МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В.ЛОМОНОСОВА

Физический факультет

М. О. Корпусов

Лекции о параболических уравнениях второго порядка

Москва
Физический факультет МГУ
2023

К о р п у с о в М. О.
Лекции о параболических уравнениях второго порядка. — М.: Физический факультет МГУ, 2023. 292 с.
ISBN

В книге излагается качественная теория параболических уравнений второго порядка как для линейных, так и нелинейных уравнений. Материал книги используется в курсе «Параболические уравнения», который автор читает на кафедре математики физического факультета МГУ.

Данный курс входит в учебный план кафедры математики физического факультета МГУ и представляет значительный интерес для широкого круга студентов, аспирантов и научных работников, специализирующихся в области дифференциальных уравнений и математической физики.

Библиогр. 21 назв., 38 илл.

Р е ц е н з е н т ы:
проф. *М. Д. Малых,*
проф. *В. Ю. Попов,*
проф. *М. В. Фалалеев*

Печатается по решению Учёного совета
физического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова

ОГЛАВЛЕНИЕ

III. Принцип максимума

IV. Оценки Шаудера

Предисловие

В книге излагается качественная теория параболических уравнения второго порядка с постоянными и переменными коэффициентами, линейными и нелинейными. Сначала мы детально изучаем уравнение теплопроводности во всем пространстве $\mathbb{R}^N$. Строим решение задачи Коши, доказываем слабый принцип максимума и доказываем результат о единственности решения задачи Коши в классе А. Н. Тихонова. После чего подробно излагаем теорию потенциала для оператора теплопроводности. Далее рассматривается слабый и сильный принцип максимума в случае общего параболического оператора с некоторыми следствиями и доказательство единственности решения задачи Коши в классе Тихонова. На основе параболических пространств Гельдера и так называемых оценок Шаудера, вывод которых (согласно методу Сафонова) приводится, методом продолжения по параметру доказана теорема об однозначной разрешимости первой краевой задачи для общего равномерно параболического оператора второго порядка с гельдеровскими коэффициентами и гельдеровской правой частью.

В учебном пособии приведены подробные доказательства задач и упражнений из книг [2], [4], [14] и [21] по ходу работы.

Автор признателен профессору Н. Н. Нефедову за предложение читать спецкурс «Параболические уравнения». В результате чего появилась данная книга. Автор признателен профессорам А. Н. Боголюбову, В. Ю. Попову, а также доцентам Н. Т. Левашовой и А. А. Панину за полезное обсуждение содержания данного курса лекций. Также автор очень признателен рецензентам профессорам М. Д. Малых и М. В. Фалалееву за их труд и ценные замечания. Особенно автор благодарен доценту М. А. Давыдовой, взявшей на себя большой труд прочитать рукопись книги и сообщить многочисленные замечания. Автор благодарен фонду «Базис» за грантовую поддержку, благодаря которой был написан данный курс лекций.

Книга набрана и сверстана в пакете LaTeX2e.

Тематическая лекция I

ОПЕРАТОР ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Лекция 1

ЗАДАЧА КОШИ

В этой лекции рассматривается уравнение теплопроводности. Для данного уравнения доказан слабый принцип максимума, исследована задача Коши и введен класс А. Н. Тихонова, в котором имеет место единственность решения задачи Коши.

§ 1. Уравнение теплопроводности

Как известно из курса ММФ к уравнениям параболического типа относится уравнение теплопроводности

$$u_t - \Delta u = 0, \tag{1.1}$$

в котором $u(x,t) \geqslant 0$ — это температура в точке x и в момент времени $t > 0$. Для исследования уравнения теплопроводности (1.1) нужно построить так называемое *фундаментальное решение,* которое в терминах *обобщенных функций* определяется как решение следующего уравнения в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$:

$$\mathcal{E}_t - \Delta\mathcal{E} = \delta(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geqslant 0, \tag{1.2}$$

где $\delta(x,t)$ — это дельта–функция Дирака, а равенство в уравнении (1.2) не является поточечным равенством. Явный вид решения уравнения (1.2) может быть получен при помощи преобразования Фурье обобщенных функций:

$$\mathcal{E}(x,t) = \frac{\vartheta(t)}{(4\pi t)^{N/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right), \tag{1.3}$$

где $\vartheta(t)$ — это функция Хевисайда, определенная равенством:

$$\vartheta(t) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad t \geqslant 0; \\ 0, & \text{если} \quad t < 0. \end{cases}$$

Другой способ построения фундаментального решения уравнения (1.1) заключается в симметрии уравнения относительно замены

$$(x,t) \to (\lambda x, \lambda^2 t).$$

Итак, будем искать *частное решение* уравнения теплопроводности (1.1) в следующем автомодельном виде:

$$u(x,t) = \frac{1}{t^\alpha} v\,(y)\,, \quad y = \frac{x}{t^\beta}. \tag{1.4}$$

После подстановки этого выражения в уравнение (1.1) мы получим следующее уравнение:

$$\alpha t^{-(\alpha+1)} v(y) + \beta t^{-(\alpha+1)} (y, D_y) v(y) - t^{-(\alpha+2\beta)} \Delta_y v(y) = 0, \tag{1.5}$$

где $D_y = (\partial_{y_1}, ..., \partial_{y_N})$.

□ Действительно, имеем:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -\frac{\alpha}{t^{\alpha+1}} v(y) + \frac{1}{t^\alpha} \sum_{j=1}^N \frac{\partial v(y)}{\partial y_j} \frac{y_j(t)}{\partial t} =$$

$$= -\frac{\alpha}{t^{\alpha+1}} v(y) - \frac{\beta}{t^\alpha} \sum_{j=1}^N \frac{\partial v(y)}{\partial y_j} \frac{x_j}{t^{\beta+1}} =$$

$$= -\frac{\alpha}{t^{\alpha+1}} v(y) - \frac{\beta}{t^{\alpha+1}} \sum_{j=1}^N \frac{\partial v(y)}{\partial y_j} y_j = -\frac{\alpha}{t^{\alpha+1}} v(y) - \frac{\beta}{t^{\alpha+1}} \left(y, D_y\right) v(y),$$

$$-\Delta_x u(x,t) = -\frac{1}{t^\alpha} \Delta_x v(y) = -\frac{1}{t^{\alpha+2\beta}} \Delta_y v(y). \quad \boxtimes$$

Положим в этом уравнении $\beta = 1/2$. Тогда

$$\alpha v(y) + \frac{1}{2}(y, D_y) v(y) + \Delta_y v(y) = 0. \tag{1.6}$$

Упростим это уравнение предположив, что функция $v(y)$ радиальна, т. е.

$$v = w(|y|) \Rightarrow \alpha w + \frac{1}{2} r w' + w'' + \frac{N-1}{r} w' = 0, \quad r = |y|. \tag{1.7}$$

□ Далее находим:

$$(y, D_y v(y)) = \sum_{j=1}^N y_j \frac{\partial w(|y|)}{\partial y_j} = \sum_{j=1}^N y_j \frac{\partial w(r)}{\partial r} \frac{y_j}{|y|} = \frac{\partial w(r)}{\partial r} \sum_{j=1}^N \frac{y_j^2}{|y|} = r \frac{\partial w(r)}{\partial r},$$

$$\Delta_y w(|y|) = \frac{1}{r^{N-1}} \frac{d}{dr} \left(r^{N-1} \frac{dw(r)}{dr} \right) = \frac{N-1}{r} \frac{dw(r)}{dr} + \frac{d^2 w(r)}{dr^2}. \quad \boxtimes$$

Положив в этом уравнении $\alpha = N/2$, получим более простое уравнение:

$$(r^{N-1} w')' + \frac{1}{2} (r^N w)' = 0. \tag{1.8}$$

□ Действительно, имеем:

$$0 = \frac{N}{2} r^{N-1} w(r) + \frac{1}{2} r^N w^{'}(r) + r^{N-1} w^{''}(r) + \frac{N-1}{r} r^{N-1} w^{'}(r) =$$
$$= \frac{1}{2} (r^N w(r))^{'} + (r^{N-1} w^{'}(r))^{'}. \quad \boxtimes$$

Таким образом,

$$r^{N-1} w^{'}(r) + \frac{1}{2} r^N w(r) = a,$$

где a — константа. Положим $a = 0$. Тогда

$$w^{'}(r) = -\frac{1}{2} r w(r) \Rightarrow w(r) = b e^{-r^2/4} \Rightarrow u(x,t) = \frac{b}{t^{N/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right).$$

Константу $b > 0$ выберем так, чтобы имело место равенство:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{b}{t^{N/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right) = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{(4\pi)^{N/2}}.$$

Итак, с учетом того, что $t \geqslant 0$ приходим к выражению (1.3).

§ 2. Сферическая система координат

В дальнейшем будем использовать сферическую систему координат в $\mathbb{R}^N$. При $N = 2$ связь между декартовыми и сферическими координатами определяется следующим образом:

$$(x_1, x_2) \to (r, \varphi_1), \qquad \begin{cases} x_1 = r\cos\varphi_1, \\ x_2 = r\sin\varphi_1, \end{cases}$$

$$J_2 = \left| \frac{D(x_1, x_2)}{D(r, \varphi_1)} \right| = r, \quad dx_1 dx_2 = J_2 dr\, d\varphi_1.$$

Аналогичная связь при $N = 3$ имеет вид:

$$(x_1, x_2, x_3) \to (r, \varphi_1, \varphi_2), \qquad \begin{cases} x_1 = r\cos\varphi_1, \\ x_2 = r\sin\varphi_1\cos\varphi_2, \\ x_3 = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2, \end{cases}$$

$$J_3 = \left| \frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(r, \varphi_1, \varphi_2)} \right| = r^2 \sin\varphi_1, \quad dx_1 dx_2 dx_3 = J_3 dr\, d\varphi_1\, d\varphi_2.$$

При $N > 3$ имеем:

$$(x_1, x_2, ..., x_N) \to (r, \varphi_1, ..., \varphi_{N-1}),$$

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\varphi_1, \\ x_2 = r\sin\varphi_1\cos\varphi_2, \\ x_3 = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{N-1} = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{N-2}\cos\varphi_{N-1}, \\ x_N = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{N-2}\sin\varphi_{N-1}, \end{cases}$$

$$J_N = \left|\frac{D(x_1, x_2, x_3, ..., x_{N-1}, x_N)}{D(r, \varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{N-2}, \varphi_{N-1})}\right| = \\ = r^{N-1}\sin^{N-2}\varphi_1\sin^{N-3}\varphi_2\cdots\sin\varphi_{N-2},$$

$$dx_1dx_2\cdots dx_{N-1}dx_N = J_N dr\, d\varphi_1\, d\varphi_2\cdots d\varphi_{N-2}\, d\varphi_{N-1}.$$

§ 3. Задача Коши для уравнения теплопроводности

Рассмотрим следующую задачу Коши для уравнения теплопроводности:

$$u_t - \Delta_x u = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0, +\infty), \tag{3.1}$$

$$\lim_{\mathbb{R}^{N+1}_+ \ni (y,t) \to (x,0)} u(y,t) = u_0(x) \quad \text{для любого} \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{3.2}$$

$$\mathbb{R}^{N+1}_+ = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^{N+1} :\ t > 0\right\}.$$

Докажем, что при некоторых условиях на начальную функцию $u_0(x)$ классическое решение задачи (3.1), (3.2) дается следующей формулой:

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right) u_0(y)\, dy. \tag{3.3}$$

Замечание. Заметим, что ниже используется следующее обозначение:

$$\mathbb{C}_b(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \{u(z) \in \mathbb{C}(\Omega) :\ |u(z)| \leqslant B < +\infty\},$$

где $B = B(u) > 0$ — это своя постоянная для каждого $u(z)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^M$ — это область и $M \in \mathbb{N}$.

Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть* $u_0(x) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^N)$ *и функция* $u(x,t)$ *определена формулой* (3.3). *Тогда функция*

$$u(x,t) \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^N \times (0, +\infty)),$$

и является решением задачи (3.1), (3.2).

Доказательство.

Шаг 1. Поскольку функция
$$\frac{1}{t^{N/2}} e^{-|x|^2/(4t)}$$
бесконечное число раз дифференцируема и интегралы от производных в (3.3) равномерно сходятся на любом множестве $K \times [\delta, +\infty) \subset \mathbb{R}^N \times (0, +\infty)$ для любого $\delta > 0$ и для любого замкнутого, ограниченного множества $K \subset \mathbb{R}^N$, то $u(x,t) \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^N \times (0, +\infty))$.

Шаг 2. Очевидно, что
$$u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} [\mathcal{E}_t(x-y,t) - \Delta_x \mathcal{E}(x-y,t)]\, u_0(y)\, dy = 0 \quad (3.4)$$
при $x \in \mathbb{R}^N$ и $t > 0$, поскольку по определению фундаментального решения имеем:
$$\mathcal{E}_t(x,t) - \Delta_x \mathcal{E}(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad t > 0 \quad (3.5)$$
для любого $x \in \mathbb{R}^N$.

Шаг 3. Зафикисируем $x_0 \in \mathbb{R}^N$ и $\varepsilon > 0$. Выберем $\delta > 0$ так, чтобы
$$|u_0(y) - u_0(x_0)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad |y - x_0| < \delta, \quad y \in \mathbb{R}^N. \quad (3.6)$$
Если $|x - x_0| < \delta/2$, то с учетом равенства
$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} \exp\Big(-|y|^2/(4t)\Big)\, dy = 1, \quad t > 0$$
приходим к оценке:
$$|u(x,t) - u_0(x_0)| = \left| \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(x-y,t)[u_0(y) - u_0(x_0)]\, dy \right| \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{O(x_0,\delta)} \mathcal{E}(x-y,t)|u_0(y) - u_0(x_0)|\, dy +$$
$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^N \setminus O(x_0,\delta)} \mathcal{E}(x-y,t)|u_0(y) - u_0(x_0)|\, dy =: I_1 + I_2. \quad (3.7)$$
Справедлива оценка:
$$I_1 < \varepsilon \int\limits_{O(x_0,\delta)} \mathcal{E}(x-y,t) \leqslant \varepsilon \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(x-y,t) = \varepsilon. \quad (3.8)$$

В этом месте зафиксируем найденное $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$. Заметим, что справедливы следующие неравенства:

$$|x - x_0| \leqslant \delta/2, \ |y - x_0| \geqslant \delta \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |y - x_0| \leqslant |y - x| + |x - x_0| \leqslant |y - x| + \delta/2 \leqslant |y - x| + \frac{1}{2}|y - x_0| \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}|y - x_0| \leqslant |y - x|.$$

Следовательно, справедлива следующая оценка:

$$I_2 \leqslant 2 \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |u_0(x)| \int\limits_{\mathbb{R}^N \setminus O(x_0, \delta)} \mathcal{E}(x - y, t)\, dy \leqslant$$
$$\leqslant \frac{c_1}{t^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N \setminus O(x_0, \delta)} \exp\left(-\frac{|x - y|^2}{4t}\right) dy \leqslant$$
$$\leqslant \frac{c_1}{t^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N \setminus O(x_0, \delta)} \exp\left(-\frac{|y - x_0|^2}{16t}\right) dy =$$
$$= \frac{c_2}{t^{N/2}} \int\limits_{\delta}^{+\infty} \exp\left(-\frac{r^2}{16t}\right) r^{N-1}\, dr = c_2 \int\limits_{\delta/\sqrt{t}}^{+\infty} \exp(-z^2/16) z^{N-1}\, dz \to +0$$

при $t \to +0$. Здесь использовалась замена переменной $z = y - x_0$, переход к сферической системе координат с последующей заменой переменной:

$$z = \frac{r}{\sqrt{t}}.$$

Таким образом, если

$$|x - x_0| < \frac{\delta}{2} \quad \text{и} \quad t > 0 \quad \text{достаточно мало},$$

то

$$|u(x, t) - u_0(x_0)| < 2\varepsilon,$$

т. е. справедливо предельное свойство (3.2).

Теорема доказана.

Нелинейное уравнение Бюргерса [6]. Существует важная связь между уравнением теплопроводности

$$u_t = \mu u_{xx}, \quad t > 0, \quad \mu > 0, \quad u(x, t) \geqslant 0 \tag{3.9}$$

и уравнением Бюргерса

$$v_t + v v_x = \mu v_{xx}, \tag{3.10}$$

устанавливаемая следующей заменой *Коула–Хопфа*:

$$v(x,t) = -2\mu\frac{\partial}{\partial x}\ln u(x,t). \tag{3.11}$$

Действительно, учитывая замену (3.11), получим:

$$v_t + vv_x - \mu v_{xx} = -2\mu\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{u}\left(u_t - \mu u_{xx}\right)\right] = 0 \tag{3.12}$$

в силу уравнения (3.9). Преобразование Коула–Хопфа позволяет найти решение задачи Коши для уравнения Бюргерса.

Действительно, пусть в начальный момент времени

$$v(x,0) = \varphi(x). \tag{3.13}$$

Тогда с учетом (3.11) получаем:

$$u(x,0) = \Psi(x) = \exp\left[-\frac{1}{2\mu}\int\limits_0^x \varphi(y)\,dy\right]. \tag{3.14}$$

Решение задачи Коши (3.9), (3.14), как было показано дается формулой:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\mu t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Psi(z)\exp\left[-\frac{(x-z)^2}{4\mu t}\right]\,dz. \tag{3.15}$$

Используя представление (3.15), получаем решение задачи Коши (3.10), (3.13) для уравнения Бюргерса в следующем виде:

$$v(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x-z}{t}\exp\left\{-\frac{G(z,x,t)}{2\mu}\right\}\,dz\Bigg/\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{G(z,x,t)}{2\mu}\right\}\,dz, \tag{3.16}$$

где

$$G(z,x,t) = \frac{(x-z)^2}{2t} + \int\limits_0^z \varphi(y)\,dy. \tag{3.17}$$

§ 4. Неоднородная задача Коши

Рассмотрим следующую задачу:

$$u_t - \Delta u = f(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,+\infty), \tag{4.1}$$

$$\lim_{\mathbb{R}^{N+1}_+ \ni (y,t) \to (x,0)} u(y,t) = 0 \quad \text{для любого} \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{4.2}$$

Решение неоднородной задачи Коши (4.1), (4.2) будем искать в виде *интеграла Дюамеля*:

$$u(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(x-y, t-s) f(y,s)\, dy\, ds =$$

$$= \int\limits_0^t \frac{1}{(4\pi(t-s))^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}\right) f(y,s)\, dy\, ds \qquad (4.3)$$

при $x \in \mathbb{R}^N$ и $t > 0$.

Замечание. Заметим, что ниже используется следующее пространство:

$$\mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(\mathbb{R}^N \times (0, +\infty)),$$

которое является пространством функций $u(x,t)$ таких, что

$$u(x,t),\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i},\ \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i \partial x_j},\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^N \times (0,+\infty)), \quad i, j = \overline{1, N}.$$

Кроме того, определим носитель функции $u(x,t)$:

$$\operatorname{supp}(u(x,t)) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\{(x,t) \in D :\ u(x,t) \neq 0\}}.$$

Символом $\mathbb{C}_0(D)$ обозначим пространство функций $u(x,t) \in \mathbb{C}(D)$, у которых компактен носитель: $\operatorname{supp}(u(x,t)) \subset D \subset \mathbb{R}^M$, $M \in \mathbb{N}$.

Справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть функция* $u(x,t)$ *определена формулой* (4.3) *и функция* $f(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(\mathbb{R}^N \times (0,+\infty)) \cap \mathbb{C}_0(\mathbb{R}^N \times (0,+\infty))$. *Тогда функция* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(\mathbb{R}^N \times (0,+\infty))$ *и является решением задачи* (4.1), (4.2).

Доказательство.

Шаг 1. Выполним замену переменных в выражении (4.3):

$$u(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,s) f(x-y, t-s)\, dy\, ds. \qquad (4.4)$$

Поскольку $f(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(\mathbb{R}^N \times (0,+\infty))$ и финитна, а функция $\mathcal{E} = \mathcal{E}(y,s)$ гладкая в окрестности $s = t > 0$, то

$$u_t(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,s) f_t(x-y, t-s)\, dy\, ds +$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}^N}\mathcal{E}(y,t)f(x-y,0)\,dy, \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_j}=\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^N}\mathcal{E}(y,s)\frac{\partial}{\partial x_j}f(x-y,t-s)\,dy\,ds \quad \text{при} \quad j=\overline{1,N},$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i\partial x_j}=\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^N}\mathcal{E}(y,s)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}f(x-y,t-s)\,dy\,ds \quad \text{при} \quad i,j=\overline{1,N}.$$

Таким образом, u, u_t, $D_x u$ и $D_x^2 u$ [1] принадлежат $\mathbb{C}(\mathbb{R}^N\times(0,+\infty))$. Следовательно,

$$u(x,t)\in\mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(\mathbb{R}^N\times(0,+\infty)).$$

Шаг 2. Заметим, что

$$\frac{\partial f(x-y,t-s)}{\partial t}=-\frac{\partial f(x-y,t-s)}{\partial s},$$

$$\Delta_x f(x-y,t-s)=\Delta_y f(x-y,t-s).$$

С учётом (4.5) приходим к равенству

$$u_t(x,t)-\Delta u(x,t)=$$

$$=\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^N}\mathcal{E}(y,s)\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta_x\right)f(x-y,t-s)\right]dy\,ds+$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}^N}\mathcal{E}(y,t)f(x-y,0)\,dy=$$

$$=\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^N}\mathcal{E}(y,s)\left[\left(-\frac{\partial}{\partial s}-\Delta_y\right)f(x-y,t-s)\right]dy\,ds+$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}^N}\mathcal{E}(y,t)f(x-y,0)\,dy=$$

$$=\int\limits_\varepsilon^t\int\limits_{\mathbb{R}^N}\mathcal{E}(y,s)\left[\left(-\frac{\partial}{\partial s}-\Delta_y\right)f(x-y,t-s)\right]dy\,ds+$$

---

[1] Символами $D_x u$ и $D_x^2 u$ мы обозначили любую частную производную первого порядка и любую частную производную второго порядка соответственно.

$$+\int\limits_0^{\varepsilon}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,s)\left[\left(-\frac{\partial}{\partial s}-\Delta_y\right)f(x-y,t-s)\right]dy\,ds+$$
$$+\int\limits_{\mathbb{R}^N}\mathcal{E}(y,t)f(x-y,0)\,dy =: I_1+I_2+J. \quad (4.6)$$

Имеем оценку:

$$|I_2| \leqslant \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^N\times(0,+\infty)}[|f_t(x,t)|+|\Delta_x f(x,t)|]\int\limits_0^{\varepsilon}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\mathcal{E}(y,s)\,dy\,ds \leqslant c_1\varepsilon. \quad (4.7)$$

Имеем следующее равенство:

$$\int\limits_{\varepsilon}^{t}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\mathcal{E}(y,s)\frac{\partial f(x-y,t-s)}{\partial s}\,dy\,ds = \int\limits_{\varepsilon}^{t}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{\partial\left(\mathcal{E}(y,s)f(x-y,t-s)\right)}{\partial s}\,dy\,ds-$$
$$-\int\limits_{\varepsilon}^{t}\int\limits_{\mathbb{R}^N}f(x-y,t-s)\frac{\partial\mathcal{E}(y,s)}{\partial s}\,dy\,ds = \int\limits_{\mathbb{R}^N}\mathcal{E}(y,t)f(x-y,0)\,dy-$$
$$-\int\limits_{\mathbb{R}^N}\mathcal{E}(y,\varepsilon)f(x-y,t-\varepsilon)\,dy-\int\limits_{\varepsilon}^{t}\int\limits_{\mathbb{R}^N}f(x-y,t-s)\frac{\partial\mathcal{E}(y,s)}{\partial s}\,dy\,ds.$$

Интегрируя по частям, получим:

$$I_1=\int\limits_{\varepsilon}^{t}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\mathcal{E}(y,s)\left[\left(-\frac{\partial}{\partial s}-\Delta_y\right)f(x-y,t-s)\right]dy\,ds=$$
$$=\int\limits_{\varepsilon}^{t}\int\limits_{\mathbb{R}^N}f(x-y,t-s)\left[\left(\frac{\partial}{\partial s}-\Delta_y\right)\mathcal{E}(y,s)\right]dy\,ds+$$
$$+\int\limits_{\mathbb{R}^N}\mathcal{E}(y,\varepsilon)f(x-y,t-\varepsilon)\,dy-\int\limits_{\mathbb{R}^N}\mathcal{E}(y,t)f(x-y,0)\,dy=$$
$$=\int\limits_{\mathbb{R}^N}\mathcal{E}(y,\varepsilon)f(x-y,t-\varepsilon)\,dy-J, \quad (4.8)$$

поскольку

$$\left(\frac{\partial}{\partial s}-\Delta_y\right)\mathcal{E}(y,s)=0 \quad \text{для всех} \quad s>0, \quad y\in\mathbb{R}^N.$$

Кроме того, в силу выкладок шага 3 из теоремы 1 имеет место предельный переход:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,\varepsilon) f(x-y,t-\varepsilon)\,dy \to f(x,t) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to +0.$$

С учетом выражения (4.8) из (4.6) находим:

$$I_1 + J = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,\varepsilon) f(x-y,t-\varepsilon)\,dy.$$

Следовательно, функция $u(x,t)$, определенная формулой (4.3), удовлетворяет уравнению (4.1).

Шаг 3. Наконец, имеем:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^N} |u(x,t)| \leqslant \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^N\times(0,+\infty)} |f(x,t)| \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,s)\,dy\,ds = \\ = c_1 t \to +0 \quad \text{при} \quad t \to +0.$$

Теорема доказана.

Замечание. Комбинируя результаты этих двух теорем, приходим к выводу, что при указанных условиях на функции $u_0(x)$ и $f(x,t)$ одно из классических решений неоднородной задачи Коши

$$u_t - \Delta u = f(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,+\infty), \tag{4.9}$$

$$\lim_{\mathbb{R}^{N+1}_+ \ni (y,t) \to (x,0)} u(y,t) = u_0(x) \quad \text{для любого} \quad x \in \mathbb{R}^N \tag{4.10}$$

дается формулой

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right) u_0(y)\,dy + \\ + \int\limits_0^t \frac{1}{(4\pi(t-s))^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}\right) f(y,s)\,dy\,ds. \tag{4.11}$$

§ 5. Литературные указания

Материал для лекции взят из работ [6], [13], [15].

Лекция 2

ПРИНЦИП МАКСИМУМА

§ 1. Слабый принцип максимума для уравнения теплопроводности

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — это открытое ограниченное множество. Тогда положим:

$$D_T := \Omega \times (0, T), \quad \partial' D_T := B \cup S_T, \quad S_T := \Gamma \times [0, T],$$

$$B_T := \Omega \times \{t = T\}, \quad B := \Omega \times \{t = 0\},$$

где Γ — граница области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. В дальнейшем мы будем использо-

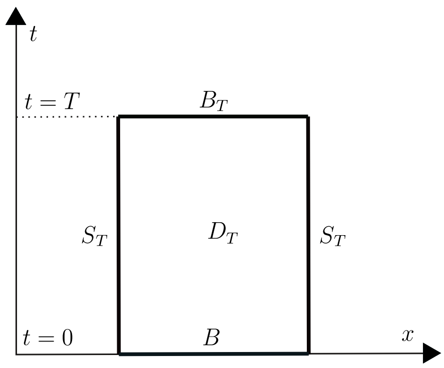


Рис. 1. Область D_T и множества S_T, B и B_T.

вать следующую терминологию: открытое множество $B_T \subset \mathbb{R}^N \times \{t = T\}$ называется *верхней крышкой*, открытое множество $B \subset \mathbb{R}^N \times \{t = 0\}$ называется *нижней крышкой*, замкнутое в $\mathbb{R}^{N+1}$ множество S_T называется *боковой границей* цилиндрической области D_T. Полная граница ∂D_T открытого множества D_T определяется как

$$\partial D_T = S_T \cup B \cup B_T,$$

но в дальнейшем (в принципе максимума) важную роль играет только часть $\partial' D_T$ полной границы ∂D_T, которая определяется следующим образом:

$$\partial' D_T \stackrel{\mathrm{def}}{=} S_T \cup B,$$

и называется *параболической границей*. Кроме того, важной является часть параболической границы:

$$\partial'' D_T \stackrel{\mathrm{def}}{=} B \cup (S_T \backslash \partial B_T) = B \cup (\Gamma \times [0, T)),$$

где $\partial B_T = \Gamma \times \{t = T\}$ — это граница верхней крышки $B_T = \Omega \times \{t = T\} \subset \mathbb{R}^N \times \{t = T\}$. Отметим, что ниже будем использовать обозначение $\mathbb{C}_w(\overline{D}_T)$. Это подмножество класса функций $u(x,t) \in \mathbb{C}(D_T \cup B_T)$ таких, что они могут быть продолжены по непрерывности из $D_T \cup B_T$ до параболической границы $\partial' D_T = S_T \cup B_T$. Кроме того, будем использовать обозначение $\mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D_T \cup B_T)$, которое определяет подмножество класса функций $\mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D_T)$, где частная производная $u_t(x,t)$ в точках верхней крышки B_T понимается в одностороннем смысле, т.е. при $t \uparrow T$:

$$u_t(x,T) := \lim_{t \uparrow T} \frac{u(x,T) - u(x,t)}{T - t}$$

для каждого фиксированного $x \in \Omega$.

Лемма 1. *Справедливо вложение $\mathbb{C}_w(\overline{D}_T) \subset \mathbb{C}_b(D_T)$ для произвольной ограниченной цилиндрической области $D_T = \Omega \times (0, T) \subset \mathbb{R}^{N+1}$.*

Доказательство. Пусть $u(x,t) \in \mathbb{C}_w(\overline{D}_T)$ и $\overline{u}(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D}_T)$ — ее непрерывное продолжение из $D_T \cup B_T$ до параболической части границы $S_T \cup B$. Поскольку цилиндрическая область D_T — ограничена, то $\mathbb{C}(\overline{D}_T) \subset \mathbb{C}_b(D_T)$. Заметим, что

$$|u(x,t)| = |\overline{u}(x,t)| \leqslant c < +\infty \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in D_T,$$

где постоянная c не зависит от $(x,t) \in D_T$. Значит, $u(x,t) \in \mathbb{C}_b(D_T)$.

Лемма доказана.

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 1. *Пусть $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D_T \cup B_T) \cap \mathbb{C}_w(\overline{D}_T)$ — решение уравнения теплопроводности*

$$u_t - \Delta u = 0 \quad \textit{при} \quad (x,t) \in D_T \cup B_T. \tag{1.1}$$

Тогда

$$\max_{(x,t) \in \overline{D}_T} \overline{u}(x,t) = \max_{(x,t) \in \partial' D_T} \overline{u}(x,t), \tag{1.2}$$

$$\min_{(x,t) \in \overline{D}_T} \overline{u}(x,t) = \min_{(x,t) \in \partial' D_T} \overline{u}(x,t), \tag{1.3}$$

где $\overline{u}(x,t)$ — непрерывное продолжение функции $u(x,t)$ из $D_T \cup B_T$ до параболической границы $\partial' D_T = S_T \cup B$.

Доказательство.

Прежде всего докажем, что *если* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D_T \cup B_T) \cap \mathbb{C}_w(\overline{D}_T)$ *— это такое решение уравнения теплопроводности, что*

$$\overline{u}(x,t) \leqslant 0 \quad \textit{при} \quad (x,t) \in \partial'' D_T, \tag{1.4}$$

то

$$\overline{u}(x,t) \leqslant 0 \quad \textit{при} \quad (x,t) \in \overline{D}_T. \tag{1.5}$$

Шаг 1. Выберем константу $\gamma > 0$ и определим следующую функцию:

$$v(x,t) = \overline{u}(x,t) - \frac{\gamma}{T-t}. \tag{1.6}$$

Пусть $z_\gamma = (x_\gamma, t_\gamma)$ — это точка в $\overline{D}_T$, в которой $v(x,t)$ принимает максимальное положительное значение [1]. Заметим, что в силу ограниченности решения $\overline{u}(x,t)$ в $\overline{D}_T$, поскольку $\overline{u}(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D}_T)$, а цилиндрическая область D_T ограниченна, имеет место предельный переход:

$$v(z) \to -\infty \quad \text{при} \quad z \to \overline{B}_T = \{x \in \overline{\Omega},\ t = T\}.$$

Поэтому z_γ не может принадлежать замыканию верхней крышке $\overline{B}_T$, т. е.

$$z_\gamma \in D_T \cup \partial'' D_T.$$

Если $v(z_\gamma) \geqslant 0$, то z_γ не может лежать в D_T, т. е. быть внутренней точкой цилиндрической области D_T.

□ Действительно, в противном случае имеем:

$$\Delta v(z_\gamma) \leqslant 0, \quad v_t(z_\gamma) = 0, \quad i = \overline{1, N}.$$

Поэтому в точке z_γ выполняется следующее неравенство:

$$0 = \Delta u(z_\gamma) - u_t(z_\gamma) = \Delta v(z_\gamma) - v_t(z_\gamma) - \\ - \frac{\gamma}{(T-t)^2} \leqslant -\frac{\gamma}{(T-t)^2} < 0. \quad \boxtimes \tag{1.7}$$

Значит, $z_\gamma \in \partial'' D_T$, но тогда в силу (1.4) имеем $v(z_\gamma) \leqslant 0$. Приходим к противоречию.

Шаг 2. Итак, в любом случае имеем:

$$v(x,t) \leqslant 0 \quad \text{в} \quad D_T \cup \partial'' D_T \Rightarrow$$

---

[1] Если максимальное значение неположительное, то в силу произвольности $\gamma > 0$ мы предельным переходом $\gamma \to +0$ для каждого фиксированного $(x,t) \in$ $\in D_T$ приходим к утверждению теоремы.

$$\Rightarrow \overline{u}(x,t) \leqslant \frac{\gamma}{T-t} \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in D_T \cup \partial'' D_T. \quad (1.8)$$

Поскольку $\overline{u}(x,t)$ не зависит от произвольного $\gamma > 0$, то для всякого фиксированного $(x,t) \in D_T$ устремим $\gamma \to +0$ и получим неравенство:

$$\overline{u}(x,t) \leqslant 0 \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in D_T,$$

а по непрерывности отсюда получим, что

$$\overline{u}(x,t) \leqslant 0 \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \overline{D}_T.$$

Шаг 3. Теперь докажем равенство (1.2). Действительно, пусть

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \max_{(x,t)\in\partial' D_T} \overline{u}(x,t), \quad v(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{u}(x,t) - M.$$

Тогда функция $v(x,t)$ удовлетворяет однородному уравнению теплопроводности

$$\Delta v - v_t = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D_T \cup B_T \quad \text{и} \quad v(x,t) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial' D_T.$$

Следовательно, по доказанному имеем:

$$v(x,t) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \overline{D}_T \Rightarrow \overline{u}(x,t) \leqslant M \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \max_{(x,t)\in\overline{D}_T} \overline{u}(x,t) = M = \max_{(x,t)\in\partial' D_T} \overline{u}(x,t).$$

Шаг 4. Теперь докажем равенство (1.3). Определим следующую величину:

$$m \stackrel{\text{def}}{=} \min_{(x,t)\in\partial' D_T} \overline{u}(x,t).$$

Рассмотрим функцию:

$$v(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{u}(x,t) - m \Rightarrow v(x,t) \geqslant 0 \quad \text{на} \quad \partial' D_T.$$

Итак, функция $-v(x,t)$ удовлетворяет уравнению:

$$\Delta(-v(x,t)) - (-v(x,t))_t = 0 \quad \text{в} \quad D_T \cup B_T,$$

$$-v(x,t) \leqslant 0 \quad \text{на} \quad \partial' D_T.$$

Следовательно, по–доказанному имеем:

$$-v(x,t) \leqslant 0 \quad \text{в} \quad \overline{D}_T \Rightarrow v(x,t) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad \overline{D}_T.$$

Итак,

$$\overline{u}(x,t) \geqslant m \quad \text{в} \quad \overline{D}_T \Rightarrow \min_{(x,t)\in\overline{D}_T} \overline{u}(x,t) = m = \min_{(x,t)\in\partial' D_T} \overline{u}(x,t).$$

Теорема доказана.

Замечание. Отметим, что решение $u(x,t) \neq const$ уравнения теплопроводности

$$u_t = \Delta u$$

может достигать глобального минимального и глобального максимального значений на $\overline{D}_T$ во внутренних точках области D_T. Действительно, рассмотрим следующий пример:

Пример [11]. Рассмотрим $(1+1)$–мерное уравнение теплопроводности в области $D_T = \{|x| < 1\} \times (0,T)$:

$$u_t = u_{xx}. \tag{1.9}$$

Пусть $t_0 \in (0,T)$, $x_0 = 2$ и определим следующую функцию:

$$u(x,t) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad (x,t) \in \{|x| \leqslant 1\} \times [0,t_0]; \\ \mathcal{E}(x,t;x_0,t_0), & \text{если} \quad (x,t) \in \{|x| \leqslant 1\} \times (t_0,T], \end{cases} \tag{1.10}$$

где

$$\mathcal{E}(x,t;x_0,t_0) \overset{\text{def}}{=} \frac{\vartheta(t-t_0)}{\sqrt{4\pi(t-t_0)}} \exp\left(-\frac{|x-x_0|^2}{4(t-t_0)}\right), \quad x_0 = 2.$$

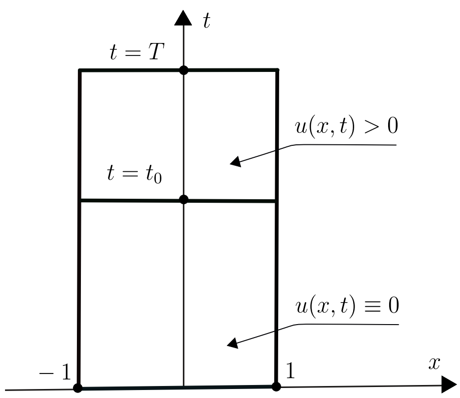


Рис. 2. К примеру.

Ясно, что такая функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности (1.9), поскольку сшивка при $t = t_0$ является бесконечное число раз гладкой, так как $x_0 = 2 \notin \{|x| < 1\}$. Минимальным значением функции $u(x,t)$ является 0 и это минимальное значение достигается внутри области D_T. Заметим, однако, что при $t \leqslant t_0$ функция $u(x,t) = 0$. И этот результат может быть получен в общем виде и носит название *сильного принципа максимума*.

Замечание. Отметим, что этот пример не означает нарушение единственности.

З а м е ч а н и е. Заметим, что в случае *эллиптического* оператора минимальное и максимальное значения решение $u(x) \not\equiv const$ уравнения Лапласа

$$\Delta u(x) = 0 \quad \text{в} \quad D_T$$

не может достигаться внутри области D_T. В этом состоит серьезное отличие эллиптического случая от параболического.

Справедливо следующее утверждение:

Л е м м а 2. *Если* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D_T \cup B_T) \cap \mathbb{C}_w(\overline{D}_T)$ *удовлетворяет неравенствам*

$$\Delta u(x,t) - u_t(x,t) \geqslant 0 \quad \textit{в} \quad D_T \cup B_T, \tag{1.11}$$

$$\overline{u}(x,t) \leqslant 0 \quad \textit{на} \quad S_T \cup B, \tag{1.12}$$

то $\overline{u}(x,t) \leqslant 0$ *в* $\overline{D}_T$. *Если* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D_T \cup B_T) \cap \mathbb{C}_w(\overline{D}_T)$ *удовлетворяет неравенствам*

$$\Delta u(x,t) - u_t(x,t) \leqslant 0 \quad \textit{в} \quad D_T \cup B_T, \tag{1.13}$$

$$\overline{u}(x,t) \geqslant 0 \quad \textit{на} \quad S_T \cup B, \tag{1.14}$$

то $\overline{u}(x,t) \geqslant 0$ *в* $\overline{D}_T$, *где под обозначением* $\overline{u}(x,t)$ *понимается непрерывное продолжение функции* $u(x,t)$ *из* $D_T \cup B_T$ *до параболической части* $S_T \cup B$ *полной границы* ∂D_T.

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Шаг 1.* Сначала рассмотрим случай задачи (1.11) и (1.12). Воспользуемся теми же аргументами, что и на шаге 1 при доказательстве теоремы 1. Тогда вместо неравенств (1.7) получим следующие противоречивые неравенства:

$$0 \leqslant \Delta u(z_\gamma) - u_t(z_\gamma) = \Delta v(z_\gamma) - v_t(z_\gamma) - \\ - \frac{\gamma}{(T-t)^2} \leqslant -\frac{\gamma}{(T-t)^2} < 0. \tag{1.15}$$

Шаг 2. Если $u(x,t)$ — решение задачи (1.13), (1.14), то $-u(x,t)$ — решение задачи (1.11), (1.12). Далее нужно воспользоваться результатом шага 1.

Л е м м а д о к а з а н а.

П р и н ц и п м а к с и м у м а м о д у л я. Докажем следующее важное утверждение:

Л е м м а 3. *Пусть* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D_T \cup B_T) \cap \mathbb{C}_w(\overline{D}_T)$ — *это решение уравнения теплопроводности*

$$u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = 0 \quad \textit{в} \quad D_T \cup B_T.$$

Тогда справедливо равенство:

$$\max_{(x,t)\in\overline{D}_T} |\overline{u}(x,t)| = \max_{(x,t)\in\partial' D_T} |\overline{u}(x,t)|. \tag{1.16}$$

Доказательство.
Введем обозначение:

$$M := \max_{(x,t)\in\partial' D_T} |\overline{u}(x,t)|.$$

Сначала рассмотрим функцию:

$$v(x,t) := \overline{u}(x,t) + M, \quad v(x,t) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial^{'} D_T.$$

Тогда в силу леммы 2 имеем:

$$v(x,t) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad \overline{D}_T \Rightarrow \overline{u}(x,t) \geqslant -M \quad \text{при} \quad (x,t) \in \overline{D}_T.$$

Теперь рассмотрим функцию:

$$w(x,t) := -u(x,t) + M, \quad w(x,t) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial^{'} D_T.$$

Опять в силу леммы 2 имеем:

$$w(x,t) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad \overline{D}_T \Rightarrow \overline{u}(x,t) \leqslant M \quad \text{при} \quad (x,t) \in \overline{D}_T.$$

Следовательно,

$$-M \leqslant \overline{u}(x,t) \leqslant M \Leftrightarrow |\overline{u}(x,t)| \leqslant M \quad \text{при} \quad (x,t) \in \overline{D}_T.$$

Лемма доказана.

Единственность первой смешанной задачи. Пусть $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D_T \cup B_T) \cap \mathbb{C}_w(\overline{D}_T)$ — решение следующей первой смешанной задачи:

$$u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t) \quad \text{для} \quad (x,t) \in D_T \cup B_T, \tag{1.17}$$

$$\lim_{D_T\cup B_T \ni (y,\tau)\to(x,t)\in S_T\cup B} u(y,\tau) = \varphi(x,t) \quad \text{для} \quad (x,t) \in S_T \cup B. \tag{1.18}$$

Докажем, что решение задачи (1.17), (1.18) в рассматриваемом классе функций единственно.

□ Действительно, пусть $u_1(x,t), u_2(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D_T \cup B_T) \cap$ $\cap\, \mathbb{C}_w(\overline{D}_T)$ — произвольные два решения. Тогда образуем разность:

$$u(x,t) = \overline{u}_1(x,t) - \overline{u}_2(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D_T \cup B_T) \cap \mathbb{C}(\overline{D}_T).$$

Функция $u(x,t)$ является решением соответствующей однородной задачи, причем

$$u(x,t) = 0 \quad \text{для} \quad (x,t) \in S_T \cup B. \tag{1.19}$$

Осталось воспользоваться принципом максимума модуля (1.16) и получить, что $u(x,t) = 0$ всюду в $\overline{D}_T$. ⊠

П р и з н а к с р а в н е н и я. Пусть функции $v(x,t), w(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D_T \cup B_T) \cap \mathbb{C}_w(\overline{D}_T)$ — решение следующей задачи:

$$\Delta v(x,t) - v_t(x,t) \geqslant \Delta w(x,t) - w_t(x,t) \quad \text{для} \quad (x,t) \in D_T \cup B_T, \tag{1.20}$$

$$\overline{v}(x,t) \leqslant \overline{w}(x,t) \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in S_T \cup B, \tag{1.21}$$

Тогда имеем

$$\overline{v}(x,t) \leqslant \overline{w}(x,t) \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \overline{D}_T. \tag{1.22}$$

□ Действительно, образуем разность:

$$u(x,t) = \overline{v}(x,t) - \overline{w}(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D_T \cup B_T) \cap \mathbb{C}(\overline{D}_T).$$

Эта функция — решение задачи (1.11), (1.12) и поэтому в силу результата леммы 2 выполнено неравенство (1.22). ⊠

У с т о й ч и в о с т ь р е ш е н и я з а д а ч и Д и р и х л е. Пусть $u_k(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D_T \cup B_T) \cap \mathbb{C}(\overline{D}_T)$ — решения задач Дирихле и $k = 1, 2$:

$$\Delta u_k(x,t) - u_{kt}(x,t) = f_k(x,t) \quad \text{для} \quad (x,t) \in D_T \cup B_T, \tag{1.23}$$

$$u_k(x,t) = g_k(x,t) \quad \text{для} \quad (x,t) \in S_T \cup B_T, \tag{1.24}$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область с гладкой границей Γ. Введем в рассмотрение следующие пять функций:

$$v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t), \tag{1.25}$$

$$v_1(x,t) = t \sup_{(x,t)\in D_T\cup B_T} |f(x,t)| + \sup_{(x,t)\in S_T\cup B} |g(x,t)|, \tag{1.26}$$

$$v_2(x,t) = -t \sup_{(x,t)\in D_T\cup B_T} |f(x,t)| - \sup_{(x,t)\in S_T\cup B} |g(x,t)|, \tag{1.27}$$

$$v_3(x,t) = \frac{d^2 - |x|^2}{2N} \sup_{(x,t)\in D_T\cup B_T} |f(x,t)| + \sup_{(x,t)\in S_T\cup B} |g(x,t)|, \tag{1.28}$$

$$v_4(x,t) = -\frac{d^2 - |x|^2}{2N} \sup_{(x,t)\in D_T\cup B_T} |f(x,t)| - \sup_{(x,t)\in S_T\cup B} |g(x,t)|, \tag{1.29}$$

где

$$f(x,t) := f_1(x,t) - f_2(x,t), \quad g(x,t) := g_1(x,t) - g_2(x,t), \tag{1.30}$$

$$d := \max_{x\in\overline{\Omega}} |x|.$$

Функция $v(x,t)$ удовлетворяет задаче:

$$\Delta v(x,t) - v_t(x,t) = f(x,t) \quad \text{для} \quad (x,t) \in D_T \cup B_T, \tag{1.31}$$

$$v(x,t) = g(x,t) \quad \text{для} \quad (x,t) \in S_T \cup B. \tag{1.32}$$

При этом для барьеров $v_1(x,t)$, $v_2(x,t)$, $v_3(x,t)$ и $v_4(x,t)$ справедливы неравенства:

$$\Delta v_1(x,t) - v_{1t}(x,t) = -\sup_{(x,t)\in D_T\cup B_T} |f(x,t)| \leqslant$$
$$\leqslant f(x,t) = \Delta v(x,t) - v_t(x,t) \quad \text{для} \quad (x,t) \in D_T \cup B_T, \tag{1.33}$$

$$v_1(x,t) \geqslant g(x,t) = v(x,t) \quad \text{для} \quad (x,t) \in S_T \cup B, \tag{1.34}$$

$$\Delta v_2(x,t) - v_{2t}(x,t) = \sup_{(x,t)\in D_T\cup B_T} |f(x,t)| \geqslant$$
$$\geqslant f(x,t) = \Delta v(x,t) - v_t(x,t) \quad \text{для} \quad (x,t) \in D_T \cup B_T, \tag{1.35}$$

$$v_2(x,t) \leqslant g(x,t) = v(x,t) \quad \text{для} \quad (x,t) \in S_T \cup B, \tag{1.36}$$

$$\Delta v_3(x,t) - v_{3t}(x,t) = -\sup_{(x,t)\in D_T\cup B_T} |f(x,t)| \leqslant$$
$$\leqslant f(x,t) = \Delta v(x,t) - v_t(x,t) \quad \text{для} \quad (x,t) \in D_T \cup B_T, \tag{1.37}$$

$$v_3(x,t) \geqslant g(x,t) = v(x,t) \quad \text{для} \quad (x,t) \in S_T \cup B, \tag{1.38}$$

$$\Delta v_4(x,t) - v_{4t}(x,t) = \sup_{(x,t)\in D_T\cup B_T} |f(x,t)| \geqslant$$
$$\geqslant f(x,t) = \Delta v(x,t) - v_t(x,t) \quad \text{для} \quad (x,t) \in D_T \cup B_T, \tag{1.39}$$

$$v_4(x,t) \leqslant g(x,t) = v(x,t) \quad \text{для} \quad (x,t) \in S_T \cup B. \tag{1.40}$$

Поэтому в силу признака сравнения для первой краевой задачи (1.20), (1.21) получим следующие неравенства:

$$v_2(x,t) \leqslant v(x,t) \leqslant v_1(x,t) \quad \text{для} \quad (x,t) \in \overline{D}_T, \tag{1.41}$$

$$v_4(x,t) \leqslant v(x,t) \leqslant v_3(x,t) \quad \text{для} \quad (x,t) \in \overline{D}_T, \tag{1.42}$$

из которых получим неравенства:

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| \leqslant \frac{d^2 - |x|^2}{2N} \sup_{(x,t)\in D_T\cup B_T} |f_1(x,t) - f_2(x,t)| +$$
$$+ \sup_{(x,t)\in S_T\cup B} |g_1(x,t) - g_2(x,t)|, \tag{1.43}$$

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| \leqslant t \sup_{(x,t)\in D_T\cup B_T} |f_1(x,t) - f_2(x,t)| +$$

$$+ \sup_{(x,t)\in S_T\cup B} |g_1(x,t) - g_2(x,t)|. \quad (1.44)$$

Из (1.43) и (1.44) приходим к единообразной оценке:

$$\max_{(x,t)\in \overline{D}_T} |u_1(x,t) - u_2(x,t)| \leqslant \min\left\{T, \max_{x\in\overline{\Omega}} \left(\frac{d^2 - |x|^2}{2N}\right)\right\} \times$$
$$\times \sup_{(x,t)\in D_T\cup B_T} |f_1(x,t) - f_2(x,t)| + \sup_{(x,t)\in S_T\cup B} |g_1(x,t) - g_2(x,t)|, \quad (1.45)$$

где, заметим:

$$\sup_{(x,t)\in S_T\cup B} |g_1(x,t) - g_2(x,t)| =$$
$$= \max\left\{\sup_{(x,t)\in S_T} |g_1(x,t) - g_2(x,t)|, \sup_{(x,t)\in B} |g_1(x,t) - g_2(x,t)|\right\}. \quad (1.46)$$

Из оценки (1.45) вытекает устойчивость решений задачи Дирихле (1.23), (1.24) по правой части и по граничному условию на боковой поверхности S_T и нижней крышки B.

