Некоторые вспомогательные сведения теории специальных функций

В этом разделе рассмотрим некоторые вспомогательные функции и их свойства, которые будем далее использовать при построении и исследовании специальных функций математической физики.

1 γ - функция и ее основные свойства

Напомним, что γ-функцией называется функция

$$\Gamma(z) = \int\limits_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \qquad \operatorname{Re} z > 0. \tag{1.1}$$

Функция $\Gamma(z)$ является аналитической функцией в области ее определения, так как для любых $\delta > 0$ и $A > 0$ при $0 < \delta \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant A$ интеграл (1.1) сходится равномерно по z.

Наряду с функцией $\Gamma(z)$ будем также рассматривать функцию

$$B(u,v) = \int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1} dt. \tag{1.2}$$

Функция $B(u,v)$ является аналитической при $\operatorname{Re} u > 0$ и $\operatorname{Re} v > 0$. Для нее справедливо следующее равенство:

$$B(u,v) = \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}. \tag{1.3}$$

Для доказательства равенства (1.3) рассмотрим интеграл

$$I(u,v) = \int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty} e^{-(\xi^2+\eta^2)} \xi^{2u-1} \eta^{2v-1} d\xi d\eta.$$

С одной стороны, имеет место равенство $I(u,v) = I(u)I(v)$, где

$$I(u) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\xi^2} \xi^{2u-1} d\xi = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\xi^2} (\xi^2)^{u-1} \frac{1}{2} d\xi^2 = \frac{\Gamma(u)}{2},$$

то есть $I(u,v)=\dfrac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{4}$. С другой стороны, если сделать замену $\xi=r\cos\varphi$, $\eta=r\sin\varphi$, то

$$I(u,v)=\underbrace{\int\limits_0^{+\infty} e^{-r^2}r^{2u-2v-1}dr}_{\dfrac{\Gamma(u+v)}{2}}\int\limits_0^{\pi/2}(\cos\varphi)^{2u-1}(\sin\varphi)^{2v-1}d\varphi.$$

Сделаем замену переменных $t=\cos^2\varphi$. При этом $dt=-2\cos\varphi\sin\varphi d\varphi$, и

$$I(u,v)=\frac{\Gamma(u+v)}{4}\int\limits_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1}dt=\frac{1}{4}\Gamma(u+v)B(u,v)\quad\Rightarrow\quad B(u,v)=\frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}.$$

Для γ-функции справедливы следующие равенства:

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)\quad\Leftrightarrow\quad\frac{\Gamma(z)\Gamma(1)}{\Gamma(z+1)}=\frac{1}{z}\quad\Leftrightarrow\quad B(z,1)=\frac{1}{z};\tag{1.4}$$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin(\pi z)}\quad\Leftrightarrow\quad B(z,1-z)=\frac{\pi}{\sin(\pi z)},\quad\text{где}\quad 0<\operatorname{Re}z<1;\tag{1.5}$$

$$2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(2z)\quad\Leftrightarrow\quad 2^{2z-1}\frac{\Gamma(z)\Gamma(z)}{\Gamma(2z)}=\frac{\Gamma(z)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)}\quad\Leftrightarrow\tag{1.6}$$

$$2^{2z-1}B(z,z)=B\left(z,\frac{1}{2}\right)\tag{1.7}$$

Равенство (1.4) доказывается непосредственной проверкой:

$$B(z,1)=\int\limits_0^1 t^{z-1}dt=\frac{1}{z}.$$

Докажем равенство (1.5). Для этого рассмотрим подробнее выражение $B(z,1-z)$:

$$B(z,1-z)=\int\limits_0^1 t^{z-1}(1-t)^{-z}dt=\int\limits_0^1\left(\frac{t}{1-t}\right)^{z-1}\frac{dt}{1-t}.$$

Сделаем замену переменных

$$s=\frac{t}{1-t}\quad\Leftrightarrow\quad t=\frac{s}{1+s}\quad\Rightarrow\quad dt=\frac{ds}{(1+s)^2}.$$

При этом

$$1-t=1-\frac{s}{1+s}=\frac{1}{1+s}\quad\Rightarrow\quad B(z,1-z)=\int\limits_0^\infty\frac{s^{z-1}}{1+s}ds.$$

