Гипергеометрические функции

1 Канонический вид уравнения гипергеометрического типа

Уравнение гипергеометрического типа

$$\sigma y'' + \tau y' + \lambda y = 0, \tag{1.1}$$

где $\sigma(z)$ — полином не старше второй степени, $\tau(z)$ — полином не старше первой степени, λ — число, в зависимости от $\sigma(z)$ можно привести к трем различным каноническим видам.

Случай 1. Если $\sigma(z)$ имеет два *различных* корня, то есть $\sigma(z) = (z-a)(b-z)$, где $a \neq b$, то с помощью линейной замены $z = a + (b-a)s$ уравнение (1.1) можно преобразовать к виду:

$$s(1-s)\frac{d^2y}{ds^2} + \underbrace{\frac{\tau(a+(b-a)s)}{b-a}}_{\displaystyle\frac{\tau(a)}{b-a} + \tau'(a)s}\frac{dy}{ds} + \lambda y = 0.$$

Обозначим $\gamma = \dfrac{\tau(a)}{b-a}$ и подберем такие числа α и β, что

$$\begin{cases} \alpha\beta = -\lambda, \\ \alpha + \beta + 1 = -\tau'(a). \end{cases}$$

Тогда уравнение (1.1) примет вид:

$$s(1-s)y'' + (\gamma - (\alpha+\beta+1)s)y' - \alpha\beta y = 0. \tag{1.2}$$

Уравнение (1.2) называется *гипергеометрическим* уравнением.

Случай 2. Если $\sigma(z)$ имеет один простой корень, то есть $\sigma(z) = z - a$, и если $\tau'(a) \neq 0$, то линейной заменой переменных $z = a + bs$ уравнение (1.2) приводится к виду:

$$\frac{s}{b}\frac{d^2y}{ds^2} + \underbrace{\frac{\tau(a+bs)}{b}}_{\displaystyle\frac{\tau(a)}{b} + \tau'(a)s}\frac{dy}{ds} + \lambda y = 0.$$

Вводя обозначения $\gamma = \tau(a)$, $\alpha = -b\lambda$ и выбирая $b = -\dfrac{1}{\tau'(a)}$, получаем:

$$sy'' + (\gamma - s)y' - \alpha y = 0. \tag{1.3}$$

Уравнение (1.3) называют *вырожденным гипергеометрическим* уравнением.

Случай 3. Если $\sigma \equiv const$, то, не ограничивая общности, можно считать, что $\sigma \equiv 1$. Если при этом $\tau' = 0$, то уравнение (1.1) является линейным однородным уравнением с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим случай $\tau' \neq 0$. С помощью замены $z = a + bs$ уравнение (1.1) можно записать в виде

$$\frac{1}{b^2}\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{1}{b}\underbrace{\tau(a+bs)}_{\tau(a)+b\tau' s}\frac{dy}{ds} + \lambda y = 0.$$

Пусть a — корень уравнения $\tau(a) = 0$. Выберем $b^2 = -\dfrac{2}{\tau'}$ и обозначим $b^2\lambda$ как 2ν. В результате уравнение (1.1) примет вид:

$$y'' - 2sy' + 2\nu y = 0. \tag{1.4}$$

Уравнение (1.4) называется *уравнением Эрмита*. При целых неотрицательных ν оно совпадает с уравнением для полиномов Эрмита.

2 Гипергеометрическое уравнение

2.1 Виды частных решений гипергеометрического уравнения

Предположим, что нам известно какое-нибудь частное решение $y_1 = f(\alpha, \beta, \gamma, z)$ уравнения

$$z(1-z)y'' + (\gamma - (\alpha+\beta+1)z)y' - \alpha\beta y = 0. \tag{2.1}$$

Если в результате замены $y(z) = \varphi(z)u(z)$ уравнение (2.1) сводится к уравнению такого же типа:

$$z(1-z)u'' + (\gamma' - (\alpha'+\beta'+1)z)u' - \alpha'\beta' u = 0, \tag{2.2}$$

то функция $u_1 = f(\alpha', \beta', \gamma', z)$ будет частным решением уравнения (2.2). Это в свою очередь означает, что функция $y_2 = \varphi(z)f(\alpha', \beta', \gamma', z)$ будет удовлетворять уравнению (2.1). Кроме того, уравнение (2.1) симметрично относительно перестановки α и β, а поэтому функции $y_3 = f(\beta, \alpha, \gamma, z)$ и $y_4 = \varphi(z)f(\beta', \alpha', \gamma', z)$ также будут частными решениями уравнения (2.1).

Рассмотрим возможные преобразования, приводящие от уравнения (2.1) к уравнению (2.2):

$$y = \varphi u \quad \Rightarrow \quad y' = \varphi' u + \varphi u', \quad y'' = \varphi'' u + 2\varphi' u' + \varphi u''.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (2.1), получаем:

$$z(1-z)(\varphi'' u + 2\varphi' u' + \varphi u'') + (\gamma - (\alpha+\beta+1)z)(\varphi' u + \varphi u') - \alpha\beta\varphi u = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} z(1-z)u'' + u'\left[2\frac{\varphi'}{\varphi}z(1-z) + (\gamma - (\alpha+\beta+1)z)\right] - \\ - \left[\alpha\beta - \frac{\varphi'}{\varphi}(\gamma - (\alpha+\beta+1)z) - \frac{\varphi''}{\varphi}z(1-z)\right]u = 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Вводя обозначение $\pi(z) = \dfrac{\varphi'}{\varphi}z(1-z)$, получаем:

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{\pi(z)}{z(1-z)}, \quad \frac{\varphi''}{\varphi} = \left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)' = \frac{\pi^2(z)}{z^2(1-z)^2} + \frac{\pi'(z)}{z(1-z)} - \frac{\pi(z)\cdot(1-2z)}{z^2(1-z)^2}.$$

Рассмотрим множитель при функции $u(z)$ в уравнении (2.3):

$$\alpha\beta - \frac{\varphi'}{\varphi}(\gamma - (\alpha+\beta+1)z) - \frac{\varphi''}{\varphi}z(1-z) = \alpha\beta - \frac{\pi(z)}{z(1-z)}(\gamma - (\alpha+\beta+1)z) -$$

$$-\frac{\pi^2(z)}{z(1-z)} - \pi'(z) + \frac{\pi(z)\cdot(1-2z)}{z(1-z)} =$$

$$= \underbrace{(\alpha\beta - \pi'(z))}_{\text{число}} - \underbrace{\frac{\pi^2(z) + \pi(z)\cdot(\gamma - 1 - (\alpha+\beta-1)z)}{z(1-z)}}_{\text{положим равным}\,(-k) = const}.$$

Уравнение для функции $u(z)$ принимает вид:

$$z(1-z)u'' + (2\pi(z) + (\gamma - (\alpha+\beta+1)z))u' - (\alpha\beta - \pi'(z) + k)u = 0, \tag{2.4}$$

