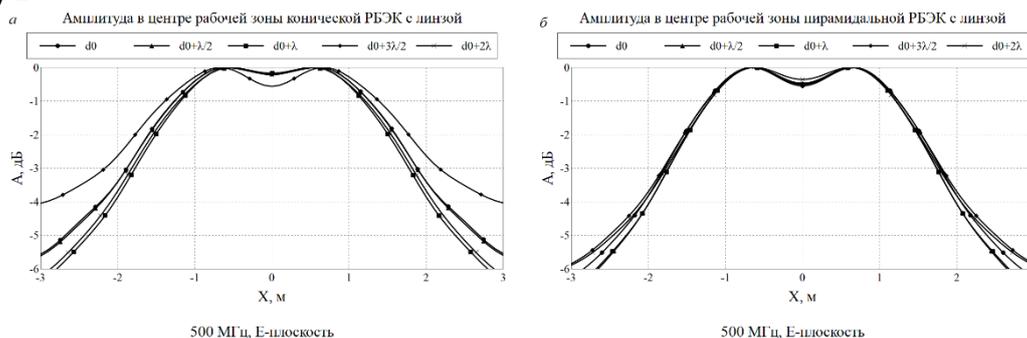


Рисунок 3. Распределение амплитуды электромагнитного поля в центре рабочей зоны конической РБЭК (слева) и пирамидальной РБЭК (справа) при частоте 500 МГц в Е-плоскости

На частоте 800 МГц выдвигание источника оказывает лишь пагубное влияние на размер рабочей зоны для обоих типов РБЭК.

Для конической РБЭК был произведен поиск оптимального положения источника. Для каждой частоты в отдельности был найден максимум функции

$$\varphi(z) = \min(S_{start}, S_{center}, S_{end}),$$

где $S_{start}, S_{center}, S_{end}$ - площади плоскостей, перпендикулярных оси РБЭК в начале, центре и конце рабочей зоны, в которых поле удовлетворяет условиям неравномерности амплитуды поля не более 2 дБ и неравномерность фазы не более $22,5^\circ$, z - положение источника.

Максимум $\varphi(z)$ для частоты 500 МГц достигается в точке $z = d_0 + 1,47\lambda$, а для частоты 800 МГц в точку $z = d_0$.

Заключение

Итак, выдвигание источника в РБЭК с линзой может оказывать как положительное, так и отрицательное воздействие на равномерность амплитуды и фазы в рабочей зоне РБЭК. Так, для частоты 500 МГц оптимальным положением источника в конической РБЭК, при котором площадь рабочей зоны является максимальной, является положение $z = d_0 + 1,47\lambda$, в то время как при частоте 800 МГц выдвигание источника оказывает лишь пагубное влияние на размер рабочей зоны. В пирамидальной же камере не удалось получить значительного выигрыша в размере рабочей зоны как для 500 МГц, так и для 800 МГц.

Литература

1. Н.П. Балабуха, А.С. Зубов, В.С. Солосин. Компактные полигоны для измерения характеристик рассеяния объектов. — 2007
2. Н.П. Балабуха, Н.Л. Меньших, В.С. Солосин. // Антенны. — 2015. — N.9. — С.61.
3. Balabuha N.P., Menshikh N.L., Sakhno A.D., Shapkina N.E. // Mathematical Simulating of Electromagnetic Field in the Quiet Zone of Pyramidal and Conical Tapered Anechoic

- Chambers: Comparison of Results. In 2021 Photonics and Electromagnetics Research Symposium (PIERS) (pp. 2552-2561). IEEE.
4. *Н.П. Балабуха, Н.Л. Меньших, Н.Е. Шапкина // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон. — 2021. №. 3. — С. 12-21.*

Эффективность идентификации транспортных средств с помощью комплексов фиксации, использующих RFID-технологий

Efficiency of vehicle identification using fixation complexes based on RFID technologies