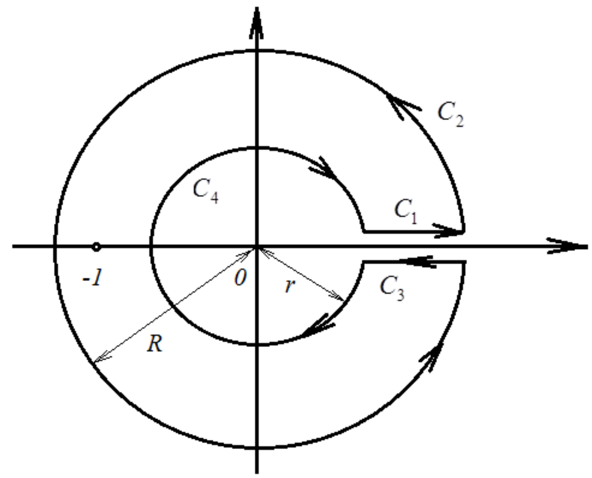

Рис. 1: Контур интегрирования C.

Рассмотрим интеграл от функции $\dfrac{s^{z-1}}{1+s}$ по замкнутому контуру C, представленному на рис. 1. Так как внутри контура C находится только одна особая точка $s=-1=e^{i\pi}$, то

$$\int\limits_C \frac{s^{z-1}}{1+s}ds = 2\pi i(e^{i\pi})^{z-1} = -2\pi i e^{i\pi z}.$$

Интеграл по контуру C равен сумме четырех интегралов по фрагментам C_1, C_2, C_3, C_4. Рассмотрим отдельно каждый из них:

$$I_1 = \int\limits_{C_1} \frac{s^{z-1}}{1+s}ds = \int\limits_r^R \frac{s^{z-1}}{1+s}ds \;\to\; \int\limits_0^\infty \frac{s^{z-1}}{1+s}ds = B(z,1-z) \text{ при } r\to 0,\; R\to\infty;$$

$$I_2 = \int\limits_{C_2} \frac{s^{z-1}}{1+s}ds = \int\limits_0^{2\pi} \frac{R^{z-1}e^{i\varphi(z-1)}}{1+Re^{i\varphi}}Re^{i\varphi}d\varphi = R^{z-1}\int\limits_0^{2\pi} \frac{e^{i\varphi z}}{e^{i\varphi}+R^{-1}}d\varphi \;\to\; 0 \text{ при } R\to\infty,$$

так как $\operatorname{Re} z < 1$;

$$I_3 = \int\limits_{C_3} \frac{s^{z-1}}{1+s}ds = -\int\limits_r^R \frac{\left(e^{2\pi i}s\right)^{z-1}}{1+e^{2\pi i}s}ds = -e^{2\pi i z}I_1 \;\to\; -e^{2\pi i z}B(z,1-z) \text{ при } r\to 0,\; R\to\infty;$$

$$I_4 = \int\limits_{C_4} \frac{s^{z-1}}{1+s}ds = -\int\limits_0^{2\pi} \frac{r^{z-1}e^{i\varphi(z-1)}}{1+re^{i\varphi}}re^{i\varphi}d\varphi = -r^z\int\limits_0^{2\pi} \frac{e^{i\varphi z}}{1+re^{i\varphi}}d\varphi \;\to\; 0 \text{ при } r\to 0,$$

так как $\operatorname{Re} z > 0$. Складывая интегралы I_1, I_2, I_3, I_4 и переходя к пределу при $r\to 0$ и $R\to\infty$, получаем равенство

$$B(z,1-z)\left(1-e^{2\pi i z}\right) = -2\pi i e^{i\pi z},$$

из которого находим

$$B(z,1-z) = \frac{2i\pi}{e^{i\pi z}-e^{-i\pi z}} = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