где

$$\pi^2 + \pi(\gamma - 1 - (\alpha+\beta-1)z) + kz(1-z) = 0,$$

откуда получаем

$$\pi_{\pm} = \frac{1-\gamma}{2} + \frac{\alpha+\beta-1}{2}z \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\gamma - 1 - (\alpha+\beta-1)z)^2 - 4kz(1-z)}. \tag{2.5}$$

Рассмотрим подробнее выражение под корнем в (2.5):

$$(\gamma-1)^2 - 2(\gamma-1)(\alpha+\beta-1)z + (\alpha+\beta-1)^2 z^2 - 4kz + 4kz^2 =$$

$$= z^2(4k + (\alpha+\beta-1)^2) - 2((\gamma-1)(\alpha+\beta-1) + 2k)z + (\gamma-1)^2.$$

Это выражение должно быть полным квадратом, поэтому приравняем нулю его определитель:

$$\frac{D}{4} = 4k^2 + 4k(\gamma-1)(\alpha+\beta-1) + (\gamma-1)^2(\alpha+\beta-1)^2 - 4k(\gamma-1)^2 - (\gamma-1)^2(\alpha+\beta-1)^2 =$$

$$= 4k(k + (\gamma-1)(\alpha+\beta-\gamma)) = 0 \;\Rightarrow\; k = \left[\begin{array}{l} (1-\gamma)(\alpha+\beta-\gamma), \\ 0. \end{array}\right.$$

При $k = (1-\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)$ выражение под корнем в функции $\pi_{\pm}(z)$ принимает вид:

$$\left(4(1-\gamma)(\alpha+\beta-\gamma) + (\alpha+\beta-1)^2\right) z^2 - 2(1-\gamma)(\alpha+\beta-2\gamma+1)z + (\gamma-1)^2 =$$

$$= (2\gamma-\alpha-\beta-1)^2 z^2 - 2(\gamma-1)(2\gamma-\alpha-\beta-1)z + (\gamma-1)^2 =$$

$$= (\gamma - 1 - (2\gamma-\alpha-\beta-1)z)^2 .$$

Следовательно,

$$\pi_{\pm}(z) = \frac{1-\gamma}{2} + \frac{\alpha+\beta-1}{2} z \pm \left(\frac{\gamma-1}{2} - \frac{2\gamma-\alpha-\beta-1}{2} z\right) = \left[\begin{array}{l} (\alpha+\beta-\gamma)z, \\ (1-\gamma)(1-z). \end{array}\right.$$

Случай 1. Если $\pi(z) = (\alpha+\beta-\gamma)z$, то

$$\ln' \varphi = \frac{\pi(z)}{z(1-z)} = \frac{\alpha+\beta-\gamma}{1-z},$$

откуда с точностью до нормировочного множителя получаем $\varphi(z) = (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}$. При этом уравнение (2.4) для функции $u(z)$ принимает вид:

$$z(1-z)u'' + (\gamma - (2\gamma-\alpha-\beta+1)z)u' - (\alpha\beta + \gamma^2 - (\alpha+\beta)\gamma)u = 0,$$

или, что то же самое,

$$z(1-z)u'' + (\gamma' - (\alpha'+\beta'+1)z)u' - \alpha'\beta' u = 0,$$

где $\gamma' = \gamma$, $\alpha' = \gamma - \alpha$, $\beta' = \gamma - \beta$.

Следовательно, если $y_1 = f(\alpha,\beta,\gamma,z)$ — частное решение гипергеометрического уравнения (2.1), то и функция

$$y_2(\alpha,\beta,\gamma,z) = (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} f(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, z)$$

также является частным решением уравнения (2.1).

Случай 2. Если $\pi(z) = (1-\gamma)(1-z)$, то

$$\ln' \varphi = \frac{\pi(z)}{z(1-z)} = \frac{1-\gamma}{z},$$

откуда с точностью до нормировочного множителя получаем $\varphi(z) = z^{1-\gamma}$. При этом уравнение (2.4) для функции $u(z)$ принимает вид:

$$z(1-z)u'' + (2(1-\gamma) + \gamma - (\alpha+\beta+1+2-2\gamma)z)u' - (\alpha\beta + 1 - \gamma + (1-\gamma)(\alpha+\beta-\gamma))u = 0,$$

или, что то же самое,

$$z(1-z)u'' + \{(2-\gamma) - [(\alpha+1-\gamma) + (\beta+1-\gamma) + 1]\, z\}\, u' - (\alpha+1-\gamma)(\beta+1-\gamma)u = 0.$$

Следовательно, $\gamma' = 2-\gamma$, $\alpha' = \alpha+1-\gamma$, $\beta' = \beta+1-\gamma$, и функция

$$y_3(\alpha,\beta,\gamma,z) = z^{1-\gamma} f(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, z)$$

является частным решением уравнения (2.1).

Рассмотрим теперь $k = 0$. При этом

$$\pi_{\pm}(z) = \frac{1-\gamma}{2} + \frac{\alpha+\beta-1}{2}z \pm \left(\frac{\gamma-1}{2} - \frac{\alpha+\beta-1}{2}z\right) = \left[\begin{array}{l} 0, \\ 1-\gamma+(\alpha+\beta-1)z. \end{array}\right.$$

Случай 3. Если $\pi(z) \equiv 0$, то уравнение (2.4) для функции $u(z)$ совпадает с исходным уравнением (2.1), и новых решений мы не получаем.

Случай 4. Если $\pi(z) = 1-\gamma+(\alpha+\beta-1)z$, то

$$\ln'\varphi = \frac{1-\gamma}{z(1-z)} + \frac{\alpha+\beta-1}{1-z} = \frac{1-\gamma}{z} + \frac{\alpha+\beta-\gamma}{1-z},$$

откуда с точностью до нормировочного множителя получаем $\varphi(z) = z^{1-\gamma}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}$. Уравнение (2.4) для функции $u(z)$ принимает вид

$$z(1-z)u'' + (2-\gamma-(2-\alpha-\beta+1)z)u' - (\alpha\beta-\alpha-\beta+1)u = 0.$$

Следовательно, $\gamma' = 2-\gamma$, $\alpha' = 1-\alpha$, $\beta' = 1-\beta$, и функция

$$y(\alpha,\beta,\gamma,z) = (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} z^{1-\gamma} f(1-\alpha, 1-\beta, 2-\gamma, z) \tag{2.6}$$

является частным решением уравнения (2.1). Однако функция (2.6) не дает нового типа решения, так как является следствием y_2 и y_3. В самом деле, положим в выражении для y_3 вместо частного решения $f(\alpha,\beta,\gamma,z)$ гипергеометрического уравнения частное решение

$$y_2(\alpha,\beta,\gamma,z) = (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} f(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, z).$$

При этом получим решение

$$f_3 = z^{1-\gamma} y_2(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, z) = z^{1-\gamma}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} f(1-\alpha, 1-\beta, 2-\gamma, z),$$

совпадающее с (2.6).

Подведем итог: если функция $y_1 = f(\alpha, \beta, \gamma, z)$ является частным решением уравнения

$$z(1-z)y'' + (\gamma - (\alpha+\beta+1)z)y' - \alpha\beta y = 0,$$

то его частными решениями также являются функции

$$y_2 = z^{1-\gamma} f(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, z),$$

$$y_3 = (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} f(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, z),$$

а также функции, получаемые из y_1, y_2, y_3 одновременной заменой α на β и β на α.