Федотов И. А.¹, Михайлов Е. А.², Ларионов А. А.¹

- 1) Институт проблем управления имени В.А. Трапезникова РАН, Москва, РФ;*
2) Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, Москва, РФ.

fedotov.ia15@physics.msu.ru, ea.mikhajlov@physics.msu.ru, larioandr@gmail.com

Аннотация. Существующие комплексы видеофиксации нарушений ПДД имеют ряд недостатков. В условиях плохой видимости вероятность распознавания государственного номера сильно снижается. Поэтому предлагается использовать системы идентификации транспортных средств на автодорогах при помощи технологии RFID (радиочастотная идентификация). В данной работе была построена аналитическая модель оценки вероятности идентификации автомобилей на основе однолучевой модели распространения сигнала, которая аппроксимировалась параболой.

Введение

Соблюдение правил дорожного движения позволяет снизить аварийность на автодорогах. Ежегодно в России происходит огромное количество ДТП [1], в которых гибнут люди, наносится ущерб дорожно-транспортной инфраструктуре и т.д. Одним из способов борьбы с несоблюдением ПДД является использование систем видеофиксации, которые позволяют привлекать нарушителей к ответственности. Тем не менее, в условиях плохой или недостаточной видимости их эффективность снижается, а некоторые злостные нарушители умышленно скрывают свой государственный номер. Для решения этой проблемы можно использовать технологию радиочастотной идентификации (RFID). Она позволяет определить данные автомобиля без распознавания его изображения. Для этого регистрационный знак оснащается специальной RFID-меткой, в которой содержится информация о транспортном средстве, а над дорогой размещается радиочастотный считыватель. Подобный подход уже был протестирован в ходе эксперимента в республике Татарстан и показал отличные результаты [2]. Эффективность идентификации достигала более 90%. Тем не менее, важно теоретически оценить эффективность данного метода. В настоящей работе рассматривается однолучевая модель радиоканала между меткой и считывателем при различных скоростях движения и настройках считывателя.

Однолучевая модель

Считыватель и метки общаются между собой на основе протокола EPC Class 1 Gen.2 [3]. В работе рассматриваются пассивные метки без собственного источника питания. Энергию для ответа они получают от сигналов считывателя. Данный метод называется обратным рассеянием. Метки отвечают считывателю путем отражения сигнала, поэтому в их ответах могут содержаться случайные битовые ошибки (BER). Вероятность битовой ошибки можно получить из формулы многолучевого распространения сигнала.

Вероятность битовой ошибки определяется [4] формулой:

$$p_e = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{1 + 2/(M\tilde{\gamma})}} + \frac{2}{\pi} \frac{\arctan \sqrt{1 + 2/(M\tilde{\gamma})}}{\sqrt{1 + 2/(M\tilde{\gamma})}}, \quad (1)$$

где $\tilde{\gamma}$ – отношение уровня сигнала к уровню шума (SINR). Данное выражение можно аппроксимировать параболой:

$$p_e = k(x - x_0)^2 + b, \quad (2)$$

где k , x_0 , b – коэффициенты, x — координата метки.

На рисунке 1 показано, что подобная аппроксимация хорошо соответствует оригинальной формуле (1), при этом она гораздо более удобна для дальнейших расчетов.