Для доказательства равенства (1.7) рассмотрим выражение

$$B(z,z)=\int\limits_0^1 [t(1-t)]^{z-1}\,dt,\quad \operatorname{Re} z>0.$$

Парабола $y=t(1-t)$ симметрична относительно точки $t=\dfrac{1}{2}$, поэтому

$$B(z,z)=2\int\limits_0^{1/2} [t(1-t)]^{z-1}\,dt.$$

Сделаем следующую замену переменных:

$$s=4t(1-t)\ \Leftrightarrow\ t^2-t+\frac{s}{4}=0\ \Rightarrow\ t=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-s}\right)\ \Rightarrow\ dt=\frac{ds}{4\sqrt{1-s}}.$$

В результате этой замены приходим к равенству:

$$B(z,z)=\frac{1}{2^{2z-1}}\int\limits_0^1 s^{z-1}(1-s)^{\frac{1}{2}-1}ds=\frac{B\left(z,\frac{1}{2}\right)}{2^{2z-1}},$$

из которого следует (1.7).

Рассмотрим некоторые следствия равенств (1.4) - (1.7). Из равенства (1.4) следует, что $\Gamma(n+1)=n!$, где n — целое неотрицательное число. Из равенства (1.5) при $z=\dfrac{1}{2}$ получаем:

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}}=\pi\ \Rightarrow\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$$

Это позволяет переписать равенство (1.6) в виде:

$$2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\Gamma(2z).$$

В случае $z=n+\dfrac{1}{2}$, где n — целое неотрицательное число, получаем:

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(2n+1)}{2^{2n}\Gamma(n+1)}=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n}}\cdot\frac{(2n)!}{n!}.$$

Пользуясь равенством (1.4), получаем

$$\Gamma(z+n+1)=(z+n)\Gamma(z+n)=...=(z+n)(z+n-1)...(z+1)z\Gamma(z)\ \Rightarrow$$

$$\Gamma(z)=\frac{\Gamma(z+n+1)}{(z+n)(z+n-1)...(z+1)z},\tag{1.8}$$

где n — целое неотрицательное число.

Выражение (1.8) можно использовать в качестве аналитического продолжения функции $\Gamma(z)$ при $\operatorname{Re} z>-(n+1)$. Так как n может быть любым целым неотрицательным числом, мы получаем аналитическое продолжение $\Gamma(z)$ для любых значений z. Продолженная таким образом функция $\Gamma(z)$ будет аналитической всюду, кроме точек $z=-n$, $n=0,1,2,...$, в которых функция $\Gamma(z)$ имеет полюсы первого порядка.

2 Интеграл Лапласа и некоторые его свойства

Интегралами Лапласа называют интегралы вида

$$F(z) = \int\limits_a^b e^{z \cdot S(t)} f(t) dt.$$

Мы ограничимся случаем

$$F(z) = \int\limits_0^\infty e^{-zt} f(t) dt, \tag{2.1}$$

возникающим при построении интегрального вида некоторых специальных функций математической физики.

В дальнейшем нас будет интересовать поведение функции $F(z)$ при $z \to \infty$. Асимптотическое представление функции $F(z)$ при большом по модулю аргументе z можно получить на основании леммы Ватсона:

Лемма 2.1 *Пусть функция $f(t)$ удовлетворяет условиям:*
1. интеграл $\int\limits_0^C |f(t)| dt$ существует при любом $C > 0$, то есть $f(t)$ локально абсолютно интегрируема в области $(0, \infty)$;
2. при $t \to 0$ функцию $f(t)$ можно представить в виде:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot t^{\lambda_k} + O(t^{\lambda_n}),$$

где a_k и λ_k — некоторые числа, причем $-1 < \operatorname{Re} \lambda_0 < \operatorname{Re} \lambda_1 < \ldots < \operatorname{Re} \lambda_n$;
3. при $t \to \infty$ функция $f(t)$ ведет себя как $O(e^{\nu t})$, то есть существуют такие постоянные $C > 0$ и $\nu > 0$, что $|f(t)| \leqslant C \cdot e^{\nu t}$ при достаточно больших t.
Тогда функция $F(z)$, определяемая интегралом (2.1), при $z \to \infty$, $|\arg z| \leqslant \dfrac{\pi}{2} - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, имеет следующее асимптотическое представление

$$F(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{\Gamma(\lambda_k + 1)}{z^{\lambda_k + 1}} + O\left(\frac{1}{z^{\lambda_n + 1}}\right).$$