2.2 Построение частных решений гипергеометрического уравнения в интегральном виде

Ранее было показано, что уравнение гипергеометрического типа

$$\sigma y'' + \tau y' + \lambda y = 0$$

имеет частные решения вида

$$y(z) = \frac{C_\nu}{\rho(z)} \int\limits_C \frac{\sigma^\nu(s)\rho(s)}{(s-z)^{\nu+1}} ds, \tag{2.7}$$

где C_ν — нормировочная постоянная, $\rho(z)$ — решение уравнения Пирсона $(\sigma\rho)' = \tau\rho$, число ν — решение уравнения

$$\lambda + \nu\tau' + \frac{\nu(\nu-1)}{2}\sigma'' = 0,$$

а контур C таков, что интеграл в выражении (2.7) можно дифференцировать по параметру z под знаком интеграла, и на концах s_1, s_2 контура C выполняется условие

$$\left.\frac{\sigma^{\nu+1}(s)\rho(s)}{(s-z)^{\nu+2}}\right|_{s_1}^{s_2} = 0.$$

Воспользуемся этим утверждением для построения гипергеометрических функций в интегральном виде.

Найдем функцию $\rho(z)$ для гипергеометрического уравнения

$$\underbrace{z(1-z)}_{\sigma(z)} y'' + \underbrace{(\gamma - (\alpha+\beta+1)z)}_{\tau(z)} y' - \alpha\beta y = 0.$$

Из уравнения Пирсона получаем:

$$\rho(z) = \frac{1}{\sigma(z)} \exp\left\{\int \frac{\tau(z)}{\sigma(z)} dz\right\} = \frac{1}{z(1-z)} \exp\left\{\int \underbrace{\frac{\gamma - (\alpha+\beta+1)z}{z(1-z)}}_{\frac{\gamma}{z} - \frac{\alpha+\beta+1-\gamma}{1-z}} dz\right\} =$$

$$= \frac{z^{\gamma}(1-z)^{\alpha+\beta+1-\gamma}}{z(1-z)} = z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha+\beta-\gamma}$$

с точностью до нормировочного множителя. Найдем теперь число ν:

$$-\alpha\beta - (\alpha+\beta+1)\nu - \frac{\nu(\nu-1)}{2}2 = 0 \;\Rightarrow\; \alpha\beta + (\alpha+\beta)\nu + \nu^2 = (\nu+\alpha)(\nu+\beta) = 0 \;\Rightarrow\; \nu = \left[\begin{array}{l} -\alpha, \\ -\beta. \end{array}\right.$$

Так как гипергеометрическое уравнение симметрично относительно α и β, то можно выбрать $\nu = -\alpha$ или $\nu = -\beta$, что приведет к эквивалентным результатам. Пусть, например, $\nu = -\alpha$. Тогда условие на концах контура C принимает вид:

$$\left.\frac{\sigma^{\nu+1}(s)\rho(s)}{(s-z)^{\nu+2}}\right|_{s_1}^{s_2} = \left.\frac{s^{-\alpha+1}(1-s)^{-\alpha+1}s^{\gamma-1}(1-s)^{\alpha+\beta-\gamma}}{(s-z)^{-\alpha+2}}\right|_{s_1}^{s_2} = s^{\gamma-\alpha}(1-s)^{\beta-\gamma+1}(s-z)^{\alpha-2}\Big|_{s_1}^{s_2} = 0.$$

Предположим сначала, что $z \in (0,1)$, а затем воспользуемся принципом аналитического продолжения для полученного интегрального выражения. Рассмотрим несколько возможных случаев.

Случай 1. Пусть $\mathrm{Re}\,(\gamma-\alpha) > 0$ и $\mathrm{Re}\,(\alpha-2) > 0$. Тогда в качестве концов контура C можно выбрать $s_1 = 0$ и $s_2 = z$. В качестве самого контура C возьмем отрезок, соединяющий точки s_1 и s_2: $s = tz$, где $t \in [0,1]$. При этом

$$y_1(\alpha,\beta,\gamma,z) = \frac{C(\alpha,\beta,\gamma)}{z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha+\beta-\gamma}} \int\limits_0^1 \frac{(zt)^{-\alpha}(1-zt)^{-\alpha}(zt)^{\gamma-1}(1-zt)^{\alpha+\beta-\gamma}}{(z-zt)^{-\alpha+1}} z dt =$$

$$= C(\alpha,\beta,\gamma)(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} \int\limits_0^1 t^{\gamma-\alpha-1}(1-t)^{\alpha-1}(1-zt)^{\beta-\gamma} dt.$$

Выражение для функции $y_1(\alpha,\beta,\gamma,z)$ получено в предположении, что $z \in (0,1)$, но для этой функции можно построить аналитическое продолжение на комплексную плоскость с разрезом. Разрез следует провести так, чтобы функция y_1 была однозначной. Выберем ветвь функции $(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}$, обращающуюся в 1 при $z \to 0$. Для этого потребуем, чтобы выполнялось условие $|\arg(1-z)| < \pi$. Тогда условие $|\arg(1-zt)| < \pi$ при $t \in [0,1]$ также будет выполнено. Следовательно, для однозначности функции y_1 достаточно провести разрез в плоскости комплексной переменной z вдоль вещественной оси при $z \geqslant 1$.

Выберем нормировочную постоянную $C(\alpha,\beta,\gamma)$ из условия $\lim\limits_{z\to 0} y_1 = 1$:

$$1 = C(\alpha,\beta,\gamma)\int\limits_0^1 t^{\gamma-\alpha-1}(1-t)^{\alpha-1}dt = B(\gamma-\alpha,\alpha) = \frac{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\gamma)} \quad\Rightarrow$$

$$C(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\alpha)}.$$

В результате получаем следующее выражение для гипергеометрической функции

$$y_1(\alpha,\beta,\gamma,z) = \frac{\Gamma(\gamma)(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^1 t^{\gamma-\alpha-1}(1-t)^{\alpha-1}(1-zt)^{\beta-\gamma}dt \tag{2.8}$$

в области $|\arg(1-z)| < \pi$.

Как было показано выше, функции

$$y_2(\alpha,\beta,\gamma,z) = z^{1-\gamma}y_1(\alpha+1-\gamma,\beta+1-\gamma,2-\gamma,z),$$

$$y_3(\alpha,\beta,\gamma,z) = (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}y_1(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma,z),$$

$$y_4(\alpha,\beta,\gamma,z) = y_1(\beta,\alpha,\gamma,z)$$

также являются частными решениями гипергеометрического уравнения. Так как функции y_1, y_2, y_3 и y_4 удовлетворяют одному и тому же линейному дифференциальному уравнению второго порядка, то линейно независимыми из них могут быть только две. При $\gamma \neq 1$ функции y_1 и y_2 по-разному ведут себя при $z\to 0$, а значит являются линейно независимыми. Следовательно, функции y_3 и y_4 — линейные комбинации y_1 и y_2:

$$y_3 = q_3^1 y_1 + q_3^2 y_2, \qquad y_4 = q_4^1 y_1 + q_4^2 y_2, \tag{2.9}$$

где q_3^1, q_3^2, q_4^1 и q_4^2 — числа.