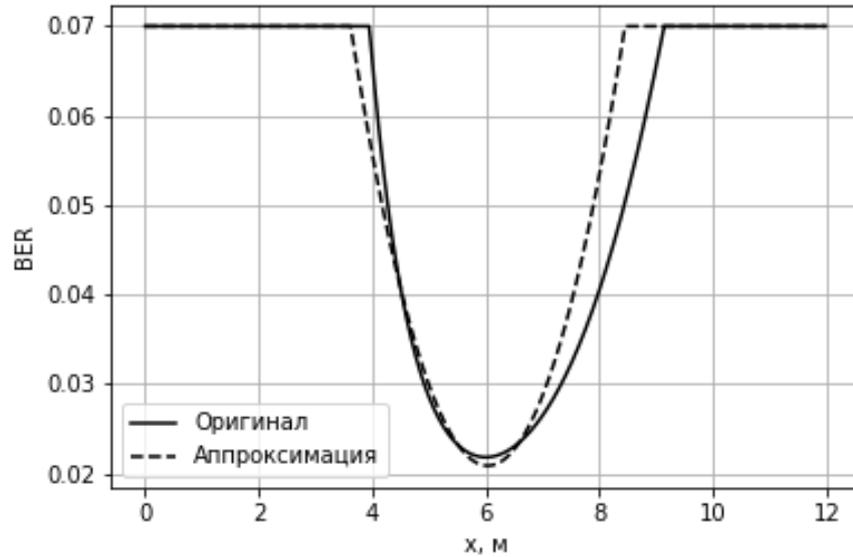


Рисунок 1. Сравнение оригинальной вероятности битовой ошибки и параболы.

В таком случае можно получить аналитическую формулу для оценки вероятности идентификации метки при различных скоростях:

$$\begin{aligned} \Pi &= 1 - \exp\left(-\frac{1}{vQ_2\Delta t} \int_0^L \exp(-(Q - Q_1)(k(x - x_0)^2 + b)) dx\right) = \\ &= 1 - \exp\left(-\frac{\exp(-(Q - Q_1)b)}{vQ_2\Delta t} \int_0^L \exp(-k(Q - Q_1)(x - x_0)^2) dx\right) = \\ &= 1 - \exp\left(-\frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\exp(-(Q - Q_1)b)}{vQ_2\Delta t \sqrt{k(Q - Q_1)}} \left(\Phi\left((L - x_0)\sqrt{k(Q - Q_1)}\right) - \Phi(-x_0)\right)\right), \end{aligned} \quad (3)$$

Вероятность идентификации автомобиля-нарушителя также исследовалась с помощью методов имитационного моделирования. На рис. 2 можно видеть, что результаты аналитических оценок и имитационного моделирования близки друг к другу.

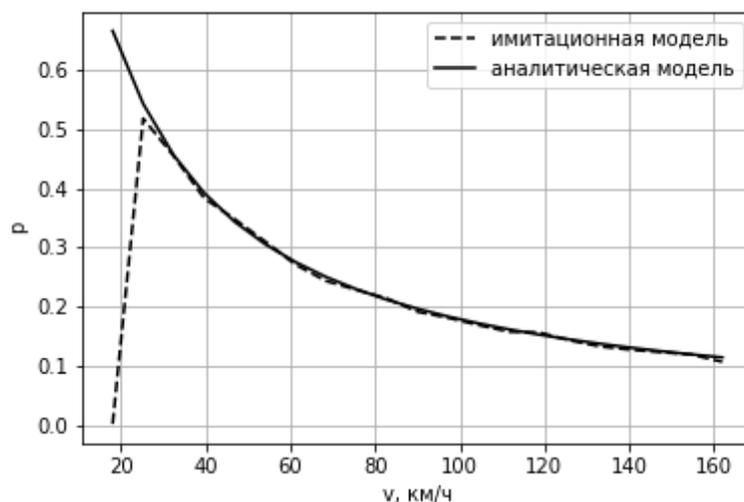


Рисунок 2. Вероятность успешной идентификации метки при различных скоростях

Заключение

Предложенный способ оценки эффективности технологии идентификации транспортных средств позволяет с высокой точностью рассчитать вероятность идентификации. Он может быть использован при оценке эффективности работы комплексов видеофиксации нарушений ПДД, а также для других приложений (например, для систем оплаты на платных автодорогах, где также могут использоваться радиочастотные метки).

