Уважаемые коллеги!

Вопросы 18-23 письменной части коллоквиума на первом потоке не отражены полностью в учебнике А.Г.Свешникова, А.Н.Боголюбова, В.В.Кравцова «Лекции по математической физике», но были затронуты на лекции. Ниже приведены ответы на эти вопросы в том объеме, который достаточен для получения положительной оценки.

18. Дайте определение полного линейного пространства. Приведите примеры. Сформулируйте теорему о пополнении линейного пространства.

Нормированное пространство называется полным, если в нем всякая фундаментальная последовательность сходится к элементу этого пространства. Полное нормированное пространство называется банаховым. Пространство со скалярным произведением называется гильбертовым, если оно полно в норме, порожденной скалярным произведением.

Примеры полных пространств: пространство Лебега $L_2(D)$, пространство Соболева $W_2^1(D)$.

Теорема о пополнении. Всякое нормированное пространство E можно рассматривать как линейное многообразие, плотное в банаховом пространстве $\tilde{E}$. Пространство $\tilde{E}$ называется пополнением пространства E.

19. Дайте определение линейного множества (линеала). Дайте определение множества, плотного в линейном пространстве. Приведите примеры.

Множество L в линейном пространстве E называется линейным множеством (линейным многообразием, линеалом), если для любых $f, g \in L$ и любых скаляров λ, μ $\lambda f + \mu g \in L.$

Линейное множество L, лежащее в нормированном пространстве $E : L \subset E,$ называется плотным в E, если для $\vee f \in E$ и $\vee \varepsilon > 0$ $\exists$ элемент $\varphi \in L$ такой, что $\| f - \varphi \| < \varepsilon.$

Примеры. Множество функций $C(\bar{D})$ плотно в $L_2(D)$. Множество полиномов плотно в $C(\bar{D})$ (теорема Вейерштрасса, D - ограниченное множество).

20. Дайте определение полной ортогональной системы функций в пространстве Лебега. Приведите примеры полных систем.

Ортогональная система функций $\{\varphi_n\}$ полна в пространстве $L_2(D)$, если не существует функции $f \in L_2(D),$ отличной от нуля почти всюду на D и ортогональной ко всем функциям данной системы.

Примеры. Система полиномов Лежандра, система присоединенных функций Лежандра, система сферических функций.

21. Дайте определение замкнутой ортогональной системы в пространстве Лебега. Приведите примеры.

Ортогональная система функций $\{\varphi_n\}$ называется замкнутой в пространстве $L_2(D)$, если для любой функции $f \in L_2(D)$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $N = N(\varepsilon)$ и такой набор коэффициентов $\{C_n\}$, $n = 1, ..., N(\varepsilon)$, что $\left\| f - \sum_{n=1}^{N(\varepsilon)} C_n \varphi_n \right\|_{L_2} < \varepsilon.$

Примеры. Система полиномов Лежандра, система присоединенных функций Лежандра, система сферических функций.

22. Как строится пространство Лебега $L_2(D)$?

Пространство Лебега $L_2(D)$ строится пополнением нормированного пространства $\hat{L}_2(\bar{D})$. Пространство $\hat{L}_2(\bar{D})$ состоит из всевозможных непрерывных на $\bar{D}$ функций, квадратично интегрируемых на $\bar{D}$. Норма в пространстве $\hat{L}_2(\bar{D})$ вводится формулой: $\| f \|^2 = (f, f) = \int_{\bar{D}} | f |^2 \, dv.$

23. Как строится пространство Соболева $W_2^1(D)$?

Пространство Соболева $W_2^1(D)$ строится пополнением нормированного пространства $\hat{W}_2^1(\bar{D})$.

Пространство $\hat{W}_2^1(\bar{D})$ состоит из всевозможных непрерывно дифференцируемых функций u на $\bar{D}$ с нормой $\|u\|^2 = (u, u) = \int_{\bar{D}} |u|^2 dv + \int_{\bar{D}} \left\{ \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|^2 \right\} dv.$