Доказательство. Если функция $f(t)$ при $t \to 0$ имеет вид

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot t^{\lambda_k} + r_n(t), \tag{2.2}$$

где $r_n(t) = O(t^{\lambda_n})$, то есть существует такое число $M > 0$, что $|r_n(t)| \leqslant M|t|^{\operatorname{Re}\lambda_n}$ при $t \to 0$, то тогда

$$F(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \underbrace{\int\limits_0^\infty e^{-zt} t^{\lambda_k} dt}_{\frac{\Gamma(\lambda_k+1)}{z^{\lambda_k+1}}} + \underbrace{\int\limits_0^\infty e^{-zt} r_n(t) dt}_{R_n(z)}.$$

Выделим в выражении $R_n(z)$ два слагаемых:

$$R_n(z) = \underbrace{\int\limits_0^\delta e^{-zt} r_n(t) dt}_{R_n^{(1)}(z)} + \underbrace{\int\limits_\delta^\infty e^{-zt} r_n(t) dt}_{R_n^{(2)}(z)},$$

где $\delta > 0$ — достаточно малое число. Так как при достаточно малых t функция $r_n(t)$ удовлетворяет условию $|r_n(t)| \leqslant M \cdot |t|^{\operatorname{Re}\lambda_n}$, то

$$|R_n^{(1)}(z)| \leqslant M \int\limits_0^\delta e^{-t\cdot\operatorname{Re} z} \cdot t^{\operatorname{Re}\lambda_n} dt \leqslant M \int\limits_0^\infty e^{-t\cdot\operatorname{Re} z} \cdot t^{\operatorname{Re}\lambda_n} dt = M \frac{\Gamma(\operatorname{Re}\lambda_n + 1)}{(\operatorname{Re} z)^{\operatorname{Re}\lambda_n + 1}}.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ — некоторое достаточно малое число. В области $|\arg z| \leqslant \dfrac{\pi}{2} - \varepsilon$ имеет место неравенство $\operatorname{Re} z \geqslant |z| \cdot \sin\varepsilon$, откуда получаем

$$|R_n^{(1)}(z)| \leqslant M \frac{\Gamma(\operatorname{Re}\lambda_n + 1)}{(\sin\varepsilon)^{\operatorname{Re}\lambda_n + 1} \cdot |z|^{\operatorname{Re}\lambda_n + 1}},$$

то есть $R_n^{(1)}(z) = O\left(\dfrac{1}{z^{\lambda_n+1}}\right)$.

Оценим слагаемое $R_n^{(2)}(z)$. Так как по предположению леммы функция $f(t)$ является локально абсолютно интегрируемой, то этим же свойством обладает и функция $r_n(t)$. Кроме того, при $t \to \infty$ функция $f(t)$ ведет себя как $O(e^{\nu t})$, где $\nu > 0$ — некоторое число, а значит и функция $r_n(t)$ ведет себя как $O(e^{\nu t})$ при $t \to \infty$, так как степенные слагаемые в выражении (2.2) растут медленнее, чем $e^{\nu t}$. Поэтому

$$R_n^{(2)}(z) = \int\limits_\delta^\infty e^{-zt} r_n(t) dt = \{t' = t - \delta\} = e^{-z\delta} \int\limits_0^\infty e^{-zt'} \underbrace{r_n(t' + \delta)}_{O(e^{\nu t'})} dt'.$$

Следовательно, в области $|\arg z| \leqslant \dfrac{\pi}{2} - \varepsilon$, $\operatorname{Re} z \geqslant \nu + \varepsilon$ интеграл $R_n^{(2)}(z)$ сходится равномерно, причем $R_n^{(2)}(z) = O(e^{-\delta z})$ при $z \to \infty$. Так как экспоненциальная функция убывает на бесконечности быстрее степенной, получаем:

$$R_n(z) = O\left(\frac{1}{z^{\lambda_n+1}}\right) \text{ при } z \to \infty, \ |\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2} - \varepsilon.$$

Имеет место следующая теорема:

Теорема 2.2 *Пусть функция $f(t)$ является аналитической в секторе $|t| > 0$, $\arg t \in (-\theta_2, \theta_1)$, где $\theta_1 > 0$ и $\theta_2 > 0$, причем в этом секторе*