Прежде, чем рассматривать приложения принципа максимума, предложим следующий рисунок цилиндрической области $D = (a,b) \times \times (0,t_0)$, в котором

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \{x = a\} \times \{0 \leqslant t \leqslant t_0\} \cup \{x = b\} \times \{0 \leqslant t \leqslant t_0\},$$

$$B \stackrel{\text{def}}{=} \{a < x < b\} \times \{t = 0\},$$

$$B_{t_0} \stackrel{\text{def}}{=} \{a < x < b\} \times \{t = t_0\},$$

где $\partial D = S \cup B \cup B_{t_0}$, а *нормальная граница* или *параболическая граница* $\partial' D = S \cup B$. Напомним, что область $B \subset \mathbb{R}^1 \times \{t = 0\}$ называется *нижней крышкой*, область $B_{t_0} \subset \mathbb{R}^1 \times \{t = t_0\}$ называется *верхней крышкой*, а множество S называется *боковой границей*. Множества S, B и B_{t_0} попарно непересекаются.

§ 2. Примеры решения задач

Задача 1. [2] Пусть $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(\overline{D})$ — это решение в $\overline{D} = [0,1] \times [0,1]$ задачи

$$u_t = u_{xx} \quad \text{при} \quad (x,t) \in \overline{D},$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0 \quad \text{при} \quad t > 0,$$

$$u|_{t=0} \not\equiv 0 \quad \text{при} \quad x \in (0,1),$$

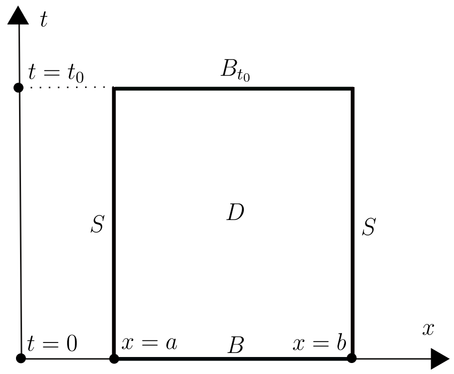


Рис. 3. К задачам.

для которой выполняются условия согласования: $u(0,0) = u(1,0) = 0$. Может ли функция

$$f(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_0^1 u^2(x,t)\,dx$$

иметь максимум при $t \in (0,1)$?

Решение. Предположим, что в некоторой точке $t_0 \in (0,1)$ достигается максимум функции $f(t)$. Поскольку $f(t) \geqslant 0$ и решение $u(x,t) \neq \neq 0$, то

$$f(t_0) > 0.$$

Тогда имеем:

$$f^{'}(t_0) = 0 \Rightarrow \int\limits_0^1 u(x,t_0)u_t(x,t_0)\,dx = 0 \Rightarrow \int\limits_0^1 u(x,t_0)u_{xx}(x,t_0)\,dx = 0.$$

Интегрируя по частям в последнем равенстве, с учетом граничных условий в рассматриваемом классе гладкости получим равенство:

$$-\int\limits_0^1 (u_x(x,t_0))^2\,dx = 0 \Rightarrow u_x(x,t_0) = 0 \Rightarrow u(x,t_0) = const \quad \forall x \in [0,1],$$

из которого в силу граничных условий получим $u(x,t_0) = 0$, что в свою очередь означает:

$$f(t_0) = \int\limits_0^1 u^2(x,t_0)\,dx = 0.$$

Но это противоречит определению точки $t_0 \in (0,1)$. Заметим, что

$$f^{'}(t) = -2\int\limits_0^1 (u_x(x,t))^2\,dx \leqslant 0.$$

Поэтому функция $f(t)$ является убывающей на временном отрезке $[0,1]$.

Задача 2 [2]. Пусть $u(x,t)$ — это классическое решение в $D = (0,\pi)\times(0,+\infty)$ задачи

$$u_t = u_{xx}, \quad u|_{x=0} = u_x|_{x=\pi} = 0, \quad u|_{t=0} = \varphi(x), \tag{2.1}$$

где $\varphi(0) = \varphi^{'}(\pi) = 0$. Ответить на следующие вопросы:

1. Выполнено ли неравенство

$$\sup_{0<x<\pi} |u(x,1)| \leqslant \sup_{0<x<\pi} |\varphi(x)|? \tag{2.2}$$

2. Верно ли, что

$$\sup_{0<x<\pi} |u(x,1)| \leqslant \frac{1}{2}\sup_{0<x<\pi} |\varphi(x)|? \tag{2.3}$$

Решение. Для того, чтобы в дальнейшем воспользоваться принципом максимума, нужно получить эквивалентную задачу, но с условиями Коши–Дирихле. С этой целью продолжим функцию $u(x,t)$ четным образом через точку $x=\pi$ на множество $x \in (\pi, 2\pi)$, т. е. положим:

$$\widetilde{u}(x,t) = \begin{cases} u(x,t), & \text{если} \quad x \in [0,\pi]; \\ u(2\pi - x, t), & \text{если} \quad x \in [\pi, 2\pi]; \end{cases} \Rightarrow \widetilde{u}_x(\pi,t) = u_x(\pi,t) = 0.$$

Кроме того,

$$\widetilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{если} \quad x \in [0,\pi]; \\ \varphi(2\pi - x), & \text{если} \quad x \in [\pi, 2\pi]; \end{cases} \Rightarrow \widetilde{\varphi}_x(\pi) = \varphi_x(\pi) = 0.$$

Построенная функция является решением краевой задачи:

$$\widetilde{u}_t = \widetilde{u}_{xx}, \quad x \in (0, 2\pi), \quad t > 0, \tag{2.4}$$

$$\widetilde{u}|_{x=0} = \widetilde{u}|_{x=2\pi} = 0, \quad \widetilde{u}|_{t=0} = \widetilde{\varphi}, \tag{2.5}$$

где функция $\widetilde{\varphi}(x)$ является чётным продолжением на интервал $(\pi, 2\pi)$ функции $\varphi(x)$ и это продолжение возможно в силу условий $\varphi(0) = \varphi^{'}(\pi) = 0$. Задачи (2.1) и (2.4), (2.5) эквивалентны. Применяя принцип максимума модуля (см. лемму 3), получим, что максимум модуля функции $\widetilde{u}(x,t)$ достигается при $t=0$, поскольку на боковой границе при $x=0$ и $x=2\pi$ функция $\widetilde{u}(x,t)=0$. Итак,

$$\sup_{0<x<\pi}|u(x,1)| = \sup_{0<x<2\pi}|\widetilde{u}(x,1)| \leqslant \sup_{0<x<2\pi}|\widetilde{\varphi}(x)| = \sup_{0<x<\pi}|\varphi(x)|. \tag{2.6}$$

Утверждение (2.2) доказано.

Неравенство (2.3) — неверно. Действительно, возьмем функцию

$$\varphi(x) = \sin(x/2),$$

которой соответствует решение [1])

$$u(x,t) = e^{-t/4}\sin(x/2) \Rightarrow \sup_{0<x<\pi}|u(x,1)| = e^{-1/4}, \qquad \sup_{0<x<\pi}|\varphi(x)| = 1.$$

Заметим, что

$$e^{-1/4} > \frac{1}{2},$$

поскольку $e < 2^4$.

З а д а ч а 3 [2]. Пусть $D=(0,1)\times(0,1)$. Существует ли функция $u(x,t)\in\mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D)\cap\mathbb{C}(\overline{D})$ — решение следующей первой краевой задачи:

$$u_t = u_{xx} \quad \text{в} \quad D, \tag{2.7}$$

$$u|_{t=0} = 2\sin\pi x \quad \text{при} \quad 0\leqslant x\leqslant 1, \tag{2.8}$$

$$u|_{x=0} = \sin\pi t, \quad u|_{x=1} = \sin\pi t + 2\sin\pi t \quad \text{при} \quad 0 < t \leqslant 1, \tag{2.9}$$

$$u|_{t=1} = 3\sin\pi x \quad \text{при} \quad 0\leqslant x\leqslant 1? \tag{2.10}$$

Эта задача предлагается читателю для самостоятельного решения.

З а д а ч а 4 [2]. Существует ли решение $u(x,t)\in\mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(\overline{Q})$ задачи

$$u_t = u_{xx} + 1 \quad \text{в} \quad \overline{Q}, \quad Q = \Big\{(x,t):\ x^2+t^2<1\Big\}, \tag{2.11}$$

$$xu_x(x,t) = tu(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t)\in\partial Q = \Big\{(x,t):\ x^2+t^2=1\Big\}? \tag{2.12}$$

Р е ш е н и е. Используя формулу Грина в $\mathbb{R}^2$, получим равенства:

$$\int\limits_Q u_t\,dx\,dt = \int\limits_{\partial Q} u(x,t)\cos(\mathbf{n}_{x,t},\mathbf{e}_t)\,dl, \tag{2.13}$$

$$\int\limits_Q u_{xx}\,dx\,dt = \int\limits_{\partial Q} u_x(x,t)\cos(\mathbf{n}_{x,t},\mathbf{e}_x)\,dl, \tag{2.14}$$

[1]) Полученное методом разделенных переменных.

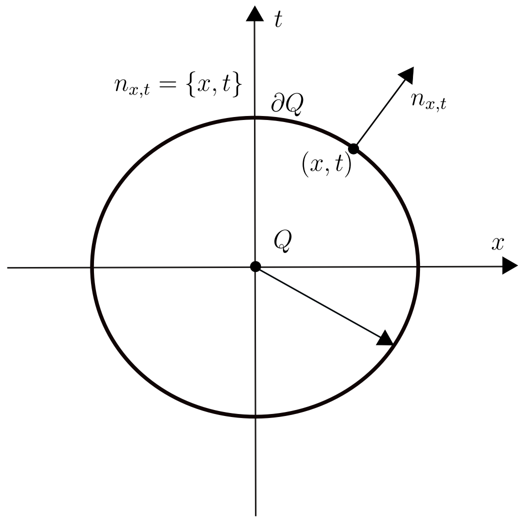


Рис. 4. К задаче 4.

где $\mathbf{n}_{x,t}$ — это внешняя нормаль в точке $(x,t) \in \partial Q$. Легко проверить, что

$$\mathbf{n}_{x,t} = (x,t), \quad \cos(\mathbf{n}_{x,t}, \mathbf{e}_t) = t, \quad \cos(\mathbf{n}_{x,t}, \mathbf{e}_x) = x.$$

Интегрируя обе части уравнения (2.11), получим равенство:

$$\int\limits_{\partial Q} u(x,t)t\,dl = \int\limits_{\partial Q} u_x(x,t)x\,dl + 2\pi,$$

а с учетом граничного условия (2.12) получим противоречивое равенство:

$$0 = 2\pi.$$

Задача 5 [2]. Пусть функции $u_k(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D_k) \cap \mathbb{C}(\overline{D}_k)$, $k = 1, 2$, являются решениями в

$$D_k \stackrel{\text{def}}{=} (-k,k) \times (0,T)$$

краевых задач:

$$(u_k)_t = (u_k)_{xx}, \quad u_k|_{x=\pm k} = 0, \quad u_k|_{t=0} = \varphi(x), \quad |x| \leqslant k. \tag{2.15}$$

Здесь $\varphi(x) \in \mathbb{C}^{(1)}([-2,2])$, $\varphi(x) \geqslant 0$ при $|x| \leqslant 1$ и $\varphi(x) = 0$ при $1 \leqslant |x| \leqslant 2$, $\varphi(x) \not\equiv 0$. Доказать, что

$$u_1(x,t) \leqslant u_2(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in [-1,1] \times (0,T]. \tag{2.16}$$

Решение. В силу принципа максимума $u_k(x,t) \geqslant 0$ в D_k. Рассмотрим разность:

$$v(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} u_2(x,t) - u_1(x,t).$$

Введенная функция удовлетворяет задаче:

$$v_t = v_{xx}, \quad v|_{x=\pm 1} > 0, \quad v|_{t=0} = 0. \tag{2.17}$$

В силу принципа максимума имеем $v(x,t) \geqslant 0$ в D, т.е. выполнено неравенство (2.16).

Задача 6* [2]. [1] Функция $u(x,t) \not\equiv const$ удовлетворяет уравнению

$$u_t = u_{xx}$$

в области $D \equiv \left\{(x,t):\ 0 < t < T,\ 0 < x \leq 5 - \exp(-t)\right\}$. Доказать, что глобальный максимум этой функции на $\overline{D}$ не может достигаться ни во внутренних точках области D, ни при $t = T$.

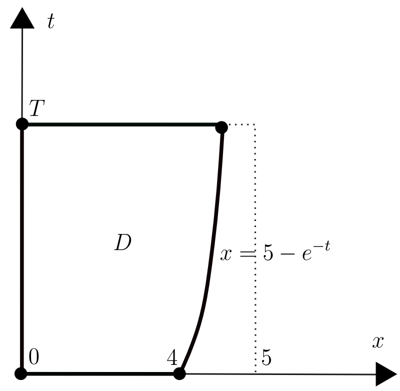


Рис. 5. К задаче 6.

Указание. Проследите доказательство теоремы 1. Можно и в данном случае не цилиндрической области доказать принцип максимума, рассматривая функцию:

$$v(x,t) := u(x,t) - \frac{\gamma}{T-t}.$$

Эта задача предлагается читателю для самостоятельного решения.

Задача 7 [2], [4]. Пусть $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D_T) \cap \mathbb{C}(\overline{D}_T)$ является решением задачи:

$$u_t = \Delta u + f(x), \quad f(x) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D_T \cup B_T, \tag{2.18}$$

[1] Эта задача повышенной сложности.

$$u(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in S_T \cup B. \tag{2.19}$$

Докажите, что $u_t(x,t) \geqslant 0$ в $D_T = \Omega \times (0,T)$.

Решение. В области D_T выполнено неравенство:

$$\Delta u(x,t) - u_t(x,t) \leqslant 0.$$

Тогда с учетом второго утверждения из леммы 2 и равенства (2.19) получим, что выполняется неравенство:

$$u(x,t) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad D_T. \tag{2.20}$$

Рассмотрим функцию

$$w(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} u(x,t+\varepsilon) - u(x,t), \quad \varepsilon > 0. \tag{2.21}$$

Эта функция удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$w_t(x,t) = \Delta w(x,t) \quad \text{в} \quad D_{T-\varepsilon} \cup B_{T-\varepsilon}, \tag{2.22}$$

причем

$$w(x,t) = u(x,t+\varepsilon) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in S_{T-\varepsilon} \cup B, \tag{2.23}$$

поскольку

$$u(x,t) = 0 \quad \text{на} \quad \partial' D_T \supset \partial' D_{T-\varepsilon}.$$

Применяя второе утверждение из леммы 2, получим:

$$w(x,t) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad D_{T-\varepsilon} \Rightarrow \frac{u(x,t+\varepsilon) - u(x,t)}{\varepsilon} \geqslant 0 \quad \text{в} \quad D_{T-\varepsilon} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{u(x,t+\varepsilon) - u(x,t)}{\varepsilon} = u_t(x,t) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad D_T. \tag{2.24}$$

Задача 8. Аналог неравенства Чебышева [4]. Пусть функция $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D_T \cup B_T) \cap \mathbb{C}(\overline{D}_T)$ является решением дифференциального неравенства:

$$\Delta u(x,t) - u_t(x,t) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad D_T \cup B_T. \tag{2.25}$$

Предположим, что

$$u(x,t) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in S_T, \tag{2.26}$$

$$u(x,t) \leqslant 1 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \overline{B}. \tag{2.27}$$

Пусть $v(x) \geqslant 0$ — это гладкая функция в $\overline{\Omega}$ такая, что

$$\Delta v(x) \leqslant -1 \quad \text{при} \quad x \in \Omega. \tag{2.28}$$

Доказать, что
$$u(x,t) \leqslant \frac{v(x)}{t} \quad \text{при} \quad (x,t) \in D_T. \tag{2.29}$$

Решение. Прежде всего заметим, что в силу принципа максимума имеем [1])
$$u(x,t) \leqslant 1 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D_T. \tag{2.30}$$

Рассмотрим следующую вспомогательную функцию:
$$w(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} u(x,t) - \frac{v(x)}{t}. \tag{2.31}$$

Применим к этой функции оператор
$$\Delta - \frac{\partial}{\partial t}$$
и получим следующее неравенство
$$\Delta w(x,t) - w_t(x,t) = \Delta u(x,t) - u_t(x,t) - \frac{\Delta v(x)}{t} - \frac{v(x)}{t^2} \geqslant$$
$$\geqslant -\frac{\Delta v(x)}{t} - \frac{v(x)}{t^2} \geqslant \frac{1}{t^2}\left(t - v(x)\right). \tag{2.32}$$

Разобьем область D_T на три попарно непересекающиеся части:
$$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3,$$
$$D_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{(x,t) \in D_T :\ v(x) > t\}, \quad D_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{(x,t) \in D_T :\ v(x) < t\},$$
$$D_3 \stackrel{\text{def}}{=} \{(x,t) \in D_T :\ v(x) = t\}.$$

На множестве D_1 выполнено неравенство:
$$\frac{v(x)}{t} > 1 \geqslant u(x,t) \Rightarrow w(x,t) \leqslant 0. \tag{2.33}$$

На множестве $D_2 \cup D_3$ в силу (2.32) выполнено неравенство:
$$v(x) \leqslant t \Rightarrow \Delta w(x,t) - w_t(x,t) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D_2 \cup D_3. \tag{2.34}$$

Теперь заметим, что в силу определения (2.31) функции $w(x,t)$ и неравенств (2.26), (2.27) на параболической границе $\partial' D_T = S_T \cup B$ области D_T выполнено неравенство:
$$w(x,t) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial' D_T. \tag{2.35}$$

[1]) Нужно применить первое утверждение леммы 2 к функции $u(x,t) - 1$.

Часть границы множества $D_2 \cup D_3$, не входящая в $\partial' D_T$, принадлежит D_3 и на множестве D_3 имеет место следующее неравенство:

$$w(x,t) = u(x,t) - \frac{v(x)}{t} \leqslant 1 - 1 = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D_3. \qquad (2.36)$$

Итак, в силу первого утверждения из леммы 2 из неравенств (2.34), (2.35) и (2.36) получим неравенство:

$$w(x,t) = u(x,t) - \frac{v(x)}{t} \leqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D_2. \qquad (2.37)$$

Следовательно, объединяя неравенства (2.33), (2.36) и (2.37), следует неравенство:

$$w(x,t) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D_T.$$

Задача 9 [2]. Справедлив ли принцип максимума в области $D_T = \Omega \times (0,T)$ для обратно параболического уравнения

$$u_t(x,t) + \Delta u(x,t) = 0 \qquad (2.38)$$

в том виде, в каком он справедлив для уравнения теплопроводности?

Ответ. Нет.

Решение. Глобальный максимум и минимум функции $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D_T) \cap \mathbb{C}(\overline{D}_T)$ может достигаться при $(x,t) \in B_T \cup S_T$. Таким образом, в формулировке *принципа максимума* для уравнения (2.38) нужно заменить B на B_T.

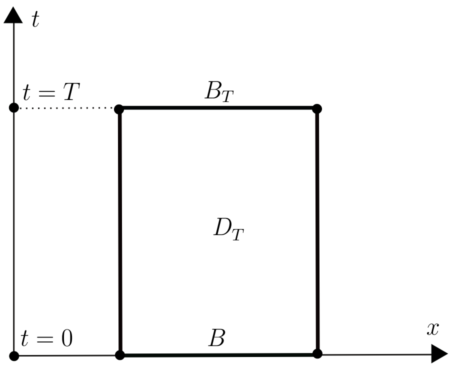


Рис. 6. К задаче 9.

Задача для самостоятельного решения 1. Рассмотрите неоднородное уравнение теплопроводности

$$u_t - \Delta u = f(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in D_T \cup B_T,$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — это ограниченная область с гладкой границей. Пусть $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D_T \cup B_T) \cap \mathbb{C}_w(\overline{D}_T)$ и, кроме того, $f(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D}_T)$. Докажите, что имеют место неравенства:

$$
\min_{(x,t)\in\partial' D_T} \overline{u}(x,t) - T \max_{(x,t)\in\overline{D}_T} |f(x,t)| \leqslant \overline{u}(x,t) \leqslant
$$

$$
\leqslant \max_{(x,t)\in\partial' D_T} \overline{u}(x,t) + T \max_{(x,t)\in\overline{D}_T} |f(x,t)|.
$$

Указание. Необходимо рассмотреть следующие две функции:

$$
v_1(x,t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \overline{u}(x,t) + tK, \quad v_2(x,t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \overline{u}(x,t) - tK,
$$

$$
K \stackrel{\mathrm{def}}{=} \max_{(x,t)\in\overline{D}} |f(x,t)|.
$$

§ 3. Литературные указания

Материал для лекции взят из работ [1], [2], [4], [11], [15].

Лекция 3

КЛАСС ЕДИНСТВЕННОСТИ А. Н. ТИХОНОВА

§ 1. Слабый принцип максимума для задачи Коши

Рассмотрим *слабый принцип максимума* для задачи Коши в случае уравнения теплопроводности, следствием которого является единственность решения задачи Коши. Будем использовать обозначение $\mathbb{C}_w(\mathbb{R}^N \times [0,T])$, подразумевающее множество функций $u(x,t)$ из $\mathbb{C}(\mathbb{R}^N \times (0,T])$, которые можно по непрерывности продолжить из $\mathbb{R}^N \times (0,T]$ до $\mathbb{R}^N \times [0,T]$. Это продолжение будем обозначать $\overline{u}(x,t)$. Справедливо следующее утверждение:

Теорема 1. *Пусть* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(\mathbb{R}^N \times (0,T]) \cap \mathbb{C}_w(\mathbb{R}^N \times [0,T])$ — *это решение задачи Коши*

$$u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = 0 \quad \textit{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,T], \tag{1.1}$$

$$\lim_{\mathbb{R}^N \times (0,T] \ni (y,\tau) \to (x,0)} u(y,\tau) = u_0(x) \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^N), \tag{1.2}$$

удовлетворяющее условию роста

$$\overline{u}(x,t) \leqslant M e^{\beta|x|^2} \quad \textit{при} \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \in [0,T], \tag{1.3}$$

где $M > 0$ *и* $\beta > 0$ — *это константы. Тогда*

$$\sup_{(x,t) \in \mathbb{R}^N \times [0,T]} \overline{u}(x,t) = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} u_0(x). \tag{1.4}$$

Доказательство.

Шаг 1. Допустим, что

$$4\beta T < 1 \Rightarrow 4\beta(T+\varepsilon) < 1 \tag{1.5}$$

при некотором малом $\varepsilon > 0$. Зафиксируем $y \in \mathbb{R}^N$, $\mu > 0$ и определим функцию

$$v(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{u}(x,t) - \frac{\mu}{(T+\varepsilon-t)^{N/2}} \exp\left(\frac{|x-y|^2}{4(T+\varepsilon-t)}\right) \tag{1.6}$$

при $x \in \mathbb{R}^N$ и $t > 0$. Непосредственной подстановкой можно показать [1]), что

$$v_t(x,t) - \Delta v(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,T]. \tag{1.7}$$

Шаг 2. Зафиксируем $r > 0$ и положим:

$$\Omega \stackrel{\text{def}}{=} O(y,r), \quad D_T = \Omega \times (0,T), \quad O(y,r) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{x \in \mathbb{R}^N : \, |x-y| < r\right\}.$$

В силу теоремы 1 о принципе максимума в ограниченных областях $D_T = \Omega \times (0,T)$ из предыдущей лекции имеем:

$$\max_{(x,t)\in\overline{D}_T} v(x,t) = \max_{(x,t)\in\partial' D_T} v(x,t). \tag{1.8}$$

Шаг 3. Если $x \in \mathbb{R}^N$ и $t = 0$, то

$$v(x,0) = \overline{u}(x,0) - \frac{\mu}{(T+\varepsilon)^{N/2}} \exp\left(\frac{|x-y|^2}{4(T+\varepsilon)}\right) \leqslant \overline{u}(x,0) = u_0(x). \tag{1.9}$$

Если $(x,t) \in S_T$, т. е. $|x-y| = r$ и $t \in [0,T]$, то

$$|x| \leqslant |x-y| + |y| = r + |y|$$

и имеет место следующая оценка:

$$\begin{aligned} v(x,t) = \overline{u}(x,t) - \frac{\mu}{(T+\varepsilon-t)^{N/2}} \exp\left(\frac{r^2}{4(T+\varepsilon-t)}\right) \leqslant \\ \leqslant M\exp\left(\beta|x|^2\right) - \frac{\mu}{(T+\varepsilon-t)^{N/2}} \exp\left(\frac{r^2}{4(T+\varepsilon-t)}\right) \leqslant \\ \leqslant M\exp\left(\beta(|y|+r)^2\right) - \frac{\mu}{(T+\varepsilon)^{N/2}} \exp\left(\frac{r^2}{4(T+\varepsilon)}\right). \end{aligned} \tag{1.10}$$

В силу неравенства (1.5) при некотором $\gamma > 0$ имеет место равенство:

$$\frac{1}{4(T+\varepsilon)} = \beta + \gamma.$$

Пусть

$$c_1 = \sup_{x\in\mathbb{R}^N} u_0(x) \in (-\infty, +\infty). \tag{1.11}$$

Продолжая оценивать правую часть неравенства (1.10) при $(x,t) \in S_T$, получим следующую оценку:

[1]) Поскольку $t \in [0,T]$, а $\varepsilon > 0$, то сингулярности как у фундаментального решения, так и у функции $v(x,t)$ на сегменте $[0,T]$ нет.

$$v(x,t) \leqslant$$
$$\leqslant M \exp\left(\beta(|y|+r)^2\right) - \mu(4(\beta+\gamma))^{N/2}\exp((\beta+\gamma)r^2) \to -\infty \quad (1.12)$$

при $r \to +\infty$. Следовательно, при достаточно большом $r > 0$ будет выполнено неравенство:

$$M \exp\left(\beta(|y|+r)^2\right) - \mu(4(\beta+\gamma))^{N/2}\exp((\beta+\gamma)r^2) \leqslant c_1 = \sup_{x\in\mathbb{R}^N} u_0(x).$$

Итак, при некотором таком $r > 0$ будем иметь:

$$v(x,t) \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}^N} u_0(x). \quad (1.13)$$

Шаг 4. Итак, в силу (1.9), (1.13) и (1.8) имеем:

$$v(y,t) \leqslant \sup_{(x,t)\in D} v(x,t) = \sup_{(x,t)\in\partial' D} v(x,t) \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}^N} u_0(x)$$

для всех $y \in \mathbb{R}^N$ и $t \in [0,T]$, где согласно определению (1.6)

$$v(y,t) = \overline{u}(y,t) - \frac{\mu}{(T+\varepsilon-t)^{N/2}}.$$

Переходя к пределу при $\mu \to +0$ для фиксированного $(y,t) \in \mathbb{R}^N \times \times (0,T)$ при фиксированном достаточно малом $\varepsilon > 0$ получим утверждение теоремы.

Шаг 5. Если условие (1.5) не выполняется, то тогда нужно применить схему доказательства на временных интервалах

$$[0,T_1], \quad [T_1,2T_1],...,[(n-1)T_1,nT_1],...,$$

при $T_1 = 1/(8\beta)$. Тогда на первом шаге получим следующее неравенство:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^N} \overline{u}(x,t) \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}^N} u_0(x) \quad \text{при} \quad t\in[0,T_1] \Rightarrow \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \overline{u}(x,T_1) \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}^N} u_0(x).$$

При этом на втором шаге начальным условием является функция $\overline{u}(x,T_1)$. В результате на втором шаге получим неравенство:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^N} \overline{u}(x,t) \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \overline{u}(x,T_1) \quad \text{при} \quad t\in[T_1,2T_1] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \overline{u}(x,2T_1) \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \overline{u}(x,T_1).$$

Таким образом,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^N} u_0(x) \geqslant \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \overline{u}(x,T_1) \geqslant \cdots \geqslant \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \overline{u}(x,nT_1) \geqslant \overline{u}(x,t)$$

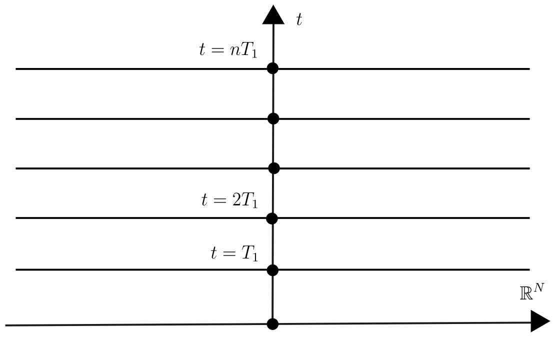


Рис. 7. К шагу 5.

при $t \in [nT_1, (n+1)T_1]$ и $x \in \mathbb{R}^N$.

Итак, приходим к выводу о том, что

$$\overline{u}(x,t) \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}^N} u_0(x) \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \times [0,T].$$

Теорема доказана.

Следствие 1. *При условиях теоремы* 1 *и в случае неравенства*

$$\overline{u}(x,t) \geqslant -Me^{\beta|x|^2} \quad \textit{при} \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \in [0,T]$$

выполнено следующее равенство:

$$\inf_{(x,t)\in\mathbb{R}^N} \overline{u}(x,t) = \inf_{x\in\mathbb{R}^N} u_0(x).$$

Доказательство. Действительно, достаточно рассмотреть вместо функции $u(x,t)$ функцию $-u(x,t)$.

Следствие доказано.

Следствие 2. *Пусть выполнено неравенство:*

$$|\overline{u}(x,t)| \leqslant Me^{\beta|x|^2} \quad \textit{при} \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \in [0,T]$$

при $M > 0$ *и* $\beta > 0$. *Если* $\overline{u}(x,0) \leqslant 0$, *то* $\overline{u}(x,t) \leqslant 0$ *для всех* $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times [0,T]$. *Если* $\overline{u}(x,0) \geqslant 0$, *то* $\overline{u}(x,t) \geqslant 0$ *для всех* $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times [0,T]$.

Доказательство. Действительно, в силу теоремы справедливо следующее равенство:

$$\overline{u}(x,t) \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}^N} u_0(x) \leqslant 0 \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \times [0,T].$$

Аналогично в силу следствия 1 приходим ко второму утверждению.

Следствие доказано.

§ 2. Единственность решения задачи Коши

Докажем важный результат, в свое время полученный А. Н. Тихоновым [13], о единственности решения задачи Коши при дополнительном условии на рост решения при $|x| \to +\infty$, называемым условием А. Н. Тихонова. Справедливо следующее утверждение:

Теорема 2. *Если существует, то не более одного решения $u(x,t) \in \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(\mathbb{R}^N \times (0,T]) \cap \mathbb{C}_w(\mathbb{R}^N \times [0,T])$ задачи Коши*

$$u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t) \quad \textit{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,T], \tag{2.1}$$

$$\lim_{\mathbb{R}^N \times (0,T] \ni (y,\tau) \to (x,0)} u(y,\tau) = u_0(x) \quad \textit{при} \quad x \in \mathbb{R}^N \tag{2.2}$$

в классе А. Н. Тихонова:

$$|\overline{u}(x,t)| \leqslant M \exp\left(\beta |x|^2\right) \quad \textit{при} \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \in [0,T], \tag{2.3}$$

где $M > 0$ и $\beta > 0$ — константы.

Доказательство.

Пусть утверждение не выполнено и существует два различных решения $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$. Тогда рассмотрим функцию

$$w_1(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{u}_1(x,t) - \overline{u}_2(x,t),$$

которая удовлетворяет соответствующей однородной задаче Коши и условию

$$w_1(x,t) \leqslant 2M \exp\left(\beta |x|^2\right), \quad w_1(x,0) = 0,$$

где $M > 0$. Поэтому в силу теоремы 1 имеем:

$$w_1(x,t) \leqslant 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^N \times [0,T].$$

Теперь рассмотрим функцию

$$w_2(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{u}_2(x,t) - \overline{u}_1(x,t) = -w_1(x,t),$$

относительно которой заключаем, что

$$w_2(x,t) \leqslant 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^N \times [0,T].$$

Следовательно,

$$u_1(x,t) = u_2(x,t).$$

Теорема доказана.

Замечание о классе единственности А. Н. Тихонова. Существует бесконечно много решений однородной задачи Коши

$$u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,T), \tag{2.4}$$

$$u(x,0) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{2.5}$$

А. Н. Тихонов предложил пример к теореме единственности о том, что условие роста А. Н. Тихонова нельзя заменить на более слабое вида:

$$\int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^N} |u(x,t)| \exp\left[-k|x|^{2+\varepsilon}\right] dx\, dt < +\infty \quad \text{при} \quad \varepsilon > 0. \tag{2.6}$$

Рассмотрим этот пример:

$$u_t = u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad t \in [0,1], \quad u(x,0) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^1. \tag{2.7}$$

Будем искать решения задачи Коши (2.7) в классе функций, удовлетворяющих условию:

$$\int\limits_0^1 \int\limits_{\mathbb{R}^1} |u(x,t)| \exp\left[-k|x|^{2+\varepsilon}\right] dx\, dt < +\infty \quad \text{при} \quad \varepsilon > 0. \tag{2.8}$$

В качестве решения возьмем ряд следующего вида:

$$u(x,t) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{f^{(m)}(t)}{(2m)!} x^{2m}. \tag{2.9}$$

Легко установить, что формально ряд (2.9) является решением уравнения теплопроводности.

Известно, что для любого $\delta > 0$ существуют бесконечно дифференцируемые функции $f(t)$, тождественно не равные нулю, удовлетворяющие условиям:

$$f(t) = 0, \quad \text{если} \quad t < 0 \quad \text{и} \quad t > 1, \quad \left|f^{(m)}(t)\right| \leqslant C^m m^{(1+\delta)m}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Ряд (2.9) и его производные первого порядка по t и второго порядка по x сходятся равномерно в любой ограниченной области переменных (x,t) при условии $\delta < 1$. При этом имеет место следующее неравенство:

$$|u(x,t)| \leqslant C_1 + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{C_2^m x^{2m}}{m^{2m-(1+\delta)m}} \leqslant C_3 \exp\left[C_4 |x|^{2/(1-\delta)}\right].$$

Каждое такое решение, за исключением $u(x,t) \equiv 0$, растет очень «быстро» при $|x| \to +\infty$.

§ 3. Примеры решения задач

Задача 1 [4]. Пусть функция $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D_T \cup B_T) \cap \mathbb{C}(\overline{D}_T)$ при $D_T = \mathbb{R}^N \times (0,T)$ удовлетворяет условию роста (1.3) и является решением задачи Коши:

$$u_t(x,t) = \Delta u(x,t) \quad \text{в} \quad D_T \cup B_T, \quad u(x,0) = u_0(x) \quad \text{в} \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{3.1}$$

причем начальная функция $u_0(x)$ удовлетворяет неравенству

$$|u_0(x) - u_0(y)| \leqslant a|x-y|^\delta, \quad \delta \in (0,1]. \tag{3.2}$$

Тогда

$$|u(x,t) - u(y,t)| \leqslant a|x-y|^\delta \quad \text{при} \quad t \in (0,T). \tag{3.3}$$

Кроме того,

$$|u(x,t) - u(x,s)| \leqslant b|t-s|^{\delta/2} \quad \text{при} \quad t,s \in (0,T), \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{3.4}$$

Решение. Доказательство проведем за несколько шагов.

Шаг 1. Определим функцию:

$$w(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} u(x+y,t) - u(x,t) \tag{3.5}$$

при фиксированном $y \in \mathbb{R}^N$. Эта функция удовлетворяет уравнению, начальному условию и неравенству в начальный момент времени:

$$w_t(x,t) = \Delta w(x,t), \quad w(x,0) = u_0(x+y) - u_0(x), \quad |w(x,0)| \leqslant a|y|^\delta.$$

Введём две функции:

$$v_1(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} w(x,t) - a|y|^\delta, \quad v_2(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} w(x,t) + a|y|^\delta.$$

Эти функции удовлетворяют задачам:

$$v_{kt}(x,t) = \Delta v_k(x,t), \quad k = 1,2,$$

$$v_1(x,0) \leqslant 0, \quad v_2(x,0) \geqslant 0.$$

Применяя слабый принцип максимума (следствие 2), мы получим, что

$$v_1(x,t) \leqslant 0, \quad v_2(x,t) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad D_T.$$

Следовательно,

$$|w(x,t)| \leqslant a|y|^\delta. \tag{3.6}$$

Шаг 2. Теперь докажем неравенство (3.4). Действительно, введём следующую функцию:

$$w(x,t;y,s) \stackrel{\text{def}}{=} u(x,t+s) - u(y,s). \tag{3.7}$$

При $t=0$ по ранее доказанному имеем:

$$|w(x,0;y,s)| = |u(x,s)-u(y,s)| \leqslant a|x-y|^{\delta}. \qquad (3.8)$$

Заметим, что из арифметического неравенства Юнга

$$a_1a_2 \leqslant \frac{1}{q_1}a_1^{q_1} + \frac{1}{q_2}a_2^{q_2}, \quad \frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}=1, \quad a_1,a_2 \geqslant 0$$

следует арифметическое трёхпараметрическое неравенство Юнга:

$$a_1a_2 \leqslant \varepsilon a_1^{q_1} + \mu(\varepsilon)a_2^{q_2}, \quad \mu(\varepsilon) := \frac{1}{q_2(q_1\varepsilon)^{q_2/q_1}}. \qquad (3.9)$$

Применяя неравенство (3.9) при

$$q_1 = \frac{2}{\delta}, \quad q_2 = \frac{2}{2-\delta},$$

мы получим следующее неравенство:

$$a|x-y|^{\delta} \leqslant \varepsilon|x-y|^2 + \mu(\varepsilon), \quad \mu(\varepsilon) = \frac{c_1}{\varepsilon^{\delta/(2-\delta)}}, \quad \delta \in (0,1). \qquad (3.10)$$

Учитывая это неравенство в (3.8), получим следующее неравенство:

$$-\varepsilon|x-y|^2 - \mu(\varepsilon) \leqslant u(x,s)-u(y,s) \leqslant \varepsilon|x-y|^2 + \mu(\varepsilon), \qquad (3.11)$$

причём имеет место двустороннее неравенство:

$$-\varepsilon v(x,0;y) - \mu(\varepsilon) \leqslant w(x,0;y,s) \leqslant \varepsilon v(x,0;y) + \mu(\varepsilon), \qquad (3.12)$$

где функция

$$v(x,t;y) := |x-y|^2 + 2Nt$$

при фиксированном $y \in \mathbb{R}^N$ является решением уравнения теплопроводности.

□ Действительно, имеем:

$$v_t(x,t) - \Delta_x v(x,t) = 2N - \Delta_x|x-y|^2 = 2N - 2N = 0. \quad \boxtimes$$

Поэтому в силу принципа максимума [1)] получим, что справедливо неравенство:

$$-\varepsilon(|x-y|^2+2Nt) - \mu(\varepsilon) \leqslant w(x,t;y,s) \leqslant \\ \leqslant \varepsilon(|x-y|^2+2Nt) + \mu(\varepsilon). \qquad (3.13)$$

[1)] Нужно опять рассмотреть две функции: $w_1 = w - \varepsilon v - \mu(\varepsilon)$ и $w_2 = w + \varepsilon v + \mu(\varepsilon)$, и воспользоваться следствием 2.

Шаг 3. Положим в этом неравенстве $x = y$ и получим следующие неравенства:

$$-\varepsilon 2Nt - \mu(\varepsilon) \leqslant u(x, t+s) - u(x, s) \leqslant \varepsilon 2Nt + \mu(\varepsilon). \tag{3.14}$$

Осталось выбрать оптимальное $\varepsilon > 0$. Возьмем

$$\varepsilon = \frac{1}{t^{\alpha}}.$$

Рассмотрим выражение

$$2Nt^{1-\alpha} + c_1 t^{\alpha\delta/(2-\delta)}, \tag{3.15}$$

в котором мы положим

$$1 - \alpha = \alpha \frac{\delta}{2-\delta} \Rightarrow \alpha = \frac{2-\delta}{2}.$$

В результате выражение (3.15) примет следующий вид:

$$(2N + c_1) t^{\delta/2}. \tag{3.16}$$

Итак, неравенства (3.14) примут следующий вид:

$$|u(x, t+s) - u(x, s)| \leqslant b t^{\delta/2}, \quad b = 2N + c_1. \tag{3.17}$$

Замечание. Комбинируя неравенства (3.3) и (3.4), приходим к следующему неравенству:

$$|u(x, t) - u(y, s)| \leqslant c_2 \left(|x-y|^{\delta} + |t-s|^{\delta/2} \right). \tag{3.18}$$

Итоговое неравенство (3.18) следует только из условия (3.2) на начальную функцию $u_0(x)$ и *принципа максимума*!

Задача 2. [2] Пусть $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(\mathbb{R}^1 \times (0,T)) \cap \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^1 \times [0,T])$ — неотрицательное ограниченное решение уравнения теплопроводности

$$u_t = \Delta u \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^3 \times (0, T), \tag{3.19}$$

причем

$$u(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in (0,1) \times (0,T). \tag{3.20}$$

Доказать, что $u(x,t) = 0$ в слое $\mathbb{R}^3 \times (0,T)$.

Эта задача предлагается читателю для самостоятельного решения.

§ 4. Литературные указания

Материал для лекции взят из работ [2] [3], [13], [15].

Тематическая лекция II

ТЕОРИЯ ФУНКЦИИ ГРИНА И ТЕПЛОВЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Лекция 4

ФОРМУЛЫ ГРИНА И ПОТЕНЦИАЛЫ

В этой лекции получены важные формулы Грина, которые также называют второй и третьей формулами Грина. С учётом вида третьей формулы Грина определен объёмный тепловой потенциал, а также тепловые потенциалы простого и двойного слоя и, наконец, тепловой поверхностный потенциал по нижней крышке.

§ 1. Функциональные пространства и теоремы Гаусса–Остроградского–Грина

С целью получения первой, второй и третьей формул Грина определим некоторые функциональные пространства. Пусть

$$D_T \stackrel{\text{def}}{=} \{(x,t): \ x \in \Omega, \ 0 < t < T\} \subset \mathbb{R}^{N+1}, \quad x = (x_1, \ldots, x_N),$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — это ограниченная область с достаточно гладкой границей Γ,

$$S_T \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma \times [0,T],$$

$$B_T \stackrel{\text{def}}{=} \{(x,t): \ x \in \Omega, \ t = T\}, \quad B \stackrel{\text{def}}{=} \{(x,t): \ x \in \Omega, \ t = 0\}.$$

Тогда граница ∂D_T области $D_T \subset \mathbb{R}^{N+1}$ представима в виде объединения непересекающихся множеств:

$$\partial D_T = S_T \cup B \cup B_T,$$

причем $\partial' D_T = B \cup S_T$ — параболическая часть границы ∂D_T.

Определение 1. *Символом $\mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D_T \cup B_T)$ обозначим класс таких функций, что*

$$f(x,t), \ D^\alpha_x f(x,t), \ D_t f(x,t) \in \mathbb{C}(D_T \cup B_T) \tag{1.1}$$

для любого $\alpha \in \mathbb{Z}^N_+$ такого, что $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_N \leqslant 2$, где частная производная по времени $D_t f(x,t)$ в точках верхней крышки B_T понимается в одностороннем смысле, т.е. снизу при $t \uparrow T$.

Определение 2. *Символом $\mathbb{C}_w(\overline{D}_T)$ обозначим класс таких функций $f(x,t)$, что*

$$f(x,t) \in \mathbb{C}(D_T \cup B_T), \tag{1.2}$$

где функцию $f(x,t)$ можно по непрерывности продолжить из $D_T \cup \cup B_T$ вплоть до параболической границы $\partial' D_T = S_T \cup B$.

Определение 3. *Символом $\mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(\overline{D}_T)$ обозначим класс таких функций, что*

$$f(x,t),\ D^\alpha_x f(x,t),\ D^\beta_t f(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D}_T) \tag{1.3}$$

для любого $\alpha \in \mathbb{Z}^N_+$ такого, что $|\alpha| \leqslant 2$, где производные функции $f(x,t)$ в точках границы ∂D_T понимаются в смысле пределов разностных отношений на $\overline{D}_T$.

Замечание. Аналогичным образом вводятся пространства $\mathbb{C}^{(n,0)}_{x,t}(D_T)$, $\mathbb{C}^{(n,0)}_{x,t}(D_T \cup B_T)$ и $\mathbb{C}^{(n,0)}_{x,t}(\overline{D}_T)$ при $n = 1$ и $n = 2$.

Определение 4. *Символом $\mathbb{C}^{(1,0)}_{x,t}(\mathbf{n}; \overline{D}_T)$ обозначим класс таких функций $f(x,t)$, что*

$$f(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D}_T), \quad D_x f(x,t) \in \mathbb{C}_b(D_T \cup B_T \cup B), \tag{1.4}$$

где функция

$$(\mathbf{n}_x, D_x)\, f(\xi,\tau) \tag{1.5}$$

допускает непрерывное продолжение вплоть до боковой границы S_T по части $l \cap (D_T \cup B_T \cup B) \ni (\xi,\tau)$ прямой $l = \{(x,t) + s(\mathbf{n}_x, 0), s \in \mathbb{R}\}$ для любой точки $(x,t) \in S_T$.

Замечание. Если $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ имеет границу $\Gamma \in \mathbb{C}^{1,\alpha}$ при $\alpha \in (0,1]$ и $\{O, \mathbf{E}\}$, $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_N, \mathbf{e}_t)$ — некоторая декартова прямоугольная система координат в пространстве $\mathbb{R}^{N+1}$, то вектор нормали $\mathbf{n}_{x,t}$ в точке $(x,t) \in S_T$ имеет следующий вид: $\mathbf{n}_{x,t} = (\mathbf{n}_x, 0)$, где $\mathbf{n}_x$ — вектор нормали к точке $x \in \Gamma$ в $\mathbb{R}^N$. Поэтому имеет место равенство:

$$\frac{\partial f(\xi,\tau)}{\partial \mathbf{n}_{x,t}} = (\mathbf{n}_{x,t}, D_{x,t}) f(\xi,\tau) = (\mathbf{n}_x, D_x) f(\xi,\tau) = \frac{\partial f(\xi,\tau)}{\partial \mathbf{n}_x}, \tag{1.6}$$

где $D_{x,t} = (D_x, D_t)$. Во всех последующих равенствах в случае цилиндрической области D_T будем использовать итоговое равенство, следующее из (1.6).

Теорема 1. *Пусть $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(1,0)}_{x,t}(D_T \cup B_T) \cap \mathbb{C}_w(\overline{D}_T)$. Тогда*

$$\int\limits_{D_T} u_{\xi_i}(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau = \int\limits_{S_T} \overline{u}(\xi,\tau) \cos(\mathbf{n}_\xi, \mathbf{e}_i)\, dS_\xi\, d\tau, \quad i = \overline{1,N}, \tag{1.7}$$

где $\overline{u}(\xi,\tau)$ — непрерывное продолжение функции $u(\xi,\tau)$ из множества $D_T \cup B_T$ вплоть до параболической границы $S_T \cup B$, $(\mathbf{n}_\xi, 0)$ — внешняя нормаль к точке (ξ,τ) боковой границе $S_T = \Gamma \times [0,T]$ по отношению к цилиндрической области $D_T = \Omega \times (0,T)$, где интеграл в левой части (1.7) понимается в несобственном смысле.

Доказательство. По области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ построим следующую «эквивадистантную» область Ω_ε при достаточно малом $\varepsilon > 0$:

$$\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega : \operatorname{distance}(x, \Gamma) > \varepsilon\}. \tag{1.8}$$

Рассмотрим область $D_{T,\varepsilon} = \Omega_\varepsilon \times (\varepsilon, T)$. Заметим, что $u(x,t) \in \in \mathbb{C}^{(1,0)}_{x,t}(\overline{D}_{T,\varepsilon})$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$ и поэтому справедливо равенство:

$$\int\limits_{D_{T,\varepsilon}} u_{\xi_i}(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau = \int\limits_{S_{T,\varepsilon}} u(\xi,\tau)\cos(\mathbf{n}_\xi, \mathbf{e}_i)\, dS_\xi\, d\tau, \quad i = \overline{1,N}, \tag{1.9}$$

где $S_{T,\varepsilon} = \partial\Omega_\varepsilon \times [\varepsilon, T]$, причем $D_{T,\varepsilon} \to D$ и $S_{T,\varepsilon} \to S_T$ при $\varepsilon \to +0$ и, кроме того, поскольку $u(\xi,\tau) \in \mathbb{C}_w(\overline{D}_T)$, то

$$\int\limits_{S_{T,\varepsilon}} u(\xi,\tau)\cos(\mathbf{n}_\xi, \mathbf{e}_i)\, dS_\xi\, d\tau \to \int\limits_{S_T} \overline{u}(\xi,\tau)\cos(\mathbf{n}_\xi, \mathbf{e}_i)\, dS_\xi\, d\tau \quad \text{при} \quad \varepsilon \to +0.$$

Тогда в пределе при $\varepsilon \to +0$ из (1.9) получим равенство (1.7).

Теорема доказана.

Справедлива следующая формула интегрирования по частям:

Теорема 2. *Пусть* $u(x,t), v(x,t) \in \mathbb{C}^{(1,0)}_{x,t}(\overline{D}_T)$. *Тогда*

$$\int\limits_{D_T} u_{\xi_i}(\xi,\tau)v(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau = -\int\limits_{D_T} u(\xi,\tau)v_{\xi_i}(\xi,\tau)\, d\xi, d\tau + \\ + \int\limits_{S_T} u(\xi,\tau)v(\xi,\tau)\cos(\mathbf{n}_\xi, \mathbf{e}_i)\, dS_\xi\, d\tau \quad \textit{при} \quad i = \overline{1,N}. \tag{1.10}$$

Доказательство.

