

План лекций первого потока по курсу «Методы математической физики»

Введение

Часть I. Специальные функции математической физики

Глава 1. Задача на собственные значения для оператора Лапласа в основных областях

§ 1. Отрезок

§ 2. Прямоугольник

§ 3. Прямой прямоугольный параллелепипед

§ 4. Круг

§ 5. Шар

Глава 2. Уравнение специальных функций и свойства его решений

Глава 3. Цилиндрические функции

§ 1. Уравнение цилиндрических функций (уравнение Бесселя)

§ 2. Свойства гамма-функции

§ 3. Построение функций Бесселя $H_{-\nu}(x)$ в виде обобщенного степенного ряда (метод Фробениуса)

§ 4. Рекуррентные формулы

§ 5. Цилиндрические функции полуцелого порядка

§ 6. Интегральное представление функции Бесселя

§ 7. Функции Ханкеля. Интегральные представления

1°. Определение функций Ханкеля

2°. Свойства функций Ханкеля

1) Связь функций $H_{-\nu}(x)$ и $H_{\nu}(x)$

2) Рекуррентные формулы

§ 8. Связь функций Ханкеля и Бесселя

§ 9. Линейная зависимость и независимость цилиндрических функций. Определитель Вронского

§ 10. Асимптотика цилиндрических функций

§ 11. Краевая задача для уравнения Бесселя. Собственные функции круга.

§ 12. Цилиндрические функции чисто мнимого аргумента. Функции Инфельда и Макдональда

Глава 4. Классические ортогональные полиномы (КОП)

§ 1. Определение КОП

§ 1. Свойства КОП

1°. Ортогональность, Нормальная ортогональная система

2°. Теорема о нулях

3°. Системы производных КОП

4°. Кураева задача для КОП

5°. Обобщенная формула Родрига

6°. Норма КОП

7°. Производящая функция КОП

§ 3 Важные частные случаи КОП

1°. Полиномы Якоби

2°. Полиномы Чебышева

3°. Полиномы Лежандра

4°. Полиномы Лагерра

5°. Полиномы Эрмита

Глава 5. Присоединенные функции Лежандра

§ 1. Определение присоединенных функций Лежандра

§ 2. Уравнение для присоединенных функций Лежандра

§ 3. Свойства присоединенных функций Лежандра

1°. Ортогональность присоединенных функций Лежандра

2°. Нули присоединенных функций Лежандра

3°. Норма присоединенных функций Лежандра

Глава 6. Сферические функции

Глава 7. Шаровые функции

Глава 8. Собственные функции Шара

Глава 9. Замкнутые и полные системы функций

§ 1. Пространство Лебега $L_2(D)$. Интеграл Лебега

§ 2. Замкнутые и полные системы функций пространстве $L_2(D)$

§ 3. Пространства Соболева $W_2^1(D)$ и $\hat{W}_2^1(D)$

§ 4. Примеры замкнутых в пространстве L_2 систем функций

1°. Система полиномов Лежандра

2°. Система присоединенных функций Лежандра

3°. Система сферических функций

4°. Системы полиномов Лагерра и Эрмита

5°. Заключительные замечания к главе 9

Часть II. Методы математической физики

Глава 1. Классификация дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка

§ 1. Классификация дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка в случае двух независимых переменных

§ 2. Преобразование дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка к каноническому виду в случае двух независимых переменных

§ 3. Случай многих независимых переменных

Глава 2. Основные уравнения математической физики и постановка краевых задач

§ 1. Физические задачи, приводящие к уравнениям гиперболического типа

1°. Малые поперечные колебания струны

2°. Малые продольные колебания стержня

3°. Случай многих пространственных переменных

1) Малые поперечные колебания мембраны

2) Уравнения Максвелла

§ 2. Постановка краевых задач

1°. Начальные условия

2°. Граничные условия

3°. Обобщение на случай трех переменных

§ 3. Уравнение теплопроводности

§ 4. Физические задачи, приводящие к уравнениям эллиптического типа

1°. Стационарное распределение тепла

2°. Задачи электростатики

3°. Установившиеся колебания

4°. Установившиеся электромагнитные колебания

5°. Постановка краевых задач

Глава 3. Метод разделения переменных (метод Фурье)

§ 1. Общая схема метода разделения переменных

1°. Постановка общей начально-краевой задачи. Определение классического решения

2°. Редукция общей задачи

3°. Первая и вторая формулы Грина

4°. Общая схема метода разделения переменных. Основные свойства собственных функций и собственных значений

§ 2. Неоднородные уравнения и граничные условия

1°. Неоднородные уравнения

2°. Неоднородные граничные условия

Глава 4. Уравнения эллиптического типа

§ 1. Основные свойства гармонических функций

1°. Определение гармонических функций

2°. Третья формула Грина

3°. Основные свойства гармонических функций

1) Теорема Гаусса

2) Существование производных всех порядков

3) Формула среднего значения

§ 2. Принцип максимума

§ 3. Постановка внутренних краевых задач для уравнения Пуассона

§ 4. Внешние краевые задачи

1°. Внешняя задача Дирихле

1) Трехмерный случай

2) Двумерный случай

2°. Понятие функции, регулярной на бесконечности

1) Трехмерный случай.

2) Двумерный случай.

3°. Внешняя задача Неймана.

1) Трехмерный случай.

2) Двумерный случай.