Литература

1. Дорожно-транспортная аварийность в Российской Федерации за 2021 год. Информационно-аналитический обзор. – М.: ФКУ «НЦБДД МВД России», 2022, 125 с.
2. Вишневский В.М., Минниханов Р.Н., Дудин А.Н., Клименок В.И., Ларионов А.А. Новое поколение систем безопасности на автодорогах и их применение в интеллектуальных транспортных системах. // Информационные технологии и вычислительные системы. 2013. № 4. С. 80-89.
3. EPC Radio-Frequency Identify Protocols. Class-1 Generation-2 UHF RFID. Protocol for Communications at 860 MHz – 960 MHz. Version 2.0.1. EPCGlobal Inc., 2015
4. A. Lazaro, D. Girbau, R. Vilarino.. Effects of interferences in UHF RFID systems // Progress In Electromagnetics Research. — Vol. 98. — Pp. 425—443. 2009.

Оглавление

Пленарные доклады	2
Дискретное моделирование плазмы. Метод крупных частиц. Бородачев Л.В.	2
Развитие теории нестационарных условий излучения в работах А. Г. Свешникова Быков А. А.	4
Применение метода декомпозиции области для моделирования контактного взаимодействия системы тел в многомерном случае Галанин М.П., Родин А.С.	7
Регуляризованные уравнения газовой динамики и развитие этого направления в рамках кафедры математики Елизарова Т.Г.	10
Математические модели квантовых эффектов наноплазмоники на основе метода Дискретных источников Еремин Ю.А.	13
Математические модели антенных решёток из волноводов Ильинский А.С.	16
Обратные задачи в оптике слоистых сред Тихонравов А. В.	18
Математическое моделирование.....	20
Сравнение экспериментальных и расчетных данных проплавления октадекана в цилиндрической геометрии Воропаев Р.А. ^{1,2}	20
Пример моделирования течения расплава для выращивания кристаллов методом Чохральского Кирюшина М. А. ¹ , Елизарова Т. Г. ¹	22
Влияние дисперсионности линейных фильтров на вероятностные характеристики приема цифровых сигналов Назаров Л. Е., Кулиев М. В.	24
Математическое моделирование фотонных кристаллов Боголюбов А.Н., Домбровская Ж.О., Никитченко А.Д.	27
Анализ влияния пространственной дисперсии на оптические характеристики кластера магнитоплазмонных наночастиц методом дискретных источников Пензарь А.С.	30
Математическое моделирование несимметричного трехмерного зеркального коллиматора со скругленными краями Пропой М.И. ¹ , Хлебников Ф.Б. ¹ , Коняев Д.А. ^{1,2} , Шапкина Н.Е. ^{1,2} , Боголюбов А.Н. ¹	32
Математическое моделирование дифракции плоской электромагнитной волны на протяжённом импедансном коллиматоре со скруглёнными краями	