Следует применить теорему 1 к функции $u(\xi,\tau)v(\xi,\tau)$.

Теорема доказана.

Наконец, справедливы следующие утверждения: [1])

Теорема 3. *Если* $u(\xi,\tau), v(\xi,\tau) \in \mathbb{C}^{(2,0)}_{x,t}(D_T \cup B_T) \cap \mathbb{C}^{(1,0)}_{x,t}(\overline{D}_T)$, *то имеет место первая формула Грина*:

$$\int\limits_{D_T} (D_\xi u(\xi,\tau), D_\xi v(\xi,\tau))\, d\xi\, d\tau = -\int\limits_{D_T} u(\xi,\tau)\Delta_\xi v(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau +$$

[1]) Здесь и далее мы используем обозначение $D_x u = (\partial_{x_1} u, ..., \partial_{x_N} u)$. Обычно в курсе математического анализа используется более привычное обозначение ∇_x.

$$+\int\limits_{S_T} \frac{\partial v(\xi,\tau)}{\partial \mathbf{n}_\xi} u(\xi,\tau)\, dS_\xi\, d\tau, \quad (1.11)$$

если $u(\xi,\tau) \in \mathbb{C}^{(2,0)}_{x,t}(D_T \cup B_T) \cap \mathbb{C}^{(1,0)}_{x,t}(\mathbf{n}; \overline{D}_T)$, *то имеет место следующая формула*:

$$\int\limits_{D_T} \Delta_\xi u(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau = \int\limits_{S_T} \overline{\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial \mathbf{n}_\xi}}\, dS_\xi\, d\tau, \quad (1.12)$$

если $u(\xi,\tau), v(\xi,\tau) \in \mathbb{C}^{(2,0)}_{x,t}(D_T \cup B_T) \cap \mathbb{C}^{(1,0)}_{x,t}(\mathbf{n}; \overline{D}_T)$, *то справедлива вторая формула Грина:*

$$\int\limits_{D_T} [u(\xi,\tau)\Delta_\xi v(\xi,\tau) - v(\xi,\tau)\Delta_\xi u(\xi,\tau)]\, d\xi\, d\tau =$$

$$= \int\limits_{S_T} u(\xi,\tau)\overline{\frac{\partial v(\xi,\tau)}{\partial \mathbf{n}_\xi}}\, dS_\xi\, d\tau - \int\limits_{S_T} v(\xi,\tau)\overline{\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial \mathbf{n}_\xi}}\, dS_\xi\, d\tau, \quad (1.13)$$

где $(\mathbf{n}_\xi, 0)$ — *это внешняя нормаль в точке* $(\xi,\tau) \in S_T$ *по отношению к области* D_T; *символами*

$$\overline{\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial \mathbf{n}_\xi}} \quad \text{и} \quad \overline{\frac{\partial v(\xi,\tau)}{\partial \mathbf{n}_\xi}}$$

обозначены непрерывные продолжения функций

$$(\mathbf{n}_\xi, D_\xi)u(y,s) \quad \text{и} \quad (\mathbf{n}_\xi, D_\xi)v(y,s)$$

из $D_T \cup B_T \cup B$ *по прямой* $l = \{(\xi,\tau) + \sigma(\mathbf{n}_\xi, 0), \sigma \in \mathbb{R}\}$ *вплоть до точки* (ξ,τ) *боковой части границы* S_T *цилиндрической области* D_T, *где соответствующие объемные интегралы в левых частях понимаются в несобственном смысле.*

Доказательство.

Шаг 1. Пусть $u(\xi,\tau), v(\xi,\tau) \in \mathbb{C}^{(2,0)}_{x,t}(D_T \cup B_T) \cap \mathbb{C}^{(1,0)}_{x,t}(\overline{D}_T)$. Для того, чтобы получить равенство (1.11) нужно применить равенство (1.10) в области $D_{T,\varepsilon} = \Omega_\varepsilon \times (\varepsilon, T)$, в котором вместо функции $v(\xi,\tau)$ нужно взять функцию $v_{\xi_i}(\xi,\tau)$, а затем просуммировать по $i = \overline{1,N}$

$$\int\limits_{D_{T,\varepsilon}} (D_\xi u(\xi,\tau), D_\xi v(\xi,\tau))\, d\xi\, d\tau =$$

$$= -\int\limits_{D_{T,\varepsilon}} u(\xi,\tau)\Delta_\xi v(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau + \int\limits_{S_{T,\varepsilon}} \frac{\partial v(\xi,\tau)}{\partial \mathbf{n}_\xi} u(\xi,\tau)\, dS_\xi\, d\tau. \quad (1.14)$$

В данном случае как и при доказательстве теоремы 2 можно перейти к пределу при $\varepsilon \to +0$ и получить равенство (1.11), поскольку $u(\xi,\tau), v(\xi,\tau) \in \mathbb{C}^{(1,0)}_{x,t}(\overline{D}_T)$ и поэтому справедливы предельные свойства:

$$\int\limits_{D_{T,\varepsilon}} (D_\xi u(\xi,\tau), D_\xi v(\xi,\tau))\, d\xi\, d\tau \to \int\limits_{D_T} (D_\xi u(\xi,\tau), D_{\xi,\tau} v(\xi,\tau))\, d\xi\, d\tau, \tag{1.15}$$

$$\int\limits_{S_{T,\varepsilon}} \frac{\partial v(\xi,\tau)}{\partial \mathbf{n}_\xi} u(\xi,\tau)\, dS_\xi\, d\tau \to \int\limits_{S_T} \overline{\frac{\partial v(\xi,\tau)}{\partial \mathbf{n}_\xi}} u(\xi,\tau)\, dS_\xi\, d\tau \tag{1.16}$$

при $\varepsilon \to +0$.

Шаг 2. Применив формулу (1.7) к функции $u_{\xi_i\xi_i}$ вместо функции u_{ξ_i}, получим следующее равенство:

$$\int\limits_{D_{T,\varepsilon}} u_{\xi_i\xi_i}(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau = \int\limits_{S_{T,\varepsilon}} u_{\xi_i}(\xi,\tau) \cos(\mathbf{n}_\xi, \mathbf{e}_i)\, dS_\xi\, d\tau.$$

Суммируя по $i = \overline{1,N}$, получим равенство (1.12), поскольку

$$\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial \mathbf{n}_\xi} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial \xi_i} \cos(\mathbf{n}_\xi, \mathbf{e}_i).$$

Следовательно, в классе функций $u(\xi,\tau) \in \mathbb{C}^{(2,0)}_{x,t}(D_T \cup B_T) \cap$ $\cap\, \mathbb{C}^{(1,0)}_{x,t}(\mathbf{n}; \overline{D}_T)$ можно перейти к пределу при $\varepsilon \to +0$ и получить формулу (1.12).

Шаг 3. Для того, чтобы получить равенство (1.13) нужно заметить, что в силу (1.11) имеют место следующие два равенства:

$$\int\limits_{D_{T,\varepsilon}} (D_\xi u(\xi,\tau), D_\xi v(\xi,\tau))\, d\xi\, d\tau =$$
$$= -\int\limits_{D_{T,\varepsilon}} u(\xi,\tau)\Delta_\xi v(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau + \int\limits_{S_{T,\varepsilon}} \frac{\partial v(\xi,\tau)}{\partial \mathbf{n}_\xi} u(\xi,\tau)\, dS_\xi\, d\tau, \tag{1.17}$$

$$\int\limits_{D_{T,\varepsilon}} (D_\xi v(\xi,\tau), D_\xi u(\xi,\tau))\, d\xi\, d\tau =$$
$$= -\int\limits_{D_{T,\varepsilon}} v(\xi,\tau)\Delta_\xi u(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau + \int\limits_{S_{T,\varepsilon}} \frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial \mathbf{n}_\xi} v(\xi,\tau)\, dS_\xi\, d\tau. \tag{1.18}$$

Из равенств (1.17) и (1.18) следует одно равенство:

$$\int\limits_{D_{T,\varepsilon}} [u(\xi,\tau)\Delta_\xi v(\xi,\tau) - v(\xi,\tau)\Delta_\xi u(\xi,\tau)]\, d\xi\, d\tau =$$

$$= \int\limits_{S_{T,\varepsilon}} \left[u(\xi,\tau)\frac{\partial v(\xi,\tau)}{\partial \mathbf{n}_\xi} - v(\xi,\tau)\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial \mathbf{n}_\xi}\right] dS_\xi\, d\tau =$$

$$= \int\limits_{S_{T,\varepsilon}} u(\xi,\tau)\frac{\partial v(\xi,\tau)}{\partial \mathbf{n}_\xi}\, dS_\xi\, d\tau - \int\limits_{S_{T,\varepsilon}} v(\xi,\tau)\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial \mathbf{n}_\xi}\, dS_\xi\, d\tau, \quad (1.19)$$

из которого в классе функций $u(\xi,\tau), v(\xi,\tau) \in \mathbb{C}^{(2,0)}_{x,t}(D_T \cup B_T) \cap \cap\, \mathbb{C}^{(1,0)}_{x,t}(\mathbf{n};\overline{D}_T)$ в пределе при $\varepsilon \to +0$ получим искомое равенство (1.13).

Теорема доказана.

Замечание. Если $u(\xi,\tau), v(\xi,\tau) \in \mathbb{C}^{(2,0)}_{x,t}(D_T \cup B_T) \cap \mathbb{C}^{(1,0)}_{x,t}(\overline{D}_T)$, то справедливо следующее более сильное равенство, чем (1.13):

$$\int\limits_{D_T} u(\xi,\tau)\Delta_\xi v(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau - \int\limits_{D_T} v(\xi,\tau)\Delta_\xi u(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau =$$

$$= \int\limits_{S_T} u(\xi,\tau)\frac{\partial v(\xi,\tau)}{\partial \mathbf{n}_\xi}\, dS_\xi\, d\tau - \int\limits_{S_T} v(\xi,\tau)\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial \mathbf{n}_\xi}\, dS_{\xi,\tau}, \quad (1.20)$$

которое в указанном классе функций является следствием равенства (1.11).

§ 2. Вторая формула Грина

Введём следующие обозначения:

$$L_{x,t}u(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_x u, \quad L^*_{x,t}v(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{\partial v}{\partial t} - \Delta_x v.$$

Оператор $L_{x,t}$ — это оператор теплопроводности, а оператор $L^*_{x,t}$ — это формально сопряжённый к оператору теплопроводности $L_{x,t}$.

Для вывода первой формулы Грина возьмём две произвольные функции:

$$u(x,t),\ v(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D_T \cup B_T) \cap \mathbb{C}^{(1,0)}_{x,t}(\mathbf{n};\overline{D}_T).$$

Для любой точки $(\xi,\tau) \in D_T$ справедливо следующее поточечное равенство:

$$
\begin{aligned}
v(\xi,\tau)L_{\xi,\tau}u(\xi,\tau) = v(\xi,\tau)\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial\tau} - v(\xi,\tau)\Delta_\xi u(\xi,\tau) = \\
= \frac{\partial}{\partial\tau}(v(\xi,\tau)u(\xi,\tau)) - u(\xi,\tau)\frac{\partial v(\xi,\tau)}{\partial\tau} - \\
- \operatorname{div}_\xi(v(\xi,\tau)\nabla_\xi u(\xi,\tau)) + (\nabla_\xi v(\xi,\tau), \nabla_\xi u(\xi,\tau)). \quad (2.1)
\end{aligned}
$$

Введем в рассмотрение следующую область:

$$
D_{T,\varepsilon} := \Omega_\varepsilon \times (\varepsilon, T)
$$

при достаточно малом $\varepsilon > 0$, где «эквидистантная» область Ω_ε строится по $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ способом, указанным в предыдущем параграфе. Будем использовать следующие обозначения:

$$
S_{T,\varepsilon} = \partial\Omega_\varepsilon \times [\varepsilon, T], \quad B_\varepsilon := \Omega_\varepsilon \times \{t = \varepsilon\}, \quad B_{T,\varepsilon} := \Omega_\varepsilon \times (t = T).
$$

Проинтегрируем обе части равенства (2.1) по $(\xi,\tau) \in D_{T,\varepsilon}$. Тогда получим равенство:

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{D_{T,\varepsilon}} v(\xi,\tau)L_{\xi,\tau}u(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau = \\
= \int\limits_{D_{T,\varepsilon}} \left((\nabla_\xi v(\xi,\tau), \nabla_\xi u(\xi,\tau)) - u(\xi,\tau)\frac{\partial v(\xi,\tau)}{\partial\tau}\right) d\xi\,d\tau - \\
- \int\limits_{S_{T,\varepsilon}} v(\xi,\tau)\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial \mathbf{n}_\xi}\,dS_\xi\,d\tau + \int\limits_{B_{T,\varepsilon}} v(\xi,t)u(\xi,t)\,d\xi - \\
- \int\limits_{B_\varepsilon} v(\xi,t)u(\xi,t)\,d\xi, \quad (2.2)
\end{aligned}
$$

где использована формула:

$$
\int\limits_{D_{T,\varepsilon}} \operatorname{div}_\xi(v(\xi,\tau)\nabla_\xi u(\xi,\tau))\,d\xi\,d\tau = \int\limits_{S_{T,\varepsilon}} v(\xi,\tau)\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial \mathbf{n}_\xi}\,dS_\xi\,d\tau,
$$

где $\mathbf{n}_{\xi,\tau} = (\mathbf{n}_\xi, 0) = (n_{\xi_1}, \ldots, n_{\xi_N}, 0)$ — это вектор внешней нормали к боковой границе $S_{T,\varepsilon}$ цилиндрической области $D_{T,\varepsilon}$, dS_ξ — это элемент площади поверхности $\Gamma_\varepsilon = \partial\Omega_\varepsilon$ в точке $\xi \in \Gamma_\varepsilon$. Заметим, что

$$
\int\limits_{B_{T,\varepsilon}} v(\xi,t)u(\xi,t)\,d\xi = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} v(\xi,T)u(\xi,T)\,d\xi,
$$

$$
\int\limits_{B_\varepsilon} v(\xi,t)u(\xi,t)\,d\xi = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} v(\xi,\varepsilon)u(\xi,\varepsilon)\,d\xi.
$$

Кроме того, справедливо следующее равенство:

$$-\int\limits_{D_{T,\varepsilon}} u(\xi,\tau)\Delta_\xi v(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau =$$
$$= \int\limits_{D_{T,\varepsilon}} (\nabla_\xi u(\xi,\tau), \nabla_\xi v(\xi,\tau))\,d\xi\,d\tau - \int\limits_{S_{T,\varepsilon}} u(\xi,\tau)\frac{\partial v(\xi,\tau)}{\partial \mathbf{n}_\xi}\,dS_\xi\,d\tau.$$

Откуда следует, что

$$\int\limits_{D_{T,\varepsilon}} (\nabla_\xi u(\xi,\tau), \nabla_\xi v(\xi,\tau))\,d\xi\,d\tau =$$
$$= -\int\limits_{D_{T,\varepsilon}} u(\xi,\tau)\Delta_\xi v(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau + \int\limits_{S_{T,\varepsilon}} u(\xi,\tau)\frac{\partial v(\xi,\tau)}{\partial \mathbf{n}_\xi}\,dS_\xi\,d\tau. \quad (2.3)$$

Подставляя выражение (2.3) в равенство (2.2), получим формулу:

$$\int\limits_{D_{T,\varepsilon}} v(\xi,\tau)L_{\xi,\tau}u(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau =$$
$$= -\int\limits_{D_{T,\varepsilon}} \left(u(\xi,\tau)\Delta_\xi v(\xi,\tau) + u(\xi,\tau)\frac{\partial v(\xi,\tau)}{\partial \tau}\right)d\xi\,d\tau +$$
$$+ \int\limits_{S_{T,\varepsilon}} \left(u(\xi,\tau)\frac{\partial v(\xi,\tau)}{\partial \mathbf{n}_\xi} - v(\xi,\tau)\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial \mathbf{n}_\xi}\right)dS_\xi\,d\tau +$$
$$+ \int\limits_{\Omega_\varepsilon} v(\xi,T)u(\xi,T)\,d\xi - \int\limits_{\Omega_\varepsilon} v(\xi,\varepsilon)u(\xi,\varepsilon)\,d\xi. \quad (2.4)$$

С учётом обозначений из равенства (2.4), приходим к равенству:

$$\int\limits_{D_{T,\varepsilon}} \big(v(\xi,\tau)L_{\xi,\tau}u(\xi,\tau) - u(\xi,\tau)L^*_{\xi,\tau}v(\xi,\tau)\big)\,d\xi\,d\tau =$$
$$= \int\limits_{S_{T,\varepsilon}} u(\xi,\tau)\frac{\partial v(\xi,\tau)}{\partial \mathbf{n}_\xi}\,dS_\xi\,d\tau - \int\limits_{S_{T,\varepsilon}} v(\xi,\tau)\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial \mathbf{n}_\xi}\,dS_\xi\,d\tau +$$
$$+ \int\limits_{\Omega} v(\xi,T)u(\xi,T)\,d\xi - \int\limits_{\Omega} v(\xi,\varepsilon)u(\xi,\varepsilon)\,d\xi. \quad (2.5)$$

В пределе при $\varepsilon \to +0$ в рассматриваемом классе функций из равенства (2.5) получим *вторую формулу Грина*:

$$\int\limits_{D_T} \bigl(v(\xi,\tau)L_{\xi,\tau}u(\xi,\tau) - u(\xi,\tau)L^*_{\xi,\tau}v(\xi,\tau)\bigr)\,d\xi\,d\tau =$$

$$= \int\limits_{S_T} u(\xi,\tau)\overline{\frac{\partial v(\xi,\tau)}{\partial \mathbf{n}_\xi}}\,dS_\xi\,d\tau - \int\limits_{S_T} v(\xi,\tau)\overline{\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial \mathbf{n}_\xi}}\,dS_\xi\,d\tau +$$

$$+ \int\limits_{\Omega} v(\xi,T)u(\xi,T)\,d\xi - \int\limits_{\Omega} v(\xi,0)u(\xi,0)\,d\xi, \quad (2.6)$$

где символами с «чертой» обозначены соответствующие продолжения нормальных производных функций вплоть до боковой границы S_T цилиндрической области D_T.

§ 3. Третья формула Грина

Введём следующую функцию:

$$f(x,t) := L_{x,t}u(x,t), \quad (x,t) \in D_T \cup B_T = \Omega \times (0,T]. \qquad (3.1)$$

В классе функций $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D_T \cup B_T) \cap \mathbb{C}^{(1,0)}_{x,t}(\mathbf{n};\overline{D}_T)$ имеем: $f(x,t) \in \mathbb{C}(D_T \cup B_T)$.

Пусть точка $(x,t) \in D_T$ — произвольная фиксированная. Заметим, что следующая функция

$$v(x,\xi,t,\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau) = \frac{\vartheta(t-\tau)}{\bigl(4\pi(t-\tau)\bigr)^{N/2}} \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right)$$

удовлетворяет следующим свойствам:

$$L_{x,t}v(x,\xi,t,\tau) = 0, \quad L^*_{\xi,\tau}v(x,\xi,t,\tau) = 0 \quad \text{при} \quad t \neq \tau.$$

Применим вторую формулу Грина в цилиндрической области $D_{t-\varepsilon} = \Omega \times (0,t-\varepsilon)$ при $0 < \varepsilon < t$ и к функциям $u(\xi,\tau)$, $v(x,\xi,t,\tau)$. В результате получим равенство:

$$\int\limits_{D_{t-\varepsilon}} \bigl(v(x,\xi,t,\tau)L_{\xi,\tau}u(\xi,\tau) - u(\xi,\tau)L^*_{\xi,\tau}v(x,\xi,t,\tau)\bigr)\,d\xi\,d\tau =$$

$$= \int\limits_{S_{t-\varepsilon}} \left(u(\xi,\tau)\frac{\partial v(x,\xi,t,\tau)}{\partial \mathbf{n}_\xi} - v(x,\xi,t,\tau)\overline{\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial \mathbf{n}_\xi}}\right)dS_\xi\,d\tau +$$

$$+ \int\limits_{\Omega} v(x,\xi,t,t-\varepsilon)u(\xi,t-\varepsilon)\,d\xi - \int\limits_{\Omega} v(x,\xi,t,0)u(\xi,0)\,d\xi, \quad (3.2)$$

где $S_{t-\varepsilon} = \Gamma \times [0, t-\varepsilon]$. Заметим, что

$$L^*_{\xi,\tau} v(\xi,\tau) = 0 \quad \text{в} \quad (\xi,\tau) \in D_{t-\varepsilon}.$$

По аналогии с тем, как это было сделано в первой лекции можно доказать, что

$$\int\limits_{\Omega} v(x,\xi,t,t-\varepsilon)u(\xi,t-\varepsilon)\,d\xi = \int\limits_{\Omega} \mathcal{E}(x-\xi,\varepsilon)u(\xi,t-\varepsilon)\,d\xi \to u(x,t) \quad (3.3)$$

при $\varepsilon \to +0$.

$\Box$ Действительно, функция $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D_T \cup B_T) \cap \mathbb{C}(\overline{D}_T)$. Пусть $x \in \Omega$. Тогда найдётся такое $r > 0$, что $O(x,r) \subset \Omega$. Справедливо следующее равенство:

$$\int\limits_{\Omega} \mathcal{E}(x-\xi,\varepsilon)u(\xi,t-\varepsilon)\,d\xi =$$
$$= \int\limits_{O(x,r)} \mathcal{E}(x-\xi,\varepsilon)u(\xi,t-\varepsilon)\,d\xi + \int\limits_{\Omega\setminus O(x,r)} \mathcal{E}(x-\xi,\varepsilon)u(\xi,t-\varepsilon)\,d\xi =$$
$$= I_1(\varepsilon) + I_2(\varepsilon).$$

С одной стороны, при фиксированном $x \in \Omega$ интеграл $I_2(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to +0$. Это следствие того, что при $|x-\xi| \geqslant r > 0$ имеет место предельный переход:

$$\mathcal{E}(x-\xi,\varepsilon) = \frac{1}{(4\pi\varepsilon)^{N/2}} \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4\varepsilon}\right) \to +0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to +0$$

и в данном случае можно воспользоваться теоремой Лебега о предельном переходе к пределу под знаком интеграла Лебега. С другой стороны, имеем:

$$I_1(\varepsilon) = \int\limits_{O(x,r)} \mathcal{E}(x-\xi,\varepsilon)[u(\xi,t-\varepsilon) - u(x,t-\varepsilon)\,d\xi +$$
$$+ [u(x,t-\varepsilon) - u(x,t)] \int\limits_{O(x,r)} \mathcal{E}(x-\xi,\varepsilon)\,d\xi -$$
$$- u(x,t) \int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus O(x,r)} \mathcal{E}(x-\xi,\varepsilon)\,d\xi + u(x,t) =$$
$$= I_{11}(\varepsilon) + I_{12}(\varepsilon) + I_{13}(\varepsilon) + u(x,t).$$

Для любого $\gamma > 0$ найдется такое достаточно малое $\varepsilon > 0$, что имеют место следующие оценки:

$$|I_{11}| \leqslant \sup_{\xi \in O(x,r)} |u(\xi, t-\varepsilon) - u(x, t-\varepsilon)| < \frac{\gamma}{3}, \tag{3.4}$$

$$|I_{12}| \leqslant |u(x, t-\varepsilon) - u(x,t)| < \frac{\gamma}{3}. \tag{3.5}$$

Для оценки интеграла I_{13} нужно рассмотреть следующий интеграл:

$$J := \int\limits_{O(x,r)} \mathcal{E}(x-\xi, \varepsilon)\, d\xi = \frac{\omega_N}{(4\pi\varepsilon)^{N/2}} \int\limits_0^r \rho^{N-1} \exp\left(-\frac{\rho^2}{4\varepsilon}\right) d\rho =$$
$$= \frac{2^N \omega_N}{(4\pi)^{N/2}} \int\limits_0^{r/(2\sqrt{\varepsilon})} \rho^{N-1} \exp(-\rho^2)\, d\rho \to$$
$$\to \frac{2^N \omega_N}{(4\pi)^{N/2}} \int\limits_0^{+\infty} \rho^{N-1} \exp(-\rho^2)\, d\rho = 1 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to +0.$$

Итак, для любого $\gamma > 0$ найдутся такие достаточно малые $\varepsilon > 0$ и $r >$ > 0, что имеет место оценка:

$$|I_{13}| < \frac{\gamma}{3}. \tag{3.6}$$

Стало быть,

$$\left| \int\limits_{\Omega} \mathcal{E}(x-\xi, \varepsilon) u(\xi, t-\varepsilon)\, d\xi - u(x,t) \right| < 2\gamma. \quad \boxtimes$$

Таким образом, в пределе при $\varepsilon \to +0$ из равенств (3.2) следует третья формула Грина:

$$u(x,t) = \int\limits_{D_t} \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau) L_{\xi,\tau} u(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau +$$
$$+ \int\limits_{S_t} \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau) \overline{\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial \mathbf{n}_\xi}}\, dS_\xi\, d\tau - \int\limits_{S_t} u(\xi,\tau) \frac{\partial \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau)}{\partial \mathbf{n}_\xi}\, dS_\xi\, d\tau +$$
$$+ \int\limits_{\Omega} u(\xi, 0) \mathcal{E}(x-\xi, t)\, d\xi. \tag{3.7}$$

Замечание. Интеграл

$$\int\limits_{D_t} \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau) f(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau = \int\limits_0^t \int\limits_\Omega \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau) f(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau$$

называется тепловым объёмным потенциалом, интегралы вида

$$\int\limits_{S_t} \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau)\rho(\xi,\tau)\, dS_\xi\, d\tau = \int\limits_0^t \int\limits_\Gamma \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau)\rho(\xi,\tau)\, ds_\xi\, d\tau,$$

$$\int\limits_{S_t} \frac{\partial \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau)}{\partial \mathbf{n}_\xi}\rho(\xi,\tau)\, dS_\xi\, d\tau = \int\limits_0^t \int\limits_\Gamma \frac{\partial \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau)}{\partial \mathbf{n}_\xi}\rho(\xi,\tau)\, dS_\xi\, d\tau$$

называются тепловыми потенциалами простого и двойного слоя соответственно. Наконец, интеграл

$$\int\limits_\Omega u(\xi,0)\mathcal{E}(x-\xi,t)\, d\xi$$

называется тепловым поверхностным потенциалом по нижней крышке.

Таким образом, мы доказали следующее утверждение:

Теорема 4. *Для произвольной функции* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D_T \cup B_T) \cap \cap\, \mathbb{C}^{(1,0)}_{x,t}(\mathbf{n}; \overline{D}_T)$ *справедливо равенство* (3.7).

§ 4. Функция Грина первой смешанной задачи

Пусть $0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T$. Введем следующие обозначения:

$$D_t = \Omega \times (0,t), \quad S_t = \Gamma \times [0,t],$$

$$B = \Omega \times \{\tau = 0\}, \quad B_t = \Omega \times \{\tau = t\}.$$

Пусть $(x,t) \in D_T$ и функция $\varphi^{x,t}(\xi,\tau) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{\xi,\tau}(D_T \cup B_T) \cap \mathbb{C}^{(1,0)}_{\xi,\tau}(\mathbf{n}; \overline{D}_T)$ — решение следующей задачи:

$$L^*_{\xi,\tau}\varphi^{x,t}(\xi,\tau) = 0 \quad \text{для всех} \quad (\xi,\tau) \in D_t \cup B_t, \tag{4.1}$$

$$\varphi^{x,t}(\xi,\tau) = \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau) \quad \text{для} \quad (\xi,\tau) \in S_t, \tag{4.2}$$

$$\varphi^{x,t}(\xi,\tau) = 0 \quad \text{для} \quad (\xi,\tau) \in B_t, \tag{4.3}$$

$$L^*_{\xi,\tau} := -\frac{\partial}{\partial\tau} - \Delta_\xi.$$

Замечание. Заметим, что для функции $\varphi^{x,t}(\xi,\tau)$ ставится граничное условие не на нижней крышке B, а на верхней крышке B_t, области D_t. Кроме того, функция $\varphi^{x,t}(\xi,\tau)$ является решением однородного уравнения (4.1), формально сопряженного к уравнению теплопроводности. В общей теории параболических уравнений [14] доказывается, что решение задачи (4.1)–(4.3) существует. Отметим, кроме того, что граничные условия (4.2) и (4.3) согласованы в точках множества $(\xi,\tau) \in \Gamma \times \{\tau = t\}$, поскольку $x \in \Omega$ и поэтому

$$\mathcal{E}(x-\xi, t-\tau) \to 0 \quad \text{при} \quad \tau \to t-0$$

для каждого $\xi \in \Gamma$.

Применим вторую формулу Грина (2.6) к функции $v(\xi,\tau) = \varphi^{x,t}(\xi,\tau) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{\xi,\tau}(D_T \cup B_T) \cap \mathbb{C}^{(1,0)}_{\xi,\tau}(\mathbf{n}; \overline{D}_T)$ и произвольной функции $u(\xi,\tau) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{\xi,\tau}(D_T \cup B_T) \cap \mathbb{C}^{(1,0)}_{\xi,\tau}(\mathbf{n}; \overline{D}_T)$. Тогда получим равенство:

$$\int\limits_D \left(\varphi^{x,t}(\xi,\tau) L_{\xi,\tau} u(\xi,\tau) - u(\xi,\tau) L^*_{\xi,\tau}\varphi^{x,t}(\xi,\tau)\right) d\xi\, d\tau =$$
$$= \int\limits_{S_t} u(\xi,\tau) \overline{\frac{\partial \varphi^{x,t}(\xi,\tau)}{\partial \mathbf{n}_\xi}}\, dS_\xi\, d\tau - \int\limits_{S_t} \varphi^{x,t}(\xi,\tau) \overline{\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial \mathbf{n}_\xi}}\, dS_\xi\, d\tau +$$
$$+ \int\limits_\Omega \varphi^{x,t}(\xi,t) u(\xi,t)\, d\xi - \int\limits_\Omega \varphi^{x,t}(\xi,0) u(\xi,0)\, d\xi, \qquad (4.4)$$

в котором в силу граничного условия (4.3)

$$\varphi^{x,t}(\xi,\tau) = 0 \quad \text{для всех} \quad (\xi,\tau) \in B_t.$$

Отсюда с учетом уравнения (4.1) следует равенство:

$$0 = -\int\limits_D \varphi^{x,t}(\xi,\tau) L_{\xi,\tau} u(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau +$$
$$+ \int\limits_{S_t} u(\xi,\tau) \overline{\frac{\partial \varphi^{x,t}(\xi,\tau)}{\partial \mathbf{n}_\xi}}\, dS_\xi\, d\tau - \int\limits_{S_t} \varphi^{x,t}(\xi,\tau) \overline{\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial \mathbf{n}_\xi}}\, dS_\xi\, d\tau -$$
$$- \int\limits_\Omega \varphi^{x,t}(\xi,0) u(\xi,0)\, d\xi. \qquad (4.5)$$

Введем следующее обозначение:

$$G(x,t;\xi,\tau) = \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau) - \varphi^{x,t}(\xi,\tau). \qquad (4.6)$$

Тогда с учетом третьей формулы Грина (3.7) и из равенства (4.5) получим следующее равенство:

$$u(x,t) = \int\limits_{D_t} G(x,t;\xi,\tau) L_{\xi,\tau} u(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau + \int\limits_{S_t} G(x,t;\xi,\tau) \overline{\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial \mathbf{n}_\xi}}\, dS_\xi\, d\tau -$$
$$- \int\limits_{S_t} u(\xi,\tau) \overline{\frac{\partial G(x,t;\xi,\tau)}{\partial \mathbf{n}_\xi}}\, dS_\xi\, d\tau + \int\limits_{\Omega} u(\xi,0) G(x,t;\xi,0)\, d\xi. \quad (4.7)$$

Отметим, что в силу граничного условия (4.2) имеем

$$G(x,t;\xi,\tau) = 0 \quad \text{для всех} \quad (\xi,\tau) \in S_t. \quad (4.8)$$

Из равенства (4.7) с учетом (4.8) приходим к следующему равенству:

$$u(x,t) = \int\limits_{D_t} G(x,t;\xi,\tau) L_{\xi,\tau} u(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau -$$
$$- \int\limits_{S_t} u(\xi,\tau) \overline{\frac{\partial G(x,t;\xi,\tau)}{\partial \mathbf{n}_\xi}}\, dS_\xi\, d\tau + \int\limits_{\Omega} u(\xi,0) G(x,t;\xi,0)\, d\xi. \quad (4.9)$$

Рассмотрим первую смешанную краевую задачу:

$$L_{x,t} u(x,t) = f(x,t) \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in D_T \cup B_T, \quad (4.10)$$
$$u(x,t) = \varphi(x,t) \quad \text{для} \quad (x,t) \in S_T, \quad (4.11)$$
$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{для} \quad (x,0) \in B. \quad (4.12)$$

При условии существования функции Грина $G(x,t;\xi,\tau)$ решение класса функций $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D_T \cup B_T) \cap \mathbb{C}^{(1,0)}_{x,t}(\mathbf{n}; \overline{D}_T)$ можно записать в следующем виде:

$$u(x,t) = \int\limits_{D_t} G(x,t;\xi,\tau) f(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau -$$
$$- \int\limits_{S_t} \varphi(\xi,\tau) \overline{\frac{\partial G(x,t;\xi,\tau)}{\partial \mathbf{n}_\xi}}\, dS_\xi\, d\tau + \int\limits_{\Omega} u_0(\xi) G(x,t;\xi,0)\, d\xi. \quad (4.13)$$

З а м е ч а н и е. Если ввести обозначение

$$g(x,t;\xi,\tau) := \varphi^{x,t}(\xi,\tau),$$

то функция $g(x,t;\xi,\tau)$ для каждого фиксированного $(\xi,\tau) \in D_T$ является решением первой краевой задачи:

$$L_{x,t} g(x,t;\xi,\tau) = 0 \quad \text{для} \quad (x,t) \in D_T \cup B_T, \quad (4.14)$$
$$g(x,\tau;\xi,\tau) = 0 \quad \text{для} \quad x \in \Omega, \quad (4.15)$$
$$g(x,t;\xi,\tau) = \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau) \quad \text{для} \quad (x,t) \in S_T. \quad (4.16)$$

§ 5. Литературные указания

Материал для лекции взят из работ [1], [3], [8], [11], [14], [15].

Лекция 5

ТЕПЛОВОЙ ПОТЕНЦИАЛ ПО НИЖНЕЙ КРЫШКЕ

В этой лекции исследуем предельные свойства и свойства гладкости теплового поверхностного потенциала по нижней крышке.

§ 1. Предельные формулы

Рассмотрим поверхностный потенциал по нижней крышке $B = \Omega \times \times \{t = 0\}$ цилиндрической области $D_T = \Omega \times (0, T)$ при $T > 0$ в случае ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ с границей $\Gamma \in \mathbb{C}^{1,\alpha}$ при $\alpha \in (0, 1]$ следующего вида:

$$U_0(x, t) = \int\limits_{\Omega} \mathcal{E}(x - \xi, t) u_0(\xi)\, d\xi, \tag{1.1}$$

$$\mathcal{E}(x - \xi, t) = \frac{\vartheta(t)}{(4\pi t)^{N/2}} \exp\left(-\frac{|x - \xi|^2}{4t}\right).$$

Справедливо первое утверждение относительно свойств поверхностного потенциала (1.1):

Лемма 1. *Если* $u_0(x) \in \mathbb{C}(\overline{\Omega})$, *то функция* $U_0(x, t) \in \mathbb{C}_w(\Omega \times [0, T]) \cap \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega} \times (0, T])$ *для любого* $T > 0$, *причем справедливы предельные формулы*:

$$\lim_{\Omega \times (0,T] \ni (y,\tau) \to (x,0)} U_0(y, \tau) = u_0(x), \quad \textit{если} \quad x \in \Omega, \tag{1.2}$$

$$\lim_{\Gamma \times (0,T] \ni (y,\tau) \to (x,0)} U_0(y, \tau) = \frac{1}{2} u_0(x), \quad \textit{если} \quad x \in \Gamma, \tag{1.3}$$

$$\lim_{\left(\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}\right) \times (0,T] \ni (y,\tau) \to (x,0)} U_0(y, \tau) = 0, \quad \textit{если} \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}, \tag{1.4}$$

Замечание. Под пространством функций $\mathbb{C}_w(\Omega \times [0, T])$ понимается подпространство пространства функций из $\mathbb{C}(\Omega \times (0, T])$, допускающих непрерывное продолжение вплоть до нижней крышки $B = \Omega \times \times \{t = 0\}$.

Доказательство. *Шаг 1.* $x \in \Omega$. Если $x \in \Omega$, то найдется такое малое $\eta > 0$, что $O(x, \eta) \subset \Omega$. Тогда функцию $U_0(x, t)$ можно записать в следующем виде:

$$U_0(x, t) = U_{01}(x, t) + U_{02}(x, t), \tag{1.5}$$

$$U_{01}(x,t) = \int\limits_{O(x,\eta)} \mathcal{E}(x-\xi,t) u_0(\xi)\, d\xi, \tag{1.6}$$

$$U_{02}(x,t) = \int\limits_{\Omega \setminus O(x,\eta)} \mathcal{E}(x-\xi,t) u_0(\xi)\, d\xi. \tag{1.7}$$

Для функции $U_{01}(x,t)$ справедливо следующее равенство:

$$\begin{aligned} I := U_{01}(x,t) - u_0(x) = \\ = \int\limits_{O(x,\eta)} \mathcal{E}(x-\xi,t) u_0(\xi)\, d\xi - u_0(x) \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(x-\xi,t)\, d\xi = \\ = \int\limits_{O(x,\eta)} \mathcal{E}(x-\xi,t)\, [u_0(\xi) - u_0(x)]\, d\xi - u_0(x) \int\limits_{\mathbb{R}^N \setminus O(x,\eta)} \mathcal{E}(x-\xi,t)\, d\xi = \\ = I_1 + I_2. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Для интеграла I_1 справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned} |I_1| \leqslant \sup_{\xi \in O(x,\eta)} |u_0(\xi) - u_0(x)| \int\limits_{O(x,\eta)} \mathcal{E}(x-\xi,t)\, d\xi \leqslant \\ \leqslant \sup_{\xi \in O(x,\eta)} |u_0(\xi) - u_0(x)| \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(x-\xi,t)\, d\xi = \\ = \sup_{\xi \in O(x,\eta)} |u_0(\xi) - u_0(x)|. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое малое $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$, что

$$|I_1| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.10}$$

На этом шаге доказательства зафиксируем $\eta > 0$. Тогда для I_2 справедлива оценка:

$$\begin{aligned} |I_2| \leqslant \sup_{x \in \Omega} |u_0(x)| \int\limits_{\mathbb{R}^N \setminus O(x,\eta)} \mathcal{E}(x-\xi,t)\, d\xi = \\ = \sup_{x \in \Omega} |u_0(x)| \int\limits_{\mathbb{R}^N \setminus O(0,\eta)} \mathcal{E}(y,t)\, dy = \\ = \sup_{x \in \Omega} |u_0(x)| \frac{\omega_N}{(4\pi)^{N/2}} \frac{1}{t^{N/2}} \int\limits_{\eta}^{+\infty} r^{N-1} \exp(-r^2/(4t))\, dr = \end{aligned}$$

$$
= \sup_{x\in\Omega} |u_0(x)| \frac{\omega_N}{(4\pi)^{N/2}} \int\limits_{\eta/\sqrt{t}}^{+\infty} \rho^{N-1} \exp(-\rho^2/4)\, d\rho. \quad (1.11)
$$

Для функции $U_{02}(x,t)$ справедлива следующая оценка:

$$
|U_{02}(x,t)| \leqslant \sup_{x\in\Omega} |u_0(x)| \int\limits_{\Omega\setminus O(x,\eta)} \mathcal{E}(x-\xi,t)\, d\xi \leqslant
$$

$$
\leqslant \sup_{x\in\Omega} |u_0(x)| \int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus O(x,\eta)} \mathcal{E}(x-\xi,t)\, d\xi =
$$

$$
= \sup_{x\in\Omega} |u_0(x)| \frac{\omega_N}{(4\pi)^{N/2}} \int\limits_{\eta/\sqrt{t}}^{+\infty} \rho^{N-1} \exp(-\rho^2/4)\, d\rho \quad (1.12)
$$

Из полученного видно, что мажоранты в правых частях соотношений (1.11) и (1.12) совпадают. Отсюда следует, что для данного фиксированного $\eta > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon, \eta(\varepsilon)) > 0$, что при $t \in (0, \delta)$ будут выполнены неравенства:

$$
|I_2| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |U_{02}(x,t)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (1.13)
$$

Итак, из (1.10) и (1.13) получаем, что для каждого фиксированного $x \in \Omega$, для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что

$$
|U_0(x,t) - u_0(x)| < \varepsilon \quad \text{как только} \quad 0 < t < \delta. \quad (1.14)
$$

Замечание. Функция $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ от выбора $x \in \Omega$ не зависит. Поэтому из (1.14) получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что

$$
\sup_{x\in\Omega} |U_0(x,t) - u_0(x)| < \varepsilon \quad \text{как только} \quad 0 < t < \delta. \quad (1.15)
$$

Итак, для произвольной точки $x_0 \in \Omega$ при $x \in O(x_0, \delta)$ имеет место следующее неравенство:

$$
|U_0(x,t) - u_0(x_0)| \leqslant |U_0(x,t) - u_0(x)| + |u_0(x) - u_0(x_0)| < 2\varepsilon \quad (1.16)
$$

как только $|x - x_0| + t < \delta$ в силу того, что $u_0(x) \in \mathbb{C}(\overline{\Omega})$.

Шаг 2. $x \in \Gamma$. В этом случае выберем $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы $\Omega\setminus O(x,\eta) \neq \varnothing$. Кроме этого, воспользуемся тем, что граница Γ области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ является ляпуновской, т. е. $\Gamma \in \mathbb{C}^{1,\alpha}$ при $\alpha \in (0,1]$. Выберем прямоугольную декартову систему координат в $\mathbb{R}^{N+1}$ следующим образом:

$$
\{(x,t), \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_N, \mathbf{e}_t\},
$$

причем $\{x, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_N\}$ — это «локальная» декартова прямоугольная система координат из определения ляпуновской поверхности (см. лекцию 7 из курса «Эллиптические уравнения»). В частности, $\mathbf{e}_N = \mathbf{n}_x$ — вектор внешней нормали в точке $x \in \Gamma$. Кроме того, предположим, что $\varepsilon \in (0, d)$, где $d > 0$ — радиус сферы Ляпунова. Рассмотрим следующее продолжение функции $u_0(\xi)$:

$$\overline{u}_0(\xi) = \begin{cases} u_0(\xi), & \text{если} \quad \xi \in \overline{\Omega}, \\ u_0(x), & \text{если} \quad \xi \in \mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega}. \end{cases} \tag{1.17}$$

Пусть π_x — касательная плоскость в $\mathbb{R}^N$ в рассматриваемой точке

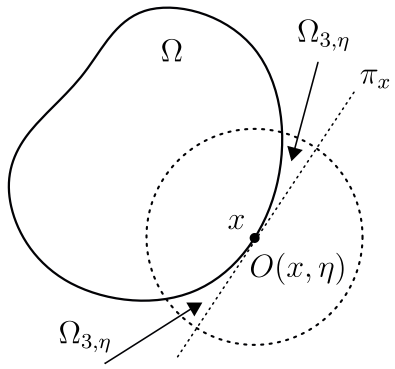


Рис. 8. «Добавочек» $\Omega_{3,\eta}$ в случае локально выпуклой области.

$x \in \Gamma$, которая делит пространство $\mathbb{R}^N$ на две части $\mathbb{R}^N_+$ и $\mathbb{R}^N_-$. Без ограничения общности будем считать, что вектор внешней нормали $\mathbf{n}_x$ направлен в сторону $\mathbb{R}^N_+$. Тогда при достаточно малом $\eta > 0$ область Ω можно представить в виде объединения следующих множеств:

$$\Omega = \Omega_{1,\eta} \cup \Omega_{2,\eta}, \tag{1.18}$$

$$\Omega_{1,\eta} = \Omega \backslash O(x, \eta), \quad \Omega_{2,\eta} = \Omega \cap O(x, \eta). \tag{1.19}$$

Пусть $O^-(x, \eta) \subset \mathbb{R}^N_-$ — половина шара $O(x, \eta)$, лежащая в $\mathbb{R}^N_-$. Символом $\Omega_{3,\eta}$ мы обозначим ту часть шара $O(x, \eta)$, на которую отличается $\Omega \cap O(x, \eta)$ от $O^-(x, \eta)$.

Замечание. В случае локально выпуклой области в окрестности точки $x \in \Gamma$ этот «добавочек» указан на рисунке 8. Однако, область Ω может быть еще локально вогнутой, локально выпукло–вогнутой, локально плоской, локально выпукло-плоской, локально вогнуто-плоской.

Заметим, что для «добавочка» $\Omega_{3,\eta}$ справедливо следующее вложение:

$$\Omega_{3,\eta} \subset \biggl\{ (r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{N-1}) :$$

$$: \ r \in [0, \eta], \ \varphi_1 \in [\pi/2 - \varphi_0(\eta), \pi/2 + \varphi_0(\eta)] \Big\}, \quad \varphi_0 \in [0, \pi/2), \tag{1.20}$$

где угол φ_1 — угол между радиус–вектором $\mathbf{r}$ и вектором внешней нормали $\mathbf{n}_x$, причем

$$\varphi_0(\eta) \to 0 \quad \text{при} \quad \eta \to +0, \tag{1.21}$$

поскольку $\Gamma \in \mathbb{C}^{1,\alpha}$ при $\alpha \in (0,1]$. С учетом (1.17) и (1.18) справедливо следующее равенство для функции $U_0(x,t)$:

$$U_0(x,t) = U_{01}(x,t) + U_{02}(x,t) + U_{03}(x,t), \tag{1.22}$$

$$U_{01}(x,t) = \int\limits_{\Omega \setminus O(x,\eta)} \mathcal{E}(x-\xi,t) u_0(\xi)\, d\xi, \tag{1.23}$$

$$U_{02}(x,t) = \int\limits_{O^-(x,\eta)} \mathcal{E}(x-\xi,t) \overline{u}_0(\xi)\, d\xi, \tag{1.24}$$

$$U_{03}(x,t) = \int\limits_{\Omega_{3,\eta}} \operatorname{sign}(\xi) \mathcal{E}(x-\xi,t) \overline{u}_0(\xi)\, d\xi, \tag{1.25}$$

$$\operatorname{sign}(\xi) := \begin{cases} +1, & \text{если} \quad \xi \in \mathbb{R}^N_+; \\ -1, & \text{если} \quad \xi \in \mathbb{R}^N_-. \end{cases}$$

З а м е ч а н и е. В случае области Ω, изображенной на рисунке 8, $\operatorname{sign}(\xi) = -1$ для всех точек $\xi \in \Omega_{3,\eta}$.

Для интеграла $U_{02}(x,t)$ справедливы следующие равенства:

$$I = U_{02}(x,t) - u_0(x) =$$
$$= \int\limits_{O^-(x,\eta)} \mathcal{E}(x-\xi,t) \overline{u}_0(\xi)\, d\xi - u_0(x) \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(x-\xi,t)\, d\xi =$$
$$= \int\limits_{O^-(x,\eta)} \mathcal{E}(x-\xi,t) \left[\overline{u}_0(\xi) - u_0(x)\right] d\xi - u_0(x) \int\limits_{\mathbb{R}^N_- \setminus O^-(x,\eta)} \mathcal{E}(x-\xi,t)\, d\xi -$$
$$- u_0(x) \int\limits_{\mathbb{R}^N_+} \mathcal{E}(x-\xi,t)\, d\xi = I_1 + I_2 + I_3, \quad \mathbb{R}^N = \mathbb{R}^N_+ \cup \mathbb{R}^N_-, \tag{1.26}$$

$$1 = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(x-\xi,t)\, d\xi = 2 \int\limits_{\mathbb{R}^N_+} \mathcal{E}(x-\xi,t)\, d\xi, \quad t > 0. \tag{1.27}$$

Из (1.27) получаем, что

$$I_3 = -\frac{1}{2} u_0(x). \tag{1.28}$$

Для интеграла I_1 справедлива оценка:

$$|I_1| \leqslant \sup_{\xi \in O^-(x,\eta)} |\overline{u}_0(\xi) - u_0(x)| \int\limits_{O^-(x,\eta)} \mathcal{E}(x-\xi,t)\,d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\xi \in O^-(x,\eta)} |\overline{u}_0(\xi) - u_0(x)| \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(x-\xi,t)\,d\xi =$$

$$= \sup_{\xi \in O^-(x,\eta)} |\overline{u}_0(\xi) - u_0(x)| = \sup_{\xi \in \Omega \cap O(x,\eta)} |u_0(\xi) - u_0(x)|. \quad (1.29)$$

Для фиксированного $x \in \Gamma$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$, что в силу (1.29) имеет место неравенство:

$$|I_1| < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (1.30)$$

Наконец, для $U_{03}(x,t)$ в силу (1.20) и (1.21) имеет место оценка:

$$|U_{03}(x,t)| \leqslant \sup_{x\in\Omega} |u_0(x)| \omega_{N-1} 2\sin\varphi_0(\eta) \int\limits_{\eta/\sqrt{t}}^{+\infty} \rho^{N-1} \exp(-\rho^2/4)\,d\rho \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x\in\Omega} |u_0(x)| \omega_{N-1} 2\sin\varphi_0(\eta) \int\limits_{0}^{+\infty} \rho^{N-1} \exp(-\rho^2/4)\,d\rho < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (1.31)$$

На этом шаге зафиксируем $\eta > 0$. Для I_2 справедлива оценка, аналогичная оценке (1.11):

$$|I_2| \leqslant \sup_{x\in\Omega} |u_0(x)| \int\limits_{\mathbb{R}^N_- \setminus O^-(x,\eta)} \mathcal{E}(x-\xi,t)\,d\xi =$$

$$= \sup_{x\in\Omega} |u_0(x)| \int\limits_{\mathbb{R}^N_- \setminus O^-(0,\eta)} \mathcal{E}(y,t)\,dy =$$

$$= \sup_{x\in\Omega} |u_0(x)| \frac{1}{2} \frac{\omega_N}{(4\pi)^{N/2}} \frac{1}{t^{N/2}} \int\limits_{\eta}^{+\infty} r^{N-1} \exp(-r^2/(4t))\,dr =$$

$$= \sup_{x\in\Omega} |u_0(x)| \frac{1}{2} \frac{\omega_N}{(4\pi)^{N/2}} \int\limits_{\eta/\sqrt{t}}^{+\infty} \rho^{N-1} \exp(-\rho^2/4)\,d\rho. \quad (1.32)$$

Для функции $U_{01}(x,t)$ справедлива оценка (1.12):

$$|U_{01}(x,t)| \leqslant \sup_{x\in\Omega} |u_0(x)| \frac{\omega_N}{(4\pi)^{N/2}} \int\limits_{\eta/\sqrt{t}}^{+\infty} \rho^{N-1} \exp(-\rho^2/4)\,d\rho. \quad (1.33)$$

Единообразным способом при фиксированном $\eta > 0$ выберем $\delta = \delta(\varepsilon, \eta(\varepsilon)) > 0$ настолько малым, чтобы в силу оценок (1.32) и (1.33) были выполнены неравенства:

$$|I_2| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad |U_{01}| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{при} \quad 0 < t < \delta. \tag{1.34}$$

Итак, из равенства (1.28) и оценок (1.30), (1.34), (1.34), а также (1.22)–(1.26) приходим к выводу о том, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что

$$\left|U_0(x,t) - \frac{1}{2}u_0(x)\right| < \varepsilon \quad \text{при} \quad 0 < t < \delta. \tag{1.35}$$

З а м е ч а н и е. Функция $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ от выбора $x \in \Gamma$ не зависит. Поэтому из (1.35) вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что

$$\sup_{x \in \Gamma}\left|U_0(x,t) - \frac{1}{2}u_0(x)\right| < \varepsilon \quad \text{при} \quad 0 < t < \delta. \tag{1.36}$$

Поскольку $u_0(x) \in \mathbb{C}(\overline{\Omega})$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при $x, x_0 \in \Gamma$

$$|u_0(x) - u_0(x_0)| < 2\varepsilon \quad \text{для всех} \quad |x - x_0| < \delta. \tag{1.37}$$

Поэтому из (1.35) и (1.37) получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$$\left|U_0(x,t) - \frac{1}{2}u_0(x_0)\right| \leqslant \left|U_0(x,t) - \frac{1}{2}u_0(x)\right| + \frac{1}{2}\left|u_0(x) - u_0(x_0)\right| < 2\varepsilon \tag{1.38}$$

для всех $x, x_0 \in \Gamma$ и $0 < |x - x_0| + t < \delta$.