Рассмотрим поведение функций y_3 и y_4 при $z\to 0$. Так как имеет место равенство $y_1(\alpha,\beta,\gamma,0) = 1$, то $y_1(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma,0) = 1$ и $y_1(\beta,\alpha,\gamma,0) = 1$. Следовательно,

$$\lim_{z\to 0} y_3(z) = 1, \quad \lim_{z\to 0} y_4(z) = 1. \tag{2.10}$$

Пусть $\operatorname{Re}\gamma > 1$. Тогда равенства (2.9) могут выполняться лишь при $q_3^2 = q_4^2 = 0$, причем в силу (2.10)

$$\lim_{z\to 0} y_3 = 1 = q_3^1 \lim_{z\to 0} y_1 = q_3^1 \quad\Rightarrow\quad q_3^1 = 1,$$
$$\lim_{z\to 0} y_4 = 1 = q_4^1 \lim_{z\to 0} y_1 = q_4^1 \quad\Rightarrow\quad q_4^1 = 1.$$

Это означает, что $y_1 = y_3 = y_4$, то есть это различные формы записи одной и той же функции. Последнее утверждение позволяет упростить выражение для y_1:

$$y_1 = (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} y_1(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \underbrace{(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}(1-z)^{\gamma-(\gamma-\alpha)-(\gamma-\beta)}}_{1} \cdot$$

$$\cdot \int\limits_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-zt)^{-\beta} dt.$$

Итак, окончательно получаем:

$$y_1(\alpha, \beta, \gamma, z) = f(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int\limits_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-zt)^{-\beta} dt. \tag{2.11}$$

В литературе гипергеометрическую функцию $f(\alpha, \beta, \gamma, z)$, как правило, можно встретить именно в форме записи (2.11).

Гипергеометрическая функция $f(\alpha, \beta, \gamma, z)$ получена в области $|\arg(1-z)| < \pi$ в предположении, что $\operatorname{Re}(\gamma - \alpha) > 0$ и $\operatorname{Re}(\alpha - 2) > 0$. Последнее условие можно ослабить, пользуясь принципом аналитического продолжения. Покажем, что функция $f(\alpha, \beta, \gamma, z)$ является аналитической при выполнении условий

$$\operatorname{Re}\gamma > \operatorname{Re}\alpha > 0, \quad |\arg(1-z)| < \pi.$$

Для этого рассмотрим функцию $F = t^{\alpha-\delta}(1-t)^{\gamma-\alpha-\delta}(1-zt)^{-\beta}$ при достаточно малом положительном δ. Она непрерывна в замкнутой области $t \in [0,1]$, $\operatorname{Re}\alpha \in [\delta, N]$, $\operatorname{Re}(\gamma-\alpha) \in [\delta, N]$, $|\beta| \leqslant N$, $|z| \leqslant N$, $|\arg(1-\delta-z)| \leqslant \pi - \delta$, где $N > \delta$ — произвольное положительное число. Следовательно, функция F ограничена в указанной области, то есть существует такое число $M > 0$, что $|F| \leqslant M$. Но тогда справедливо неравенство:

$$|f| \leqslant \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int\limits_0^1 |F \cdot t^{\delta-1}(1-t)^{\delta-1}| dt \leqslant \frac{\Gamma(\gamma) M}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \underbrace{\int\limits_0^1 t^{\delta-1}(1-t)^{\delta-1} dt}_{\text{сходится при } \forall \delta > 0}.$$

В силу произвольности δ и N последнее неравенство означает, что интеграл в выражении для $f(\alpha, \beta, \gamma, z)$ сходится равномерно по параметрам α, β, γ и z в области $\operatorname{Re}\gamma > \operatorname{Re}\alpha > 0$, $|\arg(1-z)| < \pi$, то есть функция $f(\alpha, \beta, \gamma, z)$ является аналитической в этой области.

Замечание 2.1 *Функцию $f(\alpha, \beta, \gamma, z)$ удобно выбирать в качестве одного из частных решений гипергеометрического уравнения в тех задачах, в которых дополнительные условия (ограниченности, например) ставятся при $z = 0$.*

Случай 2. Пусть $\mathrm{Re}\,(\beta+1-\gamma)>0$ и $\mathrm{Re}\,(\alpha-2)>0$. Тогда в качестве концов контура C можно выбрать точки 1 и z, предполагая, что $z\in(0,1)$. В качестве контура C рассмотрим отрезок, соединяющий точки $s_1=1$ и $s_2=z$: $s=1-(1-z)t$, $t\in[0,1]$. Тогда

$$\rho(s)=s^{\gamma-1}(1-s)^{\alpha+\beta-\gamma}=(1-(1-z)t)^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha+\beta-\gamma}t^{\alpha+\beta-\gamma},$$

$$\sigma(s)=s(1-s)=(1-(1-z)t)(1-z)t.$$

Следовательно,

$$y_5=C(\alpha,\beta,\gamma)z^{1-\gamma}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}\int\limits_0^1\frac{(1-(1-z)t)^{\gamma-\alpha-1}(1-z)^{\beta-\gamma}t^{\beta-\gamma}}{(1-(1-z)t-z)^{1-\alpha}}\,[-(1-z)]\,dt=$$

$$=-C(\alpha,\beta,\gamma)z^{1-\gamma}\int\limits_0^1 t^{\overbrace{\beta-\gamma}^{\alpha'-1}}\cdot(1-t)^{\overbrace{\alpha-1}^{\gamma'-\alpha'-1}}\cdot(1-(1-z)t)^{\overbrace{\gamma-\alpha-1}^{-\beta'}}dt=$$

$$=-\frac{C(\alpha,\beta,\gamma)\Gamma(\alpha')\Gamma(\gamma'-\alpha')}{\Gamma(\gamma')}z^{1-\gamma}f(\alpha',\beta',\gamma',1-z)=$$

$$=z^{1-\gamma}f(\beta+1-\gamma,\alpha+1-\gamma,\alpha+\beta+1-\gamma,1-z),$$

где $\alpha'=\beta+1-\gamma$, $\beta'=\alpha+1-\gamma$, $\gamma'=\alpha+\beta+1-\gamma$, если выбрать

$$C(\alpha,\beta,\gamma)=-\frac{\Gamma(\gamma')}{\Gamma(\alpha')\Gamma(\gamma'-\alpha')}.$$

Воспользуемся тем, что при $\gamma'\neq1$, то есть при $\gamma\neq\alpha+\beta$ справедливо равенство

$$f(\alpha',\beta',\gamma',1-z)=[1-(1-z)]^{\gamma'-\alpha'-\beta'}f(\gamma'-\alpha',\gamma'-\beta',\gamma',1-z)=$$

$$=z^{\gamma-1}f(\alpha,\beta,\alpha+\beta+1-\gamma,1-z),$$

откуда получаем

$$y_5(\alpha,\beta,\gamma,z)=f(\alpha,\beta,\alpha+\beta+1-\gamma,1-z).$$

Следовательно, при $z\in(0,1)$ и выполнении условий $\mathrm{Re}\,(\beta+1-\gamma)>0$ и $\mathrm{Re}\,(\alpha-2)>0$ функция $f(\alpha,\beta,\alpha+\beta+1-\gamma,1-z)$ является частным решением гипергеометрического уравнения.