§ 5. Функция Грина

1°. Фундаментальные решения

1) Вспомогательные положения анализа. Обобщенные функции. Обобщенные решения

2) Фундаментальные решения

2°. Задача Дирихле для уравнения Пуассона

3°. Свойства функции Грина задачи Дирихле

1) Оценки функции Грина задачи Дирихле

2) Физический смысл функции Грина задачи Дирихле

3) Симметрия функции Грина задачи Дирихле

4°. Функция Грина задачи Неймана для уравнения Пуассона

Глава 5. Уравнения параболического типа

§ 1. Постановка начально-краевых задач

§ 2. Принцип максимума

§ 3. Теоремы единственности и устойчивости.

§ 4. Формальное построение решения начально-краевой задачи.

Функция источника

§ 5. Существование решения начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности на отрезке

§ 6. Задача Коши для уравнения теплопроводности

1°. Постановка задачи Коши на бесконечной прямой

2°. Теорема единственности решения задачи Коши на бесконечной прямой

3°. Формальное построение решения задачи Коши на бесконечной прямой с помощью интегрального преобразования Фурье.

Фундаментальное решение

4°. Свойства фундаментального решения

5°. Теоремы устойчивости

1) Устойчивость по начальным данным

2) Устойчивость по правой части

§ 7. Существование решения задачи Коши для однородного уравнения теплопроводности

1°. Теорема существования

2°. Пример

§ 8. Задача Коши для уравнения теплопроводности в пространстве. Фундаментальное решение

§ 9. Решение уравнения теплопроводности на полупрямой

1°. Однородное граничное условие. Функция Грина

2°. Краевой режим. Принцип Дюамеля

Глава 6. Уравнения гиперболического типа

§ 1. Постановка начально-краевых задач для уравнения колебаний в ограниченной области. Классическое решение

§ 2. Теорема единственности

§ 3. Существование решения начально-краевой задачи для однородного уравнения колебаний на отрезке

1°. Формальное построение решения методом Фурье. Функция Грина

2°. Теорема существования классического решения

§ 5. Вынужденные колебания ограниченной струны.

1°. Построение решения методом Фурье

2°. Физический смысл функции Грина - функция влияния мгновенного точечного импульса

§ 6. Уравнение колебаний на неограниченной прямой. Формула Даламбера

1°. Постановка задачи Коши

2°. Вывод формулы Даламбера

3°. Свойства формулы Даламбера

1) Единственность решения

2) Существование решения

3) Устойчивость решения

4°. Физическая интерпретация решения.

1) Понятие бегущей волны. Конечная скорость распространения

2) Интерпретация на фазовой плоскости решения для локального начального возмущения

§ 7. Вынужденные колебания бесконечной струны

1°. Колебания струны под действием мгновенного сосредоточенного импульса.

2°. Формально-математический вывод формулы для решения задачи о вынужденных колебаниях неограниченной струны.

3°. Теоремы существования и единственности решения

§ 8. Уравнение колебаний на полупрямой

1°. Однородное уравнение колебаний на полупрямой. Однородные граничные условия первого и второго рода. Метод отражений.

2°. Распространение краевого режима

§ 9. Колебания в неограниченном пространстве

1°. Сферически симметричный случай. Характеристический конус

2°. Вывод формулы Кирхгофа

3°. Формула Пуассона

4°. Метод спуска Адамара

5°. Физическая интерпретация. Принцип Гюйгенса.

6°. Функция источника

7°. Установившиеся колебания

Глава 7. Уравнения эллиптического типа (продолжение)

§ 1. Теория потенциала

1°. Объемный потенциал

2°. Понятие равномерной сходимости несобственного интеграла

3°. Поверхностные потенциалы

1) Поверхностный потенциал простого слоя

2) Поверхностный потенциал двойного слоя

4°. Логарифмические потенциалы

1) Логарифмический потенциал простого слоя

2) Логарифмический потенциал двойного слоя

5°. Свойства логарифмических потенциалов двойного и простого слоя на кривой класса A .

1) Непрерывность логарифмического потенциала простого слоя

2) Существование логарифмического потенциала двойного слоя

3) Разрыв логарифмического потенциала двойного слоя на кривой класса A в случае постоянной плотности

4) Разрыв логарифмического потенциала двойного слоя на кривой класса A в случае переменной плотности

5) Разрыв нормальной производной простого слоя на кривой класса A

6°. Обобщение на трехмерный случай. Поверхность Ляпунова

§ 2. Сведение краевых задач к интегральным уравнениям Фредгольма

1°. Внутренняя задача Дирихле и внешняя задача Неймана

2°. Внутренняя задача Неймана и внешняя задача Дирихле

§ 3. Задача Дирихле на собственные значения для оператора Лапласа

1°. Сведение задачи на собственные значения к интегральному уравнению Фредгольма с симметричным слабополярным ядром

2°. Свойства интегрального уравнения Фредгольма второго рода с вещественным симметричным слабополярным ядром

3°. Свойства собственных функций и собственных значений

§ 4. Краевые задачи для уравнения $\Delta u + cu = -f$

1°. Физические задачи, приводящие к уравнению $\Delta u + cu = -f$

1) Установившиеся колебания

2) Стационарный процесс диффузии

2°. Свойства решений уравнения $\Delta u + cu = -f$

3°. Фундаментальные решения

1) Трехмерный случай

2) Двумерный случай

4°. Формулы Грина

5°. Теорема единственности для внутренних краевых задач

6°. Методы решения краевых задач для уравнения $\Delta u + cu = -f$

1) Метод разделения переменных

2) Метод разложения по собственным функциям

3) Метод функций Грина

4) Метод интегральных уравнений

5) Метод конформных отображений