Шаг 3. $x \in \mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega}$. Ясно, что

$$\text{distance}(x, \overline{\Omega}) = d_0 > 0. \tag{1.39}$$

Поэтому справедлива оценка:

$$\exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4t}\right) \leqslant \exp\left(-\frac{d_0^2}{4t}\right) \quad \text{для всех} \quad \xi \in \overline{\Omega}. \tag{1.40}$$

Таким образом, имеет место следующее неравенство:

$$|U_0(x,t)| \leqslant \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} \int\limits_{\Omega} \exp\left(-d_0^2/(4t)\right) d\xi \leqslant$$

$$\leqslant M_1 \frac{\exp(-d_0^2/(4t))}{t^{N/2}} \to +0 \quad \text{при} \quad t \to 0+0. \tag{1.41}$$

Шаг 4. Докажем, что $U_0(x,t) \in \mathbb{C}_w(\Omega \times [0,T]) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega} \times (0,T])$. С одной стороны, несложно увидеть, что $U_0(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{\Omega} \times (0,T])$. С другой стороны, рассматривая продолжение $\overline{U}_0(x,t)$ функции $U_0(x,t)$ до нижней крышки $B = \Omega \times \{t=0\}$

$$\overline{U}_0(x,t) = \begin{cases} U_0(x,t), & \text{если} \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T]; \\ u_0(x), & \text{если} \quad (x,t) \in \Omega \times \{t=0\}. \end{cases} \tag{1.42}$$

В силу (1.2) и условия $u_0(x) \in \mathbb{C}(\overline{\Omega})$ приходим к выводу о том, что $\overline{U}_0(x,t) \in \mathbb{C}(\Omega \times [0,T])$. Следовательно, $U_0(x,t) \in \mathbb{C}_w(\Omega \times [0,T])$.

Лемма доказана.

§ 2. Непрерывность и дифференцируемость

Справедливо следующее утверждение:

Лемма 2. *Пусть $u_0(x) \in \mathbb{C}(\overline{\Omega})$. Для того, чтобы $U_0(x,t) \in \mathbb{C}_w(\overline{D}_T)$ для произвольного $T > 0$, необходимо и достаточно, чтобы $u_0(x) = 0$ для всех $x \in \Gamma$.*

Доказательство. *Шаг 1. Достаточность.* Пусть $u_0(x) = 0$ для всех $x \in \Gamma$. Рассмотрим следующее продолжение $\overline{U}_0(x,t)$ функции $U_0(x,t)$:

$$\overline{U}_0(x,t) = \begin{cases} U_0(x,t), & \text{если} \quad (x,t) \in \overline{\Omega} \times (0,T]; \\ u_0(x), & \text{если} \quad (x,t) \in \overline{\Omega} \times \{t=0\}. \end{cases} \tag{2.1}$$

В силу леммы 1 имеем:

$$\overline{U}_0(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{\Omega} \times (0,T]) \cap \mathbb{C}(\Omega \times [0,T]).$$

Поэтому нам достаточно доказать, что

$$\lim_{\overline{\Omega}\times[0,T]\ni(y,\tau)\to(x_0,0)\in\Gamma\times\{t=0\}} \overline{U}_0(y,\tau) = 0 = u_0(x_0) \tag{2.2}$$

для любой точки $x_0 \in \Gamma$. Справедливы следующие неравенства:

$$\left|\overline{U}_0(y,\tau)\right| \leqslant I(y,\tau), \tag{2.3}$$

$$I(y,\tau) := \begin{cases} \left|\overline{U}_0(y,\tau) - u_0(y)\right| + |u_0(y)|, & \text{если} \quad y \in \Omega; \\ \left|\overline{U}_0(y,\tau) - u_0(y)/2\right| + |u_0(y)|/2, & \text{если} \quad y \in \Gamma, \end{cases} \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} \sup\limits_{y\in\Omega} \left|\overline{U}_0(y,\tau) - u_0(y)\right| + |u_0(y)|, & \text{если} \quad y \in \Omega; \\ \sup\limits_{y\in\Gamma} \left|\overline{U}_0(y,\tau) - u_0(y)/2\right| + |u_0(y)|/2, & \text{если} \quad y \in \Gamma. \end{cases} \tag{2.4}$$

В силу (1.15) и (1.36), непрерывности $u_0(x) \in \mathbb{C}(\overline{\Omega})$ и того, что $u_0(x_0) = 0$ для всех $x_0 \in \Gamma$ приходим к выводу о том, что

$$\lim_{\overline{\Omega}\times[0,T]\ni(y,\tau)\to(x_0,0)\in\Gamma\times\{t=0\}} I(y,\tau) = 0.$$

Таким образом, предельное равенство (2.2) доказано. Поэтому $\overline{U}_0(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D}_T)$. Значит, $U_0(x,t) \in \mathbb{C}_w(\overline{D}_T)$.

Шаг 2. Необходимость. Если в какой-то точке $x_0 \in \Gamma$ выполняется неравенство $u_0(x_0) \neq 0$, то в силу предельных свойств (1.2) и (1.3) существуют два способа стремления к точке $(x_0, 0) \in \Gamma \times \{t = 0\}$:

1. изнутри D_T до нижней крышки B, а затем вдоль нижней крышки до точки $(x_0, 0) \in \Gamma \times \{t = 0\}$;

2. вдоль боковой поверхности S_T цилиндрической области D_T вниз до той же точки.

В результате получаются два разных предела функции $U_0(x,t)$. Непрерывного продолжения функции $U_0(x,t)$ в точку $(x_0, 0) \in \Gamma \times \{t = 0\}$ не существует.

Лемма доказана.

Несложно доказать следующее утверждение:

Лемма 3. *Для любой функции $u_0(x) \in \mathbb{C}(\overline{\Omega})$ и любого $T > 0$ функция*

$$U_0(x,t) \in \mathbb{C}^\infty(\overline{\Omega} \times (0,T]) \cap \mathbb{C}^\infty_w\big(\big(\mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega}\big) \times [0,T]\big). \tag{2.5}$$

При $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,+\infty)$ выполняется уравнение:

$$\frac{\partial U_0(x,t)}{\partial t} - \Delta_x U_0(x,t) = 0. \tag{2.6}$$

Замечание. Под пространством функций $\mathbb{C}^\infty_w\big(\big(\mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega}\big) \times [0,T]\big)$ понимаются функции, определенные при $(x,t) \in \mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega} \times (0,T]$, которые после доопределения при $t = 0$ принадлежат пространству $\mathbb{C}^\infty\big(\big(\mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega}\big) \times [0,T]\big)$.

§ 3. Литературные указания

Материал для лекции взят из работ [1], [3], [8], [11], [14], [15].

Лекция 6

ТЕПЛОВОЙ ОБЪЁМНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ

В данной лекции изучаются основные свойства объемного потенциала.

§ 1. Непрерывность

Изучим свойства объёмного потенциала

$$V(x,t) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_0^t \int\limits_\Omega \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau) f(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau, \tag{1.1}$$

в цилиндрической области $D_T = \Omega \times (0,T)$ при $N \geqslant 3$, причем поскольку в определение фундаментального решения $\mathcal{E}(x-\xi, t-\tau)$ входит функция Хевисайда $\vartheta(t-\tau)$, то для объемного потенциала $V(x,t)$ справедливо представление:

$$V(x,t) = \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau) f(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau \tag{1.2}$$

для любого $t \in [0,T]$. Для фундаментального решения

$$\mathcal{E}(x-\xi, t-\tau) = \frac{\vartheta(t-\tau)}{(4\pi(t-\tau))^{N/2}} \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right)$$

справедлива следующая оценка:

$$\mathcal{E}(x-\xi, t-\tau) \leqslant c_1 \frac{\vartheta(t-\tau)}{|t-\tau|^\mu |x-\xi|^{N-2\mu}}, \quad \mu \in (0,1), \tag{1.3}$$

где $c_1 > 0$ — это некоторая постоянная.

□ Действительно, для всех $x \neq \xi$ и $t \neq \tau$ имеет место следующее равенство:

$$\mathcal{E}(x-\xi, t-\tau) = \frac{1}{(4\pi)^{N/2}} (t-\tau)^{-\mu} \left(|x-\xi|^2\right)^{\mu - \frac{N}{2}} \times$$

$$\times \left[\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right]^{\frac{N}{2}-\mu} \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right).$$

Заметим, что

$$y^\lambda \exp(-y^2) \leqslant c_2(\lambda) < +\infty \quad \text{для всех} \quad \lambda > 0, \quad y \geqslant 0. \quad \boxtimes$$

Справедлива следующая

Лемма 1. *Если* $f(x,t) \in L^\infty(D_T)$, *то* $V(x,t) \in \mathbb{C}(D_T \cup B_T)$.

Доказательство.

Введём следующие обозначения:

$$O((x_0,t_0);\delta) := \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^{N+1} : \ |(x,t)-(x_0,t_0)| < \delta\right\}, \quad \delta > 0,$$

где

$$|(x,t)-(x_0,t_0)| := \left(|x-x_0|^2 + |t-t_0|^2\right)^{1/2},$$

$$Ц^r_{x_0,T} := \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^{N+1} : \ |x-x_0| < r, \ t \in (0,T)\right\}, \quad r > 0.$$

Пусть $(x_0,t_0) \in D_T \cup B_T$ — это произвольная точка. Тогда найдётся такое число $r > 0$, что $Ц^r_{x_0,T} \subset D_T$. Представим объёмный потенциал $V(x,t)$ в виде следующей суммы:

$$V(x,t) = V_1(x,t) + V_2(x,t), \tag{1.4}$$

$$V_1(x,t) = \int\limits_{Ц^r_{x_0,T}} \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau) f(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau, \tag{1.5}$$

$$V_2(x,t) = \int\limits_{D_T \setminus Ц^r_{x_0,T}} \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau) f(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau. \tag{1.6}$$

Рассмотрим сначала выражение для $V_1(x_0,t_0)$. Для этой величины справедлива оценка:

$$|V_1(x_0,t_0)| \leqslant \|f\|_{L^\infty(D_T)} \int\limits_{Ц^r_{x_0,T}} \mathcal{E}(x_0-\xi,t_0-\tau)\, d\xi\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \|f\|_{L^\infty(D_T)} c_1 \int\limits_0^{t_0} \int\limits_{O(x_0,r)} \frac{\vartheta(t_0-\tau)}{(t_0-\tau)^\mu |x_0-\xi|^{N-2\mu}}\, d\xi\, d\tau =$$

$$= \|f\|_{L^\infty(D_T)} c_1 \omega_N \int\limits_0^{t_0} \frac{d\tau}{|t_0-\tau|^\mu} \int\limits_0^r \frac{d\rho}{\rho^{1-2\mu}} \leqslant$$

$$\leqslant \|f\|_{L^\infty(D_T)} c_1 \omega_N \frac{T^{1-\mu}}{1-\mu} \frac{r^{2\mu}}{2\mu} < \frac{\varepsilon}{3} \quad (1.7)$$

для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно малом $r > 0$. Предположим, что $(x,t) \in \text{Ц}^{r/2}_{x_0,T}$. Тогда справедливы следующие оценки сверху:

$$|x-\xi| \leqslant |x-x_0| + |x_0-\xi| \leqslant \frac{3}{2} r$$

для всех $(\xi,\tau) \in \text{Ц}^r_{x_0,T}$. Поэтому для всех $(x,t) \in \text{Ц}^{r/2}_{x_0,T}$ имеет место вложение $\text{Ц}^r_{x_0,T} \subset \text{Ц}^{3r/2}_{x,T}$ и справедлива следующая оценка:

$$|V_1(x,t)| \leqslant \|f\|_{L^\infty(D_T)} \int\limits_{\text{Ц}^r_{x_0,T}} \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau)\, d\xi\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \|f\|_{L^\infty(D_T)} \int\limits_{\text{Ц}^{3r/2}_{x,T}} \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau)\, d\xi\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \|f\|_{L^\infty(D_T)} c_1 \omega_N \frac{T^{1-\mu}}{1-\mu} \frac{(3r/2)^{2\mu}}{2\mu} < \frac{\varepsilon}{3} \quad (1.8)$$

для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно малом $r > 0$. Зафиксируем это $r > 0$.

Заметим, что имеют место следующие неравенства при $(\xi,\tau) \in \in D_T \backslash \text{Ц}^r_{x_0,T}$ и при $(x,t) \in \text{Ц}^{r/2}_{x_0,T}$:

$$|x-\xi| \geqslant |\xi - x_0| - |x-x_0| \geqslant r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2} > 0.$$

Справедлива следующая оценка:

$$|V_2(x,t) - V_2(x_0,t_0)| = \left| \int\limits_{D_T \backslash \text{Ц}^r_{x_0,T}} F(x,t,x_0,t_0,\xi,\tau) f(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{(\xi,\tau) \in D_T \backslash \text{Ц}^r_{x_0,T}} |F(x,t,x_0,t_0,\xi,\tau)| \int\limits_{D_T} |f(\xi,\tau)|\, d\xi\, d\tau, \quad (1.9)$$

$$F(x,t,x_0,t_0,\xi,\tau) := \overline{\mathcal{E}}(x-\xi, t-\tau) - \overline{\mathcal{E}}(x_0-\xi, t_0-\tau), \quad (1.10)$$

где, поскольку $|x-\xi| \geqslant r/2$ и $|x_0-\xi| \geqslant r$ при фиксированном $r > 0$ символом $\overline{\mathcal{E}}(x-\xi, t-\tau)$ обозначена следующая функция:

$$\overline{\mathcal{E}}(x-\xi, t-\tau) = \begin{cases} \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau), & \text{если} \quad 0 \leqslant \tau < t; \\ 0, & \text{если} \quad 0 \leqslant \tau = t. \end{cases}$$

Таким образом «сшитая» функция $\overline{\mathcal{E}}(x-\xi, t-\tau)$ является равномерно непрерывной по (x,t) при $(\xi,\tau) \in D_T \backslash Ц^r_{x_0,T}$.

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ при фиксированном ранее $r = r(\varepsilon) > 0$ найдется такое достаточно малое $\delta(r,\varepsilon) > 0$, что

$$\sup_{(\xi,\tau)\in D_T\backslash Ц^r_{x_0,T}} |F(x,t,x_0,t_0,\xi,\tau)| < \frac{\varepsilon}{3M_1}, \tag{1.11}$$

$$M_1 = \max\left\{1, \int\limits_{D_T} |f(\xi,\tau)|\, d\xi\, d\tau\right\}.$$

Поэтому имеем:

$$|V_2(x,t) - V_2(x_0,t_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in O((x_0,t_0);\delta). \tag{1.12}$$

Итак, из выражений (1.4)–(1.12) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое малое $r > 0$ и такое малое $\delta = \delta(r(\varepsilon),\varepsilon) > 0$, что имеет место неравенство:

$$|V(x,t) - V(x_0,t_0)| \leqslant \\ \leqslant |V_2(x,t) - V_2(x_0,t_0)| + |V_1(x,t)| + |V_1(x_0,t_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

для всех $(x,t) \in O((x_0,t_0);\delta)$.

Лемма доказана.

Отметим, что лемме 1 можно усилить следующим образом:

Лемма 2. *Если $f(x,t) \in L^\infty(D_T)$, то $V(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D}_T)$. В частности, $V(x,0) = 0$ для всех $x \in \overline{\Omega}$.*

Доказательство.

Вместо цилиндра $Ц^r_{x_0,T}$ нужно рассмотреть область $Ц^r_{x_0,T} \cap D_T$. Все оценки — аналогичны.

Лемма доказана.

§ 2. Непрерывная дифференцируемость

Для для дальнейшего изложения докажем следующие оценки для производных фундаментального решения при любых $x \neq \xi$ и $t \in \tau$:

$$\left|\frac{\partial \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial x_i}\right| \leqslant c_2 \frac{\vartheta(t-\tau)}{(t-\tau)^\mu |x-\xi|^{N+1-2\mu}} \quad \text{при} \quad \mu \in \left(\frac{1}{2}, 1\right). \tag{2.1}$$

□ Действительно, имеем:

$$\frac{\partial \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial x_i} = -\frac{\vartheta(t-\tau)}{(4\pi)^{N/2}} \frac{1}{(t-\tau)^{N/2}} \frac{x_i-\xi_i}{2(t-\tau)} \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right),$$

$$\left|\frac{\partial\mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial x_i}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\vartheta(t-\tau)}{2(4\pi)^{N/2}}(t-\tau)^{-\mu}\left(|x-\xi|^2\right)^{\mu-(N+1)/2}\left[\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right]^{(N+1)/2-\mu} \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right) \leqslant c_2\frac{\vartheta(t-\tau)}{(t-\tau)^{\mu}|x-\xi|^{N+1-2\mu}}.$$

Отсюда получаем оценку (2.1), потребовав локальную интегрируемость найденной мажоранты в $\mathbb{R}^{N+1}$:

$$N+1-2\mu-N+1 \in (0,1),\ \mu \in (-\infty,1) \Rightarrow \mu \in \left(\frac{1}{2},1\right). \quad \boxtimes$$

Справедливо следующее утверждение:

Л е м м а 3. *Если $f(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D}_T)$, то объёмный потенциал $V(x,t)$ имеет частные производные по $x \in \Omega$ для всех $t \in [0,T]$:*

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial x_i} = \int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}\frac{\partial\mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial x_i}f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau \in \mathbb{C}(\Omega\times[0,T]) \qquad (2.2)$$

при $i \in \overline{1,N}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Шаг 1. В силу оценки (2.1) по аналогии с доказательством леммы 1 можно показать, что правая часть равенства (2.2) является непрерывной функцией в $\overline{D}_T$. Поэтому, в частности, в силу равенства (2.2)

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial x_i} \in \mathbb{C}_w(\overline{D}_T).$$

Шаг 2. Докажем формулу (2.2). Пусть

$$J(x,t,\tau) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int\limits_{\Omega}\mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)\,d\xi. \qquad (2.3)$$

Тогда

$$V(x,t) = \int\limits_0^t J(x,t,\tau)\,d\tau.$$

Если функцию $J(x,t,\tau)$ доопределить при $\tau=t$ следующим образом:

$$\overline{J}(x,t,\tau) = \begin{cases} J(x,t,\tau), & \text{если} \quad t\neq\tau; \\ f(x,t), & \text{если} \quad t=\tau, \end{cases} \qquad (2.4)$$

то с учетом леммы 1 из предыдущей лекции заключаем, что функция $\overline{J}(x,t,\tau) \in \mathbb{C}\left(\Omega\times\{0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant T\}\right).$

□ Действительно, в силу предельного свойства (1.15) и того, что $f(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D}_T)$, имеет место предельная формула:

$$\lim_{\tau\uparrow t} \sup_{x\in\Omega} |J(x,t,\tau) - f(x,t)| = 0. \quad \boxtimes$$

Замечание. В силу леммы 2 из предыдущей лекции функция $\overline{J}(x,t,\tau)$ принадлежит классу $\mathbb{C}(\overline{\Omega} \times \{0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T\})$ тогда и только тогда, когда $f(x,t) = 0$ для всех $(x,t) \in S_T = \Gamma \times [0,T]$.

Замечание. В дальнейшем под функцией $\overline{J}(x,t,\tau)$ понимается функция, определенная равенством (2.4).

Шаг 3. При $t > \tau$ имеем:

$$\frac{\partial \overline{J}(x,t,\tau)}{\partial x_i} = \int\limits_{\Omega} \frac{\partial \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau)}{\partial x_i} f(\xi,\tau)\, d\xi.$$

В силу оценки (2.1) справедлива следующая оценка:

$$\left|\frac{\partial \overline{J}(x,t,\tau)}{\partial x_i}\right| \leqslant c_3 \frac{\vartheta(t-\tau)}{(t-\tau)^{\mu}} \|f\|_{L^{\infty}(D_T)} \int\limits_{\Omega} \frac{1}{|x-\xi|^{N+1-2\mu}}\, d\xi \leqslant$$
$$\leqslant c_4 \frac{\vartheta(t-\tau)}{(t-\tau)^{\mu}} \quad \text{для всех} \quad \mu \in (1/2, 1). \tag{2.5}$$

Из этой оценки следует, что интеграл

$$\overline{V}_i(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_0^t \frac{\partial \overline{J}(x,t,\tau)}{\partial x_i}\, d\tau \tag{2.6}$$

абсолютно и равномерно сходится.

Шаг 4. Положим

$$I_h(x,t) := \frac{V(x^h,t) - V(x,t)}{h} - \overline{V}_i(x,t),$$

$$x^h := (x_1, ..., x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, ..., x_N) \in \Omega, \quad x \in \Omega.$$

Справедливы следующие равенства:

$$I_h(x,t) = \int\limits_0^t \left[\frac{\overline{J}(x^h,t,\tau) - \overline{J}(x,t,\tau)}{h} - \frac{\partial \overline{J}(x,t,\tau)}{\partial x_i}\right] d\tau =$$
$$= \int\limits_0^{t_\varepsilon} \left[\frac{\overline{J}(x^h,t,\tau) - \overline{J}(x,t,\tau)}{h} - \frac{\partial \overline{J}(x,t,\tau)}{\partial x_i}\right] d\tau +$$

$$+\int\limits_{t_\varepsilon}^{t} \frac{\overline{J}(x^h,t,\tau)-\overline{J}(x,t,\tau)}{h}\,d\tau - \int\limits_{t_\varepsilon}^{t} \frac{\partial\overline{J}(x,t,\tau)}{\partial x_i}\,d\tau =$$

$$= \int\limits_{0}^{t_\varepsilon} \left[\frac{\partial\overline{J}(x^*,t,\tau)}{\partial x_i} - \frac{\partial\overline{J}(x,t,\tau)}{\partial x_i}\right] d\tau +$$

$$+\int\limits_{t_\varepsilon}^{t} \frac{\overline{J}(x^h,t,\tau)-\overline{J}(x,t,\tau)}{h}\,d\tau - \int\limits_{t_\varepsilon}^{t} \frac{\partial\overline{J}(x,t,\tau)}{\partial x_i}\,d\tau :=$$

$$:= I_{h1} + I_{h2} + I_{h3}, \quad (2.7)$$

где $x^* \in [x^h, x]$ — это отрезок прямой, соединяющий точки x^h и x. При $t \neq \tau$ справедливы следующие соотношения:

$$\overline{J}(x^h,t,\tau) - \overline{J}(x,t,\tau) = \int\limits_0^1 \frac{d\overline{J}(x_s,t,\tau)}{ds}\,ds, \quad (2.8)$$

$$x_s = sx^h + (1-s)x = x + sh\mathbf{e}_i,$$

$$\frac{d\overline{J}(x_s,t,\tau)}{ds} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial\overline{J}(x_s,t,\tau)}{\partial x_{sj}} \frac{\partial x_{sj}}{\partial s} = \frac{\partial\overline{J}(x_s,t,\tau)}{\partial x_{si}} h. \quad (2.9)$$

С одной стороны, из (2.8)–(2.9) и оценки (2.5) получаем, что

$$|I_{h2}| \leqslant c_4 \int\limits_{t_\varepsilon}^{t} \frac{1}{(t-\tau)^\mu}\,d\tau = c_4 \frac{(t-t_\varepsilon)^{1-\mu}}{1-\mu}. \quad (2.10)$$

С другой стороны, из оценки (2.5) для I_{h3} следует аналогичная оценка:

$$|I_{h3}| \leqslant c_4 \int\limits_{t_\varepsilon}^{t} \frac{1}{(t-\tau)^\mu}\,d\tau = c_4 \frac{(t-t_\varepsilon)^{1-\mu}}{1-\mu}. \quad (2.11)$$

Для любого $\varepsilon > 0$ в силу оценок (2.10) и (2.11) найдётся такое $t_\varepsilon \in$ $\in (0,t)$, что будут иметь место следующие оценки:

$$|I_{h2}| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |I_{h3}| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (2.12)$$

На этом шаге зафиксируем такое $t_\varepsilon \in (0,t)$. При этом фиксированном $t_\varepsilon \in (0,t)$ рассмотрим следующее выражение:

$$\int\limits_{0}^{t_\varepsilon} \left[\frac{\partial\overline{J}(x^*,t,\tau)}{\partial x_i} - \frac{\partial\overline{J}(x,t,\tau)}{\partial x_i}\right] d\tau, \quad (2.13)$$

в котором $\tau \in (0, t_\varepsilon)$ и $t_\varepsilon < t$, и поэтому в подынтегральном выражении нет особенности. Следовательно, при фиксированном $t_\varepsilon \in (0, t)$ найдётся такое $\delta = \delta(\varepsilon, t_\varepsilon) > 0$, что

$$\left| \int\limits_0^{t_\varepsilon} \left[\frac{\partial \overline{J}(x^*, t, \tau)}{\partial x_i} - \frac{\partial \overline{J}(x, t, \tau)}{\partial x_i} \right] d\tau \right| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{2.14}$$

для всех $|h| < \delta$. Итак, в силу (2.7)–(2.14) для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $t_\varepsilon \in (0, t)$ и $\delta = \delta(t_\varepsilon(\varepsilon), \varepsilon) > 0$, что имеет место следующая оценка:

$$|I_h(x, t)| \leqslant |I_{h1}| + |I_{h2}| + |I_{h3}| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \tag{2.15}$$

для всех $|h| < \delta$.

Шаг 5. Итак, справедлива формула:

$$\frac{\partial V(x, t)}{\partial x_i} = \int\limits_0^t \frac{\partial \overline{J}(x, t, \tau)}{\partial x_i}\, d\tau.$$

С одной стороны, для каждой фиксированной точки $(x, t) \in D_T \cup B_T$ имеем:

$$\int\limits_0^{t-\gamma} \frac{\partial \overline{J}(x, t, \tau)}{\partial x_i}\, d\tau \to \frac{\partial V(x, t)}{\partial x_i} \quad \text{при} \quad \gamma \to +0.$$

С другой стороны, имеем:

$$\int\limits_0^{t-\gamma} \frac{\partial \overline{J}(x, t, \tau)}{\partial x_i}\, d\tau = \int\limits_0^{t-\gamma} \int\limits_\Omega \frac{\mathcal{E}(x - \xi, t - \tau)}{\partial x_i} f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau \to$$

$$\to \int\limits_0^t \int\limits_\Omega \frac{\mathcal{E}(x - \xi, t - \tau)}{\partial x_i} f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau \quad \text{при} \quad \gamma \to +0.$$

Последнее предельное равенство имеет место в силу оценки (2.1) и того, что $f(x, t) \in \mathbb{C}(\overline{D}_T)$. Итак, справедливо равенство (2.2).

Лемма доказана.

§ 3. Основная теорема

Определение 1. *Функция $f(x,t) \in \mathbb{C}_x^{\beta}(\overline{\Omega})$ равномерно по $t \in \in [0,T]$ при $\beta \in (0,1]$, если*

$$\sup_{t\in[0,T]} \sup_{x,y\in\Omega, x\neq y} \frac{|f(x,t)-f(y,t)|}{|x-y|^{\beta}} < +\infty. \tag{3.1}$$

Докажем теперь следующее утверждение:
Лемма 4. *Пусть $f(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D}_T)$ и $f(x,t) \in \mathbb{C}_x^{\beta}(\overline{\Omega})$ при $\beta \in (0,1]$ равномерно по $t \in [0,T]$. Тогда для объемного потенциала $V(x,t)$ существуют частные производные по x второго порядка и при $x \in \in \Omega$ и $t \in (0,T]$ и справедливы следующие равенства*:

$$\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} = \int_0^t d\tau \int_{\Omega} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial x_i \partial x_j} f(\xi,\tau)\, d\xi \in \mathbb{C}(D_T \cup B_T), \tag{3.2}$$

где повторный несобственный интеграл понимается в следующем смысле:

$$\int_0^t d\tau \int_{\Omega} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial x_i \partial x_j} f(\xi,\tau)\, d\xi = \\ = \lim_{\gamma\to+0} \int_0^{t-\gamma} d\tau \int_{\Omega} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial x_i \partial x_j} f(\xi,\tau)\, d\xi. \tag{3.3}$$

Замечание. Несложно доказать следующую оценку при $x \neq \xi$:

$$\left|\frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial x_i \partial x_j}\right| \leqslant c_5 \frac{\vartheta(t-\tau)}{(t-\tau)^{\mu}|x-\xi|^{N+2-2\mu}}. \tag{3.4}$$

Однако, эта оценка уже не гарантирует локальную интегрируемость подынтегральной функции в выражении (3.2) в $\mathbb{R}^{N+1}$.

Доказательство.

Шаг 1. Согласно лемме 2 имеет место следующее равенство:

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial x_i} = \int_0^t \frac{\partial \overline{J}(x,t,\tau)}{\partial x_i}\, d\tau,$$

где функция $\overline{J}(x,t,\tau)$ определена равенством (2.4). Пусть пока $y \in \in \Omega$ — это некоторая фиксированная точка. Справедливо следующее представление при $t > \tau$:

$$\frac{\partial \overline{J}(x,t,\tau)}{\partial x_i} = f(y,\tau)\int\limits_{\Omega} \frac{\partial \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial x_i}\,d\xi + \\ + \int\limits_{\Omega} \frac{\partial \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial x_i}\,[f(\xi,\tau)-f(y,\tau)]\,d\xi =: I_1 + I_2. \quad (3.5)$$

Пусть $x \in \Omega$. Тогда найдётся такой шар $x \in O(z,r) \subset \Omega$ при $r > 0$, что для первого слагаемого I_1 имеет место представление:

$$I_1 = f(y,\tau)\int\limits_{O(z,r)} \frac{\partial \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial x_i}\,d\xi + \\ + f(y,\tau)\int\limits_{\Omega\setminus O(z,r)} \frac{\partial \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial x_i}\,d\xi = \\ = f(y,\tau)\int\limits_{\partial O(z,r)} \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)\cos(\mathbf{n}_\xi,\mathbf{e}_i)\,dS_\xi + \\ + f(y,\tau)\int\limits_{\Omega\setminus O(z,r)} \frac{\partial \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial x_i}\,d\xi, \quad (3.6)$$

где мы воспользовались тем, что фундаментальное решение $\mathcal{E}(x - \xi, t-\tau)$ зависит от разности аргументов, теоремой о дивергенции и обозначили символом $\mathbf{n}_\xi$ — внешнюю нормаль к шару $O(z,r)$.

Подставляя равенство (3.6) в равенство (3.5) и дифференцируя по x_j, мы получим следующее равенство при $t > \tau$:

$$\frac{\partial^2 \overline{J}(x,t,\tau)}{\partial x_j \partial x_i} = f(y,\tau)\int\limits_{\partial O(z,r)} \frac{\partial \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial x_j}\cos(\mathbf{n}_\xi,\mathbf{e}_i)\,dS_\xi + \\ + f(y,\tau)\int\limits_{\Omega\setminus O(z,r)} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial x_j \partial x_i}\,d\xi + \\ + \int\limits_{\Omega} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial x_j \partial x_i}\,[f(\xi,\tau)-f(y,\tau)]\,d\xi := \\ := J_1(y) + J_2(y) + J_3(y). \quad (3.7)$$

Пусть $z = y = x$. Тогда для первых двух интегралов справедливы следующие равномерные оценки:

$$|J_1(x)| \leqslant \|f\|_{L^\infty(D_T)} \int\limits_{\partial O(x,r)} \left|\frac{\partial \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial x_j}\right| ds_\xi \leqslant c_6(r) < +\infty; \quad (3.8)$$

$$|J_2(x)| \leqslant \|f\|_{L^\infty(D_T)} \int\limits_{\Omega\setminus O(x,r)} \left| \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial x_j \partial x_i} \right| d\xi \leqslant c_7(r) < +\infty. \quad (3.9)$$

Для интеграла $J_3(x)$ в силу оценки (3.4), а также того, что $f(x,t) \in \in \mathbb{C}_x^\beta(\overline{\Omega})$ при $\beta \in (0,1]$ равномерно по $t \in [0,T]$, справедлива следующая оценка:

$$|J_3(x)| \leqslant \int\limits_\Omega \left| \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial x_j \partial x_i} \right| |f(\xi,\tau) - f(x,\tau)|\, d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c_8}{(t-\tau)^\mu} \int\limits_\Omega \frac{d\xi}{|x-\xi|^{N+2-2\mu-\beta}} \leqslant \frac{c_9}{(t-\tau)^\mu}. \quad (3.10)$$

Так как при $\beta \in (0,1]$ имеем

$$\mu < 1, \quad N+2-2\mu-\beta < N \Leftrightarrow 1 - \frac{\beta}{2} < \mu < 1,$$

то мажоранта

$$\frac{1}{(t-\tau)^\mu} \frac{1}{|\xi - x|^{N+2-2\mu-\beta}}$$

является локально интегрируемой в $\mathbb{R}^{N+1}$.

Итак, в силу (3.7)–(3.10) при $y = x$ имеет место искомая оценка:

$$\left| \frac{\partial^2 \overline{J}(x,t,\tau)}{\partial x_j \partial x_i} \right| \leqslant \frac{c_{10}}{(t-\tau)^\mu} \quad \text{при} \quad \mu \in \left(1 - \frac{\beta}{2}, 1\right).$$

По аналогии с доказательством леммы 2 положим

$$\overline{V}_{ij}(x,t) = \int\limits_0^t \frac{\partial^2 \overline{J}(x,t,\tau)}{\partial x_j \partial x_i}\, d\tau$$

и докажем, что справедливо следующее равенство:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial V}{\partial x_i} = \overline{V}_{ij}(x,t).$$

Шаг 2. Докажем, что

$$\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} \in \mathbb{C}(D_T \cup B_T).$$

Действительно, имеет место следующий предельный переход для любой точки $(x,t) \in D_T \cup B_T$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} &= \lim_{\gamma\to+0} \int\limits_0^{t-\gamma} d\tau \int\limits_\Omega \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial x_i \partial x_j} f(\xi,\tau)\,d\xi = \\
&= \lim_{\gamma\to+0} \int\limits_0^{t-\gamma} \frac{\partial^2 \overline{J}(x,t,\tau)}{\partial x_i \partial x_j}\,d\tau = \\
&= \int\limits_0^t f(x,\tau) \int\limits_{\partial O(x,r)} \frac{\partial \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial x_j} \cos(n_\xi, e_i)\,ds_\xi\,d\tau + \\
&+ \int\limits_0^t f(x,\tau) \int\limits_{\Omega\setminus O(x,r)} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial x_i \partial x_j}\,d\xi\,d\tau + \\
&+ \int\limits_0^t \int\limits_\Omega \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial x_i \partial x_j} \left[f(\xi,\tau)-f(x,\tau)\right] d\xi\,d\tau = \\
&= H_1 + H_2 + H_3. \qquad (3.11)
\end{aligned}
$$

Интегралы $H_1(x,t)$, $H_2(x,t) \in \mathbb{C}(D_T \cup B_T)$. Для доказательства того, что $H_3(x,t) \in \mathbb{C}(D_T \cup B_T)$ нужно воспользоваться той же техникой, которая использовалась при доказательстве леммы 1.

Лемма доказана.

Замечание 1. Покажем, что существует несобственный интеграл в смысле (3.4).

$\square$ Для каждого фиксированного $(x,t) \in D_T \cup B_T$ — фиксированного справедлив следующий предельный переход:

$$
\begin{aligned}
\int\limits_0^{t-\gamma} d\tau \int\limits_\Omega \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial x_i \partial x_j} f(\xi,\tau)\,d\xi &= \int\limits_0^{t-\gamma} \frac{\partial^2 \overline{J}(x,t,\tau)}{\partial x_i \partial x_j}\,d\tau = \\
&= \int\limits_0^{t-\gamma} f(x,\tau) \int\limits_{\partial O(x,r)} \frac{\partial \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial x_j} \cos(n_\xi, e_i)\,ds_\xi\,d\tau + \\
&+ \int\limits_0^{t-\gamma} f(x,\tau) \int\limits_{\Omega\setminus O(x,r)} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial x_i \partial x_j}\,d\xi\,d\tau + \\
&+ \int\limits_0^{t-\gamma} \int\limits_\Omega \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial x_i \partial x_j} \left[f(\xi,\tau)-f(x,\tau)\right] d\xi\,d\tau \to \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x_i \partial x_j}
\end{aligned}
$$

при $\gamma \to +0$.

Наконец, докажем основную теорему этой лекции.

Теорема 1. *Пусть* $f(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D}_T)$ *и* $f(x,t) \in \mathbb{C}_x^{\beta}(\overline{\Omega})$ *при* $\beta \in (0,1]$ *равномерно по* $t \in [0,T]$. *Тогда* $V(x,t) \in \mathbb{C}_{x,t}^{(2,1)}(D_T \cup B_T)$, *существует частная производная*

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} \in \mathbb{C}(D_T \cup B_T)$$

и выполняется следующее уравнение:

$$L_{x,t}V(x,t) = f(x,t) \quad \textit{для каждого} \quad (x,t) \in D_T \cup B_T. \tag{3.12}$$

Доказательство.

Шаг 1. Поскольку $\mathcal{E}(x-\xi, t-\tau)$ — это фундаментальное решение, то при $t > \tau$ имеет место следующее равенство:

$$\frac{\partial \overline{J}(x,t,\tau)}{\partial t} = \int\limits_{\Omega} \frac{\partial \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial t} f(\xi,\tau)\, d\xi = \\ = \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{\Omega} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial x_j^2} f(\xi,\tau)\, d\xi. \tag{3.13}$$

При доказательстве леммы 3 в силу оценок (3.7)–(3.10) получена следующая оценка:

$$\left| \int\limits_{\Omega} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial x_j^2} f(\xi,\tau)\, d\xi \right| \leqslant c_{11} \frac{\vartheta(t-\tau)}{(t-\tau)^{\mu}} \tag{3.14}$$

для всех

$$1 - \frac{\beta}{2} < \mu < 1, \quad \beta \in (0,1].$$

Таким образом, имеет место оценка:

$$\left| \frac{\partial \overline{J}(x,t,\tau)}{\partial t} \right| \leqslant c_{12} \frac{\vartheta(t-\tau)}{(t-\tau)^{\mu}} \tag{3.15}$$

при указанном выше μ.

Шаг 2. Докажем теперь, что существует

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} \in \mathbb{C}(D_T \cup B_T)$$

и имеет место следующее равенство:

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} = \overline{J}(x,t,t) + \int\limits_0^t \frac{\partial \overline{J}(x,t,\tau)}{\partial t}\, d\tau. \tag{3.16}$$

Предварительно докажем вспомогательную оценку. Рассмотрим следующий интеграл:

$$B(h,a,\mu) := \int\limits_0^1 \frac{\vartheta(a+sh)}{(a+sh)^\mu}\,ds, \quad a>0, \quad h\in\mathbb{R}, \quad \mu\in(0,1). \tag{3.17}$$

Для этой функции найдется такая постоянная $c=c(\mu)>0$, что справедлива оценка:

$$0 \leqslant B(h,a,\mu) \leqslant \frac{c(\mu)}{a^\mu}. \tag{3.18}$$

□ Действительно, имеет место очевидная оценка:

$$B(h,a,\mu) \leqslant \frac{1}{a^\mu} \quad \text{для любого} \quad h \geqslant 0. \tag{3.19}$$

При $h<0$ достаточно рассмотреть следующую функцию:

$$B_1(h,a,\mu) = B(-h,a,\mu) = \int\limits_0^1 \frac{\vartheta(a-sh)}{(a-sh)^\mu}\,ds \quad \text{при} \quad h>0. \tag{3.20}$$

В интеграле (3.20) сделаем замену переменной интегрирования $\sigma = sh$. Получим следующее выражение:

$$B_1(h,a,\mu) = \frac{1}{h}\int\limits_0^h \frac{\vartheta(a-\sigma)}{(a-\sigma)^\mu}\,d\sigma. \tag{3.21}$$

Рассмотрим два случая: $h \leqslant a$ и $h>a$. В первом случае имеем:

$$B_1(h,a,\mu) = \frac{1}{h}\int\limits_0^h \frac{d\sigma}{(a-\sigma)^\mu} = \frac{1}{1-\mu}\frac{1}{h}\left[a^{1-\mu} - (a-h)^{1-\mu}\right] =$$

$$= \frac{1}{1-\mu}\frac{1}{a^\mu}\frac{1-(1-b)^{1-\mu}}{b}, \quad b = \frac{h}{a} \in (0,1]. \tag{3.22}$$

Очевидно, что имеет место оценка:

$$B_1(h,a,\mu) \leqslant c_1(\mu)\frac{1}{a^\mu}, \quad 0<h\leqslant a. \tag{3.23}$$

Рассмотрим случай $h>a$. Тогда имеем:

$$B_1(h,a,\mu) = \frac{1}{h}\int\limits_0^a \frac{d\sigma}{(a-\sigma)^\mu} = \frac{1}{h}\frac{a^{1-\mu}}{1-\mu} =$$

$$= \frac{1}{1-\mu}\frac{a}{h}\frac{1}{a^{\mu}} \leqslant \frac{1}{1-\mu}\frac{1}{a^{\mu}}, \quad a < h. \quad (3.24)$$

Из оценок (3.19), (3.23) и (3.24) получается искомая оценка (3.18). ☒

Для доказательства равенства (3.16) рассмотрим конечно–разностное отношение:

$$\frac{V(x,t+h)-V(x,t)}{h} =$$
$$= \frac{1}{h}\int\limits_0^{t+h} \overline{J}(x,t+h,\tau)\,d\tau - \frac{1}{h}\int\limits_0^{t} \overline{J}(x,t,\tau)\,d\tau =$$
$$= \frac{1}{h}\int\limits_t^{t+h} \overline{J}(x,t+h,\tau)\,d\tau + \frac{1}{h}\int\limits_0^{t} \left[\overline{J}(x,t+h,\tau) - \overline{J}(x,t,\tau)\right]\,d\tau =:$$
$$:= K_1(h) + K_2(h). \quad (3.25)$$

Заметим, что после доопределения (2.4) функции $J(x,t,\tau)$, полученная таким образом функция $\overline{J}(x,t,\tau)$ является непрерывной при $x \in \Omega$ и $0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T$. Поэтому стандартным образом можно доказать, что

$$K_1(h) = \frac{1}{h}\int\limits_t^{t+h} \overline{J}(x,t+h,\tau)\,d\tau \to \overline{J}(x,t,t) \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

□ Действительно, имеем:

$$|K_1(h) - \overline{J}(x,t,t)| \leqslant \frac{1}{|h|}\int\limits_t^{t+h} \left|\overline{J}(x,t+h,\tau) - \overline{J}(x,t,t)\right|\,d\tau \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{\tau \in |t,t+h|} \left|\overline{J}(x,t+h,\tau) - \overline{J}(x,t,t)\right| \to +0 \quad (3.26)$$

при $|h| \to +0$. ☒

Докажем, что для каждого фиксированного $x \in \Omega$ имеет место предельный переход:

$$K_2(h) \to \int\limits_0^t \frac{\partial \overline{J}(x,t,\tau)}{\partial t}\,d\tau \quad \text{при} \quad h \to 0. \quad (3.27)$$

□ Действительно, справедливо следующее равенство:

$$K_2(h) - \int\limits_0^t \frac{\partial \overline{J}(x,t,\tau)}{\partial t}\,d\tau = \int\limits_{t_\varepsilon}^t \frac{\overline{J}(x,t+h,\tau) - \overline{J}(x,t,\tau)}{h}\,d\tau -$$

$$
-\int\limits_{t_\varepsilon}^{t} \frac{\partial \overline{J}(x,t,\tau)}{\partial t}\, d\tau + \int\limits_{0}^{t_\varepsilon} \left[\frac{\partial \overline{J}(x,t^*,\tau)}{\partial t} - \frac{\partial \overline{J}(x,t,\tau)}{\partial t} \right] d\tau :=
$$
$$
:= K_{21}(h) + K_{22}(h) + K_{23}(h), \quad t_\varepsilon \in (0,t),\ t^* \in (0,t_\varepsilon), \quad (3.28)
$$

где условия выбора t_ε мы указаны ниже.

Сначала рассмотрим $K_{21}(h)$. Нужно рассмотреть случай $t-\tau+h > > 0$ и $t > \tau$. В этом случае справедливо следующее соотношение:

$$
\frac{1}{h}\left[\overline{J}(x,t+h,\tau) - \overline{J}(x,t,\tau)\right] = \frac{1}{h}\int\limits_0^1 \frac{d\overline{J}(x,t_s,\tau)}{ds}\, ds =
$$
$$
= \int\limits_0^1 \frac{\partial \overline{J}(x,t_s,\tau)}{\partial t_s}\, ds, \quad t_s = t + sh. \quad (3.29)
$$

С учетом оценки (3.15) получаем неравенство:

$$
\left| \frac{\overline{J}(x,t+h,\tau) - \overline{J}(x,t,\tau)}{h} \right| \leqslant c_{12} \int\limits_0^1 \frac{\vartheta(t-\tau+sh)}{(t-\tau+sh)^\mu}\, ds \leqslant
$$
$$
\leqslant \frac{c_{13}(\mu)}{(t-\tau)^\mu} \quad \text{при} \quad t + sh - \tau > 0,\ s \in [0,1], \quad (3.30)
$$

где использовалась оценка (3.18). Дальнейшие оценки зависят от того какова величина h: $h \geqslant 0$ или $h < 0$. При этом будем предполагать, что $2|h| < t$.

Случай 1. $h \geqslant 0$. Если $t - \tau > 0$, то всегда $t - \tau + h > 0$ и поэтому справедлива оценка (3.30). С учетом оценки (3.30) получаем следующее неравенство:

$$
|K_{21}(h)| \leqslant c_{13}(\mu) \frac{(t-t_\varepsilon)^{1-\mu}}{1-\mu}. \quad (3.31)
$$

Для интеграла $K_{22}(h)$ справедлива аналогичная оценка:

$$
|K_{22}(h)| \leqslant c_{12} \frac{(t-t_\varepsilon)^{1-\mu}}{1-\mu}. \quad (3.32)
$$

Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $t_\varepsilon \in (0,t)$, что в силу оценок (3.31) и (3.32) будут справедливы оценки:

$$
|K_{21}(h)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}, \quad |K_{22}(h)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}. \quad (3.33)
$$

Зафиксируем такое $t_\varepsilon \in (0, t)$ и заметим, что для данного фиксированного $t_\varepsilon = t_\varepsilon(\varepsilon)$ найдется такое малое $\delta = \delta(\varepsilon, t_\varepsilon(\varepsilon)) > 0$, что при $|h| < \delta$ будет выполнено неравенство:

$$|K_{23}(h)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3.34}$$

Случай 2. $h < 0$. Выражение для интеграла $K_{21}(h)$, определенного в (3.28), можно переписать в следующем виде:

$$K_{21}(h) = \int\limits_{t+2h}^{t} \frac{\overline{J}(x, t+h, \tau) - \overline{J}(x, t, \tau)}{h}\, d\tau + \\ + \int\limits_{t_\varepsilon}^{t+2h} \frac{\overline{J}(x, t+h, \tau) - \overline{J}(x, t, \tau)}{h}\, d\tau := \\ := K_{211}(h) + K_{212}(h), \quad t_\varepsilon \in (0, t+2h). \tag{3.35}$$

Используя непрерывное продолжение (2.4) функции $J(x, t, \tau)$, получим оценку:

$$|K_{211}(h)| = \left| \int\limits_{t+2h}^{t} \frac{\overline{J}(x, t+h, \tau) - \overline{J}(x, t, \tau)}{h}\, d\tau \right| \leqslant \\ \leqslant 2 \sup_{\tau \in [t+2h, t]} |\overline{J}(x, t+h, \tau) - \overline{J}(x, t, \tau)| \to +0 \tag{3.36}$$

при $h \to 0 - 0$. Для интеграла $K_{212}(h)$ можно воспользоваться оценкой (3.30) и получить оценку:

$$|K_{212}(h)| \leqslant c_{13}(\mu) \int\limits_{t_\varepsilon}^{t+2h} \frac{1}{(t-\tau)^\mu}\, d\tau = \\ = \frac{1}{1-\mu}(t - t_\varepsilon)^{1-\mu} - \frac{1}{1-\mu}(-2h)^{1-\mu} \leqslant \frac{1}{1-\mu}(t - t_\varepsilon)^{1-\mu}. \tag{3.37}$$

Выберем t_ε достаточно близким к t путем выбора достаточно малого $h < 0$. Тогда

$$|K_{212}(h)| < \frac{\varepsilon}{6}, \quad |K_{22}(h)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3.38}$$

Далее при данном фиксированном t_ε выбираем достаточно малое $h < 0$ таким образом, чтобы

$$|K_{211}(h)| < \frac{\varepsilon}{6}, \quad |K_{23}(h)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3.39}$$

Итак, из (3.28), (3.33) и (3.34)–(3.39) получаем, что

$$K_2(h) \to \int\limits_0^t \frac{\partial \overline{J}(x,t,\tau)}{\partial t}\,d\tau \quad \text{при} \quad h \to 0 \tag{3.40}$$

для каждого фиксированного $(x,t) \in D_T \cup B_T$. ⊠

Следовательно, в силу (3.13) и леммы 3 имеет место равенство: [1]

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} = \overline{J}(x,t,t) + \int\limits_0^t \frac{\partial \overline{J}(x,t,\tau)}{\partial t}\,d\tau =$$

$$= f(x,t) + \lim_{\gamma \to +0} \int\limits_0^{t-\gamma} d\tau \int\limits_\Omega \Delta_x \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau) f(\xi,\tau)\,d\xi =$$

$$= f(x,t) + \Delta_x V(x,t). \tag{3.41}$$

Из равенств (3.41) вытекает [2], что

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} \in \mathbb{C}(D_T \cup B_T).$$

Теорема доказана.