Воспользуемся принципом аналитического продолжения для того чтобы ослабить требования на параметры уравнения и переменную z. В предыдущем пункте (случай 1) было показано, что функция $f(\alpha,\beta,\gamma,z)$ является аналитической в области $\mathrm{Re}\,\gamma>\mathrm{Re}\,\alpha>0$, $|\arg(1-z)|<\pi$. Следовательно, функция $f(\alpha,\beta,\alpha+\beta+1-\gamma,1-z)$ является аналитической в области $\mathrm{Re}\,(\beta+1-\gamma)>0$ и $\mathrm{Re}\,\alpha>0$, $|\arg z|<\pi$.

Замечание 2.2 *Так как функция $f(\alpha,\beta,\alpha+\beta+1-\gamma,1-z)$ обращается в единицу при $z=1$, ее удобно выбирать в качестве частного решения гипергеометрического уравнения в том случае, когда дополнительные условия задачи заданы при $z=1$.*

При $\gamma\neq\alpha+\beta$ линейно независимым по отношению к $f(\alpha,\beta,\alpha+\beta+1-\gamma,1-z)$ решением уравнения является функция

$$y_6=(1-z)^{1-\gamma'}f(\alpha'+1-\gamma',\beta'+1-\gamma',2-\gamma',1-z)=$$

$$=(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}f(1-\alpha,1-\beta,1+\gamma-\alpha-\beta,1-z).$$

Случай 3. Если $\operatorname{Re}(\alpha-\gamma)>0$ или $\operatorname{Re}(\gamma-\beta-1)>0$, то можно использовать контур C, один из концов которого уходит на бесконечность. При условии $\operatorname{Re}(\alpha-2)>0$ в качестве другого конца контура C можно взять точку z. Пусть C — это луч $s=\dfrac{z}{t}$, где $t\in[0,1]$. Тогда

$$\rho(s)=s^{\gamma-1}(1-s)^{\alpha+\beta-\gamma}=z^{\gamma-1}t^{1-\gamma}\left(1-\frac{z}{t}\right)^{\alpha+\beta-\gamma}=t^{1-\alpha-\beta}z^{\gamma-1}(t-z)^{\alpha+\beta-\gamma},$$

$$\sigma(s)=s(1-s)=\frac{z}{t}\left(1-\frac{z}{t}\right)=t^{-2}z(t-z).$$

Следовательно,

$$y_7(\alpha,\beta,\gamma,z)=C(\alpha,\beta,\gamma)z^{1-\gamma}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}\int\limits_0^1\frac{t^{\alpha-\beta+1}z^{\gamma-\alpha-1}(t-z)^{\beta-\gamma}}{\left(\dfrac{z}{t}-z\right)^{-\alpha+1}}\left(-\frac{z}{t^2}\right)dt=$$

$$=-C(\alpha,\beta,\gamma)(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}\int\limits_0^1 t^{-\beta}(1-t)^{\alpha-1}(t-z)^{\beta-\gamma}dt=$$

$$=-C(\alpha,\beta,\gamma)(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}(-z)^{\beta-\gamma}\int\limits_0^1 t^{-\beta}(1-t)^{\alpha-1}(1-z^{-1}t)^{\beta-\gamma}dt.$$

Введем обозначения:

$$-\beta=\alpha'-1,\ \alpha-1=\gamma'-\alpha'-1,\ (\beta-\gamma)=-\beta'\ \Leftrightarrow\ \alpha'=1-\beta,\ \beta'=\gamma-\beta,\ \gamma'=\alpha+1-\beta.$$

Пусть $C(\alpha,\beta,\gamma)=(-1)^{1+\gamma-\alpha-\beta}\dfrac{\Gamma(\gamma')}{\Gamma(\alpha')\Gamma(\gamma'-\alpha')}$. Тогда

$$y_7(\alpha,\beta,\gamma,z)=(-1)^{\gamma-\alpha-\beta}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}(-z)^{\beta-\gamma}f(\alpha',\beta',\gamma',z^{-1}).$$

Воспользуемся тем, что

$$f(\alpha',\beta',\gamma',z^{-1})=(1-z^{-1})^{\gamma'-\alpha'-\beta'}f(\gamma'-\alpha',\gamma'-\beta',\gamma',z^{-1})=$$

$$= (1 - z^{-1})^{\alpha+\beta-\gamma} f(\alpha, \alpha + 1 - \gamma, \alpha + 1 - \beta, z^{-1}) =$$

$$= (z - 1)^{\alpha+\beta-\gamma} z^{\gamma-\alpha-\beta} f(\alpha, \alpha + 1 - \gamma, \alpha + 1 - \beta, z^{-1}).$$

В результате получаем:

$$y_7(\alpha, \beta, \gamma, z) = (-z)^{-\alpha} f(\alpha, \alpha + 1 - \gamma, \alpha + 1 - \beta, z^{-1}).$$

Меняя α и β ролями, находим еще одно частное решение гипергеометрического уравнения:

$$y_8(\alpha, \beta, \gamma, z) = (-z)^{-\beta} f(\beta, \beta + 1 - \gamma, \beta + 1 - \alpha, z^{-1}).$$

Если $\alpha \neq \beta$, то функции y_1 и y_2 по-разному ведут себя на бесконечности, а значит являются линейно независимыми.

Замечание 2.3 *Полученные частные решения y_7 и y_8 гипергеометрического уравнения удобно использовать в том случае, когда дополнительные условия в задаче ставятся на бесконечности.*

3 Вырожденное гипергеометрическое уравнение

3.1 Виды частных решений вырожденного гипергеометрического уравнения

Пусть $y_1 = f(\alpha, \gamma, z)$ — частное решение вырожденного гипергеометрического уравнения

$$zy'' + (\gamma - z)y' - \alpha y = 0. \tag{3.1}$$

Получим на его основе другие частные решения. Осуществим преобразование $y(z) = \varphi(z)u(z)$ и получим соответствующее уравнение для функции $u(z)$:

$$y' = \varphi' u + \varphi u', \quad y'' = \varphi'' u + 2\varphi' u' + \varphi u'' \;\; \Rightarrow$$

$$z(\varphi'' u + 2\varphi' u' + \varphi u'') + (\gamma - z)(\varphi' u + \varphi u') - \alpha \varphi u = 0 \;\; \Rightarrow$$

$$zu'' + \left[2\frac{\varphi'}{\varphi} z + (\gamma - z)\right] u' - \left[\alpha - z\frac{\varphi''}{\varphi} - \frac{\varphi'}{\varphi}(\gamma - z)\right] u = 0.$$