Хлебников Ф.Б. ¹ , Коняев Д.А. ^{1,2} , Шапкина Н.Е. ^{1,2} , Боголюбов А.Н. ¹	35
Теоретическая электродинамика.....	39
Параметрическое семейство КИХ-фильтров на основе сплайнов и поиск оптимального фильтра	
Будунова К.А. ¹ , Кравченко В.Ф. ^{1,2}	39
Об одной задаче дифракции электромагнитных волн на тонком идеально проводящем экране	
Долбнин А. А. ¹ , Головина С. Г. ¹ , Захаров Е. В. ¹	42
Моделирование рассеяния электромагнитной волны трёхмерным телом с помощью метода интегральных уравнений в спектральной области	
Лопушенко В. В, Зыкова М. А.....	45
Использование методов компьютерной алгебры для решения задачи рассеяния электромагнитных волн на плазмонном шаре	
Лопушенко И. В.	47
Представление функций Грина волнового уравнения на отрезке в конечном виде и метод А.Н. Крылова ускорения сходимости рядов	
Малышев К.Ю. ^{1,2}	50
Задачи математической теории дифракции на телах со сложной границей	
Могилевский И.Е. ¹ , Боголюбов А. Н. ¹ , Боголюбов Н.А. ¹ , Ерохин А.И. ^{1,1}	
Ровенко В.В. ¹ , Шушарин М.М. ¹	53
Влияние магнитной диффузии на параметрический резонанс в простейшей модели солнечного динамо	
Серенкова А.Ю. ¹ , Соколов Д.Д. ^{1,2} , Юшков Е.В. ^{1,2,3}	56
Построение сингулярной части электромагнитного поля в окрестности ребра границы оживальной формы для различных типов граничных условий	
Шушарин М.М, Могилевский И.Е.....	58
Численные методы.....	62
Численное решение нестационарных задач с памятью	
Вабищевич П.Н. ^{1,2}	62
Вейвлеты на основе сверток функций $\text{hup}(x)$ и $\text{scup}(x)$ с прямоугольным импульсом	
Коновалов Я.Ю. ¹ , Кравченко В.Ф. ²	63
Нахождение двухпозиционной диаграммы рассеяния объекта при помощи значений рассеянного поля в ближней зоне, заданного на усечённой цилиндрической поверхности	
Балабуха Н. П. ¹ , Коняев Д. А. ^{1,2} , Шапкина Н. Е. ^{1,2}	65
Синтез высокоэффективных многослойных дифракционных решеток для спектрального сложения лазерных пучков	
Петухов А.А.	68
О численном моделировании электромагнитного рассеяния на кусочно-однородных объектах методом граничных интегральных уравнений	

Сетуха А.В.	70
Применение метода мозаично скелетонных аппроксимаций к решению задачи дифракции на идеально проводящих телах	
Ставцев С. Л. ¹ , Сетуха А. В. ^{1,2}	73
Результаты применения методов Градиентной Морфологии	
Терентьев Е.Н., Приходько И.Н., Алешин П.Е., Романов Д.Р., Шацков И.А.	76
Разработка и применение библиотеки атомарных функций и вейвлетов для задач цифровой обработки сигналов	
Труфанов Н. Н. ¹ , Чуриков Д.В. ¹ , Кравченко О.В. ²	79
Экспериментальная электродинамика.....	83
Высокодобротные оптические резонаторы с прореженным спектром для лазерных гравитационных антенн	
Вятчанин С.П. ¹ , Мацко А.Б. ² , Поплавский М.В. ³	83
Применение линзового коллиматора для измерения бистатических характеристик рассеяния объектов	
Гильмутдинов Р. В. ^{1,2} , Меньших Н. Л. ² , Фёдоров С.А. ²	83
Оптимизация толщины поглощающей пластины в экспериментах по рассеянию электромагнитного поля методами математического моделирования	
Евстафьев Е.Е.	86
Применение интегрального коэффициента отражения для оптимизации покрытия стенок металлической полости	
Кисель В.Н. ¹ , Кожеко А.С. ^{1,2}	89
Уменьшение влияния взаимодействия линзы и объекта при измерении его ЭПР в рупорной безэховой камере за счет поворота линзы	
Балабуха Н. П. ¹ , Меньших Н. Л. ¹ , Солосин В. С. ¹	92
Математическая модель коллиматора для оценки поля в рабочей зоне на частотах 3 ГГц и выше	
Никитенко А. В. ¹ , Зубов А. С. ¹	95
Исследование влияния выдвигания источника на электромагнитное поле в рабочей зоне конической и пирамидальной безэховых камерах	
Сахно А. Д. ¹ , Балабуха Н. П. ² , Меньших Н. Л. ² , Шапкина Н. Е. ^{1,2}	98
Эффективность идентификации транспортных средств с помощью комплексов фиксации, использующих RFID-технологий	
Федотов И. А. ¹ , Михайлов Е. А. ² , Ларионов А. А. ¹	101
Оглавление	104