Замечание. У теплового объемного потенциала $V(x,t)$ для произвольной функции $f(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D}_T)$ существует набор «плохих» свойств $D_x^2 V(x,t)$ и $D_t V(x,t)$ в точках $(x_0,t_0) \in S_T = \Gamma \times [0,T]$. По типу свойства (1.3) из предыдущей лекции. Эти свойства в данном курсе рассматриваться не будут.

§ 4. Непрерывность и ограниченность старших производных объемного потенциала

Напомним, что справедливы следующие оценки:

$$|D_t^r D_x^s \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau)| \leqslant A_2 \frac{\vartheta(t-\tau)}{(t-\tau)^\mu |x-\xi|^{N+2r+s-2\mu}} \tag{4.1}$$

при $t > \tau$, $x \neq \xi$. Справедливо следующее первое утверждение:

Лемма 5. *Если функция $f(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D}_T)$, то объемный потенциал $V(x,t) \in \mathbb{C}^{(1,0)}(\mathbb{R}^N \times [0,T])$ и для всех $(x,t) \in D_T$ справедливо равенство*:

$$D_{x_i} V(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_\Omega D_{x_i} \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau) f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau. \tag{4.2}$$

[1] Здесь нужно снова воспользоваться рассуждениями на шаге 5 леммы 2.

[2] Во втором равенстве повторный интеграл понимается в несобственном смысле.

Доказательство. В силу оценки (4.1) функция

$$V_i(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_\Omega D_{x_i} \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau) f(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau \tag{4.3}$$

определена для всех $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times [0,T]$ и, более того, $V_i(x,t) \in \mathbb{C}(D_T)$ (см. доказательство леммы 1). Рассмотрим вспомогательную функцию:

$$\eta(s) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad s \in [0,1]; \\ 1, & \text{если} \quad s \geqslant 2, \end{cases} \qquad \eta(s) \in \mathbb{C}^{(1)}[0,+\infty),\ 0 \leqslant \eta'(s) \leqslant 2. \tag{4.4}$$

Определим для $\varepsilon > 0$ следующую функцию:

$$V_\varepsilon(x,t) := \int\limits_0^t \int\limits_\Omega \eta\left(\frac{|x-\xi|}{\varepsilon}\right) \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau) f(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau. \tag{4.5}$$

Совершенно понятно, что $V_\varepsilon(x,t) \in \mathbb{C}^{(1,0)}(\mathbb{R}^N \times [0,T])$ и при этом справедлива цепочка равенств:

$$\begin{gathered} V_i(x,t) - D_{x_i} V_\varepsilon(x,t) = \\ = \int\limits_0^t \int\limits_\Omega D_{x_i} \left[1 - \eta\left(\frac{|x-\xi|}{\varepsilon}\right) \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau)\right] f(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau = \\ = \int\limits_0^t \int\limits_{|x-\xi| \leqslant 2\varepsilon} D_{x_i} \left[1 - \eta\left(\frac{|x-\xi|}{\varepsilon}\right) \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau)\right] f(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau, \end{gathered} \tag{4.6}$$

из которой с учетом (4.1) при $1 > \mu > 1/2$ получаем оценку:

$$\begin{gathered} |V_i(x,t) - D_{x_i} V_\varepsilon(x,t)| \leqslant \sup_{(x,t)\in D_T} |f(x,t)| \times \\ \times \int\limits_0^t \int\limits_{|x-\xi| \leqslant 2\varepsilon} \left(|D_{x_i} \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau)| + \frac{2}{\varepsilon} |\mathcal{E}(x-\xi, t-\tau)| \right) d\xi\, d\tau \leqslant \\ \leqslant \sup_{(x,t)\in D_T} |f(x,t)| A_2 \int\limits_0^t \frac{1}{(t-\tau)^\mu}\, d\tau \times \\ \times \int\limits_{|x-\xi| \leqslant 2\varepsilon} \left(\frac{1}{|x-\xi|^{N+1-2\mu}} + \frac{2}{\varepsilon} \frac{1}{|x-\xi|^{N-2\mu}} \right) d\xi = \end{gathered}$$

$$= A_2 \frac{T^{1-\mu}}{1-\mu} \sup_{(x,t)\in D_T} |f(x,t)| \omega_N \left(\frac{(2\varepsilon)^{2\mu-1}}{2\mu-1} + \frac{2}{\varepsilon} \frac{(2\varepsilon)^{2\mu}}{2\mu} \right) \to +0 \quad (4.7)$$

при $\varepsilon \to +0$. Следовательно,

$$V_\varepsilon(x,t) \rightrightarrows V(x,t) \quad \text{равномерно на} \quad (x,t) \in G, \quad (4.8)$$

$$D_{x_i} V_\varepsilon(x,t) \rightrightarrows V_i(x,t) \quad \text{равномерно на} \quad (x,t) \in G \quad (4.9)$$

на любом компакте $G \subset \mathbb{R}^N \times [0,T]$. Таким образом,

$$V(x,t) \in \mathbb{C}^{(1,0)}(\mathbb{R}^N \times [0,T]), \quad (4.10)$$

$$D_{x_i} V(x,t) = V_i(x,t) \quad \text{для} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \times [0,T]. \quad (4.11)$$

Лемма доказана.

Лемма 6. *Если $f(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D}_T)$ и локальная непрерывна по Гельдеру по переменной $x \in \Omega$ с показателем $\alpha \in (0,1]$ равномерно по $t \in [0,T]$, то $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,0)}_{x,t}(\overline{D}_T)$ и справедлива формула для вычисления частной производной второго порядка*:

$$D^2_{x_i x_j} V(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_{O(x_0,R_0)} D^2_{x_i x_j} \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau) \left[\overline{f}(\xi,\tau) - \overline{f}(x,\tau) \right] d\xi \, d\tau -$$

$$- \int\limits_0^t \overline{f}(x,\tau) \int\limits_{\partial O(x_0,R_0)} D_{x_i} \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau) \cos(\mathbf{n}_\xi, \mathbf{e}_j) \, dS_\xi \, d\tau, \quad (4.12)$$

где $x \in \Omega \subset O(x_0,R_0)$, $O(x_0,R_0) \subset \mathbb{R}^N$ — произвольный шар, $t \in [0,T]$,

$$\overline{f}(x,t) := \begin{cases} f(x,t), & \text{если} \quad x \in \Omega; \\ 0, & \text{если} \quad x \in \mathbb{R}^N \backslash \Omega, \end{cases} \qquad t \in [0,T]. \quad (4.13)$$

Доказательство.

Введем потенциал:

$$V_{ij}(x,t) := \int\limits_0^t \int\limits_{O(x_0,R_0)} D^2_{x_i x_j} \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau) \left[\overline{f}(\xi,\tau) - \overline{f}(x,\tau) \right] d\xi \, d\tau -$$

$$- \int\limits_0^t \overline{f}(x,\tau) \int\limits_{\partial O(x_0,R_0)} D_{x_i} \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau) \cos(\mathbf{n}_\xi, \mathbf{e}_j) \, dS_\xi \, d\tau. \quad (4.14)$$

В силу оценки (4.1) потенциал $V_{ij}(x,t)$ определен для всех $(x,t) \in D_T$ и, более того, $V_{ij}(x,t) \in \mathbb{C}(D_T)$ (см. доказательство леммы 1). Пусть

$$V_i(x,t) := D_{x_i} V(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_\Omega D_{x_i} \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau) f(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau \tag{4.15}$$

и для произвольного достаточно малого $\varepsilon > 0$ определим функцию:

$$V_{i\varepsilon}(x,t) := \int\limits_0^t \int\limits_\Omega \eta\left(\frac{|x-\xi|}{\varepsilon}\right) D_{x_i} \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau) f(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau. \tag{4.16}$$

Заметим, что $V_{i\varepsilon}(x,t) \in \mathbb{C}^{(1,0)}_{x,t}(D_T)$ и справедливо равенство

$$\begin{aligned}
&D_{x_j} V_{i\varepsilon}(x,t) := \\
&\quad = \int\limits_0^t \int\limits_\Omega D_{x_j}\left(\eta\left(\frac{|x-\xi|}{\varepsilon}\right) D_{x_i} \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau)\right) f(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau = \\
&= \int\limits_0^t \int\limits_\Omega D_{x_j}\left(\eta\left(\frac{|x-\xi|}{\varepsilon}\right) D_{x_i} \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau)\right) [f(\xi,\tau) - f(x,\tau)]\, d\xi\, d\tau + \\
&\quad + \int\limits_0^t f(x,\tau) \int\limits_\Omega D_{x_j}\left(\eta\left(\frac{|x-\xi|}{\varepsilon}\right) D_{x_i} \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau)\right) d\xi\, d\tau = \\
&= \int\limits_0^t \int\limits_{O(x_0,R_0)} D_{x_j}\left(\eta\left(\frac{|x-\xi|}{\varepsilon}\right) D_{x_i} \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau)\right) \left[\overline{f}(\xi,\tau) - \overline{f}(x,\tau)\right] d\xi\, d\tau + \\
&\quad + \int\limits_0^t \overline{f}(x,\tau) \int\limits_{O(x_0,R_0)} D_{x_j}\left(\eta\left(\frac{|x-\xi|}{\varepsilon}\right) D_{x_i} \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau)\right) d\xi\, d\tau = \\
&= \int\limits_0^t \int\limits_{O(x_0,R_0)} D_{x_j}\left(\eta\left(\frac{|x-\xi|}{\varepsilon}\right) D_{x_i} \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau)\right) \left[\overline{f}(\xi,\tau) - \overline{f}(x,\tau)\right] d\xi\, d\tau - \\
&\quad - \int\limits_0^t \overline{f}(x,\tau) \int\limits_{O(x_0,R_0)} D_{\xi_j}\left(\eta\left(\frac{|x-\xi|}{\varepsilon}\right) D_{x_i} \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau)\right) d\xi\, d\tau = \\
&= \int\limits_0^t \int\limits_{O(x_0,R_0)} D_{x_j}\left(\eta\left(\frac{|x-\xi|}{\varepsilon}\right) D_{x_i} \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau)\right) \left[\overline{f}(\xi,\tau) - \overline{f}(x,\tau)\right] d\xi\, d\tau -
\end{aligned}$$

$$-\int\limits_0^t \overline{f}(x,\tau) \int\limits_{\partial O(x_0,R_0)} \eta\left(\frac{|x-\xi|}{\varepsilon}\right) D_{x_i}\mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)\cos(\mathbf{n}_\xi,\mathbf{e}_j)\,d\xi\,d\tau. \tag{4.17}$$

Из (4.14) и (4.17) вытекает равенство

$$\begin{aligned} &D_{x_j}V_{i\varepsilon}(x,t) - V_{ij}(x,t) = \\ &= \int\limits_0^t \int\limits_{O(x_0,R_0)} D_{x_j}\left(\left[1-\eta\left(\frac{|x-\xi|}{\varepsilon}\right)\right] D_{x_i}\mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)\right) \times \\ &\qquad \times \left[\overline{f}(\xi,\tau) - \overline{f}(x,\tau)\right]\,d\xi\,d\tau - \\ &\qquad -\int\limits_0^t \overline{f}(x,\tau) \int\limits_{\partial O(x_0,R_0)} \left[1-\eta\left(\frac{|x-\xi|}{\varepsilon}\right)\right] \times \\ &\qquad \times D_{x_i}\mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)\cos(\mathbf{n}_\xi,\mathbf{e}_j)\,d\xi\,d\tau. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Потребуем, чтобы $2\varepsilon < \mathrm{distance}(x,\partial\Omega)$. Поэтому подынтегральное выражение во втором интеграле в равенстве (4.18) равно нулю. Справедлива оценка:

$$\begin{aligned} &\left|D_{x_j}V_{i\varepsilon}(x,t) - V_{ij}(x,t)\right| \leqslant \\ &\leqslant \int\limits_0^t \int\limits_{|x-\xi|\leqslant 2\varepsilon} \left|D_{x_j}\left(\left[1-\eta\left(\frac{|x-\xi|}{\varepsilon}\right)\right] D_{x_i}\mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)\right)\right| \times \\ &\qquad \times \left|\overline{f}(\xi,\tau) - \overline{f}(x,\tau)\right|\,d\xi\,d\tau \leqslant \\ &\leqslant \int\limits_0^t [f(\tau)]_{\alpha,x} \int\limits_{|x-\xi|\leqslant 2\varepsilon} |x-\xi|^\alpha \left[\left|D^2_{x_ix_j}\mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)\right| + \right. \\ &\qquad \left. + \frac{2}{\varepsilon}\left|D_{x_i}\mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)\right|\right] d\xi\,d\tau \leqslant \\ &\qquad \leqslant A_2 \sup_{t\in[0,T]} [f(t)]_{x,\alpha} \int\limits_0^t \frac{1}{(t-\tau)^\mu}\,d\tau \times \\ &\times \int\limits_{|x-\xi|\leqslant 2\varepsilon} \left[\frac{1}{|x-\xi|^{N+2-2\mu-\alpha}} + \frac{2}{\varepsilon}\frac{1}{|x-\xi|^{N+1-2\mu-\alpha}}\right] d\xi \leqslant \\ &\leqslant A_2 \sup_{t\in[0,T]} [f(t)]_{x,\alpha} \frac{T^{1-\mu}}{1-\mu}\left[\frac{(2\varepsilon)^{2\mu-2+\alpha}}{2\mu-2+\alpha} + \frac{2}{\varepsilon}\frac{(2\varepsilon)^{2\mu-1+\alpha}}{2\mu-1+\alpha}\right] \to +0 \end{aligned} \tag{4.19}$$

при $\varepsilon \to +0$ и при условии, что $1 - \alpha/2 < \mu < 1$. Таким образом, приходим к выводу о том, что

$$D_{x_j} V_{i\varepsilon}(x,t) \rightrightarrows V_{ij}(x,t) \quad \text{равномерно на} \quad (x,t) \in G, \tag{4.20}$$

$$V_{i\varepsilon}(x,t) \rightrightarrows V_i(x,t) \quad \text{равномерно на} \quad (x,t) \in G \tag{4.21}$$

для любого компакта $G \subset \mathbb{R}^N \times [0,T]$. Отсюда с учетом леммы 5 получаем, что $V(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,0)}_{x,t}(\overline{D}_T)$ и справедливо равенство (4.12).

Лемма доказана.

Точно также можно доказать следующий результат:

Лемма 7. *Если $f(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D}_T)$ и локальная непрерывна по Гельдеру по переменной $x \in \Omega$ с показателем $\alpha \in (0,1]$ равномерно по $t \in [0,T]$, то $V(x,t) \in \mathbb{C}^{(0,1)}_{x,t}(\overline{D}_T)$ и справедлива формула для вычисления частной производной по времени*:

$$D_t V(x,t) = \overline{f}(x,t) + \int\limits_0^t \int\limits_{O(x_0,R_0)} \Delta_x \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau) \left[\overline{f}(\xi,\tau) - \overline{f}(x,\tau)\right] d\xi\, d\tau - \\ - \int\limits_0^t \overline{f}(x,\tau) \int\limits_{\partial O(x_0,R_0)} \frac{\partial \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial \mathbf{n}_\xi} dS_\xi\, d\tau, \tag{4.22}$$

где $x \in \Omega \subset O(x_0,R_0)$, $O(x_0,R_0) \subset \mathbb{R}^N$ — произвольный шар, $t \in [0,T]$,

$$\overline{f}(x,t) := \begin{cases} f(x,t), & \text{если} \quad x \in \Omega; \\ 0, & \text{если} \quad x \in \mathbb{R}^N \backslash \Omega, \end{cases} \qquad t \in [0,T]. \tag{4.23}$$

Доказательство. При условиях теоремы справедливо равенство:

$$D_t V(x,t) = f(x,t) + \Delta V(x,t) \quad \text{для} \quad (x,t) \in D_T.$$

Далее нужно воспользоваться техникой предыдущей леммы.

Лемма доказана.

Лемма 8. *Если $f(x,t) \in \mathbb{C}_b(D_T)$, то*

$$|V_{x_i}(x'',t'') - V_{x_i}(x',t')| \leqslant \\ \leqslant M \sup_{(x,t) \in \overline{D}_T} |f(x,t)| \left[|x''-x'|^{\vartheta_1} + |t''-t'|^{\vartheta_2/2}\right] \tag{4.24}$$

для любых (x'',t''), $(x',t') \in \mathbb{R}^N \times [0,T]$ и для любых $\vartheta_1, \vartheta_2 \in (0,1)$ и постоянная $M = M(T,N,\vartheta_1,\vartheta_2) > 0$.

Доказательство.

Шаг 1. Гельдеровость по переменной $x \in \Omega$. Пусть $x'', x' \in \mathbb{R}^N$ — произвольные фиксированные точки. Введем обозначения

$$x_0 = \frac{x''+x'}{2}, \quad \rho_0 = |x''-x'|, \quad O(x_0,\rho_0) \subset \mathbb{R}^N.$$

Сначала рассмотрим случай $0 < \rho_0 < 1$. Пусть

$$\overline{f}(x,t) := \begin{cases} f(x,t), & \text{если} \quad x \in \Omega; \\ 0, & \text{если} \quad x \in \mathbb{R}^N \backslash \Omega, \end{cases} \qquad t \in [0,T].$$

Тогда для объемного потенциала $V(x,t)$ справедливо следующее равенство:

$$V(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau)\overline{f}(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau.$$

Отсюда получаем равенство

$$V_{x_i}(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}_{x_i}(x-\xi, t-\tau)\overline{f}(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau. \tag{4.25}$$

Тогда справедливы равенства

$$V_{x_i}(x'',t) - V_{x_i}(x',t) =$$
$$= \int\limits_0^t \int\limits_{O(x_0,\rho_0)} \left[\mathcal{E}_{x_i}(x''-\xi, t-\tau) - \mathcal{E}_{x_i}(x'-\xi, t-\tau)\right]\overline{f}(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau +$$
$$+ \int\limits_0^t \int\limits_{O(x_0,R_0)\backslash O(x_0,\rho_0)} \left[\mathcal{E}_{x_i}(x''-\xi, t-\tau) - \mathcal{E}_{x_i}(x'-\xi, t-\tau)\right]\overline{f}(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau :=$$
$$:= I_1 + I_2, \tag{4.26}$$

где $R_0 = R_0(\Omega) > 0$ настолько велико, что $\Omega \subset O(x_0, R_0)$ для любого $x_0 \in \Omega$. Теперь воспользуемся оценкой (4.1) при $1/2 < \mu < 1$ и тогда для интеграла I_1 справедливы оценки:

$$|I_1| \leqslant A_2 \sup_{(x,t)\in\overline{D}_T} |f(x,t)| \int\limits_0^t \frac{1}{(t-\tau)^\mu}\,d\tau \times$$
$$\times \int\limits_{O(x_0,\rho_0)} \left[\frac{1}{|x''-\xi|^{N+1-2\mu}} + \frac{1}{|x'-\xi|^{N+1-2\mu}}\right] d\xi. \tag{4.27}$$

Заметим, что если $\xi \in O(x_0,\rho_0)$, то

$$|\xi - x''| \leqslant |\xi - x_0| + |x'' - x_0| \leqslant \rho_0 + \frac{\rho_0}{2} = \frac{3\rho_0}{2}.$$

Поэтому оценку (4.27) можно продолжить следующим образом:

$$|I_1| \leqslant A_2 \sup_{(x,t)\in\overline{D}_T} |f(x,t)| \frac{T^{1-\mu}}{1-\mu} 2 \int\limits_{O(y,3\rho_0/2)} \frac{1}{|\xi - y|^{N+1-2\mu}}\, d\xi =$$

$$= A_2 \sup_{(x,t)\in\overline{D}_T} |f(x,t)| \frac{T^{1-\mu}}{1-\mu} 2\omega_N \frac{(3\rho_0/2)^{2\mu-1}}{2\mu-1}. \quad (4.28)$$

Для оценки интеграла I_2 нужно вспомогательные оценки. Справедливы равенства:

$$\mathcal{E}_{x_i}(x'' - \xi, t-\tau) - \mathcal{E}_{x_i}(x' - \xi, t-\tau) =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{d}{ds} \mathcal{E}_{x_{si}}(x_s - \xi, t-\tau)\, ds =$$

$$= \int\limits_0^1 \sum_{j=1}^N \mathcal{E}_{x_{js} x_{is}}(x_s - \xi, t-\tau) \left[x''_j - x'_j\right] ds, \quad x_s = sx'' + (1-s)x' \quad (4.29)$$

при $x_s \neq \xi$ и $t > \tau$. Воспользуемся оценкой (4.1) при $1/2 < \mu < 1$ и получим неравенство:

$$|\mathcal{E}_{x_i}(x'' - \xi, t-\tau) - \mathcal{E}_{x_i}(x' - \xi, t-\tau)| \leqslant$$

$$\leqslant NA_2 \frac{|x'' - x'|}{(t-\tau)^\mu} \int\limits_0^1 \frac{1}{|\xi - x_s|^{N+2-2\mu}}\, ds. \quad (4.30)$$

Заметим, что при $|\xi - x_0| \geqslant \rho_0$ справедливы неравенства:

$$|x_s - x_0| \leqslant s|x'' - x_0| + (1-s)|x' - x_0| = s\frac{\rho_0}{2} + (1-s)\frac{\rho_0}{2} = \frac{\rho_0}{2},$$

$$-|x_s - x_0| \geqslant -\frac{\rho_0}{2}, \quad -\rho_0 \geqslant -|\xi - x_0| \Rightarrow -|x_s - x_0| \geqslant -\frac{1}{2}|\xi - x_0|$$

$$|\xi - x_s| \geqslant |\xi - x_0| - |x_s - x_0| \geqslant |\xi - x_0| - \frac{1}{2}|\xi - x_0| = \frac{1}{2}|\xi - x_0|.$$

Отсюда и из (4.30) получаем оценку:

$$|\mathcal{E}_{x_i}(x'' - \xi, t-\tau) - \mathcal{E}_{x_i}(x' - \xi, t-\tau)| \leqslant$$

$$\leqslant NA_2 2^{N+2-2\mu} \frac{|x'' - x'|}{(t-\tau)^\mu} \frac{1}{|\xi - x_0|^{N+2-2\mu}}. \quad (4.31)$$

Из (4.31) получаем оценку для I_2:

$$|I_2| \leqslant A_3 \sup_{(x,t)\in\overline{D}_T} |f(x,t)||x''-x'| \int\limits_0^t \frac{1}{(t-\tau)^\mu}\,d\tau \times$$
$$\times \int\limits_{O(x_0,R_0)\setminus O(x_0,\rho_0)} \frac{1}{|\xi-x_0|^{N+2-2\mu}}\,d\xi =$$
$$= A_3 \sup_{(x,t)\in\overline{D}_T} |f(x,t)||x''-x'| \frac{T^{1-\mu}}{1-\mu}\omega_N \int\limits_{\rho_0}^{R_0} \frac{1}{\rho^{3-2\mu}}\,d\rho =$$
$$= A_3 \sup_{(x,t)\in\overline{D}_T} |f(x,t)| \frac{T^{1-\mu}}{1-\mu}\frac{\omega_N}{2-2\mu}\left[\rho_0^{2\mu-1} - \frac{\rho_0}{R_0^{2-2\mu}}\right] \leqslant$$
$$\leqslant A_4 \sup_{(x,t)\in\overline{D}_T} |f(x,t)| T^{1-\mu}\rho_0^{2\mu-1}. \quad (4.32)$$

Из (4.28) и (4.32) при $0<\rho_0<1$ получаем оценку

$$|V_{x_i}(x'',t) - V_{x_i}(x',t)| \leqslant$$
$$\leqslant M_1(\mathrm{T},\mu,N) \sup_{(x,t)\in\overline{D}_T} |f(x,t)||x''-x'|^{\vartheta_1}, \quad \vartheta_1\in(0,1) \quad (4.33)$$

для любых $x'',x'\in\mathbb{R}^N$ и $t\in[0,T]$. Если же $\rho_0=|x''-x'|\geqslant 1$, то справедлива оценка

$$|V_{x_i}(x'',t) - V_{x_i}(x',t)| \leqslant 2 \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^N\times[0,T]} |V_{x_i}(x,t)| \leqslant$$
$$\leqslant 2 \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^N\times[0,T]} |V_{x_i}(x,t)||x''-x'|^{\vartheta_1} \leqslant$$
$$\leqslant M_2(N,\mu,T) \sup_{(x,t)\in\overline{D}_T} |f(x,t)||x''-x'|^{\vartheta_1}, \quad \vartheta_1\in(0,1). \quad (4.34)$$

Комбинируя оценки (4.33) и (4.34) мы получим искомую оценку:

$$|V_{x_i}(x'',t) - V_{x_i}(x',t)| \leqslant$$
$$\leqslant M_3(\mathrm{T},\mu,N) \sup_{(x,t)\in\overline{D}_T} |f(x,t)||x''-x'|^{\vartheta_1}, \quad \vartheta_1\in(0,1) \quad (4.35)$$

для любых $x'',x'\in\mathbb{R}^N$ и $t\in[0,T]$.

Шаг 2. Гельдеровость по переменной $t\in[0,T]$. Пусть $0\leqslant t'<$ $<t''\leqslant T$ и $R_0>0$ настолько велико, что $\Omega\subset O(x,R_0)$ для любого $x\in\overline{\Omega}$. Тогда справедливы равенства:

$$V_{x_i}(x,t'') - V_{x_i}(x,t') = \int\limits_0^{t''}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}_{x_i}(x-\xi,t''-\tau)\overline{f}(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau -$$

$$-\int_0^{t'}\int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}_{x_i}(x-\xi,t'-\tau)\overline{f}(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau =$$
$$=\int_{t'}^{t''}\int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}_{x_i}(x-\xi,t''-\tau)\overline{f}(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau+$$
$$+\int_0^{t'}\int_{\mathbb{R}^N} \left[\mathcal{E}_{x_i}(x-\xi,t''-\tau)-\mathcal{E}_{x_i}(x-\xi,t'-\tau)\right]\overline{f}(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau :=$$
$$:= I_3 + I_4. \quad (4.36)$$

Для интеграла I_3 справедлива следующая оценка при $1/2<\mu<1$:

$$|I_3| \leqslant A_0 \sup_{(x,t)\in\overline{D}_T}|f(x,t)|\int_{t'}^{t''}\frac{1}{(t''-\tau)^{\mu}}\,d\tau\int_{O(x,R_0)}\frac{1}{|x-\xi|^{N+1-2\mu}}\,d\xi \leqslant$$
$$\leqslant A_0 \sup_{(x,t)\in\overline{D}_T}|f(x,t)|\frac{(t''-t')^{1-\mu}}{1-\mu}\omega_N\frac{R_0^{2\mu-1}}{2\mu-1}. \quad (4.37)$$

Пусть $0<\delta<R_0$ — некоторое фиксированное. Тогда для интеграла I_4 справедливо равенство:

$$I_4 = I_{41} + I_{42}, \quad (4.38)$$

$$I_{41} = \int_0^{t'}\int_{O(x,\delta)} \left[\mathcal{E}_{x_i}(x-\xi,t''-\tau)-\mathcal{E}_{x_i}(x-\xi,t'-\tau)\right]\overline{f}(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau, \quad (4.39)$$

$$I_{42} = \int_0^{t'}\int_{O(x,R_0)\setminus O(x,\delta)} \left[\mathcal{E}_{x_i}(x-\xi,t''-\tau)-\mathcal{E}_{x_i}(x-\xi,t'-\tau)\right]\overline{f}(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau. \quad (4.40)$$

Для интеграла I_{41} справедлива следующая оценка при $1/2<\mu<1$:

$$|I_{41}| \leqslant A_2 \sup_{(x,t)\in\overline{D}_T}|f(x,t)|\int_0^{t'}\left[\frac{1}{(t''-\tau)^{\mu}}+\frac{1}{(t'-\tau)^{\mu}}\right]d\tau\times$$
$$\times\int_{O(x,\delta)}\frac{1}{|x-\xi|^{N+1-2\mu}}\,d\xi \leqslant$$
$$\leqslant A_2 \sup_{(x,t)\in\overline{D}_T}|f(x,t)|\left[\frac{(t''-t')^{1-\mu}}{1-\mu}+\frac{t'^{1-\mu}}{1-\mu}\right]\omega_N\frac{\delta^{2\mu-1}}{2\mu-1}. \quad (4.41)$$

Для того, чтобы оценить интеграл I_{42} нам нужно оценить подынтегральное выражение, воспользовавшись оценкой (4.1) при $1/2 < \mu < 1$:

$$\mathcal{E}_{x_i}(x-\xi, t''-\tau) - \mathcal{E}_{x_i}(x-\xi, t'-\tau) = \int\limits_0^1 \frac{d}{ds}\mathcal{E}_{x_i}(x-\xi, t_s-\tau)\,ds =$$

$$= [t''-t']\int\limits_0^1 \mathcal{E}_{x_i t_s}(x-\xi, t_s-\tau)\,ds, \quad t_s = st''+(1-s)t', \tag{4.42}$$

$$|\mathcal{E}_{x_i t_s}(x-\xi, t_s-\tau)| \leqslant A_2\frac{\vartheta(t_s-\tau)}{(t_s-\tau)^{\mu}}\frac{1}{|x-\xi|^{N+3-2\mu}}. \tag{4.43}$$

Из (4.42) и (4.43) вытекает оценка:

$$|\mathcal{E}_{x_i}(x-\xi, t''-\tau) - \mathcal{E}_{x_i}(x-\xi, t'-\tau)| \leqslant$$

$$\leqslant A_2\frac{|t''-t'|}{|x-\xi|^{N+3-2\mu}}\int\limits_0^1 \frac{\vartheta(t_s-\tau)}{(t_s-\tau)^{\mu}}\,ds \tag{4.44}$$

Заметим, что справедлива оценка:

$$\int\limits_0^1 \frac{\vartheta(t_s-\tau)}{(t_s-\tau)^{\mu}}\,ds = \int\limits_0^1 \frac{\vartheta(s(t''-t')+t'-\tau)}{(s(t''-t')+t'-\tau)^{\mu}}\,ds =$$

$$= \frac{1}{t''-t'}\int\limits_0^{t''-t'} \frac{\vartheta(\sigma+t'-\tau)}{(\sigma+t'-\tau)^{\mu}}\,d\sigma \leqslant \frac{1}{(t'-\tau)^{\mu}}. \tag{4.45}$$

Таким образом, из (4.44) и (4.45) получаем оценку:

$$|\mathcal{E}_{x_i}(x-\xi, t''-\tau) - \mathcal{E}_{x_i}(x-\xi, t'-\tau)| \leqslant$$

$$\leqslant A_2\frac{|t''-t'|}{|x-\xi|^{N+3-2\mu}}\frac{1}{(t'-\tau)^{\mu}}. \tag{4.46}$$

С учетом оценки (4.46) для интеграла I_{42} справедлива следующая оценка:

$$|I_{42}| \leqslant A_2 \sup_{(x,t)\in\overline{D}_T}|f(x,t)||t''-t'|\int\limits_0^{t'}\frac{1}{(t'-\tau)^{\mu}}\,d\tau\times$$

$$\times \int\limits_{O(x,R_0)\setminus O(x,\delta)} \frac{1}{|x-\xi|^{N+3-2\mu}}\,d\xi \leqslant A_2\frac{T^{2\mu-1}}{2\mu-1}\sup_{(x,t)\in\overline{D}_T}|f(x,t)||t''-t'|\times$$

$$\times\,\omega_N\int\limits_{\delta}^{R_0}\frac{1}{\rho^{4-2\mu}}\,d\rho = A_2\frac{T^{2\mu-1}}{2\mu-1}\sup_{(x,t)\in\overline{D}_T}|f(x,t)||t''-t'|\times$$
$$\times\,\omega_N\frac{1}{3-2\mu}\left[\frac{1}{\delta^{3-2\mu}}-\frac{1}{R_0^{3-2\mu}}\right]\leqslant$$
$$\leqslant A_2\frac{T^{2\mu-1}}{2\mu-1}\sup_{(x,t)\in\overline{D}_T}|f(x,t)||t''-t'|\omega_N\frac{1}{3-2\mu}\frac{1}{\delta^{3-2\mu}}. \quad (4.47)$$

Теперь выберем $\delta = |t''-t'|^{\beta}$ и потребуем, чтобы в (4.41) и (4.47)

$$|t''-t'|\delta^{2\mu-3}=\delta^{2\mu-1}\Rightarrow\beta(2\mu-3)+1=\beta(2\mu-1)\Leftrightarrow\beta=1/2.$$

Тогда из оценок (4.37), (4.41), (4.47) с учетом равенств (4.36) и (4.38) получим оценку:

$$|V_{x_i}(x,t'')-V_{x_i}(x,t')|\leqslant M_4(T,N,\mu)\sup_{(x,t)\in\overline{D}_T}|f(x,t)||t''-t'|^{\vartheta_2/2} \quad (4.48)$$

для любых $\vartheta_2\in(0,1)$, $t',t''\in[0,T]$ и $x\in\mathbb{R}^N$.

Шаг 3. Общая оценка. Из оценок (4.35) и (4.48) приходим к следующей оценке:

$$|V_{x_i}(x'',t'')-V_{x_i}(x',t')|\leqslant|V_{x_i}(x'',t'')-V_{x_i}(x'',t')|+$$
$$+|V_{x_i}(x'',t')-V_{x_i}(x',t')|\leqslant M(T,N,\vartheta_1,\vartheta_2)\times$$
$$\times\sup_{(x,t)\in\overline{D}_T}|f(x,t)|\left[|x''-x'|^{\vartheta_1}+|t''-t'|^{\vartheta_2/2}\right] \quad (4.49)$$

для любых $\vartheta_1,\vartheta_2\in(0,1)$ и любых (x'',t''), $(x',t')\in\mathbb{R}^N\times[0,T]$.

Лемма доказана.

§ 5. Литературные указания

Материал для лекции взят из работы [14].

Лекция 7

ТЕПЛОВОЙ ПОТЕНЦИАЛ ДВОЙНОГО СЛОЯ

§ 1. Свойства дифференцируемости

Ранее отмечено, что в третью формулу Грина входят потенциалы двойного и простого слоя. С целью исследования разрешимости первой смешанной краевой задачи изучим свойства потенциала двойного слоя. Потенциал двойного слоя в цилиндрической области $D_T = \Omega \times (0, T)$ имеет следующий вид:

$$W[\rho](x,t) = W(x,t) \overset{\text{def}}{=} \int_0^t \int_\Gamma \rho(\xi,\tau) \frac{\partial \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau)}{\partial \mathbf{n}_{\xi,\tau}} \, dS_\xi \, d\tau, \tag{1.1}$$

где $t \in [0,T]$, $\mathbf{n}_{\xi,\tau} = (\mathbf{n}_\xi, 0)$ — это вектор внешней нормали к боковой границе $S_T = \Gamma \times (0,T)$ цилиндрической области $D_T = \Omega \times [0,T]$, где $\mathbf{n}_\xi$ — вектор внешней нормали в точке $\xi \in \Gamma$ по отношению к области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Предположим, что $\Gamma \in \mathbb{C}^{1,\alpha}$ при $\alpha \in (0,1]$.

Замечание. Справедливы равенства:

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial \mathbf{n}_{\xi,\tau}} = (\mathbf{n}_{\xi,\tau}, D_{x,t}) f(x,t) = (\mathbf{n}_\xi, D_x) f(x,t) := \frac{\partial f(x,t)}{\partial \mathbf{n}_\xi},$$

$$D_{x,t} = (D_x, D_t), \quad D_x = (\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_N}).$$

Имеет место следующая

Лемма 1. *Тепловой потенциал двойного слоя* $W(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}\left(\left(\mathbb{R}^N \backslash \Gamma\right) \times [0,T]\right)$ *и удовлетворяет однородному уравнению теплопроводности для всех* $(x,t) \in \left(\mathbb{R}^N \backslash \Gamma\right) \times [0,T]$.

Доказательство. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^N \backslash \Gamma$ и $t \in [0,T]$. Тогда

$$d_0 := \operatorname{distance}(x_0, \Gamma) > 0 \Rightarrow \overline{O(x_0, d_0/2)} \subset \mathbb{R}^N \backslash \Gamma.$$

Рассмотрим функцию

$$f(\xi,\tau;x,t) := \rho(\xi,\tau) \frac{\partial \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau)}{\partial \mathbf{n}_\xi} \tag{1.2}$$

при $(\xi, \tau) \in S_T$ и $0 \leqslant \tau < t \leqslant T$. Поскольку для любого $x \in \overline{O(x_0, d_0/2)}$ для всех $\xi \in \Gamma$ имеем $|x - \xi| \geqslant d_0/2 > 0$, то существует непрерывное продолжение функции $f(\xi, \tau; x, t)$:

$$\overline{f}(\xi, \tau; x, t) = \begin{cases} f(\xi, \tau; x, t), & \text{если} \quad 0 \leqslant \tau < t \leqslant T; \\ 0, & \text{если} \quad 0 \leqslant \tau = t \leqslant T, \end{cases} \tag{1.3}$$

причем для любых $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ имеем:

$$D_x^m D_t^n \overline{f}(\xi, \tau; x, t) = \begin{cases} D_x^m D_t^n f(\xi, \tau; x, t), & \text{если} \quad 0 \leqslant \tau < t \leqslant T; \\ 0, & \text{если} \quad 0 \leqslant \tau = t \leqslant T, \end{cases} \tag{1.4}$$

$$D_x^m D_t^n \overline{f}(\xi, \tau; x, t) \in \mathbb{C}_{\xi, x, \tau, t}\left(\Gamma \times \overline{O(x_0, d_0/2)} \times \{0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T\}\right), \tag{1.5}$$

где символом D_x^m обозначена любая частная производная порядка $m \in \mathbb{N}$ и единичный оператор, если $m = 0$, а символом D_t^n обозначена частная производная по t порядка $n \in \mathbb{N}$ и единичный оператор при $n = 0$.

З а м е ч а н и е. Здесь использован тот факт, что для любых фиксированных точек x, ξ таких, что $R \geqslant |x - \xi| \geqslant r > 0$ справедлива оценка:

$$|D_x^m D_t^n \mathcal{E}(x - \xi, t - \tau)| \leqslant M(R, N, m, n) \frac{\exp(-r^2/(4(t-\tau)))}{(t-\tau)^{N/2+2n+m}} \to +0$$

при $\tau \uparrow t$.

Функция $\overline{f}(\xi, \tau; x, t)$ удовлетворяет поточечному равенству:

$$\frac{\partial \overline{f}(\xi, \tau; x, t)}{\partial t} - \Delta_x \overline{f}(\xi, \tau; x, t) = 0, \quad x \neq \xi. \tag{1.6}$$

По аналогии с лекцией 5 и существенно проще можно доказать, что функция

$$W(x, t) = \int_0^t \int_\Gamma \overline{f}(\xi, \tau; x, t)\, dS_\xi\, d\tau \in \mathbb{C}_{x,t}^{(2,1)}\big(\big(\mathbb{R}^N \backslash \Gamma\big) \times [0, T]\big), \tag{1.7}$$

причем справедливы, например, следующие поточечные равенства при $(x, t) \in \big(\mathbb{R}^N \backslash \Gamma\big) \times [0, T]$:

$$\Delta_x W(x, t) = \int_0^t \int_\Gamma \Delta_x \overline{f}(\xi, \tau; x, t)\, dS_\xi\, d\tau, \tag{1.8}$$

$$\frac{\partial W(x,t)}{\partial t} = \int\limits_0^t \int\limits_\Gamma \frac{\partial \overline{f}(\xi,\tau;x,t)}{\partial t}\, dS_\xi\, d\tau +$$

$$+ \int\limits_\Gamma \overline{f}(\xi,t;x,t)\, dS_\xi = \int\limits_0^t \int\limits_\Gamma \frac{\partial \overline{f}(\xi,\tau;x,t)}{\partial t}\, dS_\xi\, d\tau, \tag{1.9}$$

из которых в силу (1.6) следует уравнение:

$$\frac{\partial W(x,t)}{\partial t} - \Delta_x W(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \left(\mathbb{R}^N \backslash \Gamma\right) \times [0,T]. \tag{1.10}$$

Лемма доказана.

§ 2. Предельные формулы

Сделаем ряд предположений и введём ряд обозначений. Будем считать, что плотность $\rho(x,t)$ потенциала двойного слоя $W[\rho](x,t)$ можно продолжить нулём при $t < 0$ так, чтобы

$$\rho(x,t) \in \mathbb{C}(\Gamma \times (-\infty, T]), \quad T > 0.$$

Пусть $(x_0,t_0) \in S_T$. При условии существования введём следующие пределы:

$$W_i(x_0,t_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Omega\times[0,T]\ni(x,t)\to(x_0,t_0)\in S_T} W(x,t), \tag{2.1}$$

$$W_e(x_0,t_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\left(\mathbb{R}^N\backslash\overline{\Omega}\right)\times[0,T]\ni(x,t)\to(x_0,t_0)\in S_T} W(x,t). \tag{2.2}$$

Справедлива следующая основная

Теорема 1. *Тепловой потенциал двойного слоя $W(x,t)$ определён всюду в $\mathbb{R}^{N+1}$ и терпит скачок при переходе через боковую границу S_T цилиндрической области D_T. Пределы* (2.1) *и* (2.2) *существуют, причём имеют место следующие предельные свойства*:

$$W_i(x_0,t_0) = W(x_0,t_0) - \frac{1}{2}\rho(x_0,t_0), \tag{2.3}$$

$$W_e(x_0,t_0) = W(x_0,t_0) + \frac{1}{2}\rho(x_0,t_0), \tag{2.4}$$

где

$$W(x_0,t_0) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_0^{t_0} \int\limits_\Gamma \rho(\tau,\xi) \frac{\partial \mathcal{E}(x_0-\xi,t_0-\tau)}{\partial \mathbf{n}_\xi} dS_\xi\, d\tau. \tag{2.5}$$

Доказательство.

Шаг 1. Пусть $\{O, \mathbf{E}\}$ — прямоугольная декартова система координат в $\mathbb{R}^{N+1}$, где $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_N, \mathbf{e}_t)$. Заметим, что при $x \neq \xi$ и $\tau \neq t$ справедливо равенство:

$$\frac{\partial \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau)}{\partial \mathbf{n}_\xi} = \\ = -\frac{\vartheta(t-\tau)}{2^{N+1}\pi^{N/2}} \frac{|x-\xi|}{(t-\tau)^{N/2+1}} \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right) \cos(\xi - x, \mathbf{n}_\xi). \quad (2.6)$$

□ Действительно, имеем:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \mathbf{n}_\xi} = (\mathbf{n}_\xi, D_\xi)\mathcal{E} = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \xi_k} \cos(\mathbf{n}_\xi, \mathbf{e}_k) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \xi_k} \cos(\mathbf{n}_\xi, \mathbf{e}_k) = \\ = -\frac{\vartheta(t-\tau)}{2^{N+1}\pi^{N/2}} \frac{|x-\xi|}{(t-\tau)^{N/2+1}} \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right) \sum_{k=1}^{N} \frac{\xi_k - x_k}{r} \cos(\mathbf{n}_\xi, \mathbf{e}_k) = \\ = -\frac{\vartheta(t-\tau)}{2^{N+1}\pi^{N/2}} \frac{|x-\xi|}{(t-\tau)^{N/2+1}} \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right) \cos(\xi - x, \mathbf{n}_\xi). \quad \boxtimes$$

Для дальнейших вычислений удобно ввести следующее обозначение:

$$d\omega_\xi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|x-\xi|^{N-1}} \cos(\xi - x, \mathbf{n}_\xi)\, dS_\xi \ ^{1)}. \quad (2.7)$$

Поэтому с учётом формул (2.6) и (2.7) из выражения (1.1) получим равенство:

$$W(x,t) = \\ = -\frac{1}{2^{N+1}\pi^{N/2}} \int\limits_\Gamma \left(\int\limits_0^t \rho(\xi,\tau) \frac{|x-\xi|^N}{(t-\tau)^{N/2+1}} \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right) d\tau \right) d\omega_\xi. \quad (2.8)$$

Отметим, что рассматриваются плотности $\rho(x,t)$, которые можно продолжить непрерывно нулём при $t < 0$. Поэтому в этом классе выражение для $W(x,t)$ можно представить в следующем виде:

$$W(x,t) = \\ = -\frac{1}{2^{N+1}\pi^{N/2}} \int\limits_\Gamma \left(\int\limits_{-\infty}^t \rho(\xi,\tau) \frac{|x-\xi|^N}{(t-\tau)^{N/2+1}} \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right) d\tau \right) d\omega_\xi. \quad (2.9)$$

[1)] $d\omega_\xi$ — это телесный угол, под которым виден элемент площади dS_ξ в точке $\xi \in \Gamma$ из точки $x \in \mathbb{R}^N$.

Шаг 2. Рассмотрим следующую функцию:

$$W_0(x,t) = -\frac{1}{2^{N+1}\pi^{N/2}} \int\limits_{\Gamma} \left(\int\limits_{-\infty}^{t} \frac{|x-\xi|^N}{(t-\tau)^{N/2+1}} \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right) d\tau \right) d\omega_\xi. \tag{2.10}$$

Сделаем в этом интеграле замену переменной интегрирования:

$$\eta = \frac{|x-\xi|}{2\sqrt{t-\tau}}, \quad d\eta = \frac{|x-\xi|}{4(t-\tau)^{3/2}}\, d\tau.$$

Справедлива следующая оценка снизу:

$$\int\limits_{-\infty}^{t} \frac{|x-\xi|^N}{(t-\tau)^{N/2+1}} \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right) d\tau =$$

$$= 2^{N+1} \int\limits_{-\infty}^{t} \left(\frac{|x-\xi|}{2\sqrt{t-\tau}}\right)^{N-1} \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right) \frac{|x-\xi|}{4(t-\tau)^{3/2}}\, d\tau =$$

$$= 2^{N+1} \int\limits_{0}^{+\infty} \eta^{N-1} e^{-\eta^2}\, d\eta = 2^{N+1}\frac{\pi^{N/2}}{\omega_N} > 0, \tag{2.11}$$

с учетом значения несобственного интеграла:

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \eta^{N-1} e^{-\eta^2}\, d\eta = \frac{\pi^{N/2}}{\omega_N}.$$

Таким образом, приходим к равенству:

$$W_0(x,t) = -\frac{1}{\omega_N} \int\limits_{\Gamma} d\omega_\xi. \tag{2.12}$$

Последний интеграл при важном условии, что $\Gamma \in \mathbb{C}^{1,\alpha}$ при $\alpha \in (0,1]$, был фактически нами вычислен в курсе «Эллиптические уравнения» в параграфе 3 лекции 8 [1]:

$$\int\limits_{\Gamma} d\omega_\xi = \begin{cases} \omega_N, & \text{если} \quad x \in \Omega,\ t \in [0,T]; \\ \omega_N/2, & \text{если} \quad x \in \Gamma,\ t \in [0,T]; \\ 0, & \text{если} \quad x \in \mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega},\ t \in [0,T], \end{cases} \tag{2.13}$$

[1] Интеграл Гаусса.

где ω_N — это площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^N$. Тогда получим равенство:

$$W_0(x,t) = \begin{cases} -1, & \text{если} \quad x \in \Omega,\ t \in [0,T]; \\ -1/2, & \text{если} \quad x \in \Gamma,\ t \in [0,T]; \\ 0, & \text{если} \quad x \in \mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega},\ t \in [0,T]. \end{cases} \tag{2.14}$$

Шаг 3. Докажем, что при $(x_0, t_0) \in \Gamma \times [0,T]$ разность

$$W_1(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} W(x,t) - \rho(x_0,t_0) W_0(x,t)$$

является функцией, определённой всюду и непрерывной в точке (x_0, t_0). Имеем:

$$W_1(x,t) = -\frac{1}{2^{N+1}\pi^{N/2}} \int\limits_{\Gamma} \left(\int\limits_0^t (\rho(\xi,\tau) - \rho(x_0,t_0)) \times \right.$$
$$\left. \times \frac{|x-\xi|^N}{(t-\tau)^{N/2+1}} \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)} \right) d\tau \right) d\omega_\xi +$$
$$+ \frac{\rho(x_0,t_0)}{2^{N+1}\pi^{N/2}} \int\limits_{\Gamma} \left(\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{|x-\xi|^N}{(t-\tau)^{N/2+1}} \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)} \right) d\tau \right) d\omega_\xi. \tag{2.15}$$

Второй интеграл в этом выражении непрерывен в окрестности точки $(x_0, t_0) \in \Gamma \times (0,T)$, поскольку для $t_0 \in (0,T)$ подынтегральное выражение во втором интеграле не имеет особенности и этот интеграл сходится равномерно в малой окрестности точки $(x_0, t_0) \in \Gamma \times (0,T)$. Заметим, что плотность $\rho(x,t) \in \mathbb{C}(\Gamma \times (-\infty, T])$ и $\rho(x,t) = 0$ при $t < < 0$. Поэтому с необходимостью $\rho(x_0, 0) = 0$ и в точке $(x_0, 0) \in S_T = = \Gamma \times [0,T]$ второе слагаемое есть непрерывная в окрестности точки $(x_0, 0) \in S_T$ функция, поскольку это слагаемое равно нулю.