Положим

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{\pi(z)}{z} \;\; \Rightarrow \;\; \frac{\varphi''}{\varphi} = \left(\frac{\pi(z)}{z}\right)' + \left(\frac{\pi(z)}{z}\right)^2 = \frac{\pi'(z)}{z} + \frac{\pi^2(z) - \pi(z)}{z^2},$$

где $\pi(z)$ — полином не старшей первой степени. В результате получаем:

$$zu'' + [2\pi(z) + \gamma - z]\, u' - \Big[\underbrace{\alpha - \pi'(z)}_{\text{число}} - \underbrace{\frac{\pi^2(z) - \pi(z)(1-\gamma+z)}{z}}_{\text{положим равным}\,(-k)} \Big]\, u = 0.$$

Полином $\pi(z)$ удовлетворяет квадратному уравнению

$$\pi^2 - \pi(1-\gamma+z) + kz = 0,$$

корни которого имеют вид:

$$\pi_\pm = \frac{1-\gamma+z}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(1-\gamma+z)^2 - 4kz} = \frac{1-\gamma+z}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(1-\gamma)^2 + z^2 - 2z(2k-1+\gamma)}.$$

Число k находим из условия, что под корнем должен быть полный квадрат:

$$\frac{D}{4} = (2k-1+\gamma)^2 - (1-\gamma)^2 = 4k^2 + 4k(\gamma-1) = 4k(k-1+\gamma) = 0 \;\Rightarrow\; k = \left[\begin{array}{l} 1-\gamma, \\ 0. \end{array} \right.$$

Рассмотрим $k = 1-\gamma$:

$$\pi_\pm(z) = \frac{1-\gamma+z}{2} \pm \frac{1-\gamma-z}{2} = \left[\begin{array}{llll} 1-\gamma & \Rightarrow\; \ln'\varphi = \dfrac{1-\gamma}{z} & \Rightarrow & \varphi = z^{1-\gamma}, \\ z & \Rightarrow\; \ln'\varphi = 1 & \Rightarrow & \varphi = e^z, \end{array} \right.$$

где функция $\varphi(z)$ находится с точностью до нормировочного множителя.

Случай 1. Если $\pi(z) = 1-\gamma$, то уравнение для функции $u(z)$ принимает вид:

$$zu'' + (2-\gamma-z)u' - (\alpha+1-\gamma)u = 0,$$

или, что то же самое

$$zu'' + (\gamma'-z)u' - \alpha' u = 0,$$

где $\gamma' = 2-\gamma$ и $\alpha' = \alpha+1-\gamma$. Следовательно, функция

$$y_2(\alpha,\gamma,z) = z^{1-\gamma} f(\alpha+1-\gamma, 2-\gamma, z)$$

является частным решением уравнения (3.1).

Случай 2. Если $\pi(z) = z$, то уравнение для функции $u(z)$ принимает вид:

$$zu'' + (\gamma+z)u' - (\alpha-\gamma)u = 0.$$

Для того, чтобы преобразовать это уравнение в вырожденное гипергеометрическое, сделаем замену переменных $z' = -z$:

$$-z'\frac{d^2u}{dz'^2} - (\gamma - z')\frac{du}{dz'} - (\alpha-\gamma)u = 0 \;\Rightarrow$$

$$z'\frac{d^2u}{dz'^2} + (\gamma - z')\frac{du}{dz'} - (\gamma - \alpha)u = 0. \tag{3.2}$$

Функция $u(z') = f(\gamma - \alpha, \gamma, z')$ является частным решением уравнения (3.2). Следовательно, функция

$$y_3(\alpha, \gamma, z) = e^z f(\gamma - \alpha, \gamma, -z)$$

удовлетворяет уравнению (3.1).

Рассмотрим теперь $k = 0$:

$$\pi_\pm(z) = \frac{1-\gamma+z}{2} \pm \frac{1-\gamma+z}{2} = \left[\begin{array}{l} 1-\gamma+z, \\ 0. \end{array}\right.$$

Случай 3. При $\pi(z) \equiv 0$ уравнение для функции $u(z)$ совпадает с исходным уравнением (3.1), то есть новых решений мы не получим.

Случай 4. При $\pi(z) = 1 - \gamma + z$ уравнение для функции $u(z)$ принимает вид:

$$zu'' + (2 - \gamma + z)u' - (\alpha - 1)u = 0.$$

Функция $u(z) = f(1 - \alpha, 2 - \gamma, -z)$ является его частным решением. При этом

$$\ln'\varphi = \frac{1-\gamma}{z} + 1 \;\;\Rightarrow\;\; \varphi = z^{1-\gamma}e^z,$$

откуда следует, что функция

$$y = z^{1-\gamma}e^z f(1 - \alpha, 2 - \gamma, -z) \tag{3.3}$$

удовлетворяет вырожденному гипергеометрическому уравнению. Однако это решение не дает ничего принципиально нового, так как оно может быть получено из y_2 и y_3. В самом деле, если в выражении для y_3 вместо $f(\alpha, \gamma, z)$ взять частное решение $y_2(\alpha, \gamma, z)$, то мы получим решение

$$f_3(\alpha, \gamma, z) = e^z y_2(\gamma - \alpha, \gamma, -z) = e^z(-z)^{1-\gamma} f(1 - \alpha, 2 - \gamma, -z),$$

совпадающее с точностью до нормировочного множителя с функцией (3.3).

3.2 Явный вид частных решений вырожденного гипергеометрического уравнения

Построим частные решения уравнения

$$zy'' + (\gamma - z)y' - \alpha y = 0,$$

пользуясь интегральным выражением

$$y_\nu(z) = \frac{C_\nu(\alpha,\gamma)}{\rho(z)} \int\limits_C \frac{\sigma^\nu(s)\rho(s)}{(s-z)^{\nu+1}} ds. \tag{3.4}$$

Так как в данном случае $\sigma(z) = z$ и $\tau(z) = \gamma - z$, уравнение для параметра ν принимает вид:

$$-\alpha + \nu\tau' + \frac{\nu(\nu-1)}{2}\sigma'' = 0 \quad\Rightarrow\quad -\alpha - \nu = 0 \quad\Rightarrow\quad \nu = -\alpha.$$

Найдем функцию $\rho(z)$ с точностью до нормировочного множителя:

$$\rho(z) = \frac{1}{\sigma(z)} \exp\left\{\int \frac{\tau(z)}{\sigma(z)} dz\right\} = \frac{1}{z} \exp\left\{\int \left(\frac{\gamma}{z} - 1\right) dz\right\} = z^{\gamma-1}e^{-z}.$$

Интегральное выражение (3.4) для частного решения вырожденного гипергеометрического уравнения применимо в том случае, когда выполнены условия:

$$\left.\frac{\sigma^{\nu+1}(s)\rho(s)}{(s-z)^{\nu+2}}\right|_{s_1}^{s_2} = \left.\frac{s^{-\alpha+1}s^{\gamma-1}e^{-s}}{(s-z)^{-\alpha+2}}\right|_{s_1}^{s_2} = \left. s^{\gamma-\alpha}e^{-s}(s-z)^{\alpha-2}\right|_{s_1}^{s_2} = 0.$$

Предположим сначала, что $z > 0$. Тогда возможными вариантами для s_1 и s_2 являются 0, z и ∞. Рассмотрим несколько возможных вариантов выбора контура C.