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot t^{\lambda_k} + O(t^{\lambda_n})$$

при $t \to 0$, где $-1 < \operatorname{Re}\lambda_0 < \operatorname{Re}\lambda_1 < \ldots < \operatorname{Re}\lambda_n$, а при $t \to \infty$ функция $f(t)$ ведет себя как

$$f(t) = O(t^{\beta}),$$

где β — некоторая постоянная. Тогда функция

$$F(z) = \int\limits_0^{\infty} e^{-zt} f(t)dt, \quad z > 0, \tag{2.3}$$

может быть аналитически продолжена в секторе $|z| > 0$, $\arg z \in \left(-\frac{\pi}{2} - \theta_1, \frac{\pi}{2} + \theta_2\right)$, а в области $\arg z \in \left[-\frac{\pi}{2} - \theta_1 + \varepsilon, \frac{\pi}{2} + \theta_2 - \varepsilon\right]$, где $\varepsilon > 0$ — некоторое достаточно малое число, для нее имеет место асимптотическое представление

$$F(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot \frac{\Gamma(\lambda_k + 1)}{z^{\lambda_k + 1}} + O\left(\frac{1}{z^{\lambda_n + 1}}\right).$$

Доказательство. Предположим сначала, что $|\arg z| < \frac{\pi}{2}$, и покажем, что в этой области функция $F(z)$, определяемая равенством (2.3), является аналитической. В самом деле, в области $|z| \geqslant \delta > 0$, $|\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число, интеграл (2.3) сходится равномерно по z. В самом деле:

$$|e^{-zt}| = e^{-t \cdot \operatorname{Re} z} \leqslant e^{-t \cdot \delta \sin \varepsilon} \;\; \Rightarrow \;\; |F(z)| \leqslant \int\limits_0^{\infty} e^{-t \cdot \delta \sin \varepsilon} |f(t)| dt.$$

Пусть $\gamma > 0$ — достаточно малое число. Разобьем интеграл на два слагаемых при $t \in [0, \gamma]$ и $t \in [\gamma, +\infty)$. В силу поведения функции $f(t)$ в окрестности нуля найдется такое число $M_1 > 0$, что

$$e^{-t\delta \sin \varepsilon} |f(t)| \leqslant M_1 |t|^{\operatorname{Re}\lambda_0}$$

при $t \in [0, \gamma]$, и в силу ее поведения при большом по модулю аргументе найдется число $M_2 > 0$, такое что

$$e^{-t\delta \sin \varepsilon} |f(t)| \leqslant M_2 e^{-t \cdot \delta \sin \varepsilon} |t|^{\beta}$$

при $t \in [\gamma, +\infty)$. В результате получаем:

$$|F(z)| \leqslant M_1 \cdot \underbrace{\int\limits_0^{\gamma} t^{\operatorname{Re}\lambda_0} dt}_{\substack{\text{сходится, т.к.} \\ \operatorname{Re}\lambda_0 > -1}} + M_2 \cdot \underbrace{\int\limits_{\gamma}^{\infty} e^{-t\cdot\delta\sin\varepsilon} t^{\beta} dt}_{\substack{\text{сходится, т.к.} \\ \delta\sin\varepsilon > 0}} .$$

Следовательно, $F(z)$ — аналитическая в области $|\arg z| < \dfrac{\pi}{2}$.

Построим аналитическое продолжение $F(z)$ на более широкую область. Для этого рассмотрим вспомогательную функцию

$$F_\theta(z) = \int\limits_0^{\infty} e^{-(ze^{i\theta})\rho} \cdot f(\rho e^{i\theta}) e^{i\theta} d\rho, \tag{2.4}$$

получаемую из $F(z)$ при замене контура интегрирования на луч $t = \rho e^{i\theta}$ при некотором постоянном $\theta \in (-\theta_2,\, \theta_1)$ и совпадающую с $F(z)$ при $\theta = 0$. Как и для функции $F(z)$, можно показать, что $F_\theta(z)$ является аналитической в области $|\arg(ze^{i\theta})| = |\varphi + \theta| < \dfrac{\pi}{2}$, где $\varphi = \arg z$.