Рассмотрим теперь функцию

$$W_2(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{S_T} \vartheta(t-\tau) \left(\rho(\xi,\tau) - \rho(x_0,t_0) \right) \times$$
$$\times \frac{|x-\xi|^N}{(t-\tau)^{N/2+1}} \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)} \right) d\tau \, d\omega_\xi.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем $\eta > 0$ настолько малым, чтобы

$$|\rho(\xi,\tau) - \rho(x_0,t_0)| < \frac{\varepsilon}{a c_1} \quad \text{для всех} \quad (\xi,\tau) \in \gamma := S_T \cap \text{Ц}^{\eta}_{x_0,t_0},$$

$$\text{Ц}^{\eta}_{x_0,t_0} := \left\{ (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1} :\ |x - x_0| < \eta,\ |t - t_0| < \eta \right\}, \quad \eta > 0,$$

$$\int\limits_{\Gamma} |d\omega_\xi| \leqslant c_1 < +\infty, \text{ [1]} \quad a := \int\limits_0^{+\infty} z^{N-1} e^{-z^2}\, dz, \quad c_1 > 0.$$

Представим теперь функцию $W_2(x,t)$ в виде следующей суммы:

$$W_2(x,t) = W_{21}(x,t) + W_{22}(x,t),$$

где

$$W_{21}(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{\gamma} \vartheta(t-\tau)\,(\rho(\xi,\tau) - \rho(x_0,t_0)) \times \\ \times \frac{|x-\xi|^N}{(t-\tau)^{N/2+1}} \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right) d\tau\, d\omega_\xi, \quad (2.16)$$

$$W_{22}(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{S_T\setminus\gamma} \vartheta(t-\tau)\,(\rho(\xi,\tau) - \rho(x_0,t_0)) \times \\ \times \frac{|x-\xi|^N}{(t-\tau)^{N/2+1}} \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right) d\tau\, d\omega_\xi. \quad (2.17)$$

Справедливы следующие оценки:

$$|W_{21}(x,t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{ac_1} \int\limits_{\gamma} \vartheta(t-\tau) \frac{|x-\xi|^N}{(t-\tau)^{N/2+1}} \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right) d\tau\, |d\omega_\xi| \leqslant \\ \leqslant \frac{\varepsilon}{ac_1} \int\limits_{\Gamma} \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{|x-\xi|^N}{(t-\tau)^{N/2+1}} \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right) d\tau\, |d\omega_\xi| \leqslant \\ \leqslant \frac{\varepsilon}{ac_1} ac_1 = \varepsilon. \quad (2.18)$$

В частности,

$$|W_{21}(x_0,t_0)| < \varepsilon. \quad (2.19)$$

Заметим, что справедливо следующее представление для множества $S_T\setminus\gamma$:

$$S_T\setminus\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3, \quad (2.20)$$

$$\gamma_1 = \{(\xi,\tau) \in S_T : \ |\xi - x_0| \geqslant \eta, \ |\tau - t_0| < \eta\}, \quad (2.21)$$

$$\gamma_2 = \{(\xi,\tau) \in S_T : \ |\xi - x_0| < \eta, \ |\tau - t_0| \geqslant \eta\}, \quad (2.22)$$

---

[1] Этот результат доказан в курсе «Эллиптические уравнения».

$$\gamma_3 = \{(\xi,\tau) \in S_T : \ |\xi - x_0| \geqslant \eta, \ |\tau - t_0| \geqslant \eta\}. \tag{2.23}$$

Тогда выражение для $W_{22}(x,t)$ можно переписать в следующем виде:

$$W_{22}(x,t) = W_{221}(x,t) + W_{222}(x,t) + W_{223}(x,t), \tag{2.24}$$

$$W_{22j}(x,t) = \int\limits_{\gamma_j} \vartheta(t-\tau)\left(\rho(\xi,\tau) - \rho(x_0,t_0)\right) \times \\ \times \frac{|x-\xi|^N}{(t-\tau)^{N/2+1}} \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right) d\tau\, d\omega_\xi, \quad j = 1,2,3. \tag{2.25}$$

$$W_{22j}(x,t) - W_{22j}(x_0,t_0) = \\ = \int\limits_{\gamma_j} \left(\rho(\xi,\tau) - \rho(x_0,t_0)\right) F(x,\xi,x_0,t,\tau,t_0)\, d\tau\, d\omega_\xi, \tag{2.26}$$

$$F(x,\xi,x_0,t,\tau,t_0) := \vartheta(t-\tau)\frac{|x-\xi|^N}{(t-\tau)^{N/2+1}} \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right) - \\ - \vartheta(t_0-\tau)\frac{|x_0-\xi|^N}{(t_0-\tau)^{N/2+1}} \exp\left(-\frac{|x_0-\xi|^2}{4(t_0-\tau)}\right). \tag{2.27}$$

При $(\xi,\tau) \in \gamma_1$ и при $(x,t) \in \text{Ц}^{\eta/2}_{x_0,t_0}$ имеем

$$|\xi - x| \geqslant |\xi - x_0| - |x - x_0| \geqslant \eta - \eta/2 = \eta/2, \tag{2.28}$$

а при $(\xi,\tau) \in \gamma_2$ и при $(x,t) \in \text{Ц}^{\eta/2}_{x_0,t_0}$ имеем

$$|\tau - t| \geqslant |\tau - t_0| - |t - t_0| \geqslant \eta - \eta/2 = \eta/2. \tag{2.29}$$

Наконец, при $(\xi,\tau) \in \gamma_3$ и при $(x,t) \in \text{Ц}^{\eta/2}_{x_0,t_0}$ справедливы неравенства:

$$|\xi - x| \geqslant |\xi - x_0| - |x - x_0| \geqslant \eta - \eta/2 = \eta/2, \tag{2.30}$$

$$|\tau - t| \geqslant |\tau - t_0| - |t - t_0| \geqslant \eta - \eta/2 = \eta/2. \tag{2.31}$$

Из явного вида функции (2.27) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое достаточно малое $\delta = \delta(\varepsilon, \eta(\varepsilon)) > 0$, что справедлива оценка:

$$\sup_{(\xi,\tau) \in S_T \setminus \text{Ц}^{\eta}_{x_0,t_0}} \left|\overline{F}(x,\xi,x_0,t,\tau,t_0)\right| < \frac{\varepsilon}{M_1}, \tag{2.32}$$

$$M_1 := \max\left\{2 \sup_{(x,t) \in S_T} |\rho(x,t)|, 1\right\},$$

где символом $\overline{F}(x, \xi, x_0, t, \tau, t_0)$ обозначено соответствующее непрерывное продолжение функции $F(x, \xi, x_0, t, \tau, t_0)$. Из (2.26)–(2.32) следует, что найдётся такое достаточно малое $\delta = \delta(\varepsilon, \eta(\varepsilon)) > 0$, что для всех $j = 1, 2, 3$ справедливо неравенство:

$$|W_{22j}(x, t) - W_{22j}(x_0, t_0)| < \varepsilon \quad \text{для всех} \quad |(x, t) - (x_0, t_0)| < \delta. \quad (2.33)$$

Итак, в силу неравенств (2.18), (2.19), (2.25) и (2.33) приходим к выводу о том, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что

$$|W_2(x, t) - W_2(x_0, t_0)| < 5\varepsilon \quad \text{для всех} \quad |(x, t) - (x_0, t_0)| < \delta. \quad (2.34)$$

Таким образом, функции $W_1(x, t)$ $W_2(x, t)$ непрерывны в каждой точке $(x_0, t_0) \in S_T$.

Шаг 4. Получим предельные равенства (2.3) и (2.4). С этой целью воспользуемся тем, что $\rho(x, t) \in \mathbb{C}(\Gamma \times (-\infty, T])$ и $\rho(x, t) = 0$ при $t < 0$. [1] В этом случае справедлива следующая формула:

$$W(x, t) = W_1(x, t) + \rho(x_0, t_0) W_0(x, t), \quad (2.35)$$

где с учётом равенства (2.9)

$$W_1(x, t) = W[\rho](x, t) - \rho(x_0, t_0) W_0(x, t) = \\ = W[\rho(\xi, \tau) - \rho(x_0, t_0)](x, t). \quad (2.36)$$

По доказанному функция $W_1(x, t)$ непрерывна в точке $(x_0, t_0) \in S_T$. Поэтому, во–первых, существуют пределы (2.1) и (2.2). Во–вторых, в силу свойств (2.14) функции $W_0(x, t)$ имеют место следующие равенства:

$$W_i(x_0, t_0) = W_1(x_0, t_0) - \rho(x_0, t_0), \quad W_e(x_0, t_0) = W_1(x_0, t_0). \quad (2.37)$$

В третьих, справедливо равенство:

$$W_1(x_0, t_0) = W(x_0, t_0) - \rho(x_0, t_0) W_0(x_0, t_0) = \\ = W(x_0, t_0) + \frac{1}{2}\rho(x_0, t_0). \quad (2.38)$$

Итак, из формул (2.37) и (2.38) вытекают искомые предельные равенства:

$$W_i(x_0, t_0) = W(x_0, t_0) - \frac{1}{2}\rho(x_0, t_0),$$
$$W_e(x_0, t_0) = W(x_0, t_0) + \frac{1}{2}\rho(x_0, t_0).$$

Теорема доказана.

Попутно нами доказана

[1] Мы ранее предположили, что функцию $\rho(x, t)$ можно продолжить нулём при $t < 0$ так, чтобы она осталась непрерывной на $\Gamma \times (-\infty, T]$ при $T > 0$.

Лемма 2. *Потенциал двойного слоя* $W(x,t)$ *для любой плотности* $\rho(x,t) \in \mathbb{C}(\Gamma \times (-\infty, T])$, $\rho(x,t) = 0$ *при* $t < 0$ *принадлежит классу*

$$\mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}\left((\mathbb{R}^N \backslash \Gamma) \times [0,T]\right) \cap \mathbb{C}_w(\overline{D}_T) \cap \mathbb{C}_w\left((\mathbb{R}^N \backslash \Omega) \times [0,T]\right),$$

причем $W(x,0) = 0$ *для всех* $x \in \mathbb{R}^N$.

§ 3. Литературные указания

Материал для лекции взят из работ [8], [11], [14].

Лекция 8

ТЕПЛОВОЙ ПОТЕНЦИАЛ ПРОСТОГО СЛОЯ И РАЗРЕШИМОСТЬ ПЕРВОЙ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

§ 1. Непрерывность

Потенциал простого слоя в цилиндрической области $D_T = \Omega \times \times (0,T)$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — это ограниченная область с гладкой границей $\Gamma \in \mathbb{C}^{1,\alpha}$ при $\alpha \in (0,1]$, определяется следующей формулой:

$$V[\mu](x,t) = V(x,t) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_0^t \int\limits_\Gamma \mu(\xi,\tau)\mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)\,dS_\xi\,d\tau, \tag{1.1}$$

где функция $\mu(x,t) = 0$ при $t < 0$ и $\mu(x,t) \in \mathbb{C}(\Gamma \times (-\infty, T])$. Справедлива следующая

Лемма 1. *Для любой функции $\mu(\xi,\tau) \in \mathbb{C}(\Gamma \times [0,T])$ потенциал простого слоя $V(x,t) \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^{N+1})$. В частности, $V(x,0) = 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^N$.*

Доказательство. В целом доказательство этой леммы аналогично доказательству соответствующего результата для потенциала простого слоя в случае оператора Лапласа, изложенной нами в лекции 9 курса «Эллиптические уравнения». Наметим ход доказательства леммы. С одной стороны, в лекции 5 была доказана оценка (1.3) фундаментального решения $\mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)$:

$$\mathcal{E}(x-\xi,t-\tau) \leqslant c_1 \frac{\vartheta(t-\tau)}{|t-\tau|^\mu |x-\xi|^{N-2\mu}}, \quad x \neq \xi, \quad t \neq \tau, \tag{1.2}$$

в которой потребуем, чтобы $\mu \in (1/2, 1)$. С другой стороны, мажоранта в (1.2) имеет интегрируемую особенность по (ξ,τ) в любой точке $(x,t) \in S_T = \Gamma \times [0,T]$ при этом условии на показатель μ. Совершенно понятна непрерывность потенциала простого слоя $V(x,t)$ в любой точке $(x_0,t_0) \notin S_T$ и поэтому нам достаточно доказать непрерывность в произвольной точке $(x_0,t_0) \in S_T$.

Пусть $(x_0,t_0) \in S_T$ — произвольная фиксированная точка. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Для любого $\eta > 0$ справедливо равенство:

$$S_T = \gamma_1 \cup \gamma_2, \quad \gamma_1 = S_T \cap \text{Ц}^\eta_{x_0,T}, \quad \gamma_2 = S_T \backslash \text{Ц}^\eta_{x_0,T}, \tag{1.3}$$

$$\text{Ц}^{\eta}_{x_0,T} := \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^{N+1} : \ |x - x_0| < \eta, \ t \in [0,T]\right\}. \tag{1.4}$$

Тогда функцию $V(x,t)$ можно представить в следующем виде:

$$V(x,t) = V_1(x,t) + V_2(x,t), \tag{1.5}$$

$$V_j(x,t) := \int\limits_{\gamma_j} \mu(\xi,\tau)\mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)\,dS_\xi\,d\tau, \quad j = 1,2. \tag{1.6}$$

Для $V_1(x,t)$ справедлива оценка:

$$|V_1(x_0,t_0)| \leqslant c_1 \sup_{(\xi,\tau)\in S_T} |\mu(\xi,\tau)| \int\limits_{\gamma_1} \frac{\vartheta(t_0-\tau)}{(t_0-\tau)^\mu} \frac{1}{|\xi - x_0|^{N-2\mu}}\,dS_\xi\,d\tau \leqslant$$
$$\leqslant c_1 \sup_{(\xi,\tau)\in S_T} |\mu(\xi,\tau)| \frac{T^{1-\mu}}{1-\mu} \int\limits_{\Gamma\cap O(x_0,\eta)} \frac{1}{|\xi - x_0|^{N-2\mu}}\,dS_\xi < \frac{\varepsilon}{3} \tag{1.7}$$

при достаточно малом $\eta > 0$. Потребовав, чтобы $x \in O(x_0, \eta/2)$ несложно убедиться в том, что $O(x_0,\eta) \subset O(x, 3\eta/2)$. Тогда получаем оценку:

$$|V_1(x,t)| \leqslant c_1 \sup_{(\xi,\tau)\in S_T} |\mu(\xi,\tau)| \int\limits_{\gamma_1} \frac{\vartheta(t-\tau)}{(t-\tau)^\mu} \frac{1}{|\xi - x|^{N-2\mu}}\,dS_\xi\,d\tau \leqslant$$
$$\leqslant c_1 \sup_{(\xi,\tau)\in S_T} |\mu(\xi,\tau)| \frac{T^{1-\mu}}{1-\mu} \int\limits_{\Gamma\cap O(x,3\eta/2)} \frac{1}{|\xi - x|^{N-2\mu}}\,dS_\xi < \frac{\varepsilon}{3} \tag{1.8}$$

при достаточно малом $\eta > 0$, которое зафиксируем. Рассмотрим функцию $V_2(x,t)$, определенную равенством (1.6). Заметим, что при $\xi \in \mathbb{R}^N \backslash O(x_0,\eta)$ и $x \in O(x_0,\eta)$ значение $\xi \in \mathbb{R}^N \backslash O(x,\eta/2)$. Действительно, это следует из неравенства треугольника, записанного в следующей форме:

$$|\xi - x| \geqslant |\xi - x_0| - |x - x_0| \geqslant \eta - \eta/2 = \eta/2.$$

В случае $\xi \in \mathbb{R}^N \backslash O(x,\eta/2)$ рассмотрим функцию:

$$\overline{\mathcal{E}}(x-\xi,t-\tau) = \begin{cases} \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau), & \text{если} \quad 0 \leqslant \tau < t; \\ 0, \quad \text{если} \quad 0 \leqslant \tau = t. \end{cases} \tag{1.9}$$

Эта функция равномерно по переменным $(\xi,\tau) \in \gamma_2$ непрерывна по переменным (x,t) в точке $(x_0,t_0) \in S_T$. Поэтому найдется такое малое $\delta = \delta(\varepsilon,\eta(\varepsilon)) > 0$, что справедлива оценка:

$$|V_2(x,t) - V_2(x_0,t_0)| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{(\xi,\tau)\in\gamma_2} \left|\overline{\mathcal{E}}(x-\xi,t-\tau) - \overline{\mathcal{E}}(x_0-\xi,t_0-\tau)\right| \times$$

$$\times |S_T| \sup_{(\xi,\tau)\in S_T} |\mu(\xi,\tau)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (1.10)$$

для всех $(x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}$ таких, что

$$|(x,t) - (x_0,t_0)| < \delta(\varepsilon, \eta(\varepsilon)). \quad (1.11)$$

Справедлива следующая оценка:

$$|V(x,t) - V(x_0,t_0)| \leqslant |V_1(x,t)| + |V_1(x_0,t_0)| + |V_2(x,t) - V_2(x_0,t_0)| < \varepsilon$$

для всех (x,t), удовлетворяющих неравенству (1.11). Значит, функция $V(x,t)$ непрерывна в любой точке $(x_0,t_0) \in S_T$.

Лемма доказана.

§ 2. Предельные формулы для производной по нормали

Введём следующие обозначения:

$$\left(\frac{\partial V(x_0,t_0)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}\right)_i \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{(\Omega\times[0,T])\cap l\ni(x,t)\to(x_0,t_0)\in S_T} \frac{\partial V(x,t)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}, \quad (2.1)$$

$$\left(\frac{\partial V(x_0,t_0)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}\right)_e \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\left(\left(\mathbb{R}^N\setminus\overline{\Omega}\right)\times[0,T]\right)\cap l\ni(x,t)\to(x_0,t_0)\in S_T} \frac{\partial V(x,t)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}, \quad (2.2)$$

где $\mathbf{n}_{x_0}$ — это нормаль в точке $x_0 \in \Gamma$, внешняя по отношению к области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $l = \{(x_0,t_0) + s(\mathbf{n}_{x_0},0), s \in \mathbb{R}\}$ — прямая с направляющим вектором $\mathbf{a} = (\mathbf{n}_{x_0},0)$, проходящая через точку $(x_0,t_0) \in S_T$,

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}} = (\mathbf{n}_{x_0}, D_x f(x,t)).$$

Справедлива следующая

Лемма 2. *Потенциал простого слоя* $V(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}\left(\left(\mathbb{R}^N\setminus\Gamma\right)\times[0,T]\right)$ *и удовлетворяет при* $(x,t) \in \left(\mathbb{R}^N\setminus\Gamma\right)\times[0,T]$ *однородному уравнению теплопроводности.*

Доказательство. Доказательство дословно повторяет доказательство леммы 1 лекции 7.

Лемма доказана.

Наконец, справедлива следующая основная

Теорема 1. *Нормальная производная потенциала простого слоя определена всюду в* $\mathbb{R}^{N+1}$ *и терпит скачок при переходе через поверхность* S_T *по нормали, причём справедливы следующие предельные свойства*:

$$\left(\frac{\partial V(x_0,t_0)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}\right)_i = \frac{\partial V(x_0,t_0)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}} + \frac{1}{2}\mu(x_0,t_0), \quad (2.3)$$

$$\left(\frac{\partial V(x_0,t_0)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}\right)_e = \frac{\partial V(x_0,t_0)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}} - \frac{1}{2}\mu(x_0,t_0), \tag{2.4}$$

где $(x_0,t_0)\in S_T := \Gamma\times[0,T]$ *и*

$$\frac{\partial V(x_0,t_0)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}} \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_0^{t_0}\int\limits_\Gamma \mu(\xi,\tau)\frac{\partial \mathcal{E}(x_0-\xi,t_0-\tau)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}\,dS_\xi\,d\tau. \tag{2.5}$$

Доказательство. Выберем прямоугольную систему координат в $\mathbb{R}^{N+1}$ следующим образом:

$$\{(x_0,t_0),\mathbf{E}\},\quad \mathbf{E}=(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_N,\mathbf{e}_t),$$

причем вектор $\mathbf{e}_N=\mathbf{n}_{x_0}$, а попарно ортогональные векторы $(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_{N-1},)$ будучи отложенными от точки $(x_0,t_0)\in S_T$, лежат на касательной в точке $x_0\in\Gamma$ $(N-1)$–мерной гиперплоскости $\{t=t_0\}$ в $\mathbb{R}^{N+1}$.

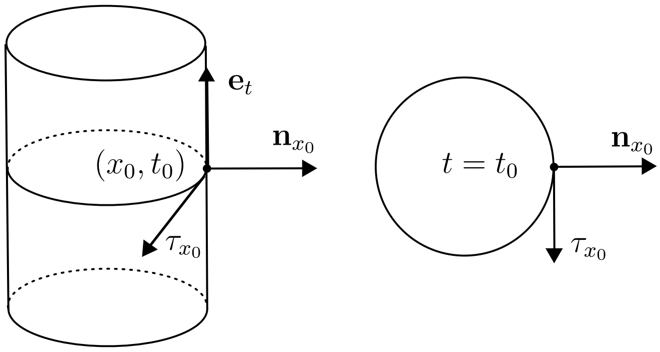


Рис. 9. «Локальная» система координат.

Заметим, что при $x\neq\xi$ и $t\neq\tau$ имеет место следующее равенство:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial \mathbf{n}_\xi} + \frac{\partial \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}} &= \\ = \frac{\vartheta(t-\tau)}{(N-2)2^{N+1}\pi^{N/2}}\frac{|x-\xi|^N}{(t-\tau)^{N/2+1}}&\exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right)\times \\ \times\left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_\xi}\frac{1}{|x-\xi|^{N-2}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}\frac{1}{|x-\xi|^{N-2}}\right]&. \end{aligned}\tag{2.6}$$

Справедливы следующие равенства:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_\xi}\frac{1}{|x-\xi|^{N-2}} = \sum_{k=1}^N \frac{\partial}{\partial \xi_k}\frac{1}{|x-\xi|^{N-2}}\cos(\mathbf{n}_\xi,\mathbf{e}_k) =$$

$$= -\frac{(N-2)}{|x-\xi|^{N-1}} \sum_{k=1}^{N} \frac{\xi_k - x_k}{|x-\xi|} \cos(\mathbf{n}_\xi, \mathbf{e}_k) =$$
$$= -(N-2)\frac{\cos(\mathbf{n}_\xi, \xi - x)}{|x-\xi|^{N-1}}. \quad (2.7)$$

Аналогичным образом получаем следующее равенство:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{x_0}} \frac{1}{|x-\xi|^{N-2}} = (N-2)\frac{\cos(\mathbf{n}_{x_0}, \xi - x)}{|x-\xi|^{N-1}}. \quad (2.8)$$

Заметим, что в силу равенств (2.11) из предыдущей лекции 6 сходится следующий интеграл:

$$\int\limits_{-\infty}^{t} \frac{|x-\xi|^N}{(t-\tau)^{N/2+1}} \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right) d\tau =$$
$$= 2^{N+1} \int\limits_{0}^{+\infty} \eta^{N-1} e^{-\eta^2}\, d\eta = 2^{N+1} a > 0, \quad (2.9)$$

Из (2.12), (2.13) и (2.10) получим следующее равенство:

$$\frac{\partial \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau)}{\partial \mathbf{n}_\xi} + \frac{\partial \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}} =$$
$$= \frac{\vartheta(t-\tau)}{2^{N+1}\pi^{N/2}} \frac{|x-\xi|^N}{(t-\tau)^{N/2+1}} \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right) \times$$
$$\times \frac{1}{|x-\xi|^{N-1}} \left[\cos(\mathbf{n}_{x_0}, \xi - x) - \cos(\mathbf{n}_\xi, \xi - x)\right]. \quad (2.10)$$

Точно также как и в лекции 9 курса «Эллиптические уравнения» можно доказать, что при

$$(x,t) \in l = \{(x_0, t_0) + s(\mathbf{n}_{x_0}, 0), s \in \mathbb{R}\}$$

справедливо неравенство

$$\left| \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{x_0}} \frac{1}{|\xi - x|^{N-2}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_\xi} \frac{1}{|\xi - x|^{N-2}} \right| \leqslant \frac{b_2}{\rho^{N-1-\alpha}}, \quad (2.11)$$

где $\rho = |(x_0, t_0) - (\xi', 0, t_0)|$, $(\xi, t) = (\xi', \xi_N, t) \in \mathbb{R}^{N+1}$, $\xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_{N-1})$, — координаты произвольной точки $M \in \mathbb{R}^{N+1}$ в выбранной «локальной» системе координат $\{(x_0, t_0), \mathbf{E}\}$, а

$$\rho = |(x_0, t_0) - (x, t)| = \left(\sum_{k=1}^{N} (x_{0k} - x_k)^2 + (t - t_0)^2 \right)^{1/2}.$$

Рассмотрим следующую функцию:

$$V_0(x,t,x_0) := \int\limits_0^T \int\limits_\Gamma \mu(\xi,\tau) F(x-\xi, t-\tau) \times \\ \times \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_\xi} \frac{1}{|x-\xi|^{N-2}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{x_0}} \frac{1}{|x-\xi|^{N-2}} \right] dS_\xi \, d\tau, \quad (2.12)$$

$$F(x-\xi, t-\tau) := \frac{\vartheta(t-\tau)}{(N-2)2^{N+1}\pi^{N/2}} \frac{|x-\xi|^N}{(t-\tau)^{N/2+1}} \times \\ \times \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)} \right), \quad (2.13)$$

причем $t \in [0,T]$, $x \notin \Gamma$. Представим множество S_T в следующем виде:

$$S_T = \gamma_1 \cup \gamma_2, \quad \gamma_1 = \text{Ц}^\eta_{x_0,T}, \quad \gamma_2 = S_T \backslash \text{Ц}^\eta_{x_0,T}, \quad \eta > 0. \quad (2.14)$$

$$\text{Ц}^\eta_{x_0,T} := \left\{ (\xi,\tau) \in \mathbb{R}^{N+1} : \; |\xi - x_0| < \eta, \; t \in [0,T] \right\}. \quad (2.15)$$

Пусть $x \in O(x_0, \eta/2)$. Тогда для функции (2.12) справедливо следующее равенство:

$$V_0(x,t,x_0) = V_{01}(x,t,x_0) + V_{02}(x,t,x_0), \quad (2.16)$$

$$V_{0j}(x,t,x_0) := \int\limits_{\gamma_j} \mu(\xi,\tau) F(x-\xi, t-\tau) \times \\ \times \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_\xi} \frac{1}{|x-\xi|^{N-2}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{x_0}} \frac{1}{|x-\xi|^{N-2}} \right] dS_\xi \, d\tau, \quad j = 1,2. \quad (2.17)$$

Из (2.16) следует неравенство:

$$|V_0(x,t_0,x_0) - V_0(x_0,t_0,x_0)| = |V_{01}(x,t_0,x_0)| + \\ + |V_{01}(x_0,t_0,x_0)| + |V_{02}(x,t,x_0) - V_{02}(x_0,t_0,x_0)|. \quad (2.18)$$

Точно также как в лекции 9 курса «Эллиптические уравнения» для функции $V_{01}(x,t_0,x_0)$ с учетом (2.9) и (2.11) из (2.17) получаются следующие оценки:

$$|V_{01}(x,t_0,x_0)| \leqslant \\ \leqslant \int\limits_{\gamma_1} |\mu(\xi,\tau)| F(x-\xi, t-\tau) \left| \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{x_0}} \frac{1}{|\xi - x|^{N-2}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_\xi} \frac{1}{|\xi - x|^{N-2}} \right| dS_\xi \, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \frac{a}{\pi^{N/2}} \sup_{(\xi,\tau)\in S_T} |\mu(\xi,\tau)| \int\limits_{O(x_0,\eta)\cap\Gamma} \frac{1}{\rho^{N-1-\alpha}}\, dS_\xi =$$

$$= M_1 \int\limits_{G'(x_0)} \frac{1}{\rho^{N-1-\alpha}} \frac{d\xi_1 \cdots d\xi_{N-1}}{\cos(\mathbf{n}_\xi, \mathbf{e}_N)}. \quad (2.19)$$

Заметим, что

$$G^{'}(x_0) \subset O^{'}(x_0,\eta), \quad O^{'}(x_0,\eta) := \left\{\xi^{'} \in \mathbb{R}^{N-1} : |(\xi^{'},0) - x_0| < \eta\right\}.$$

Продолжим оценивание $V_{01}(x,t_0,x_0)$:

$$|V_{01}(x,t_0,x_0)| \leqslant 2M_1 \int\limits_{O^{'}(x_0,\eta)} \frac{1}{\rho^{N-1-\alpha}} d\xi_1 \cdots d\xi_{N-1} =$$

$$= 2M_1\omega_{N-1} \int\limits_0^\eta \frac{1}{\rho^{N-1-\alpha}} \rho^{N-2}\, d\rho = \frac{M_2}{\alpha}\eta^\alpha. \quad (2.20)$$

Аналогично доказывается справедливость следующей оценки:

$$|V_{01}(x_0,t_0,x_0)| \leqslant \frac{M_2}{\alpha}\eta^\alpha. \quad (2.21)$$

Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$, что будут выполнены неравенства:

$$|V_{01}(x_0,t_0,x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |V_{01}(x,t_0,x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (2.22)$$

Зафиксируем найденное $\eta > 0$. Наконец, точно также как и в лекции 9 курса «Эллиптические уравнения» можно доказать, что найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon,\eta(\varepsilon)) > 0$, что при $x \in O(x_0,\eta/2)$ будет справедливо следующее неравенство:

$$|V_{02}(x,t,x_0) - V_{02}(x_0,t_0,x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (2.23)$$

Учитывая (2.19), (2.22) и (2.23) приходим к выводу о непрерывности функции $V_0(x,t_0,t_0)$ для всякого $t_0 \in [0,T]$ при $x \in l$.

Следовательно, в силу выводов предыдущей лекции справедливы следующие равенства:

$$\left(\frac{\partial V(x_0,t_0)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}\right)_i + W_i(x_0,t_0) =$$

$$= \left(\frac{\partial V(x_0,t_0)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}\right)_e + W_e(x_0,t_0) = \frac{\partial V(x_0,t_0)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}} + W(x_0,t_0), \quad (2.24)$$

в которых потенциалы простого и двойного слоя с одной и той же плотностью $\mu(x,t) \in \mathbb{C}(\Gamma \times (-\infty, T])$. Используя доказанные предельные свойства (2.3) и (2.4) потенциала двойного слоя $W(x,t)$ из лекции 7, получим следующие равенства:

$$\left(\frac{\partial V(x_0,t_0)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}\right)_i = W(x_0,t_0) - W_i(x_0,t_0) + \frac{\partial V(x_0,t_0)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}} = \\ = \frac{\partial V(x_0,t_0)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}} + \frac{1}{2}\mu(x_0,t_0), \quad (2.25)$$

$$\left(\frac{\partial V(x_0,t_0)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}\right)_e = W(x_0,t_0) - W_e(x_0,t_0) + \frac{\partial V(x_0,t_0)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}} = \\ = \frac{\partial V(x_0,t_0)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}} - \frac{1}{2}\mu(x_0,t_0).$$

Теорема доказана.

Попутно доказана

Лемма 3. *Потенциал простого слоя $V(x,t)$ для любой плотности $\mu(x,t) \in \mathbb{C}(\Gamma \times (-\infty, T])$ такой, что $\mu(x,t) = 0$ при $t < 0$, принадлежит классу*:

$$V(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}\left(\left(\mathbb{R}^N \backslash \Gamma\right) \times [0,T]\right) \cap \mathbb{C}\left(\mathbb{R}^{N+1}\right) \cap \\ \cap \mathbb{C}^{(1,0)}_{x,t}(\mathbf{n}; \overline{\Omega} \times [0,T]) \cap \mathbb{C}^{(1,0)}_{x,t}\left(\mathbf{n}; \left(\mathbb{R}^N \backslash \Omega\right) \times [0,T]\right). \quad (2.26)$$

§ 3. Решение первой смешанной краевой задачи

Рассмотрим следующую первую смешанную краевую задачу:

$$u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in D_T \cup B_T = \Omega \times (0,T], \quad (3.1)$$

$$\lim_{D_T \cup B_T \ni (y,s) \to (x,t) \in S_T} u(y,s) = \psi(x,t), \quad (x,t) \in S_T = \Gamma \times [0,T], \quad (3.2)$$

$$\lim_{D_T \cup B_T \ni (y,s) \to (x,0) \in B} u(y,s) = 0, \quad x \in \overline{\Omega}, \quad (3.3)$$

где $\psi(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{S}_T)$ и для согласования начального и граничного условий требуем, чтобы

$$\psi(x,t) \rightrightarrows 0 \quad \text{равномерно по} \quad x \in \Gamma \quad \text{при} \quad t \downarrow 0. \quad (3.4)$$

В частности, отсюда следует, что функцию $\psi(x,t)$ можно продолжить нулём при $t < 0$ так, чтобы

$$\psi(x,t) \in \mathbb{C}(\Gamma \times (-\infty, T]).$$

Будем искать решение задачи (3.1)–(3.3) в виде теплового потенциала двойного слоя:

$$u(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_\Gamma \mu(\xi,\tau) \frac{\partial \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial \mathbf{n}_\xi} \, dS_\xi \, d\tau, \tag{3.5}$$

где плотность $\mu(x,t)$ ищется в классе $\mu(x,t) \in \mathbb{C}(\Gamma \times (-\infty, T])$ и $\mu(x,t) = 0$ при $t < 0$.

В силу предельного свойства (2.3) из лекции 7 приходим к следующему интегральному уравнению относительно $\mu(x,t)$:

$$\mu(x,t) = 2\int\limits_0^t \int\limits_\Gamma \mu(\xi,\tau) \frac{\partial \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial \mathbf{n}_\xi} \, dS_\xi \, d\tau - 2\psi(x,t) \tag{3.6}$$

для всех $(x,t) \in S_T$. Заметим, что это уравнение является фредгольмовым по $x \in \Gamma$ и вольтерровым по $t \in (0,T]$. Поэтому в отличие от случая интегральных уравнений Фредгольма теории потенциала, рассмотренных нами в курсе «Эллиптические уравнения», этот случай проще с точки зрения исследовании однозначной разрешимости. В частности, для интегрального уравнения (3.6) эффективен метод сжимающих отображений.

Введём линейное отображение:

$$Az(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} 2\int\limits_0^t \int\limits_\Gamma z(\xi,\tau) \frac{\partial \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial \mathbf{n}_\xi} \, dS_\xi \, d\tau - 2\psi(x,t). \tag{3.7}$$

Справедлива следующая вспомогательная

Лемма 3. *Для всех $(x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}$ справедливо неравенство*:

$$\int\limits_{-\infty}^t \int\limits_\Gamma \left| \frac{\partial \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial \mathbf{n}_\xi} \right| dS_\xi \, d\tau \leqslant c_1 < +\infty, \tag{3.8}$$

где $c_1 > 0$ — это постоянная, не зависящая от $(x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}$.

Доказательство.

Действительно,

$$\int\limits_{-\infty}^t \int\limits_\Gamma \left| \frac{\partial \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial \mathbf{n}_\xi} \right| dS_\xi \, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2^{N+1}\pi^{N/2}} \int\limits_\Gamma \left(\int\limits_{-\infty}^t \frac{|x-\xi|^N}{(t-\tau)^{N/2+1}} \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right) d\tau \right) |d\omega_\xi| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi^{N/2}} aK = c_1 < +\infty, \quad a = \int\limits_0^{+\infty} \eta^{N-1} e^{-\eta^2}\, d\eta, \quad (3.9)$$

где

$$d\omega_\xi = \frac{1}{|x-\xi|^{N-1}} \cos(\xi - x, \mathbf{n}_\xi) dS_\xi,$$

и в курсе «Эллиптические уравнения» было доказано, что

$$\int\limits_\Gamma |d\omega_\xi| \leqslant K < +\infty, \quad \Gamma \in \mathbb{C}^{1,\alpha}, \quad \alpha \in (0,1], \quad (3.10)$$

$K > 0$ — это постоянная, не зависящая от $x \in \mathbb{R}^N$.

Лемма доказана.

Докажем следующую лемму:

Лемма 4. *Оператор* (3.7) *обладает следующим свойством*:

$$A:\ \mathbb{C}(S_T) \to \mathbb{C}(S_T), \quad S_T = \Gamma \times [0, T] \quad (3.11)$$

для произвольного $T > 0$.

Доказательство. *Шаг 1.* Напомним, что

$$\frac{\partial \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau)}{\partial \mathbf{n}_\xi} = \\ = -\frac{1}{2^{N+1}\pi^{N/2}} \frac{\vartheta(t-\tau)}{(t-\tau)^{1+N/2}} \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right) |x-\xi| \cos(\mathbf{n}_\xi, \xi - x). \quad (3.12)$$

Из курса «Эллиптические уравнения» известна оценка

$$|\cos(\mathbf{n}_\xi, \xi - x)| \leqslant a|x-\xi|^\alpha, \quad x, \xi \in \Gamma \in \mathbb{C}^{1,\alpha}, \quad \alpha \in (0,1]. \quad (3.13)$$

Поэтому при $x \neq \xi$ и $t \in \tau$ справедливо следующее неравенство:

$$\left|\frac{\partial \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau)}{\partial \mathbf{n}_\xi}\right| \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{2^{N+1}\pi^{N/2}} (t-\tau)^{-\mu} \left[\frac{|x-\xi|^2}{(t-\tau)}\right]^{N/2+1-\mu} \frac{|x-\xi|^{1+\alpha}}{|x-\xi|^{N+2-2\mu}} \times \\ \times \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right) \leqslant c_1 \frac{\vartheta(t-\tau)}{(t-\tau)^\mu} \frac{1}{|x-\xi|^{N+1-2\mu-\alpha}} \quad (3.14)$$

при $\mu \in (1 - \alpha/2, 1)$. Несложно проверить, что мажоранта в последней оценки — локально интегрируемая функция на поверхности $S_T \subset \subset \mathbb{R}^{N+1}$.

Шаг 2. Рассмотрим следующую функцию:

$$f(x,t) := \int\limits_{S_T} z(\xi,\tau)\frac{\partial\mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial\mathbf{n}_\xi}\,dS_\xi\,d\tau. \tag{3.15}$$

Для S_T справедливо разложение (1.3), (1.4), с учетом которого справедливо равенство:

$$f(x,t) = f_1(x,t) + f_2(x,t), \tag{3.16}$$

$$f_j(x,t) := \int\limits_{\gamma_j} z(\xi,\tau)\frac{\partial\mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial\mathbf{n}_\xi}\,dS_\xi\,d\tau, \quad j=1,2. \tag{3.17}$$

Дальнейшие рассуждения повторяют доказательство леммы 1 с использованием оценки (3.14).

Лемма доказана.

Воспользуемся методом сжимающих отображений. Пусть $S_\delta = \Gamma \times \times [0,\delta]$ при некотором $\delta > 0$. Рассмотрим банахово пространство $\mathbb{C}(S_\delta)$ относительно нормы

$$\|z\|_\delta := \sup_{t\in[0,\delta],\ x\in\Gamma} |z(x,t)|,$$

а также замкнутый шар в этом банаховом пространстве:

$$B_R := \left\{z(x,t) \in \mathbb{C}(S_\delta) :\ \|z\|_\delta \leqslant R\right\}.$$

Выберем $R > 0$ настолько большим, чтобы

$$\|\psi(x,t)\|_\delta \leqslant \frac{R}{4},$$

а $\delta > 0$ настолько малым, чтобы

$$A:\ B_R \to B_R.$$

Действительно, справедлива следующая оценка:

$$\|Az(x,t)\|_\delta \leqslant 2c_2(\delta)\|z\|_\delta + 2\|\psi\|_\delta \leqslant 2c_2(\delta)R + \frac{R}{2} \leqslant R,$$

поскольку в силу оценки (3.8) величина $c_2(\delta) \to +0$ при $\delta \to +0$, где

$$c_2(\delta) := \sup_{t\in[0,\delta],x\in\Gamma} \int\limits_0^t \int\limits_\Gamma \left|\frac{\partial\mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial\mathbf{n}_\xi}\right| dS_\xi\,d\tau.$$

Для произвольных $z_1(x,t)$, $z_2(x,t) \in \mathbb{C}(S_\delta)$ справедливо следующее неравенство:

$$\sup_{(x,t)\in S_\delta} |Az_1(x,t) - Az_2(x,t)| \leqslant$$
$$\leqslant 2 \sup_{(x,t)\in S_\delta} |z_1(x,t) - z_2(x,t)| \times$$
$$\times \sup_{(x,t)\in S_\delta} \int\limits_0^\delta \int\limits_\Gamma \left| \frac{\partial \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau)}{\partial \mathbf{n}_\xi} \right| dS_\xi \, d\tau. \quad (3.18)$$

Из сходимости интеграла (3.8) и абсолютной непрерывности интеграла Лебега следует неравенство:

$$\int\limits_{t_1}^{t_1+\delta} \int\limits_\Gamma \left| \frac{\partial \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau)}{\partial \mathbf{n}_\xi} \right| dS_\xi \, d\tau = c_2(\delta) \to +0 \quad (3.19)$$

при $\delta \to +0$ для всякого $t \in (t_1, t_1+\delta)$ и $t_1 \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}^N$.

□ Если сделать замены переменных

$$\widetilde{\tau} = \tau - t_1, \quad \widetilde{t} = t - t_1,$$

то получим следующее равенство:

$$\int\limits_{t_1}^{t_1+\delta} \int\limits_\Gamma \left| \frac{\partial \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau)}{\partial \mathbf{n}_\xi} \right| dS_\xi \, d\tau =$$
$$= \int\limits_0^\delta \int\limits_\Gamma \left| \frac{\partial \mathcal{E}(x-\xi, \widetilde{t}-\widetilde{\tau})}{\partial \mathbf{n}_\xi} \right| dS_\xi \, d\widetilde{\tau} = c_2(\delta) \to +0 \quad \text{при} \quad \delta \to +0$$

для всех $\widetilde{t} \in (0,\delta)$. ⊠

С учетом оценки (3.19) и неравенства (3.18) мы приходим к следующему неравенству:

$$\sup_{(x,t)\in S_\delta} |Az_1(x,t) - Az_2(x,t)| \leqslant c_3(\delta) \sup_{(x,t)\in S_\delta} |z_1(x,t) - z_2(x,t)|, \quad (3.20)$$

где $c_3(\delta) = 2c_2(\delta)$, и при достаточно малом $\delta > 0$ имеем:

$$c_3(\delta) \in (0, 1/2].$$

Итак, оператор $A : \mathbb{C}(S_\delta) \to \mathbb{C}(S_\delta)$ является сжимающим при достаточно малом $\delta > 0$ по норме банахова пространства $\mathbb{C}(S_\delta)$. Существует единственное решение $\mu(x,t) \in \mathbb{C}(S_\delta)$ интегрального уравнения (3.6) при $t \in [0,\delta]$.

Отсюда, с учетом леммы 4 и определения (3.7) получаем равенство:

$$\mu(x,t) = 2\int\limits_0^t \int\limits_\Gamma \mu(\xi,\tau)\frac{\partial \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial \mathbf{n}_\xi}\,dS_\xi\,d\tau - 2\psi(x,t), \tag{3.21}$$

из которого в силу того, что $\psi(x,t) \in \mathbb{C}(\Gamma \times (-\infty, T])$ получаем, что

$$2\int\limits_0^t \int\limits_\Gamma \mu(\xi,\tau)\frac{\partial \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial \mathbf{n}_\xi}\,dS_\xi\,d\tau - 2\psi(x,t) \rightrightarrows \mu(x,\delta) =$$

$$= 2\int\limits_0^\delta \int\limits_\Gamma \mu(\xi,\tau)\frac{\partial \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial \mathbf{n}_\xi}\,dS_\xi\,d\tau - 2\psi(x,\delta) \tag{3.22}$$

при $t \uparrow \delta$ равномерно по $x \in \Gamma$.

Рассмотрим на $S_{2\delta} = \Gamma \times [0, 2\delta]$ класс функций:

$$\mathbb{C}_\mu(S_{2\delta}) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{z(x,t) \in \mathbb{C}(S_{2\delta}),\ z(x,t) = \mu(x,t),\ t \in [0,\delta]\right\},$$

совпадающих с решением $\mu(x,t) \in \mathbb{C}(S_\delta)$ при $t \in [0,\delta]$. Это полное метрическое пространство относительно метрики

$$d(z_1,z_2) := \sup_{(x,t)\in S_{2\delta}} |z_1(x,t) - z_2(x,t)|, \tag{3.23}$$

которое является линейным (банаховым) тогда и только тогда, когда $\mu(x,t) \equiv 0$.

$\square$ Пусть $\{z_n(x,t)\} \in \mathbb{C}_\mu(S_{2\delta})$ — произвольная фундаментальная последовательность:

$$d(z_n, z_m) \to +0 \quad \text{при} \quad n,m \to +\infty, \tag{3.24}$$

причем в силу определения $\mathbb{C}_\mu(S_{2\delta})$ имеем:

$$z_n(x,t) = \mu(x,t) \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in S_\delta. \tag{3.25}$$

Поскольку $\{z_n(x,t)\} \in \mathbb{C}(S_{2\delta})$ и данное метрическое пространство является полным относительно метрики (3.23), то найдется такое $z_0(x,t) \in \mathbb{C}(S_{2\delta})$, что

$$d(z_n, z_0) \to +0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty. \tag{3.26}$$

Отсюда, переходя к поточечному пределу в равенстве (3.25) получим, что

$$z_0(x,t) = \mu(x,t) \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in S_\delta. \tag{3.27}$$

Значит, $z_0(x,t) \in \mathbb{C}_\mu(S_{2\delta})$. ⊠

Для произвольных функций $z_1(x,t)$ и $z_2(x,t)$ из данного метрического пространства функций $\mathbb{C}_\mu(S_{2\delta})$ справедливы следующие равенства:

$$Az_1(x,t) - Az_2(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad t \in [0,\delta], \tag{3.28}$$

$$Az_1(x,t) - Az_2(x,t) = \\ = 2\int_\delta^t \int_\Gamma (z_1(\xi,\tau) - z_2(\xi,\tau)) \frac{\partial \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau)}{\partial \mathbf{n}_\xi}\, dS_\xi\, d\tau \tag{3.29}$$

при $t \in (\delta, 2\delta]$. Поэтому в силу (3.19) имеем следующую оценку:

$$\sup_{(x,t)\in S_{2\delta}} |A(z_1)(x,t) - A(z_2)(x,t)| \leqslant \\ \leqslant 2 \sup_{(x,t)\in S_{2\delta}} |z_1(z,t) - z_2(x,t)| \times \\ \times \sup_{x\in\partial\Omega,\ t\in[\delta,2\delta]} \int_\delta^{2\delta} \int_\Gamma \left| \frac{\partial \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau)}{\partial \mathbf{n}_\xi} \right| dS_\xi\, d\tau \leqslant \\ \leqslant c_3(\delta) \sup_{(x,t)\in S_{2\delta}} |z_1(z,t) - z_2(x,t)|, \quad c_3(\delta) = 2c_2(\delta). \tag{3.30}$$

При этом для любой функции $z(x,t) \in \mathbb{C}_\mu(S_{2\delta})$ справедливы следующие равенства:

$$Az(x,t) = \mu(x,t) \quad \text{при} \quad t \in [0,\delta], \tag{3.31}$$

$$Az(x,t) = 2\int_\delta^t \int_\Gamma z(\xi,\tau) \frac{\partial \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau)}{\partial \mathbf{n}_\xi}\, dS_\xi\, d\tau - 2\psi(x,t) + \\ + 2\int_0^\delta \int_\Gamma \mu(\xi,\tau) \frac{\partial \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau)}{\partial \mathbf{n}_\xi}\, dS_\xi\, d\tau \quad \text{при} \quad t \in [\delta, 2\delta]. \tag{3.32}$$

Заметим, что из (3.32) с учетом (3.22) получаем, что

$$Az(x,t) = \mu(x,t) \rightrightarrows \mu(x,\delta) \quad \text{при} \quad t \uparrow \delta, \tag{3.33}$$

$$Az(x,t) \rightrightarrows \mu(x,\delta) \quad \text{при} \quad t \downarrow \delta \tag{3.34}$$

равномерно по $x \in \Gamma$. Следовательно, после «сшития» $Az(x,t)$ в точке $t = \delta$ мы получим функцию $Az(x,t) \in \mathbb{C}(S_{2\delta})$. Значит,

$$A:\ \mathbb{C}_\mu(S_{2\delta}) \to \mathbb{C}_\mu(S_{2\delta}). \tag{3.35}$$

Выберем радиус $R_1 > 0$ шара

$$B_{R_1} := \{z(x,t) \in \mathbb{C}_\mu(S_{2\delta}) : \ d(z,0) \leqslant R_1\}, \quad R_1 > 0$$

настолько большим, чтобы

$$\|\psi\|_{2\delta} + \left\| \int\limits_0^\delta \int\limits_\Gamma \mu(\xi,\tau) \frac{\partial \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau)}{\partial \mathbf{n}_\xi} \, dS_\xi \, d\tau \right\|_{2\delta} \leqslant \frac{R_1}{4}.$$

Кроме того, для всех $z(x,t) \in B_{R_1}$

$$\left\| \int\limits_\delta^t \int\limits_\Gamma z(\xi,\tau) \frac{\partial \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau)}{\partial \mathbf{n}_{\xi,\tau}} \, dS_\xi \, d\tau \right\|_{2\delta} \leqslant$$

$$\leqslant \|z\|_{2\delta} \sup_{(x,t)\in\Gamma\times[\delta,2\delta]} \int\limits_\delta^{2\delta} \int\limits_\Gamma \left| \frac{\partial \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau)}{\partial \mathbf{n}_\xi} \right| \, dS_\xi \, d\tau \leqslant c_2(\delta) R_1 \leqslant \frac{R_1}{4}.$$

Поэтому

$$A : \ B_{R_1} \to B_{R_1}.$$

Далее с использованием оценки (3.30) снова докажем сжимаемость оператора A на замкнутом шаре B_{R_1} полного метрического пространства $\mathbb{C}_\mu(S_{2\delta})$ с той же постоянной $c_3(\delta)$, но уже на более широком сегменте $[0, 2\delta]$.