Случай 1. Пусть выполняются условия $\mathrm{Re}\,(\alpha-2) > 0$ и $\mathrm{Re}\,(\gamma-\alpha) > 0$. Тогда в качестве контура C можно взять отрезок, соединяющий точки $s_1 = 0$ и $s_2 = z$: $s = zt$, $t \in [0,1]$. При этом

$$y_1 = C(\alpha,\gamma)z^{1-\gamma}e^z \int\limits_0^1 \frac{(zt)^{-\alpha}(zt)^{\gamma-1}e^{-zt}}{(z-zt)^{-\alpha+1}} zdt = C(\alpha,\gamma)e^z \int\limits_0^1 t^{\gamma-1-\alpha}(1-t)^{\alpha-1}e^{-zt}dt.$$

Нормировочную константу $C(\alpha,\gamma)$ выберем из условия $\lim\limits_{z\to 0} y_1 = 1$:

$$1 = C(\alpha,\gamma) \int\limits_0^1 t^{\gamma-\alpha-1}(1-t)^{\alpha-1}dt = C(\alpha,\gamma)B(\gamma-\alpha,\alpha) = C(\alpha,\gamma)\frac{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\gamma)} \quad\Rightarrow$$

$$C(\alpha,\gamma) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}.$$

В результате получаем

$$y_1(\alpha,\gamma,z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} e^z \int\limits_0^1 t^{\gamma-1-\alpha}(1-t)^{\alpha-1}e^{-zt}dt. \tag{3.5}$$

Частное решение (3.5) вырожденного гипергеометрического уравнения получено в предположении, что $z > 0$, $\mathrm{Re}\,(\alpha-2) > 0$ и $\mathrm{Re}\,(\gamma-\alpha) > 0$. Однако функция $y_1(\alpha,\gamma,z)$ будет аналитической при любых z, если выполнены условия $\operatorname{Re}\gamma > \operatorname{Re}\alpha > 0$. Для однозначности будем считать, что $-\pi < \arg z \leqslant \pi$. В соответствии с принципом аналитического продолжения функция $y_1(\alpha, \gamma, z)$ является частным решением вырожденного гипергеометрического уравнения в области $-\pi < \arg z \leqslant \pi$.

Как было показано выше, если $y_1(\alpha, \beta, \gamma)$ удовлетворяет вырожденному гипергеометрическому уравнению, то функции

$$y_2(\alpha, \gamma, z) = z^{1-\gamma} y_1(\alpha + 1 - \gamma, 2 - \gamma, z),$$

$$y_3(\alpha, \gamma, z) = e^z y_1(\gamma - \alpha, \gamma, -z)$$

также являются его частными решениями.

При $\gamma \neq 1$ функции y_1 и y_2 по-разному ведут себя при $z \to 0$, а значит являются линейно независимыми. При этом функция y_3 является их линейной комбинацией. Рассмотрим поведение функции y_3 при $z \to 0$:

$$\lim_{z \to 0} y_3 = y_1(\gamma - \alpha, \gamma, 0) = 1.$$

Пусть $\operatorname{Re}\gamma > 1$. При этом функция y_2 в нуле неограничена, а функции y_1 и y_3 при $z \to 0$ совпадают. Следовательно, $y_1 = y_3$, то есть это разные формы записи одной и той же функции. Это позволяет упростить выражение (3.5) для функции y_1:

$$y_1(\alpha, \gamma, z) = e^z y_1(\gamma - \alpha, \gamma, -z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1} e^{zt} dt.$$

Функцию

$$f(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1} e^{zt} dt \tag{3.6}$$

называют *вырожденной гипергеометрической функцией*. Функция $f(\alpha, \gamma, z)$ является аналитической в области $-\pi < \arg z \leqslant \pi$, $\operatorname{Re}\gamma > \operatorname{Re}\alpha > 0$.

Случай 2. Пусть $z > 0$ и $\operatorname{Re}(\alpha - 2) > 0$. Тогда в качестве контура C можно взять луч $s = z(1+t)$, где $t \in [0, +\infty)$. При этом частное решение (3.4) вырожденного гипергеометрического уравнения принимает вид:

$$y_4(\alpha, \gamma, z) = C(\alpha, \gamma) z^{1-\gamma} e^z \int\limits_0^\infty \frac{z^{-\alpha}(1+t)^{-\alpha} z^{\gamma-1}(1+t)^{\gamma-1} e^{-z(1+t)}}{(zt)^{-\alpha+1}} z dt =$$

$$= C(\alpha, \gamma) \int\limits_0^\infty t^{\alpha-1}(1+t)^{\gamma-\alpha-1} e^{-zt} dt.$$

Выберем $C(\alpha,\gamma)=\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}$. Тогда $\lim\limits_{z\to+\infty} z^{\alpha}y_4(\alpha,\gamma,z)=1$ (это утверждение можно доказать на основании леммы Ватсона). Функция

$$G(\alpha,\gamma,z)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^{\infty} t^{\alpha-1}(1+t)^{\gamma-\alpha-1}e^{-zt}dt \tag{3.7}$$

называется *вырожденной гипергеометрической функцией второго рода*. Она является аналитической при $z\neq 0$, $|\arg z|<\dfrac{\pi}{2}$, $\operatorname{Re}\alpha>0$. Функция $G(\alpha,\gamma,z)$ может быть аналитически продолжена на комплексную плоскость с разрезом вдоль вещественной оси при $z\leqslant 0$.

Функции

$$y_5(\alpha,\gamma,z)=z^{1-\gamma}G(\alpha+1-\gamma,2-\gamma,z),$$

$$y_6(\alpha,\gamma,z)=e^{z}G(\gamma-\alpha,\gamma,-z)$$

также являются частными решениями вырожденного гипергеометрического уравнения. При этом функции $G(\alpha,\gamma,z)$ и $y_6(\alpha,\gamma,z)$ по-разному ведут себя при $z\to+\infty$, то есть являются линейно независимыми, а функция $y_5(\alpha,\gamma,z)$ является их линейной комбинацией. Рассмотрим поведение функции y_5 при $z\to+\infty$:

$$\lim_{z\to+\infty} z^{\alpha}y_5=\lim_{z\to+\infty} z^{\overbrace{\alpha+1-\gamma}^{\alpha'}}G(\underbrace{\alpha+1-\gamma}_{\alpha'},2-\gamma,z)=1.$$

Функции $G(\alpha,\gamma,z)$ и $y_5(\alpha,\gamma,z)$ одинаково ведут себя на бесконечности, то есть это разные формы записи одной и той же функции. Следовательно, имеет место равенство

$$G(\alpha,\gamma,z)=z^{1-\gamma}G(\alpha+1-\gamma,2-\gamma,z).$$

3.3 Асимптотическое поведение функции $G(\alpha,\gamma,z)$ при $z\to+\infty$

Функция $G(\alpha,\gamma,z)$ принадлежит классу так называемых интегралов Лапласа:

$$F(z)=\int\limits_0^{\infty} e^{-zt}f(t)dt. \tag{3.8}$$

Асимптотическое представление интеграла (3.8) при $|z|\to\infty$ можно получить с помощью леммы Ватсона:

Лемма 3.1 *Пусть функция $f(t)$ удовлетворяет следующим условиям:*

1) интеграл $\int\limits_0^{C}|f(t)|dt$ существует при $\forall C>0$;

2) $f(t) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k t^{\lambda_k} + O(t^{\lambda_n})$ *при* $t \to 0$, *где* $-1 < \operatorname{Re}\lambda_0 < \operatorname{Re}\lambda_1 < ... < \operatorname{Re}\lambda_n$*;*

3) $f(t) = O(e^{\nu t})$ *при* $t \to \infty$, *где* $\nu > 0$ *— некоторая постоянная.*

Тогда при $z \to \infty$ *в области* $|\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ *имеет место равенство*

$$F(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{\Gamma(\lambda_k + 1)}{z^{\lambda_k+1}} + O\left(\frac{1}{z^{\lambda_n+1}}\right).$$

Функция $f(t) = t^{\alpha-1}(1+t)^{\gamma-\alpha-1}$ удовлетворяет всем условиям леммы Ватсона, причем $\lambda_0 = \alpha - 1$, $a_0 = 1$. Следовательно,

$$\lim_{z\to+\infty} z^{\lambda_0+1} G(\alpha,\gamma,z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} a_0 \Gamma(\lambda_0+1) = 1.$$

4 Уравнение Эрмита

4.1 Виды частных решений уравнений Эрмита

Пусть известно некоторое частное решение $y_1 = f_\nu(z)$ уравнения

$$y'' - 2zy' + 2\nu y = 0. \tag{4.1}$$

В результате преобразования $y(z) = \varphi(z)u(z)$ для функции $u(z)$ получаем уравнение

$$u'' + \left(2\frac{\varphi'}{\varphi} - 2z\right)u' + \left(2\nu + \frac{\varphi''}{\varphi} - 2z\frac{\varphi'}{\varphi}\right)u = 0.$$

Пусть $\frac{\varphi'}{\varphi} = \pi(z)$, где $\pi(z)$ — полином не старше первой степени. Тогда

$$\frac{\varphi''}{\varphi} = \pi'(z) + \pi^2(z),$$

и уравнение для функции $u(z)$ принимает вид:

$$u'' + 2(\pi(z) - z)u' + (\underbrace{2\nu + \pi'(z)}_{\text{число}} + \underbrace{\pi^2(z) - 2z\pi(z)}_{-k=const})u = 0.$$

Так как $\pi^2 - 2z\pi + k = 0$, то

$$\pi_\pm = z \pm \sqrt{z^2 - k} = \left[\begin{array}{l} 2z, \\ 0, \end{array}\right.$$

поскольку под корнем должен быть полный квадрат, а это возможно только при $k = 0$.

Случай 1. Если $\pi(z) = 2z$, то $\ln' \varphi = 2z$, откуда с точностью до нормировочного множителя получаем $\varphi = e^{z^2}$. Уравнение для функции $u(z)$ принимает вид

$$u'' + 2zu' + 2(\nu + 1)u = 0.$$

Для того, чтобы превратить это уравнение в уравнение Эрмита, сделаем замену переменных $z' = iz$:

$$-\frac{d^2u}{dz'^2} + \frac{2z'}{i}i\frac{du}{dz'} + 2(\nu + 1)u = 0 \;\Rightarrow\; \frac{d^2u}{dz'^2} - 2z'\frac{du}{dz'} - 2(\nu + 1)u = 0.$$

Функция $f_{-\nu-1}(z')$ является частным решением этого уравнения. Следовательно, функция

$$y_2 = e^{z^2} f_{-\nu-1}(iz)$$

удовлетворяет исходному уравнению (4.1).

Случай 2. Если $\pi(z) \equiv 0$, то уравнение для функции $u(z)$ совпадает с исходным уравнением (4.1), и новых решений мы не получим.

Заметим, что уравнение (4.1) не меняется при замене z на $-z$. Это означает, что частными решениями уравнения (4.1) также являются функции

$$y_3(z) = f_\nu(-z), \qquad y_4(z) = e^{z^2} f_{-\nu-1}(-iz).$$

4.2 Явный вид частных решений уравнения Эрмита

Для уравнения (4.1) $\sigma = 1$, $\tau = -2z$, $\rho = e^{-z^2}$. Следовательно, если выполняется условие:

$$e^{-s^2}(s - z)^{-\nu-2}\Big|_{s_1}^{s_2} = 0,$$

то функция

$$y_1(\nu, z) = C_\nu e^{z^2} \int\limits_C \frac{e^{-s^2}}{(s - z)^{\nu+1}} ds$$

является частным решением уравнения Эрмита.

Предположим сначала, что $z > 0$ и $\operatorname{Re}(-\nu - 2) > 0$. Тогда в качестве контура C можно взять луч, исходящий из точки z: $s = z + t$, $t \in [0, +\infty)$. При этом

$$y_1 = C_\nu e^{z^2} \int\limits_0^{+\infty} e^{-z^2-2zt-t^2} t^{-\nu-1} dt = C_\nu \int\limits_0^{+\infty} e^{-2zt-t^2} t^{-\nu-1} dt.$$

Найдем область аналитичности полученной функции. Пусть

$$\operatorname{Re} z \geqslant -N, \quad \delta - 1 \leqslant -\operatorname{Re} \nu - 1 \leqslant N,$$

где $N > 0$ и $\delta > 0$. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Функция $f(t, \nu) = t^{-\nu-\delta}$ является непрерывной в области $t \in [0, \varepsilon]$, $\delta \leqslant -\operatorname{Re} \nu \leqslant N+1$. Следовательно, найдется такое $M > 0$, что $|f| \leqslant M$. Рассмотрим интеграл в выражении для функции y_1:

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-2zt-t^2} t^{-\nu-1} dt = \underbrace{\int\limits_0^{\varepsilon} e^{-2zt-t^2} t^{-\nu-1} dt}_{I_1} + \underbrace{\int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} e^{-2zt-t^2} t^{-\nu-1} dt}_{I_2},$$

$$|I_1| = \left| \int\limits_0^{\varepsilon} e^{-2zt-t^2} f(t, \nu) t^{\delta-1} dt \right| \leqslant M \int\limits_0^{\varepsilon} e^{2Nt-t^2} t^{\delta-1} dt < \infty,$$

$$|I_2| \leqslant \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} e^{2Nt-t^2} t^N dt < \infty$$

для любых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $N > 0$. Следовательно, в силу произвольности δ и N, функция y_1 является аналитической при условии $\operatorname{Re} \nu < 0$.

Положим $C_\nu = \dfrac{1}{\Gamma(-\nu)}$. Функция

$$H_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \int\limits_0^{+\infty} e^{-2zt-t^2} t^{-\nu-1} dt \tag{4.2}$$

называется *функцией Эрмита.*