Покажем, что при $|\theta| < \pi$ функция $F_\theta(z)$ является аналитическим продолжением функции $F(z)$. Для этого достаточно показать, что $F_\theta(z) \equiv F(z)$ на некотором луче $\varphi = \varphi_0$ в области аналитичности обеих функций, например при $\varphi_0 = -\dfrac{\theta}{2}$.

Рассмотрим интеграл $I(z) = \displaystyle\int\limits_C e^{-zt} f(t) dt$ по замкнутому контуру C, представленному на рис. 2. Так как внутри контура C не содержится особых точек подынтегральной функции, то $I(z) \equiv 0$. На дуге окружности $|t| = R$ в силу условий теоремы при $z = |z|e^{-i\theta/2}$ получаем: $f(t) = O(R^\beta)$, $|e^{-zt}| = e^{-|z|\cdot R\cdot\cos(\psi - \theta/2)}$, $\psi \in [0, \theta]$. Так как $\cos\left(\psi - \dfrac{\theta}{2}\right) \geqslant \cos\dfrac{\theta}{2} > 0$ при $\psi \in [0, \theta]$, $|\theta| < \pi$, то часть интеграла $I(z)$, соответствующая дуге радиуса R, будет стремиться к нулю при $R \to \infty$. Следовательно, переходя к пределу при $R \to \infty$, получаем, что $F(z) \equiv F_\theta(z)$ при $z = |z|e^{-i\theta/2}$, а значит $F_\theta(z)$ действительно является аналитическим продолжением функции $F(z)$.

Если в секторе $\theta \in (-\theta_2,\, \theta_1)$ возможны значения $|\theta| \geqslant \pi$, то аналогично можно показать, что $F_{\tilde\theta}(z)$ будет аналитическим продолжением функции $F_\theta(z)$, если $|\tilde\theta - \theta| < \pi$. Следовательно, функция $F(z)$ может быть аналитически продолжена в области $|\varphi + \theta| < \dfrac{\pi}{2}$, то есть при

$$\arg z \in \left(-\frac{\pi}{2} - \theta_1,\, \frac{\pi}{2} + \theta_2\right).$$

Асимптотическое представление функции $F_\theta(z)$ в области $|\varphi + \theta| \leqslant \dfrac{\pi}{2} - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$,

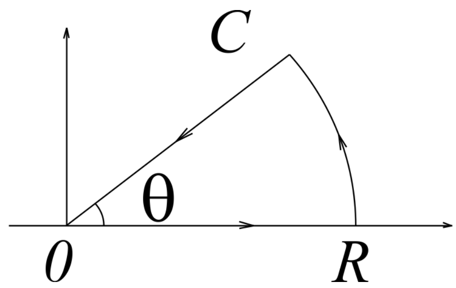

Рис. 2: Контур C в интеграле $I(z)$.

получим с помощью леммы Ватсона. Так как

$$f(\rho e^{i\theta}) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot (\rho e^{i\theta})^{\lambda_k} + O(\rho^{\lambda_n})$$

при $\rho \to 0$ и

$$f(\rho e^{i\theta}) = O(\rho^{\beta})$$

при $\rho \to +\infty$, то

$$F_\theta(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot (e^{i\theta})^{\lambda_k} e^{i\theta} \cdot \frac{\Gamma(\lambda_k + 1)}{(ze^{i\theta})^{\lambda_k+1}} + O\left(\frac{1}{z^{\lambda_n+1}}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot \frac{\Gamma(\lambda_k + 1)}{z^{\lambda_k+1}} + O\left(\frac{1}{z^{\lambda_n+1}}\right),$$

что и требовалось доказать.

Если функция $f(t)$ зависит, кроме того, от нескольких параметров, причем является аналитической функцией каждого из этих параметров в некоторой области D и непрерывной в D по совокупности параметров при $|t| > 0$, $\arg t \in (-\theta_2, \theta_1)$, то аналитическое продолжение $F_\theta(z)$ функции $F(z)$ при $z \neq 0$ будет также аналитической функцией каждого из параметров в той части области D, где интеграл

$$\int_0^\infty e^{-\mu\rho} |f(\rho e^{i\theta})| d\rho$$

сходится равномерно относительно параметров при любом фиксированном $\mu > 0$.