Таким образом, повторяя этот процесс за конечное число шагов докажем существование единственного решения $\mu(x,t) \in \mathbb{C}(S_T)$ интегрального уравнения (3.6).

Заметим, что в силу свойства (3.4) функции $\psi(x,t)$ из интегрального уравнения (3.6) следует, что

$$\mu(x,t) \rightrightarrows 0 \quad \text{равномерно по} \quad x \in \Gamma \quad \text{при} \quad t \downarrow 0. \tag{3.36}$$

Поэтому можно продолжить функцию $\mu(x,t)$ нулём при $t < 0$ таким образом, чтобы при этом $\mu(x,t) \in \mathbb{C}(\Gamma \times (-\infty, T])$.

§ 4. Литературные указания

Материал для лекции взят из работ [3], [7], [8], [11], [14], [16].

Тематическая лекция III

ПРИНЦИП МАКСИМУМА

Лекция 9

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ

В этой лекции сформулированы основные типы задач для параболических уравнений общего вида.

§ 1. Области. Верхняя и нижняя крышки

Сформулируем некоторые понятия и определения, связанные с рассмотрением областей $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$, в которых изучаются решения параболических уравнений.

Ограниченная область $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$, изображенная на следующем рисунке, имеет границу ∂D, состоящую из следующих частей: основание

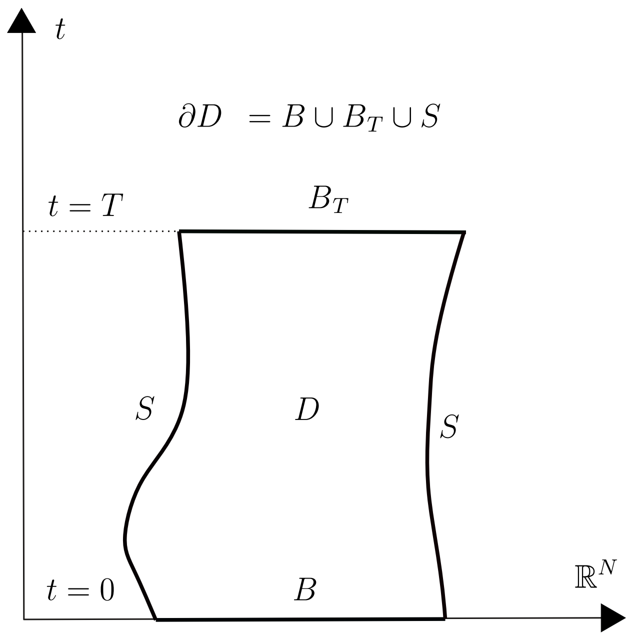


Рис. 10. Граница ∂D области $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$.

B при $t = 0$, называемое нижней крышкой:

$$\overline{B} = B \cup \partial B, \quad \overline{B} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \partial D \cap \{t = 0\},$$

верхняя крышка B_T:

$$\overline{B}_T = B_T \cup \partial B_T, \quad \overline{B}_T \stackrel{\mathrm{def}}{=} \partial D \cap \{t = T\}$$

боковая граница:

$$S \stackrel{\mathrm{def}}{=} \partial D \backslash (B \cup B_T) = (\partial D \cap \{0 < t < T\}) \cup \partial B_T \cup \partial B.$$

В рамках данного курса рассматриваются такие области $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$, что множества

$$B \quad \text{и} \quad B_T$$

являются областями в соответствующих гиперплоскостях $t = 0$ и $t = T$. Символом $\overline{B}$ обозначено замыкание в $\mathbb{R}^N \times \{t = 0\}$ области B, $\overline{B}_T$ — замыкание в $\mathbb{R}^N \times \{t = T\}$ области B_T, а символами ∂B и ∂B_T обозначены границы областей $B \subset \mathbb{R}^N \times \{t = 0\}$ и $B_T \subset \mathbb{R}^N \times \{t = T\}$, соответственно.

Отметим, что граничные условия для решений параболического уравнения задаются не на всей границе ∂D области D, а только на её части:

$$\partial' D \stackrel{\mathrm{def}}{=} B \cup S,$$

называемой нормальной границей или параболической границей. Это связано со слабым принципом максимума, в силу которого задание граничных условий только на параболической границе достаточно для единственности решения соответствующей краевой задачи.

На практике довольно часто область $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$ может быть представлена в виде цилиндрической области $D = \Omega \times (0, T)$ или в более общем случае в виде $D = \Omega \times (T_0, T)$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Такую область называют цилиндрической. Пример цилиндрической области приведён на рисунке 10. С другой стороны, много практических примеров, так называемых областей с подвижной границей, когда область D является нецилиндрической. Пример нецилиндрической области изображён на рисунке 10.

Введём следующие обозначения (см. рисунок 11):

$$B_\tau \stackrel{\mathrm{def}}{=} D \cap \{t = \tau\}, \quad D_\tau \stackrel{\mathrm{def}}{=} D \cap \{0 < t < \tau\}, \quad S_\tau \stackrel{\mathrm{def}}{=} S \cap \{0 < t \leqslant \tau\}$$

для любого $\tau \in (0, T)$. Будем в дальнейшем рассматривать в основном такие области $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$, что множества B_τ для всех $\tau \in [0, T]$ являются областями (связными и открытыми множествами) на соответствующих гиперплоскостях $t = \tau$, хотя принцип максимума будет доказан для достаточно общих областей D.

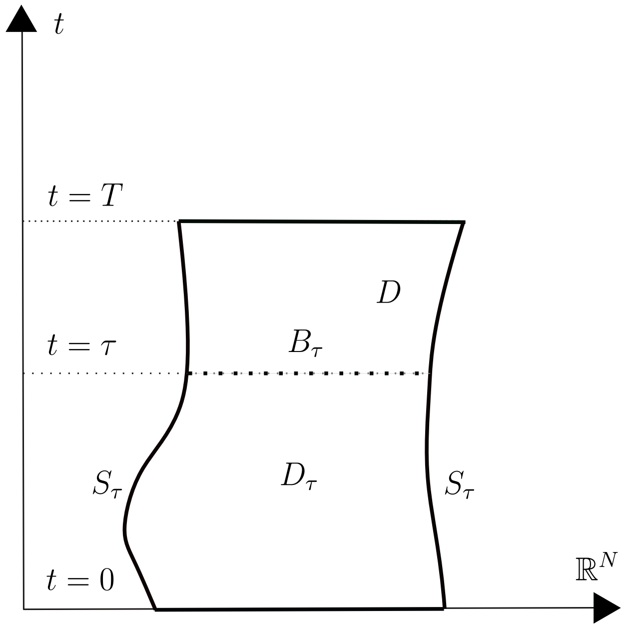


Рис. 11. Множества D_τ, B_τ и S_τ.

Сформулируем математически строгие определения верхней и нижней крышек. Убедимся в том, что некоторые связные части нижней крышки могут располагаться «выше» некоторых связных частей верхних крышек.

Пусть

$$\text{Ц}_{x_0,R}^{t_1,t_2} \stackrel{\text{def}}{=} \big\{(x,t) \in \mathbb{R}^{N+1} : \ |x - x_0| < R, \ t_1 < t < t_2\big\}$$

— это цилиндр (область) в $\mathbb{R}^{N+1}$.

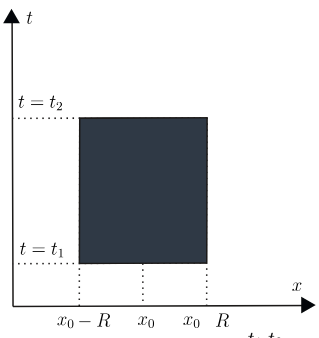


Рис. 12. Цилиндр $\text{Ц}_{x_0,R}^{t_1,t_2}$.

Определение 1. *Верхней крышкой $\gamma(D)$ области $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$ называется подмножество граничных точек $M = (x,t) \in \partial D$ таких, что для любой точки $M = (x,t) \in \gamma(D)$ найдётся такое $h > 0$, что выполнены следующие свойства*:

$$Ц_{x,h}^{t-h,t} \subset D \quad \textit{и} \quad Ц_{x,h}^{t,t+h} \subset \mathbb{R}^{N+1} \backslash \overline{D}.$$

Определение 2. *Нижней крышкой $\gamma_0(D)$ области $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$ называется подмножество граничных точек $M = (x,t) \in \partial D$ таких, что для любой точки $M = (x,t) \in \gamma_0(D)$ найдётся такое $h > 0$, что выполнены следующие свойства*:

$$Ц_{x,h}^{t,t+h} \subset D \quad \textit{и} \quad Ц_{x,h}^{t-h,t} \subset \mathbb{R}^{N+1} \backslash \overline{D}.$$

Из определений 1 и 2 следует

Лемма 1. *Каждая связная часть верхней крышки $\gamma(D)$ и нижней крышки $\gamma_0(D)$ лежит на гиперплоскости вида $\{t = t_0\} \subset \mathbb{R}^{N+1}$ и является открытым множеством на этой гиперплоскости в смысле стандартной топологии пространства $\mathbb{R}^N$.*

Определение 3. *Множество граничных точек $S(D) := = \partial D \backslash (\gamma(D) \cup \gamma_0(D))$ называется боковой границей* [1]) *области D. Множество $\partial' D := \partial D \backslash \gamma(D)$ называется параболической границей области D.*

На рисунке 13 изображена область D ограниченная границей ∂D и состоящая, согласно определениям 1–3, из непересекающихся частей — из нижней крышки $\gamma_0(D)$, изображённой на рисунке отрезками [1-6] и [7-8], из верхней крышки $\gamma(D)$, изображённой на рисунке отрезками [2-3], [4-5] и [9-10]. Линиями на рисунке изображена боковая граница $S(D)$.

Таким образом, приведен пример части нижней крышки $[7-8]$, расположенной выше двух связных частей верхней крышки [2-3] и [9-10]. Для корректной постановки, например, первой краевой задачи (см. следующий параграф) нужно знать предельное значение решения $u(x,t)$ параболического уравнения только в точках параболической границы $\partial' D$. В частности, нужно задать значение функции $u(x,t)$ на отрезке [7-8] — связном отрезке нижней крышки $\gamma_0(D)$.

Отметим, что можно привести пример области D, для которой верхняя крышка $\gamma(D) = \varnothing$ и нижняя крышка $\gamma_0(D) = \varnothing$. Аналитически такая область может быть задана следующим образом:

$$D = \left\{ (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1} : \sum_{j=1}^{N} |x_j - a_j|^2 + |t - t_0|^2 < 1 \right\}.$$

[1]) Если понятно для какой области D множество $S(D)$ является боковой границей, мы будем использовать обозначение S.

$$\partial D = \gamma(D) \cup \gamma_0(D) \cup S(D)$$

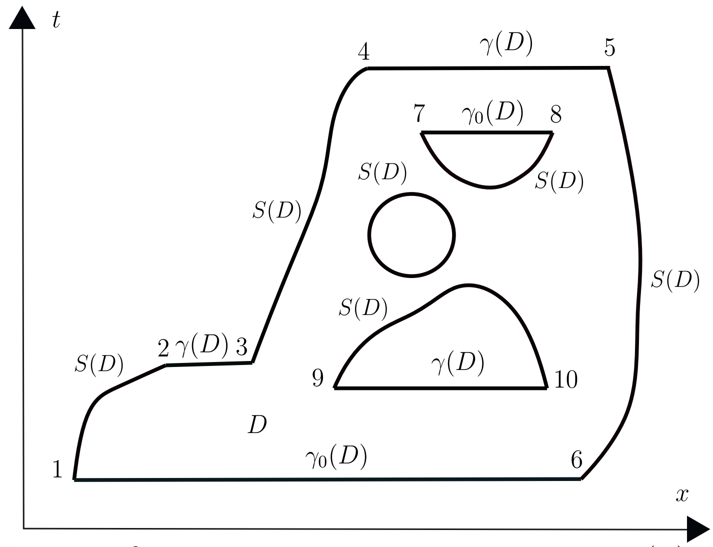


Рис. 13. Граница ∂D области D и ее части — верхняя крышка $\gamma(D)$, нижняя крышка $\gamma_0(D)$ и боковая граница $S(D)$.

Очевидно, что для этой области D граница области ∂D совпадает с боковой границей $S(D)$.

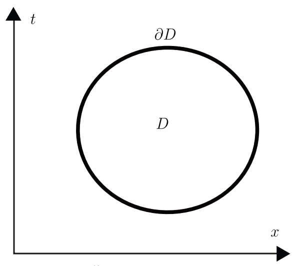


Рис. 14. Область D, для которой и нижняя и верхняя крышки — пустые множества.

Заметим, что в основном рассматриваются области D, которые имеют более привычный вид, изображённый на рисунке 10.

Сделаем ряд замечаний относительно обозначений. В случае областей $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$, для которых верхняя крышка $\gamma(D)$ состоит только из одной связной компоненты, лежащей на гиперплоскости $t = T > 0$ будет использоваться обозначение B_T вместо $\gamma(D)$. Аналогично, в том случае, когда нижняя крышка $\gamma_0(D)$ состоит только из одной связной компоненты, лежащей на гиперплоскости $t = 0$, будет использоваться обозначение B вместо $\gamma_0(D)$.

Связные компоненты верхней крышки $\gamma(D)$ будем обозначать символом B_t, а связные компоненты нижней крышки $\gamma_0(D)$ будем обозначать символом B^t.

§ 2. Постановка задач для параболических операторов

В данном курсе лекций будем рассматривать не только задачу Коши и первую краевую задачу, но и вторую и третью краевые задачи. Прежде всего определим параболический оператор в области $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$.

Оператор L, определённый равенством: [1]

$$Lu(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x,t)u - \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.1)$$

называется параболическим в области $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$, если для всех $(x,t) \in \in D$ и для каждого $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^N$ выполнено следующее неравенство:

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j > 0. \quad (2.2)$$

Иначе говоря, оператор L называется параболическим в области D, если его часть

$$L_0u(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x,t)u \quad (2.3)$$

для всех $(x,t) \in D$ является эллиптическим оператором по переменным x_i, $i = \overline{1,N}$ с параметром t.

Определение локально равномерно параболического оператора. *Оператор L называется локально равномерно параболическим, если для всех $(x,t) \in Q$ из компактного множества $Q \subset D$ найдутся такие постоянные $m = m(Q) > 0$ и $\Lambda = \Lambda(Q) > 0$, что выполнены неравенства*:

$$m|\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \leqslant \Lambda|\xi|^2 \quad \text{для всех} \quad \xi \in \mathbb{R}^N, \quad (x,t) \in Q. \quad (2.4)$$

Замечание. Это определение означает, что эллиптический оператор L_0 является локально равномерно эллиптическим с параметром t. Нетрудно убедиться в том, что *всякий параболический оператор в*

---

[1] Без ограничения общности можно считать, что $a_{ij}(x,t) = a_{ji}(x,t)$.

области $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$ является локально равномерно параболическим оператором в этой области.

Пусть коэффициенты оператора L удовлетворяют следующим условиям:

(A) Оператор L — параболический в D;

(B) коэффициенты оператора L — непрерывные функции в D;

(C) $c(x,t) \leqslant 0$ в D.

Определение классического решения параболического уравнения. *Функция $u = u(x,t)$ называется классическим решением параболического уравнения*

$$Lu(x,t) = f(x,t) \in \mathbb{C}(D \cup \gamma(D)),$$

если

$$u(x,t), \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} \in \mathbb{C}(D \cup \gamma(D)), \quad i,j = \overline{1,N}.$$

Замечание. Отметим, что в дополнительных комментариях нуждается следующее условие:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \in \mathbb{C}(D \cup \gamma(D)).$$

Действительно, пусть $B_{t_1} \subset \gamma(D)$ — это произвольная связная компонента верхней крышки. Известно, что это — область в N–мерном пространстве $\mathbb{R}^N \times \{t = t_1\}$. Тогда для функции $u(x,t) \in \mathbb{C}(D \cup B_{t_1})$ запись

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \in \mathbb{C}(D \cup B_{t_1})$$

означает, что

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \in \mathbb{C}(D) \quad \text{и} \quad \exists \lim_{t \to t_1 - 0,\ (x,t) \in \text{Ц}_{x_0,h}^{t_1-h,t_1}} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D_t^- u(x,t_1),$$

где D_t^- — это левая односторонняя производная по t функции $u(x,t)$. Положим по определению:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \begin{cases} \partial u(x,t)/\partial t, & \text{если} \quad (x,t) \in D; \\ D_t^- u(x,t), & \text{если} \quad (x,t_1) \in B_{t_1}. \end{cases}$$

Очевидно, что при этом

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \in \mathbb{C}(D \cup B_{t_1}).$$

Определим задачу Коши.

З а д а ч а К о ш и. *Найти классическое решение*

$$u(x,t) \in \mathbb{C}_w(\mathbb{R}^N \times [0,+\infty)) \cap \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(\mathbb{R}^N \times (0,+\infty))$$

уравнения

$$Lu(x,t) = f(x,t) \quad \textit{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,+\infty), \tag{2.5}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$\lim_{\mathbb{R}^N \times (0,+\infty) \ni (y,s) \to (x,0)} u(y,s) = u_0(x) \quad \textit{для} \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{2.6}$$

З а м е ч а н и е. Задача Коши имеет, вообще говоря, неединственное решение. Для того, чтобы классическое решение задачи Коши было единственным достаточно потребовать выполнения следующих неравенств:

$$|u_0(x)| \leqslant M \exp\left(\beta |x|^2\right), \quad |f(x,t)| \leqslant M \exp\left(\beta |x|^2\right) \tag{2.7}$$

при $x \in \mathbb{R}^N$ и $t \geqslant 0$ для некоторых постоянных $M > 0$ и $\beta > 0$.

П е р в а я к р а е в а я з а д а ч а. *Найти классическое решение* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D \cup \gamma(D)) \cap \mathbb{C}_w(\overline{D})$, *удовлетворяющее уравнению*:

$$Lu(x,t) = f(x,t) \quad \textit{при} \quad (x,t) \in D \cup \gamma(D), \tag{2.8}$$

начальному условию на замыкании нижней крышки:

$$\lim_{D \cup \gamma(D) \ni (y,\tau) \to (x,t) \in \gamma_0(D)} u(y,\tau) = u_0(x,t) \quad \textit{при} \quad (x,t) \in \gamma_0(D), \tag{2.9}$$

а также граничному условию на боковой границе $S = \partial D \setminus (\gamma(D) \cup \gamma_0(D))$:

$$\lim_{D \cup \gamma(D) \ni (y,\tau) \to (x,t) \in S} u(y,\tau) = g(x,t) \quad \textit{при} \quad (x,t) \in S. \tag{2.10}$$

З а м е ч а н и е. Отметим, что граничные условия (2.9) и (2.10) можно объединить в одно граничное условие:

$$\lim_{D \cup \gamma(D) \ni (y,\tau) \to (x,t) \in \partial' D} u(y,\tau) = \psi(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial' D \tag{2.11}$$

на параболической границе $\partial' D = S \cup \gamma_0(D)$ полной границы $\partial D = S \cup \gamma_0(D) \cup \gamma(D)$. Отметим, что специфика первой краевой задачи для параболического оператора L — это отсутствие граничного условия на верхней крышке $\gamma(D)$ области D.

З а м е ч а н и е. Под пространством функций $\mathbb{C}_w(\overline{D})$ понимается множество таких функций $f(x,t) \in \mathbb{C}(D \cup \gamma(D))$, для которых существует их непрерывное продолжение из $D \cup \gamma(D)$ вплоть до параболической части $\partial' D = S \cup \gamma_0(D)$ полной границы $\partial D = S \cup \gamma(D) \cup \gamma_0(D)$.

Вторую и третью краевые задачи для параболического оператора L мы будем формулировать в цилиндрической области $D_T = \Omega \times (0, T) \subset \subset \mathbb{R}^{N+1}$, $\partial\Omega = \Gamma$, для которой

$$\gamma(D) = B_T = \Omega \times \{t = T\} \quad \text{и} \quad \gamma_0(D) = B = \Omega \times \{t = 0\}.$$

Для этого определим *производную по внутренней нормали* $\partial/\partial \mathbf{n}_x$ и *производную по внутренней конормали* $\partial/\partial \nu_{x,t}$ к боковой границе $S_T := \Gamma \times [0, T]$.

Пусть $\{O, \mathbf{E}\}$, где $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_N, \mathbf{e}_t)$ — некоторая заданная прямоугольная декартова система координат в $\mathbb{R}^{N+1}$. В каждой точке $(x, t) \in \in S_T$ определено непрерывное векторное поле внутренних нормалей $\mathbf{n}_{x,t} = (\mathbf{n}_x, 0)$, лежащее для любого $t = \tau \in [0, T]$ на гиперплоскости $t = \tau$ и определённое своими направляющими косинусами:

$$(\cos(\mathbf{n}_x, \mathbf{e}_1), \cdots, \cos(\mathbf{n}_x, \mathbf{e}_N), 0).$$

Тогда вектор внутренней конормали $\nu_{x,t}$ определяется следующим образом:

$$\nu_{x,t} = \frac{1}{a(x,t)} \left(\sum_{j=1}^{N} a_{1j}(x,t) \cos(\mathbf{n}_x, \mathbf{e}_j), \cdots, \sum_{j=1}^{N} a_{Nj}(x,t) \cos(\mathbf{n}_{x,t}, \mathbf{e}_j), 0 \right),$$

где

$$a(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \left[\sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{j=1}^{N} a_{ij}(x,t) \cos(\mathbf{n}_x, \mathbf{e}_j) \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Граничным оператором нормальной производной называется следующее выражение:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \mathbf{n}_x} := \sum_{i=1}^{N} \cos(\mathbf{n}_x, \mathbf{e}_i) \frac{\partial u}{\partial x_i}, \tag{2.12}$$

а оператором конормальной производной в случае оператора L с матрицей $(a_{ij}(x,t))$ называется величина:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu_{x,t}} := \frac{1}{a(x,t)} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t) \cos(\mathbf{n}_x, \mathbf{e}_j) \frac{\partial u}{\partial x_i}. \tag{2.13}$$

В т о р а я   к р а е в а я   з а д а ч а. *Найти классическое решение* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D \cup B_T) \cap \mathbb{C}^{(1,0)}_{x,t}(\mathbf{n}; \overline{D}_T)$ *уравнения*:

$$Lu(x,t) = f(x,t) \quad \textit{при} \quad (x,t) \in D \cup B_T, \tag{2.14}$$

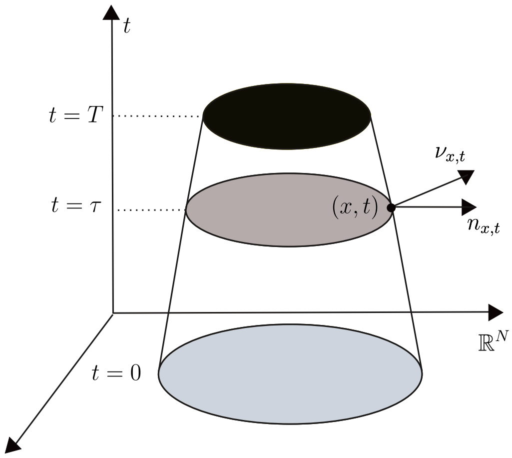


Рис. 15. Векторы внешней нормали $\mathbf{n}_{x,t}$ и внешней конормали $\nu_{x,t}$.

удовлетворяющее начальному условию:

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \textit{при} \quad x \in \overline{\Omega} \tag{2.15}$$

и граничному условию для нормальной производной:

$$\lim_{(\Omega\times[0,T])\cap l\ni(y,\tau)\to(x,t)\in S_T} \frac{\partial u(y,\tau)}{\partial \mathbf{n}_x} = g(x,t) \quad \textit{при} \quad (x,t) \in S_T, \tag{2.16}$$

где $l = \{(x,t) + s(\mathbf{n}_x, 0), s \in \mathbb{R}\}$ *— прямая, проходящая через точку* $(x,t) \in S_T$, *с направляющим вектором* $\mathbf{n}_{x,t} = (\mathbf{n}_x, 0)$.

Третья краевая задача. *Найти классическое решение* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D \cup B_T) \cap \mathbb{C}^{(1,0)}_{x,t}(\mathbf{n}; \overline{D}_T)$ *уравнения*:

$$Lu(x,t) = f(x,t) \quad \textit{при} \quad (x,t) \in D \cup B_T, \tag{2.17}$$

удовлетворяющего начальному условию:

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \textit{при} \quad x \in \overline{\Omega} \tag{2.18}$$

и граничному условию:

$$\lim_{(\Omega\times[0,T])\cap l\ni(y,\tau)\to(x,t)\in S_T} \left(\frac{\partial u(y,\tau)}{\partial \mathbf{n}_x} + \beta(y,\tau)u(y,\tau) \right) = g(x,t) \tag{2.19}$$

для любой точки $(x,t) \in S_T$, *где* $l = \{(x,t) + s(\mathbf{n}_x, 0), s \in \mathbb{R}\}$ *— прямая, проходящая через точку* $(x,t) \in S_T$, *с направляющим вектором* $\mathbf{n}_{x,t} = (\mathbf{n}_x, 0)$.

Помимо перечисленных задач можно рассмотреть задачу Стефана со свободной границей (см. подробное рассмотрение этой задачи в книге [14]), когда граница области D заранее неизвестна. Однако, эта задача обсуждаться не будет и поэтому не формулируется.

§ 3. Литературные указания

Материал для лекции взят из работ [3], [5], [8], [14], [15].

Лекция 10

СЛАБЫЙ ПРИНЦИП МАКСИМУМА

§ 1. Слабый принцип максимума

Пусть параболический оператор L удовлетворяет условиям (B) и (C) из предыдущей лекции. Справедливо важное утверждение в произвольной области $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$, например, в неограниченной, называемое *слабым принципом максимума.*

Лемма 1. *Предположим, что либо $Lu(x,t) > 0$ всюду в $D \cup \gamma(D)$, либо $Lu(x,t) \geqslant 0$ и $c(x,t) < 0$ всюду в $D \cup \gamma(D)$. Тогда $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D \cup \cup \gamma(D))$ не может иметь положительного локального максимума в $D \cup \gamma(D)$. Кроме того, в первом случае, если $c(x,t) \equiv 0$, то в $D \cup \cup \gamma(D)$ не может достигаться даже максимум.*

Доказательство.

Пусть $u = u(x,t)$ имеет локальный максимум в точке $P_0 = z_0 = (x_0, t_0) \in D \cup \gamma(D)$. Докажем, что

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x_0,t_0)\frac{\partial^2 u(x_0,t_0)}{\partial x_i \partial x_j} \leqslant 0. \tag{1.1}$$

□ В самом деле, выполним линейную замену переменных:

$$y = xC, \quad C^T = C^{-1}, \quad x = (x_1, ..., x_N), \quad y = (y_1, ..., y_N), \quad C = (c_{jk})_N^N.$$

Область D преобразуется в некоторую область D^* и справедливы равенства:

$$y_l = xC_l, \quad \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{l=1}^{N} \frac{\partial y_l}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y_l} = \sum_{l=1}^{n} c_{il}\frac{\partial}{\partial y_l}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{l,k=1,1}^{N,N} c_{il}c_{jk}\frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_l}.$$

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x_0,t_0)\frac{\partial^2 u(x_0,t_0)}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k,l=1,1}^{N,N} b_{kl}(y_0,t_0)\frac{\partial^2 v(y_0,t_0)}{\partial y_k \partial y_l}, \tag{1.2}$$

где

$$v(y,t) := u(yC^{-1},t), \quad y_0 := x_0 C,$$

$$b_{kl}(y_0,t_0) := \sum_{i,j=1,1}^{N,N} c_{ik}c_{jl}a_{ij}(x_0,t_0) =$$
$$= \sum_{i=1}^{N} c_{ik} \sum_{j=1}^{N} a_{ij}(x_0,t_0)c_{jl} = \sum_{i=1}^{N} c_{ik} \left\{A(x_0,t_0)\cdot C\right\}_{il} =$$
$$= \sum_{i=1}^{N} \left\{C^T\right\}_{ki} \left\{A(x_0,t_0)\cdot C\right\}_{il} = \left\{C^T\cdot A(x_0,t_0)\cdot C\right\}_{kl}.$$

Существует такая ортогональная матрица C, что

$$b_{kl}(y_0,t_0) = \lambda_k\delta_{kl}, \quad \lambda_k > 0 \quad \text{для всех} \quad k = \overline{1,N}.$$

Очевидно, что Функция $v(y,t)$ имеет в точке $(y_0,t_0) \in D^* \cup \gamma(D^*)$ тоже максимум. Следовательно, выполнено неравенство:

$$\frac{\partial^2 v(y_0,t_0)}{\partial y_i^2} \leqslant 0 \Rightarrow \sum_{i,j=1,1}^{N,N} b_{ij}(y_0,t_0)\frac{\partial^2 v(y_0,t_0)}{\partial y_i \partial y_j} = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \frac{\partial^2 v(y_0,t_0)}{\partial y_i^2} \leqslant 0.$$

□□ Напомним, откуда возникает неравенство:

$$\frac{\partial^2 v(y_0,t_0)}{\partial y_i^2} \leqslant 0.$$

Действительно, имеет место следующее необходимое условие:

$$d^2 v(y_0,t_0) = \sum_{i,j=1,1}^{N,N} \frac{\partial^2 v(y_0,t_0)}{\partial y_i \partial y_j} dy_i dy_j \leqslant 0.$$

Пусть $dy_j = \lambda_j \delta_{ij}$. Тогда получим неравенство:

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2 v(y_0,t_0)}{\partial y_j^2}\lambda_j^2 \leqslant 0.$$

Теперь в этом неравенстве положим

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_{j-1} = \lambda_{j+1} = \cdots = \lambda_N = 0, \quad \lambda_j = 1.$$

В результате получим неравенство:

$$\frac{\partial^2 v(y_0,t_0)}{\partial y_j^2} \leqslant 0 \quad \text{при} \quad j = \overline{1,N}. \quad \boxtimes\boxtimes$$

Таким образом, отсюда в силу (1.2) следует неравенство (1.1). ⊠

Наконец, в точке $P_0 = (x_0, t_0)$ выполнены необходимые условия экстремума:

$$\frac{\partial u(x_0,t_0)}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial u(x_0,t_0)}{\partial t} \geqslant 0.$$

Последнее неравенство требует пояснений.

Если $P_0 = (x_0, t_0) \in D$, т. е. является внутренней точкой области D, то в точке локального экстремума (максимума) выполнено необходимое условие:

$$\frac{\partial u(x_0,t_0)}{\partial t} = 0.$$

Предположим теперь, что $(x_0, t_0) \in \gamma(D)$, т. е. найдется связная компонента $B_{t_0} \in \gamma(D)$, которой принадлежит точка (x_0, t_0). Докажем, что выполнено неравенство:

$$D_t^- u(x_0,t_0) \geqslant 0. \tag{1.3}$$

□ Действительно, поскольку в точке $(x_0, t_0) \in B_{t_0}$ достигается локальный максимум, то согласно определению верхней крышки имеет место неравенство:

$$\frac{u(x_0,t_0) - u(x_0,t)}{t_0 - t} \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad (x_0,t) \in \text{Ц}_{x_0,h}^{t_0-h,t_0}$$

при некотором достаточно малом $h > 0$. Отсюда в пределе при $\text{Ц}_{x_0,h}^{t_0-h,t_0} \ni (x_0,t) \to (x_0,t_0)$ получаем неравенство (1.3). ⊠

Таким образом, в точке локального максимума имеет место следующее неравенство:

$$Lu(x_0,t_0) \leqslant c(x_0,t_0)u(x_0,t_0). \tag{1.4}$$

Если этот максимум в точке (x_0, t_0) у $u(x_0, t_0)$ положительный, то имеем противоречие в неравенстве (1.4) в каждом из двух случаев:

$$Lu > 0 \quad \text{и} \quad c(x,t) \leqslant 0 \quad \text{либо} \quad Lu(x,t) \geqslant 0 \quad \text{и} \quad c(x,t) < 0.$$

Если $Lu(x,t) > 0$ и $c(x,t) \equiv 0$, то неравенство (1.4) тоже противоречиво. Значит, в этом случае не достигается локальный максимум.

Лемма доказана.

Следствие 1. *Предположим, что либо $Lu(x,t) < 0$ всюду в $D \cup \gamma(D)$, либо $Lu(x,t) \leqslant 0$ и $c(x,t) < 0$ всюду в $D \cup \gamma(D)$. Тогда функция $u(x,t) \in \mathbb{C}_{x,t}^{(2,1)}(D \cup \gamma(D))$ не может иметь отрицательный локальный минимум в $D \cup \gamma(D)$. Кроме того, если в первом случае $c(x,t) \equiv 0$ в $D \cup \gamma(D)$, то не может достигаться локальный минимум.*

Доказательство. Достаточно применить лемму 1 в случае функции $v(x,t) = -u(x,t)$.

Следствие доказано.

Приложение слабого принципа максимума. В качестве приложения слабого принципа максимума рассмотрим вопрос о *единственности решения* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D \cup B_T) \cap \mathbb{C}_w(\overline{D}_T)$ *следующей нелинейной первой краевой задачи* в цилиндрической области $D_T = \Omega \times (0,T)$:

$$Lu(x,t) = f(x,t,u,D_x u) \quad \text{в} \quad D_T \cup B_T, \tag{1.5}$$

$$\lim_{D_T \cup B_T \ni (y,\tau) \to (x,t) \in \partial' D_T} u(x,t) = \psi(x,t), \quad (x,t) \in \partial' D_T = B \cup S_T, \tag{1.6}$$

где $D_x = (\partial_{x_1}, ..., \partial_{x_N})$. Будем предполагать, что функция $f = f(x,t,p,p_1,...,p_N)$ определена на множестве $(D_T \cup B_T) \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^N$. Область $D_T = \Omega \times (0,T)$ ограниченная в $\mathbb{R}^{N+1}$.

Справедлива следующая теорема единственности:

Теорема 1. *Пусть L — это параболический оператор с коэффициентами $a_{ij}(x,t), b_i(x,t), c(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D})$ и пусть $f(x,t,p,p_1,...,p_N)$ является неубывающей по переменной $p \in \mathbb{R}^1$ функцией. Тогда существует не более одного решения задачи* (1.5), (1.6).

Доказательство.

Шаг 1. Рассмотрим случай $c(x,t) \leqslant 0$ при условии, что функция $f = f(x,t,p,p_1,....,p_N)$ является строго возрастающей по $p \in \mathbb{R}^1$.

Предположим, что $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ — это два решения задачи (1.5) и (1.6) из класса $\mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D_T \cup B_T) \cap \mathbb{C}_w(\overline{D}_T)$. Если

$$u_1(x,t) \not\equiv u_2(x,t),$$

то без ограничения общности можно предположить, что

$$u_1(x,t) > u_2(x,t) \quad \text{в некоторых точках} \quad D_T \cup B_T\ ^{1)},$$

поскольку по исходному предположению $u_1(x,t), u_2(x,t) \in \mathbb{C}_w(\overline{D}_T)$. Поэтому функция

$$u(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{u}_1(x,t) - \overline{u}_2(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D}_T)$$

будет иметь положительный максимум в $\overline{D}_T$, где символом $\overline{u}_j(x,t)$ обозначено непрерывное продолжение функции $u_j(x,t)$ из $D_T \cup B_T$ вплоть до параболической границы $\partial' D_T = S_T \cup B$, $j = 1, 2$.

Предположим, что $P_0 = (x_0, t_0) \in D_T \cup B_T$ — это точка, где достигается локальный положительный максимум. Ясно, что

$$D_x u_1(P_0) = D_x u_2(P_0), \quad u_1(P_0) > u_2(P_0).$$

---

1) Заметим, что в точках $(x,t) \in \partial' D_T = S_T \cup B$ имеют место равенства $u_1(x,t) = \psi(x,t) = u_2(x,t)$.

Тогда

$$Lu(P_0) = f(x_0, t_0, u_1(x_0, t_0), D_x u_1(x_0, t_0)) - \\ - f(x_0, t_0, u_2(x_0, t_0), D_x u_2(x_0, t_0)) > 0.$$

С другой стороны, при доказательстве слабого принципа максимума было получено, что

$$Lu(P_0) \leqslant 0$$

в каждой точке $P_0 = (x_0, t_0) \in D_T \cup B_T$, в которой $u(x,t)$ имеет локальный положительный максимум. Таким образом, получаем противоречивый результат. А на параболической границе $\partial^{'} D_T = S_T \cup B$ имеет место равенство:

$$u(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial^{'} D_T.$$

Итак, $u(x,t) = 0$ всюду в $\overline{D}_T$.

Шаг 2. Для того, чтобы доказать теорему в общем случае, сделаем преобразование:

$$v(x,t) = e^{-\lambda t} u(x,t) \Rightarrow Lu(x,t) = e^{\lambda t} Lv(x,t) - \lambda e^{\lambda t} v(x,t),$$

которое приводит уравнение (1.5) к уравнению следующего вида:

$$(L - c(x,t)I)v(x,t) = \widehat{f}(x,t,v,D_x v) \stackrel{\text{def}}{=} \\ = f(x,t,ve^{\lambda t}, e^{\lambda t} D_x v)e^{-\lambda t} + (\lambda - c(x,t))v.$$

Выберем

$$\lambda > \sup_{(x,t)\in D} c(x,t).$$

Тогда функция $\widehat{f}(x,t,v,D_x v)$ будет строго возрастающей по v, а коэффициент при $v(x,t)$ в выражении

$$(L - c(x,t)I)v(x,t)$$

равен нулю. Таким образом, осталось воспользоваться результатом, полученным на первом шаге.

Теорема доказана.

Обратно параболическое уравнение. Интересным представляется результат о принципе максимума для решений обратно параболического уравнения следующего вида:

$$L_p u(x,t) = f(x,t) \quad \text{в} \quad D \cup \gamma_0(D)\ ^{1)}, \tag{1.7}$$

[1)] Напомним, что $\gamma_0(D)$ — это нижняя крышка области D, а $\gamma(D)$ — это верхняя крышка.

где

$$L_p u(x,t) \stackrel{\text{def}}{=}$$
$$= \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x,t)u + \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (1.8)$$

Заметим, что по аналогии с пространством $\mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D \cup \gamma(D))$ определяется пространство $\mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D \cup \gamma_0(D))$. В этом случае

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \in \mathbb{C}(D \cup \gamma_0(D)),$$

если $(x,t) \in \gamma_0(D)$, причем положили по определению:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \begin{cases} \partial u(x,t)/\partial t, & \text{если} \quad (x,t) \in D; \\ D_t^+ u(x,t), & \text{если} \quad (x,t) \in \gamma_0(D). \end{cases}$$

Заметим, что справедлив следующий слабый принцип максимума для решений $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D \cup \gamma_0(D))$ обратно параболического уравнения (1.8).

Лемма 2. *Предположим, что либо $L_p u(x,t) > 0$ всюду в $D \cup \gamma_0(D)$, либо $L_p u(x,t) \geqslant 0$ и $c(x,t) < 0$ всюду в $D \cup \gamma_0(D)$. Тогда функция $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D \cup \gamma_0(D))$ не может иметь положительного локального максимума в $D \cup \gamma_0(D)$.*

Доказательство.

Доказательство этого утверждения в целом повторяет доказательство леммы 1. Одно важное изменение относится к случаю, когда локальный положительный максимум $M > 0$ решения дифференциального неравенства достигается в точке $P_0 = (x_0, t_0) \in \gamma_0(D)$. В этом случае нужно доказать, что

$$D_t^+ u(x_0, t_0) \leqslant 0.$$

□ Действительно, если $(x_0, t_0) \in \gamma_0(D)$, то найдется связная часть B^{t_0} нижней крышки $\gamma_0(D)$ такая, что $(x_0, t_0) \in B^{t_0}$. Поскольку в этой точке достигается локальный максимум, то найдется такое $h > 0$, что имеет место неравенство:

$$\frac{u(x_0,t_0) - u(x_0,t)}{t_0 - t} \leqslant 0 \quad \text{для всех} \quad (x_0,t) \in \text{Ц}^{t_0,t_0+h}_{x_0,h},$$

поскольку $t > t_0$, а $u(x_0,t_0) \geqslant u(x_0,t)$ при $(x_0,t) \in \text{Ц}^{t_0,t_0+h}_{x_0,h}$.

Отсюда в пределе при $\text{Ц}^{t_0,t_0+h}_{x_0,h} \ni (x_0,t) \to (x_0,t_0)$ получаем неравенство:

$$D_t^+ u(x_0,t_0) \leqslant 0. \quad \boxtimes$$

Дальнейшие рассуждения в точности повторяют доказательство леммы 1.

Лемма доказана.

§ 2. Слабый принцип максимума в цилиндрической области

Рассмотрим частный случай цилиндрической ограниченной области $D_T = \Omega \times (0,T)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Напомним, что из леммы 1 лекции 2 в случае ограниченной цилиндрической области D_T следует вложение $\mathbb{C}_w(\overline{D}_T) \subset \mathbb{C}_b(D_T)$.

Справедлив следующий принцип максимума: [1])

Теорема 2. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область, выполнены условия* (B) *и* (C) *из предыдущей лекции относительно коэффициентов параболического оператора L в области D_T и функция $u(x,t) \in \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D_T \cup B_T) \cap \mathbb{C}_w(\overline{D}_T)$. Если*

$$Lu(x,t) \geqslant 0 \quad \text{\textit{в}} \quad (x,t) \in D_T \cup B_T, \tag{2.1}$$

$$\overline{u}(x,t) \leqslant 0 \quad \text{\textit{при}} \quad (x,t) \in S_T \cup B, \tag{2.2}$$

то $\overline{u}(x,t) \leqslant 0$ в $\overline{D}_T$. Если же

$$Lu(x,t) \leqslant 0 \quad \text{\textit{в}} \quad (x,t) \in D_T \cup B_T, \tag{2.3}$$

$$\overline{u}(x,t) \geqslant 0 \quad \text{\textit{при}} \quad (x,t) \in S_T \cup B, \tag{2.4}$$

то $\overline{u}(x,t) \geqslant 0$ в $\overline{D}_T$.

Доказательство.

Шаг 1. Выберем константу $\gamma > 0$ и определим следующую функцию:

$$v(x,t) := u(x,t) - \frac{\gamma}{T-t}. \tag{2.5}$$

Пусть z_γ — это точка в $\overline{D}_T$, в которой $v(x,t)$ принимает максимальное положительное значение. [2]) Заметим, что в силу ограниченности решения $u(x,t)$ в D_T

$$v(z) \to -\infty \quad \text{при} \quad z \to B_T = \{x \in \Omega,\ t = T\}.$$

Поэтому $z_\gamma \notin \overline{B}_T$ и $z_\gamma \in D_T \cup S_T \cup B$.

Шаг 2. Если $v(z_\gamma) \geqslant 0$, то z_γ не может лежать в D_T, т. е. быть внутренней точкой цилиндрической области D_T.

□ Действительно, в противном случае (как и ранее при доказательстве слабого принципа максимума в лемме 1) имеем:

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(z_\gamma) \frac{\partial^2 v(z_\gamma)}{\partial x_i \partial x_j} \leqslant 0, \quad v_t(z_\gamma) = v_{x_i}(z_\gamma) = 0, \quad i = \overline{1,N}.$$

---

[1]) В этой теореме есть усиление по сравнению с леммой 1, поскольку в теореме выполнены условия $Lu(x,t) \geqslant 0$ и $c(x,t) \leqslant 0$.

[2]) Если максимальное значение неположительно, то предельным переходом при $\gamma \to +0$ мы получим сразу же требуемое утверждение.

Заметим, что имеет место равенство:

$$-u_t(x,t) = -v_t(x,t) - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\gamma}{T-t} = -v_t(x,t) - \frac{\gamma}{(T-t)^2}.$$

Поэтому в точке z_γ имеет место оценка:

$$\begin{aligned}0 \leqslant Lu(z_\gamma) = \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(z_\gamma)\frac{\partial^2 v(z_\gamma)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(z_\gamma)\frac{\partial v(z_\gamma)}{\partial x_i} +\\ + c(z_\gamma)u(z_\gamma) - v_t(z_\gamma) - \frac{\gamma}{(T-t_\gamma)^2} \leqslant c(z_\gamma)u(z_\gamma) - \frac{\gamma}{(T-t_\gamma)^2} \leqslant\\ \leqslant -\frac{\gamma}{(T-t_\gamma)^2} + c(z_\gamma)v(z_\gamma) + c(z_\gamma)\frac{\gamma}{T-t_\gamma} \leqslant\\ \leqslant -\frac{\gamma}{(T-t_\gamma)^2} + c(z_\gamma)\frac{\gamma}{T-t_\gamma} < 0. \quad \boxtimes\end{aligned}$$

Шаг 3. Полученное противоречие доказывает, что $v(x,t) \leqslant 0$ в D_T. Кроме того, в силу условия (2.2) имеем: $v(x,t) \leqslant 0$ на $S_T \cup B$. Итак, в любом случае имеем:

$$v(x,t) \leqslant 0 \quad \text{в} \quad D_T \Rightarrow u(x,t) \leqslant \frac{\gamma}{T-t} \quad \text{для} \quad (x,t) \in D_T.$$

Поскольку $u(x,t) \in \mathbb{C}_w(\overline{D}_T)$ не зависит от произвольного $\gamma > 0$, то для всякого фиксированного $(x,t) \in D_T$ устремив $\gamma \to +0$, получим неравенство:

$$u(x,t) \leqslant 0 \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in D_T.$$

По непрерывности получаем, что

$$\overline{u}(x,t) \leqslant 0 \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \overline{D}_T.$$

Шаг 4. Доказательство второго утверждения следует из того очевидного факта, что если $u(x,t)$ — решение задачи (2.3), (2.4), то $-u(x,t)$ — решение задачи (2.1), (2.2).

Теорема доказана.

Теперь рассмотрим обобщение этой теоремы на случай неограниченной области $D_T = \Omega \times (0,T) \subset \mathbb{R}^{N+1}$, т.е. когда область $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ является неограниченной. Итак, справедлива следующая

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (A), (B), (C) *и* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D_T \cup B_T) \cap \mathbb{C}_b(\overline{D}_T)$. *Если*

$$Lu(x,t) \geqslant 0 \quad \textit{в} \quad (x,t) \in D_T \cup B_T, \tag{2.6}$$

$$u(x,t) \leqslant 0 \quad \textit{для} \quad (x,t) \in S_T \cup B, \tag{2.7}$$

то $u(x,t) \leqslant 0$ *в* $\overline{D}_T$. *Если же*

$$Lu(x,t) \leqslant 0 \quad \text{в} \quad (x,t) \in D_T \cup B_T, \tag{2.8}$$

$$u(x,t) \geqslant 0 \quad \text{для} \quad (x,t) \in S_T \cup B, \tag{2.9}$$

то $u(x,t) \geqslant 0$ *в* $\overline{D}_T$.

Доказательство.

Шаг 1. Докажем первое утверждение. Рассмотрим следующую функцию:

$$v_0(x,t) = \operatorname{ch}(|x|)\exp(\lambda t), \quad \lambda > 0. \tag{2.10}$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться в том, что выполнено неравенство:

$$Lv_0(x,t) \leqslant 0 \tag{2.11}$$

для достаточно большой константы $\lambda > 0$.

□ Действительно, справедливы следующие равенства:

$$\frac{\partial v_0(x,t)}{\partial x_i} = \operatorname{sh}(|x|)\frac{x_i}{|x|}\exp(\lambda t),$$

$$\frac{\partial^2 v_0(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} = \left(\operatorname{ch}(|x|)\frac{x_i x_j}{|x|^2} + \frac{\operatorname{sh}(|x|)}{|x|}\delta_{ij} - \frac{\operatorname{sh}(|x|)}{|x|}\frac{x_i x_j}{|x|^2}\right)\exp(\lambda t),$$

$$\frac{\partial v_0(x,t)}{\partial t} = \lambda \operatorname{ch}(|x|)\exp(\lambda t).$$

Теперь нужно отдельно рассмотреть случаи $|x| \leqslant \delta$ и $\delta \leqslant |x|$, где $\delta \in (0,1)$ достаточно мало. Предположим, что

$$|a_{ij}(x,t)| \leqslant M, \quad |b_i(x,t)| \leqslant M, \quad |c(x,t)| \leqslant M \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in D_T.$$

Рассмотрим случай $|x| \leqslant \delta$. Воспользуемся очевидными неравенствами:

$$\frac{|\operatorname{sh}(|x|)|}{|x|} \leqslant 2, \quad 1 \leqslant \operatorname{ch}(|x|) \leqslant 2 \quad \text{при} \quad |x| \leqslant \delta.$$

Поэтому имеют место следующие оценки:

$$\left|\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 v_0(x,t)}{\partial x_i \partial x_j}\right| \leqslant 6MN^2\exp(\lambda t), \tag{2.12}$$

$$\left|\sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\frac{\partial v_0(x,t)}{\partial x_i}\right| \leqslant MN2\delta\exp(\lambda t), \tag{2.13}$$

$$|c(x,t)v_0(x,t)| \leqslant 2M\exp(\lambda t), \tag{2.14}$$

$$-\frac{\partial v_0(x,t)}{\partial t} = -\lambda \operatorname{ch}(|x|)\exp(\lambda t) \leqslant -\lambda \exp(\lambda t). \tag{2.15}$$

В силу (2.12)–(2.15) приходим к следующему неравенству:

$$Lv_0(x,t) \leqslant \left[6MN^2 + 2MN\delta + 2M - \lambda\right]\exp(\lambda t) \leqslant 0$$

для всех $(x,t) \in D \cap \{|x| \leqslant \delta\}$ при условии, что $\lambda > 0$ — достаточно велико.

Рассмотрим теперь случай $|x| \geqslant \delta$. Тогда справедливы оценки:

$$|\operatorname{sh}(|x|)| \leqslant e^{|x|}, \quad \frac{e^{|x|}}{2} \leqslant \operatorname{ch}(|x|) \leqslant e^{|x|}, \quad \frac{1}{|x|} \leqslant \frac{1}{\delta}.$$

С учетом этих неравенств приходим к следующему неравенству:

$$Lv_0(x,t) \leqslant \left[e^{|x|}MN^2\left(1+\frac{2}{\delta}\right) + e^{|x|}MN + e^{|x|}M - \frac{1}{2}e^{|x|}\lambda\right]\exp(\lambda t) \leqslant 0$$

при условии, что $\lambda > 0$ — достаточно велико. Итак, неравенство (2.11) доказано. ⊠

Шаг 2. Положим

$$m := \sup_{(x,t)\in D_T} |u(x,t)|, \quad D_{T,R} \stackrel{\text{def}}{=} [\Omega \cap B_R] \times (0,T), \tag{2.16}$$

где $B_R = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < R\}$. Тогда функция

$$w_R(x,t) := u(x,t) - v_0(x,t)\frac{m}{\operatorname{ch}(R)} \tag{2.17}$$

удовлетворяет следующему условию:

$$w_R(x,t) \leqslant 0 \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \partial' D_{T,R}. \tag{2.18}$$

□ Действительно, в силу условия (2.7) функция $u(x,t) \leqslant 0$ на границе $\partial' D$ и поэтому $w_R(x,t) \leqslant 0$ при $(x,t) \in \partial' D \cap (B_R \times (0,T))$, а при $(x,t) \in \partial B_R \times [0,T]$ имеет место неравенство:

$$w_R(x,t)\Big|_{|x|=R} = (u(x,t) - me^{\lambda t})\Big|_{|x|=R} \leqslant (u(x,t) - m)\Big|_{|x|=R} \leqslant 0. \quad ⊠$$

С другой стороны, из неравенств (2.6) и (2.11) следует, что

$$Lw_R(x,t) \geqslant 0. \tag{2.19}$$

В силу ограниченности области $D_{T,R}$ в соответствии с теоремой 2

$$w_R(x,t) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D_{T,R} \Rightarrow u(x,t) \leqslant v_0(x,t)\frac{m}{\operatorname{ch} R}.$$

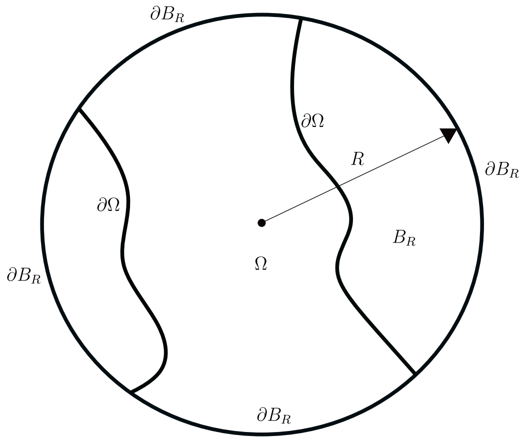


Рис. 16. Множество $\Omega \cap B_R$.

Переходя к пределу при $R \to +\infty$, получим утверждение теоремы.

Шаг 3. Докажем второе утверждение. Если функция $u(x,t)$ — решение задачи (2.8), (2.9), то функция $-u(x,t)$ — решение задачи (2.6), (2.7).

Теорема доказана.

Замечание. В формулировке теорем 2 и 3 используется понятие ограниченного решения, а именно: условие того, что решение $u(x,t)$ ограничено в рассматриваемой цилиндрической области.

§ 3. Литературные указания

Материал для лекции взят из работ [4], [14], [15].

Лекция 11

СИЛЬНЫЙ ПРИНЦИП МАКСИМУМА

§ 1. Сильный принцип максимума

Доказательство основного утверждения этого параграфа — сильного принципа максимума, будем проводить для произвольной ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$. Для этого потребуются новые понятия.

Обозначения. Пусть $P_0 = (x_0, t_0)$ — любая точка из области D. Обозначим через $S(P_0)$ множество всех точек $Q = \{(x,t)\}$ в D, таких, что их можно соединить с P_0 простой непрерывной кривой, лежащей в D, вдоль которой координата t не убывает от Q к P_0. Через $C(P_0)$ мы обозначим связную компоненту пересечения $D \cap \{t = t_0\}$, которая содержит P_0. Заметим, что $S(P_0) \supset C(P_0)$. Отметим, что может быть так, что $D \cap \{t = t_0\} \notin S(P_0)$.

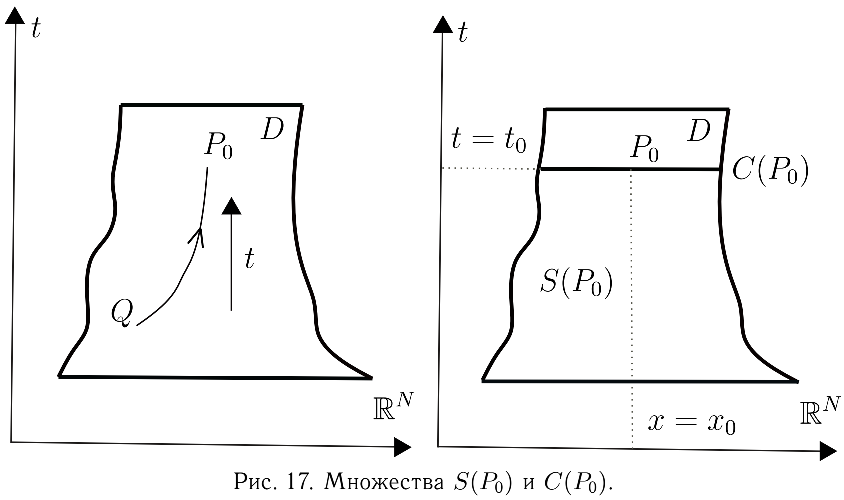


Рис. 17. Множества $S(P_0)$ и $C(P_0)$.

Сформулируем основное утверждение этой лекции, называемое сильным принципом максимума.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (A), (B) *и* (C). *Если* $Lu \geqslant 0$ $(Lu \leqslant 0)$ *в* D *и если функция* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D)$ *имеет в* D *положи-*

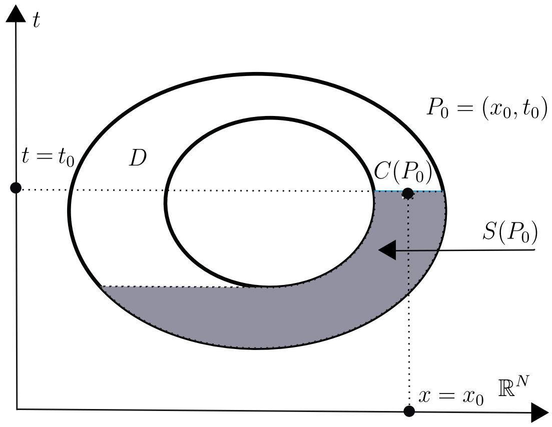


Рис. 18. Множества $S(P_0)$ и $C(P_0)$ в случае «гладкой» двусвязной области D.

тельный глобальный максимум (отрицательный глобальный минимум), который достигается в точке $P_0 = (x_0, t_0) \in D$, *то* $u(x,t) = u(P_0)$ *для всех* $(x,t) \in S(P_0)$.

Доказательство теоремы. Докажем эту теорему в случае, когда функция $u(x,t)$ имеет глобальный положительный максимум M в D. Для того, чтобы доказать эту важную теорему нужно доказать ряд вспомогательных лемм.

Этап I. Докажем следующее утверждение:

Лемма 1. *Пусть* $Lu \geqslant 0$ *в* D *и функция* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D)$ *имеет положительный глобальный максимум* M *в точке* $\overline{P} = (\overline{x}, \overline{t}) \in D$. *Предположим, что* D *содержит замкнутый эллипсоид* E :

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i (x_i - x_i^*)^2 + \lambda_0 (t - t^*)^2 \leqslant R^2,$$

$$\overline{P} = (\overline{x}, \overline{t}) \in \partial E, \quad \lambda_0 > 0, \quad \lambda_i > 0, \quad R > 0, \quad i = \overline{1, N},$$

причем $u(x,t) < M$ *во внутренних точках* $(x,t) \in E$ *и* $u(\overline{x}, \overline{t}) = M$ *в точке* $\overline{P} = (\overline{x}, \overline{t})$ *на границе* ∂E *эллипсоида* E. *Тогда* $\overline{x} = x^*$, *где* $x^* = (x_1^*, ..., x_N^*)$.

Доказательство.

Шаг 1. Без ограничения общности можно считать, что $\overline{P} = (\overline{x}, \overline{t})$ — это единственная точка на ∂E, в которой $u(\overline{x}, \overline{t}) = M$, так как в противном случае [1] можно взять меньший замкнутый эллипсоид e, лежащий в E и имеющий единственную общую точку $\overline{P}$ с ∂E (см. рисунок 20).

[1] Заметим, что $u(x,t) < M$ во всех внутренних точках эллипсоида E.

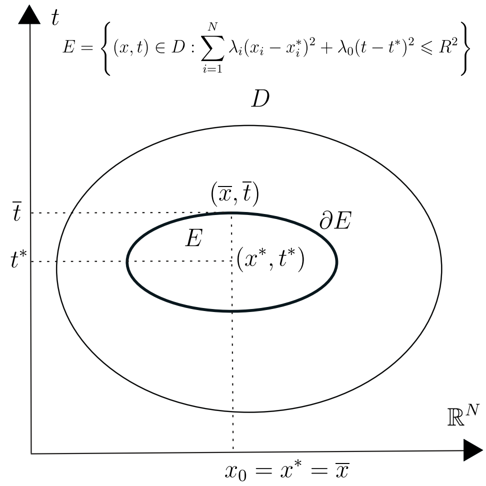


Рис. 19. Эллипсоид E в формулировке леммы 1.

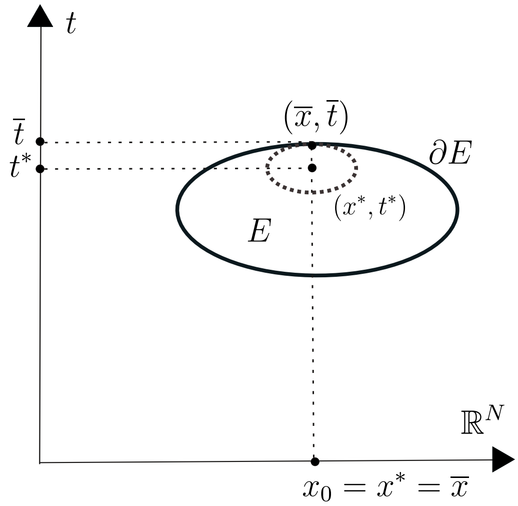


Рис. 20. Вложенный эллипсоид e.

Шаг 2. Предположим, что $\overline{x} \neq x^*$ и C — это $(N+1)$–мерный шар, замыкание которого $\overline{C}$ содержится в D, с центром в точке $\overline{P} = (\overline{x}, \overline{t})$ и радиусом $r > 0$ меньшим, чем $|\overline{x} - x^*|$. Тогда:

$$|x - x^*| \geqslant \beta > 0 \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \overline{C}. \tag{1.1}$$

Граница шара C состоит из части $\partial C_1 \subset E$, и части ∂C_2, лежащей вне эллипсоида E (см. рис. 21). Очевидно, что для некоторого $\delta > 0$

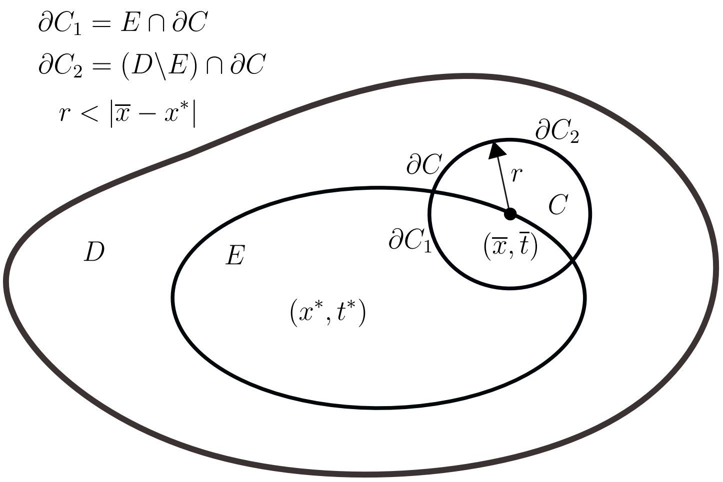


Рис. 21. Шар C.

выполнено неравенство:

$$u(x,t) \leqslant M - \delta \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial C_1, \tag{1.2}$$

поскольку по построению $E \subset D$ и максимум M функции $u(x,t)$ достигается только в точке $\overline{P} = (\overline{x}, \overline{t}) \in \partial E$ (см. шаг 1).

Шаг 3. Введём следующую функцию:

$$h(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \exp\left\{-\alpha \left[\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \left(x_i - x_i^*\right)^2 + \lambda_0 \left(t - t^*\right)^2\right]\right\} - \\ - \exp\left[-\alpha R^2\right], \quad \alpha > 0. \tag{1.3}$$

Заметим, что по построению функция $h = h(x,t) > 0$ внутри E, равна нулю на границе ∂E и меньше нуля при $(x,t) \in D \backslash E$, т. е. вне замкнутого эллипсоида E. Кроме того, заметим, что

$$\exp\left\{\alpha \left[\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \left(x_i - x_i^*\right)^2 + \lambda_0 \left(t - t^*\right)^2\right]\right\} Lh(x,t) = \\ = \left\{4\alpha^2 \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t) \lambda_i \lambda_j \left(x_i - x_i^*\right)\left(x_j - x_j^*\right) - \right. \\ \left. - 2\alpha \left[\sum_{i=1}^{N} a_{ii}(x,t)\lambda_i + \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\lambda_i \left(x_i - x_i^*\right) - \lambda_0 \left(t - t^*\right)\right] + c(x,t)\right\} - \\ - c(x,t) \exp\left[-\alpha R^2\right] \exp\left\{\alpha \left[\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \left(x_i - x_i^*\right)^2 + \lambda_0 \left(t - t^*\right)^2\right]\right\}. \tag{1.4}$$

Поскольку в шаре C выполнено неравенство (1.1), то *слагаемые в первых фигурных скобках в равенстве* (1.4) *будет больше нуля при достаточно большом* $\alpha > 0$.

□ Действительно, поскольку выполнено условие (A), то имеет место неравенство (2.4), из которого следует оценка:

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\lambda_i\lambda_j\left(x_i - x_i^*\right)\left(x_j - x_j^*\right) \geqslant$$
$$\geqslant m\sum_{i=1}^{N}\lambda_i^2|x_j - x_j^*|^2 \geqslant m\lambda^2\sum_{i=1}^{N}|x_j - x_j^*|^2 = m\lambda^2|x - x^*|^2 \geqslant$$
$$\geqslant m\lambda^2\beta^2 =: d > 0, \quad \lambda := \min_{i=\overline{1,N}}\lambda_i > 0, \quad m = m(\overline{C}) > 0 \quad (1.5)$$

для всех $(x,t) \in \overline{C} \subset D$ [1]. Кроме того, поскольку выполнено условие (B), то найдётся такая постоянная $K_1 > 0$, что

$$\max_{(x,t)\in\overline{C}}|a_{ij}(x,t)| \leqslant K_1, \quad \max_{(x,t)\in\overline{C}}|b_i(x,t)| \leqslant K_1, \quad \max_{(x,t)\in\overline{C}}|c(x,t)| \leqslant K_1.$$

Поэтому имеет место следующая оценка:

$$\left|\sum_{i=1}^{N} a_{ii}(x,t)\lambda_i + \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\lambda_i\left(x_i - x_i^*\right) - \lambda_0\left(t - t^*\right)\right| \leqslant$$
$$\leqslant K_1N\overline{\lambda} + K_1N\overline{\lambda}\sup_{(x,t)\in\overline{C}}|x - x^*| +$$
$$+ \lambda_0\sup_{(x,t)\in\overline{C}}|t - t^*| =: K_2 < +\infty, \quad \overline{\lambda} := \max_{i=\overline{1,N}}\lambda_i. \quad (1.6)$$

В силу неравенств (1.5) и (1.6) получается следующая оценка снизу:

$$4\alpha^2\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\lambda_i\lambda_j\left(x_i - x_i^*\right)\left(x_j - x_j^*\right) -$$
$$- 2\alpha\left[\sum_{i=1}^{N} a_{ii}(x,t)\lambda_i + \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\lambda_i\left(x_i - x_i^*\right) - \lambda_0\left(t - t^*\right)\right] +$$
$$+ c(x,t) \geqslant 4\alpha^2 d - 2\alpha K_2 - K_1 > 0 \quad (1.7)$$

при достаточно большом $\alpha > 0$. Итак,

$$Lh(x,t) > 0 \quad \text{в} \quad C \quad (1.8)$$

[1] Очевидно, $\overline{C}$ компактное множество в $\mathbb{R}^{N+1}$.

для достаточно большого $\alpha > 0$. $\boxtimes$

Шаг 4. Рассмотрим теперь в шаре C функцию:

$$v(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} u(x,t) + \varepsilon h(x,t) \quad \text{при} \quad \varepsilon > 0. \tag{1.9}$$

Если $\varepsilon > 0$ — достаточно малое (по сравнению с $\delta > 0$ из неравенства (1.2)), то $v(x,t) < M$ на ∂C_1 в силу (1.2). На ∂C_2 функция $u(x,t) \leqslant M$ и $h(x,t) < 0$, поэтому $v(x,t) < M$. Таким образом,

$$v(x,t) < M \quad \text{на} \quad \partial C \tag{1.10}$$

при малом $\varepsilon > 0$. Кроме того,

$$h(\overline{P}) = 0 \Rightarrow v(\overline{P}) = u(\overline{P}) = M. \tag{1.11}$$

Отсюда заключаем, что $v(x,t) < M$ на границе шара C и принимает максимальное положительное значение M в центре шара $\overline{P} = (\overline{x}, \overline{t})$. При этом выполнено неравенство (1.8), в силу которого имеем:

$$Lv(x,t) > 0 \quad \text{в} \quad C.$$

Следовательно, имеем противоречие со слабым принципом максимума (см. лемму 1). Значит, имеет место равенство: $\overline{x} = x^*$.

Лемма доказана.

Этап II. Теперь докажем следующую лемму:

Лемма 2. *Если $Lu \geqslant 0$ в области D и если функция $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D)$ имеет положительный глобальный максимум в D, который достигается в точке $P_0 = (x_0, t_0) \in D$, то $u(P) = u(P_0)$ для всех $P \in C(P_0)$.*

Доказательство.

Шаг 1. Пусть утверждение леммы неверно. Тогда в $C(P_0)$ найдется точка $P_1 = (x_1, t_0)$, в которой $u(P_1) < u(P_0)$. Соединим P_1 с P_0 простой непрерывной кривой $\gamma \subset C(P_0)$. На γ существует точка $P^* = (x^*, t_0)$, в которой $u(P^*) = u(P_0)$ и такая, что $u(\overline{P}) < u(P_0)$ для всех $\overline{P} = (\overline{x}, t)$, лежащих на γ между P_1 и P^*.

Возьмем точку $\overline{P}$ на γ между P_1 и P^* так [1], чтобы расстояние $d(\overline{P}, \partial C(P_0))$ до границы $\partial C(P_0)$ удовлетворяло неравенству:

$$d(\overline{P}, \partial C(P_0)) \geqslant 2d(\overline{P}, P^*). \tag{1.12}$$

Шаг 2. Поскольку $u(\overline{P}) < u(P^*) = u(P_0)$: существует достаточно малый отрезок σ_0, определяемый соотношениями:

$$\overline{P} = (\overline{x}, t_0) \in \sigma_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{x = \overline{x}, \quad t_0 - \varepsilon \leqslant t \leqslant t_0 + \varepsilon\}, \tag{1.13}$$

---

[1] Просто нужно взять точку $\overline{P}$ достаточно близкой к точке P^*.

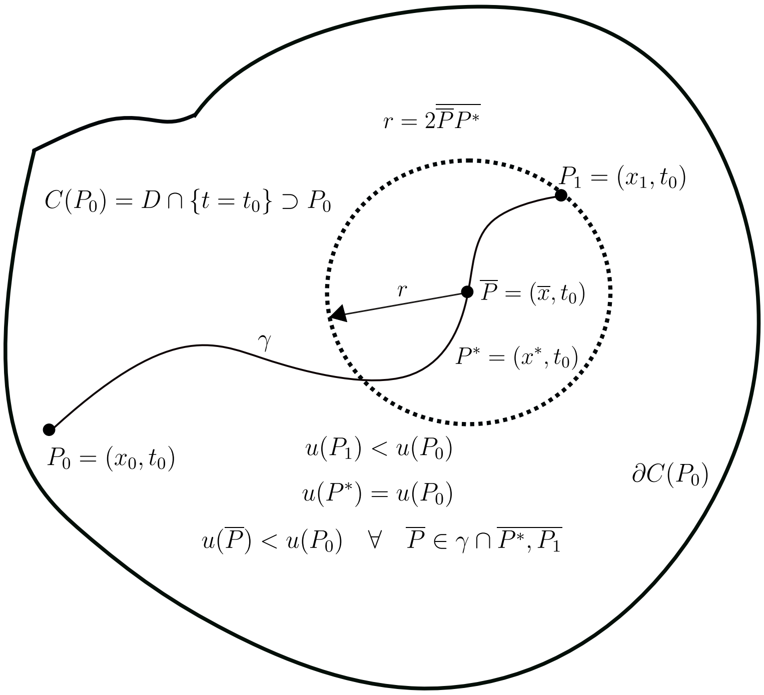


Рис. 22. Кривая $\gamma \in C(P_0)$.

для всех точек $P = (\overline{x}, t) \in \sigma_0$ которого выполняется неравенство:

$$u(P) < u(P^*) = u(P_0). \tag{1.14}$$

Зафиксируем это $\varepsilon > 0$.

Рассмотрим семейство эллипсоидов $E_\lambda \subset D$:

$$E_\lambda := \Big\{(x,t) \in \mathbb{R}^{N+1} : \ |x - \overline{x}|^2 + \lambda(t-t_0)^2 \leqslant \lambda\varepsilon^2\Big\}. \tag{1.15}$$

Заметим, что концы интервала σ_0 лежат на границе эллипсоида E_λ.

$\square$ Действительно, положим $x = \overline{x}$ в уравнении эллипсоида E_λ и получим неравенство:

$$|t - t_0| \leqslant \varepsilon \Rightarrow (x = \overline{x}, t) \in \sigma_0. \quad \boxtimes$$

Нетрудно убедиться в том, что справедливо предельное свойство (см. рис. 23):

$$E_\lambda \to \sigma_0 \quad \text{при} \quad \lambda \to +0. \tag{1.16}$$

С другой стороны, при $t = t_0$ имеем:

$$E_\lambda \cap \{t = t_0\} = \Big\{(x, t_0) : \ x \in \mathbb{R}^N, \quad |x - \overline{x}| \leqslant \lambda\varepsilon^2\Big\}.$$

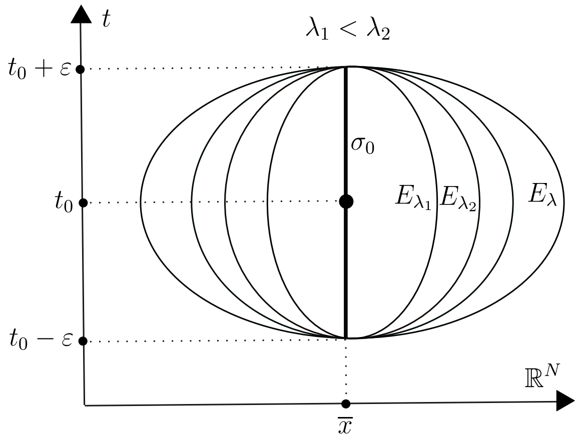


Рис. 23. Семейство E_λ и интервал σ_0.

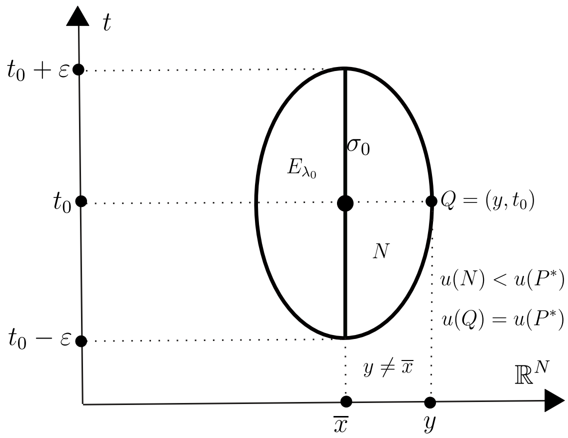


Рис. 24. Минимальный эллипсоид E_{λ_0}.

Поэтому при возрастании $\lambda > 0$ пересечение $E_\lambda \cap \{t = t_0\}$ неограниченно возрастает.

Следовательно, в силу неравенства (1.14) существует такое минимальное $\lambda = \lambda_0 > 0$, что $u(x, t) < u(P^*) = u(P_0)$ внутри E_{λ_0} и $u(y, t_0) = u(P^*) = u(P_0)$ в некоторой точке $Q = (y, t_0) \in \partial E_{\lambda_0}$.

В силу (1.14) точка Q не может принадлежать интервалу σ_0 (см. рисунок 24), поскольку для всех $P \in \sigma_0$ справедливо неравенство:

$$u(P) < u(P^*) = u(P_0)$$

и поэтому $y \neq \overline{x}$, что противоречит лемме 1.

Лемма доказана.

Этап III. Докажем следующее утверждение:

Л е м м а 3. *Пусть R — это параллелепипед*:

$$x_{0i} - a_i \leqslant x_i \leqslant x_{0i} + a_i, \quad t_0 - a_0 \leqslant t \leqslant t_0, \quad i = 1, 2, ..., N, \tag{1.17}$$

достаточно малого размера, содержащийся в D, [1] *и пусть $Lu \geqslant 0$ в D. Если функция $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D)$ достигает в точке $P_0 = (x_0, t_0)$* [2] *положительный глобальный максимум в D, то $u(P) = u(P_0)$ для всех $P \in R$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Шаг 1. Предположим, что лемма неверна. Тогда в параллелепипеде R должна найтись такая точка $Q \in R$, что $u(Q) < u(P_0)$. Поскольку $u(x,t) < u(P_0)$ в некоторой окрестности Q, то можно предположить, что точка Q не лежит на гиперплоскости $t = t_0$. В противном случае достаточно взять параллелепипед с верхним основанием на гиперплоскости $t = t_0$, но меньших размеров.

На отрезке γ_{Q,P_1} кривой γ, соединяющей Q с P_0 и целиком лежащей в R, существует точка P_1, такая, что $u(P_1) = u(P_0)$ и

$$u(\overline{P}) < u(P_1) \quad \text{для всех} \quad \overline{P} \in \gamma_{Q,P_1}.$$

Без ограничения общности, можно считать, что $P_1 = P_0$ и точка Q лежит на гиперплоскости $t = t_0 - a_0$, поскольку в противном случае можно взять параллелепипед, меньших размеров (см. рис. 25).

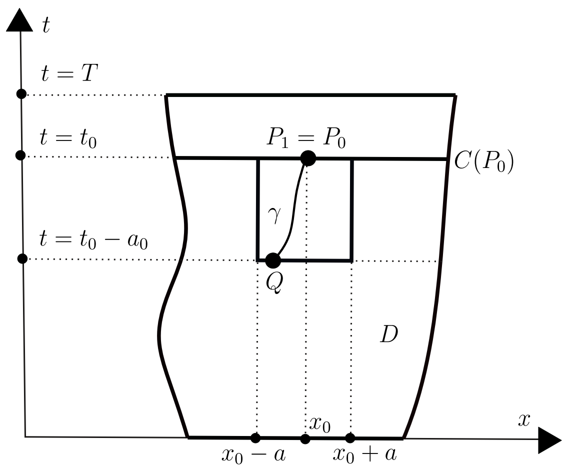


Рис. 25. Кривая γ и точка Q.

Шаг 2. Обозначим через R_0 параллелепипед R без верхней грани $t = t_0$. Для каждой точки $Q^{'} \in R_0$ компонента $C(Q^{'})$ содержит некото-

[1] Для этого достаточно взять числа $a_i > 0$ и $a_0 > 0$ достаточно малыми, поскольку точка P_0 внутренняя в D.

[2] $x_0 = (x_{01}, ..., x_{0N})$.

рую точку из γ, но при этом $u(x,t) < u(P_0)$ в точках $(x,t) \in \gamma$. Поэтому если в некоторой точке $Q^{'}$ выполнено равенство $u(Q^{'}) = u(P_0)$, то в силу леммы 2 равенство $u(Q^{'}) = u(P_0)$ имеет место для всех $Q^{'} \in \in C(Q^{'})$ и, значит, и в точках кривой γ.

Следовательно, в каждой точке $Q^{'} \in R_0$ выполнено следующее неравенство:

$$u(Q^{'}) < u(P_0) \quad \text{для всех} \quad Q^{'} \in R_0. \tag{1.18}$$

Шаг 3. Введем функцию:

$$h(x,t) := t_0 - t - K|x - x_0|^2, \quad K > 0. \tag{1.19}$$

В точках параболоида

$$M: \quad t_0 - t = K|x - x_0|^2$$

имеем $h(x,t) = 0$, выше параболоида M функция $h(x,t) < 0$, а ниже параболоида M — $h(x,t) > 0$. Непосредственным вычислением полу-

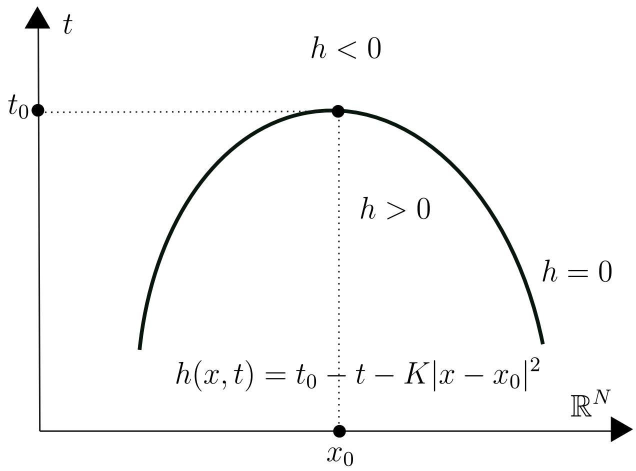


Рис. 26. Параболоид $h(x,t) = 0$.

чим:

$$Lh(x,t) = -2K \sum_{i=1}^{N} a_{ii}(x,t) - 2K \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)(x_i - x_{0i}) + \\ + c(x,t)\left[t_0 - t - K|x - x_0|^2\right] + 1 > 0 \quad \text{в} \quad R, \tag{1.20}$$

при условии, что величина $K > 0$ мала, что

$$4K \sum_{i=1}^{N} a_{ii}(x,t) \leqslant 1 \quad \text{в} \quad R$$

и размеры параллелепипеда R достаточно малы. [1])

Шаг 4. Параболоид M разбивает параллелепипед R на две части. Обозначим часть, лежащую ниже параболоида M ($h > 0$) через $R^{'}$. Верхняя граница $B^{'}$ множества $R^{'}$ касается гиперплоскости $t = t_0$ только в точке $P_0 = (x_0, t_0)$. Поэтому на остальной части $B^{''}$ границы

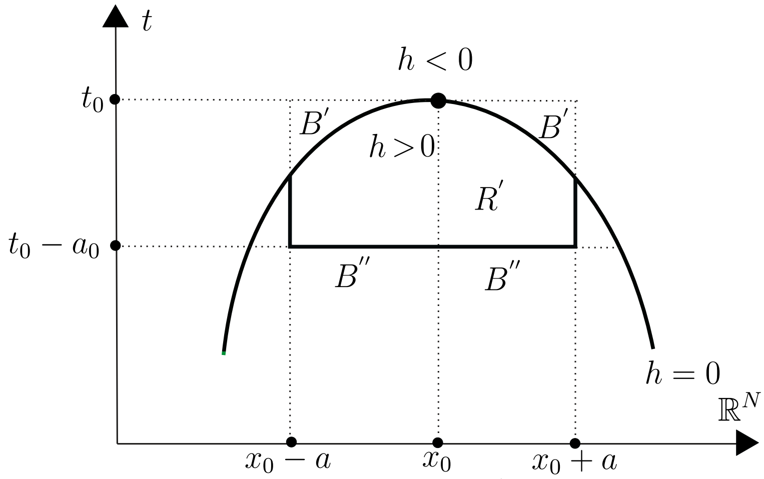


Рис. 27. Множество $R^{'}$.

$R^{'}$ получим:

$$u(x,t) \leqslant u(P_0) - \delta \quad \text{для некоторого} \quad \delta > 0.$$

Отсюда следует, что для функции

$$v(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} u(x,t) + \varepsilon h(x,t) \tag{1.21}$$

имеет место неравенство:

$$v(x,t) < u(P_0) \quad \text{при} \quad (x,t) \in B^{''} \tag{1.22}$$

для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$. Далее, во всех точках верхней границы $B^{'}$ за исключением точки P_0 имеем:

$$v(x,t) = u(x,t) < u(P_0), \quad v(P_0) = u(P_0), \tag{1.23}$$

потому, что при $(x,t) \in B^{'}$ имеем $h(x,t) = 0$. Поскольку

$$Lv(x,t) = Lu(x,t) + \varepsilon Lh(x,t) > 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in R^{'},$$

[1]) Тогда выражения $|t - t_0|$ и $|x - x_0|$ тоже будут малы.

то в силу леммы 1 заключаем, что положительный строгий максимум функции $v(x,t)$ достигается на границе $\partial R^{'}$, точнее в точке P_0. Следовательно [1],

$$\frac{\partial v(P_0)}{\partial t} = D_t^- v(P_0) \geqslant 0, \quad \frac{\partial h(P_0)}{\partial t} = -1 < 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{\partial u(P_0)}{\partial t} = D_t^- v(P_0) - \varepsilon \frac{\partial h(P_0)}{\partial t} > 0. \quad (1.24)$$

Замечание. Докажем неравенство:

$$D_t^- v(P_0) \geqslant 0.$$

□ Действительно, поскольку функция $v(x,t)$ дифференцируема в окрестности точки P_0 и в этой точке у функции $v(x,t)$ реализуется строгий максимум, то при $t < t_0$ выполняется неравенство:

$$\frac{v(x_0,t_0) - v(x_0,t)}{t_0 - t} > 0 \Rightarrow D_t^- v(P_0) \geqslant 0. \quad \boxtimes$$

С другой стороны, из предположения, что $u(x,t)$ достигает положительного максимума в точке P_0 и условия $c(x,t) \leqslant 0$ находим, что

$$\frac{\partial u(P_0)}{\partial x_i} = 0, \quad c(P_0)u(P_0) \leqslant 0, \quad \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x_0,t_0) \frac{\partial^2 u(x_0,t_0)}{\partial x_i \partial x_j} \leqslant 0.$$

Следовательно,

$$0 \leqslant Lu(P_0) \leqslant -\frac{\partial u(P_0)}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial u(P_0)}{\partial t} \leqslant 0,$$

что противоречит неравенству (1.24).

Лемма доказана.

Этап IV. Докажем теорему 1.

Шаг 1. Предположим, что

$$u(x,t) \not\equiv u(P_0) \quad \text{в} \quad S(P_0).$$

Тогда найдется такая точка $Q \in S(P_0)$, что $u(Q) < u(P_0)$. Соединим точки Q и P_0 простой непрерывной кривой γ, расположенной в $S(P_0)$ так, чтобы t–координата не убывала от точки Q к точке P_0 (такая кривая существует согласно определению $S(P_0)$). На кривой γ существует точка P_1, в которой $u(P_1) = u(P_0)$ и

$$u(\overline{P}) < u(P_1) \quad \text{для всех точек} \quad \overline{P} \in \gamma_{Q,P_1},$$

[1] Неравенство $\partial v(P_0)/\partial t \geqslant 0$ выполнено, поскольку производная берется по времени в сторону возрастания времени, а в точке P_0 у функции $v(x,t)$ максимум.

где символ γ_{Q,P_1} обозначает часть кривой γ между точками Q и P_1.

Шаг 2. Построим параллелепипед:

$$x_{1i} - a \leqslant x_i \leqslant x_{1i} + a, \quad t_1 - a \leqslant t \leqslant t_1, \quad i = \overline{1, N},$$

где $P_1 = (x_{11}, ..., x_{1N}, t_1)$ и постоянная $a > 0$ настолько мала, что параллелепипед лежит в D. Из леммы 3 следует, что $u \equiv u(P_1)$ в этом параллелепипеде, и, следовательно, на части кривой γ_{Q,P_1}, которая заключена в параллелепипеде, что противоречиво.

Теорема доказана.

Справедливо следующее более сильное утверждение:

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (A), (B) *и* (C). *Если* $Lu \geqslant 0$ $(Lu \leqslant 0)$ *в* $D \cup \gamma(D)$ *и если функция* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D \cup \gamma(D))$ *имеет в* $\overline{D}$ *положительный глобальный максимум* (*отрицательный глобальный минимум*), *который достигается в точке* $P_0 = (x_0, t_0) \in D \cup \cup \gamma(D)$, *то* $u(P) = u(P_0)$ *для всех* $P \in S(P_0)$, *где* $S(P_0)$ *определяется точно также как и ранее, но относительно* $D \cup \gamma(D)$.

Доказательство.

Утверждение теоремы непосредственно следует из леммы 3 с учетом определения

$$D_t^- u(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in \gamma(D).$$

Теорема доказана.

Контрпример. Заметим, что результат теоремы относится только к точкам D и верхней крышки $\gamma(D)$. Например, в случае $D_T = (0, L) \times (0, T)$ и уравнения

$$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0$$

решение $u(x,t) = x^2 + 2t$ достигает глобального максимума в точке $(L, T) \in S_T$. Однако, очевидно, что функция $u(x,t)$ не является константой в $\overline{D}_T$.

Наконец, имеет место следующее утверждение:

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (A), (B) *и* $c(x,t) \equiv 0$. *Если* $Lu \geqslant 0$ $(Lu \leqslant 0)$ *в* $D \cup \gamma(D)$ *и если функция* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D \cup \gamma(D))$ *имеет в* $\overline{D}$ *глобальный максимум* (*глобальный минимум*), *который достигается в точке* $P_0 = (x_0, t_0) \in D \cup \gamma(D)$, *то* $u(P) = u(P_0)$ *для всех* $P \in S(P_0)$, *где* $S(P_0)$ *определяется точно так же как и ранее, но относительно* $D \cup \gamma(D)$.

§ 2. Следствия из принципа максимума

Несложно доказать, что для любой точки $P_0 \in D \cup \gamma(D)$ имеем $\overline{S(P_0)} \cap \partial' D \neq \varnothing$. Справедливы следующие утверждения:

Следствие 1. *Пусть* $D \subset \mathbb{R}^N$ — *ограниченная область, выполнены условия* (A), (B) *и* (C) *и уравнение* $Lu(x,t) = 0$ *при* $(x,t) \in$

$\in D \cup \gamma(D)$. *Тогда для решения* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D \cup \gamma(D)) \cap \mathbb{C}_w(\overline{D})$ *справедлива следующая оценка*:

$$\max_{(x,t)\in\overline{D}} |\overline{u}(x,t)| = \max_{(x,t)\in\partial' D} |\overline{u}(x,t)|, \tag{2.1}$$

где символом $\overline{u}(x,t)$ *обозначено непрерывное продолжение функции* $u(x,t)$ *из* $D \cup \gamma(D)$ *до параболической части* $\partial' D = S \cup \gamma_0(D)$ *полной границы* ∂D.

Доказательство.

Шаг 1. Введём следующее обозначение:

$$M := \max_{(x,t)\in\partial' D} |\overline{u}(x,t)|. \tag{2.2}$$

Тогда для новой функции

$$v(x,t) := \overline{u}(x,t) - M$$

имеем:

$$Lv(x,t) = -c(x,t)M \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D,$$

$$v(x,t) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial' D.$$

Если в некоторой точке $P_0 = (x_0, t_0) \in D \cup \gamma(D)$ достигается положительный глобальный максимум

$$v(P_0) = M_1 > 0,$$

то это в силу теоремы 2 означает, что

$$v(x,t) = M_1 \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in S(P_0).$$

Так как $\overline{S(P_0)} \cap \partial' D \neq \varnothing$ и $v(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D})$, то приходим к противоречию, поскольку $v(x,t) \leqslant 0$ на $\partial' D$. Полученное противоречие означает, что

$$v(x,t) \leqslant 0 \quad \text{в} \quad D \cup \gamma(D) \Rightarrow u(x,t) \leqslant M \quad \text{в} \quad D \cup \gamma(D).$$

Шаг 2. Поскольку функция $-u(x,t)$ является решением уравнения $L(-u) = 0$, то применяя результат шага 1 для функции $-u(x,t)$, получим оценку:

$$-u(x,t) \leqslant M \quad \text{при} \quad (x,t) \in D \cup \partial' D.$$

Следствие доказано.

Следствие 2. *Пусть выполнены условия* (A), (B) *и* $c(x,t) \leqslant c_0$ *при* $c_0 > 0$. *Если* $Lu(x,t) = 0$ *в* $D \cup \gamma(D)$, *то для решения* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D \cup \gamma(D)) \cap \mathbb{C}_w(\overline{D})$ *выполнено неравенство*:

$$\max_{(x,t)\in\overline{D}} |\overline{u}(x,t)| \leqslant e^{c_0 T} \sup_{(x,t)\in\partial' D} |\overline{u}(x,t)|. \tag{2.3}$$

Доказательство.

Достаточно применить следствие 1 к функции

$$v(x,t)=\overline{u}(x,t)e^{-c_0 t}\Rightarrow (L-c_0)v(x,t)=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \max_{(x,t)\in\overline{D}}|v(x,t)|\leqslant \sup_{(x,t)\in\partial' D}|v(x,t)|\Rightarrow$$
$$\Rightarrow e^{-c_0 T}\max_{(x,t)\in\overline{D}}|\overline{u}(x,t)|\leqslant \sup_{(x,t)\in\partial' D}|\overline{u}(x,t)|$$

и получить неравенство.

Следствие доказано.

Замечание. Важно отметить, что сильный принцип максимума относится не к локальному максимуму или минимуму в области D, а к глобальному максимуму или минимуму.

Замечание. Если в выражении в операторе L коэффициент $c(x,t)=0$, то термины «положительный максимум» и «отрицательный минимум» можно заменить на «максимум» и «минимум» соответственно.

Замечание. В утверждении теоремы 2 участвуют только точки $D\cup\gamma(D)$, а для точек множества $\partial\gamma(D)$ (граница $\gamma(D)$) теорема может не иметь место. Рассмотрим следующее уравнение [8]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial t}=0 \quad \text{в} \quad (x,t)\in(0,L)\otimes(0,T)$$

и его решение $u(x,t)=x^2+2t$, которое, очевидно, достигает строго максимума в точке $(L,T)\in\partial B_T$. Однако, решение не является константой в рассматриваемой цилиндрической области D.

Обратно параболическое уравнение. Пусть $u(x,t)\in\in\mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D\cup\gamma_0(D))$. Определим $S_p(P_0)$ как такое множество точек $Q\in D\cup\gamma_0(D)$, которые можно соединить некоторой простой непрерывной кривой $\gamma_{Q,P_0}\in D\cup\gamma_0(D)$ с точкой P_0 таким образом, чтобы вдоль нее координата t не возрастала. Для обратно параболического оператора

$$L_p u(x,t)\stackrel{\text{def}}{=}\sum_{i,j=1,1}^{N,N}a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{N}b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x,t)u+\frac{\partial u}{\partial t}$$

справедлив сильный принцип максимума.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (A), (B) *и* (C). *Если* $L_p u\geqslant 0$ $(L_p u\leqslant 0)$ *в* $D\cup\gamma_0(D)$ *и если функция* $u(x,t)\in\mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D\cup\gamma_0(D))$ *имеет в* $\overline{D}$ *положительный глобальный максимум* (*отрицательный глобальный минимум*), *который достигается в точке* $P_0=(x_0,t_0)\in\in D\cup\gamma_0(D)$, *то* $u(P)=u(P_0)$ *для всех* $P\in S_p(P_0)$.

Доказательство.

Утверждение теоремы непосредственно следует из леммы 3 с учетом определения:

$$D_t^+ u(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in \gamma_0(D).$$

Теорема доказана.

§ 3. Первая краевая задача

Первая краевая задача. *Первая краевая задача в цилиндрической области $D_T = \Omega \times (0,T)$ состоит в нахождении классического решения $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D_T \cup B_T) \cap \mathbb{C}_w(\overline{D}_T)$ уравнения*

$$Lu(x,t) = f(x,t) \quad \textit{в} \quad D_T \cup B_T, \tag{3.1}$$

удовлетворяющего начальному условию:

$$\lim_{D_T \cup B_T \ni (y,\tau) \to (x,0)} u(y,\tau) = \varphi(x) \quad \textit{для} \quad x \in \overline{\Omega} \tag{3.2}$$

и граничному условию:

$$\lim_{D_T \cup B_T \ni (y,\tau) \to (x,t) \in S_T} u(x,t) = g(x,t) \quad \textit{для} \quad (x,t) \in S_T, \tag{3.3}$$

где f, φ, g — это заданные функции и L — параболический оператор.

Замечание. Условия (3.2) и (3.3) можно объединить в одно:

$$\lim_{D_T \cup B_T \ni (y,\tau) \to (x,t) \in S_T \cup B} u(y,\tau) = h(x,t) \quad \text{для} \quad (x,t) \in B \cup S_T. \tag{3.4}$$

При этом вопрос о согласовании граничных условий на нижней крышке $B = \Omega \times \{t = 0\}$ и на боковой поверхности $S_T = \Gamma \times [0,T]$ цилиндрической области $D_T = \Omega \times (0,T)$ в точках $\Gamma \times \{t = 0\}$ *не влияет на ход доказательства единственности*, но повлияет на доказательство существования решения в том или ином классе.

Справедлива следующая

Теорема 5. *Пусть оператор L удовлетворяет условиям* (A), (B) *из лекции 8. Тогда может существовать не более одного решения первой краевой задачи.*

Доказательство.

Шаг 1. Пусть $c(x,t) \leqslant 0$ и $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ — это два решения первой краевой задачи (3.1)—(3.3). Тогда функция

$$v(x,t) := \overline{u}_1(x,t) - \overline{u}_2(x,t)$$

удовлетворяет соответствующей однородной задаче. Предположим, что $v(x,t) \not\equiv 0$. Тогда без ограничения общности можно предположить, что

$$M := \max_{(x,t) \in \overline{D}_T} v(x,t) > 0.$$

Пусть $P_0 = (x_0, t_0) \in \overline{D}_T$ — точка в которой достигается положительный максимум. Ясно, что

$$v(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial' D_T = S_T \cup B \text{ [1]}. \tag{3.5}$$

Поэтому положительный максимум может достигаться только на $D_T \cup \cup B_T$. Однако, если $(x_0, t_0) \in D_T \cup B_T$, то согласно теореме 2

$$v(x,t) = M \quad \text{при} \quad (x,t) \in S(P_0).$$

Поскольку $v(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D}_T)$ и $\overline{B} \subset \overline{S(P_0)}$, то

$$v(x,0) = M > 0 \quad \text{при} \quad x \in \overline{B},$$

что противоречит свойству (3.5).

Шаг 2. Пусть функция $c(x,t)$ может принимать положительные значения в области D_T. Положим по определению:

$$c_0 \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{(x,t) \in D_T} c(x,t) > 0.$$

Перейдем к новой функции $w(x,t)$ следующего вида:

$$w(x,t) = e^{-c_0 t} u(x,t).$$

При этом уравнение $Lu(x,t) = 0$ преобразуется в уравнение $(L - - c_0) w(x,t) = 0$, с новым коэффициентом $c(x,t) - c_0 \leqslant 0$. Далее, рассуждаем как на шаге 1.

Теорема доказана.

Признак сравнения. Пусть $v(x,t), w(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D_T \cup B_T) \cap \cap \mathbb{C}_w(\overline{D}_T)$ — решение задачи:

$$Lv(x,t) \geqslant Lw(x,t) \quad \text{для} \quad (x,t) \in D_T \cup B_T, \tag{3.6}$$

$$\overline{v}(x,t) \leqslant \overline{w}(x,t) \quad \text{для} \quad (x,t) \in S_T \cup B. \tag{3.7}$$

Тогда $\overline{v}(x,t) \leqslant \overline{w}(x,t)$, для всех $\overline{D}_T$, где D_T — ограниченная цилиндрическая область. Доказательство предлагается провести читателю.

Априорная оценка. Пусть функция $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D_T \cup \cup B_T) \cap \mathbb{C}(\overline{D}_T)$ — решение первой краевой задачи:

$$Lu(x,t) = f(x,t) \quad \text{для} \quad (x,t) \in D_T \cup B_T, \tag{3.8}$$

$$u(x,t) = g(x,t) \quad \text{для} \quad (x,t) \in S_T \cup B, \tag{3.9}$$

[1] Напомним, что $S_T := \partial D_T \setminus (B_T \cup B)$.

где $D_T = \Omega \times (0,T)$ и $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область с гладкой границей $\Gamma \in \mathbb{C}^{1,\alpha}$ при $\alpha \in (0,1]$, $c(x,t) \leqslant 0$ для всех $(x,t) \in D_T \cup B_T$. Тогда справедлива следующая априорная оценка:

$$\max_{(x,t)\in\overline{D}_T} |u(x,t)| \leqslant \\ \leqslant \max\left\{\sup_{(x,t)\in D_T\cup B_T}\left|\frac{f(x,t)}{c(x,t)}\right|, \sup_{(x,t)\in S_T\cup B}|g(x,t)|\right\}. \quad (3.10)$$

□ Действительно, достаточно рассмотреть случай, когда правая часть неравенства (3.10) конечна. Рассмотрим два барьера:

$$v_1(x,t) = \max\left\{\sup_{(x,t)\in D_T\cup B_T}\left|\frac{f(x,t)}{c(x,t)}\right|, \sup_{(x,t)\in S_T\cup B}|g(x,t)|\right\}, \quad (3.11)$$

$$v_2(x,t) = -\max\left\{\sup_{(x,t)\in D_T\cup B_T}\left|\frac{f(x,t)}{c(x,t)}\right|, \sup_{(x,t)\in S_T\cup B}|g(x,t)|\right\}. \quad (3.12)$$

Для барьеров v_1 и v_2 выполнены следующие неравенства:

$$Lv_1 = c(x,t)v_1 = -|c(x,t)|v_1 \leqslant -|c(x,t)| \sup_{(x,t)\in D_T\cup B_T}\left|\frac{f(x,t)}{c(x,t)}\right| \leqslant \\ \leqslant -|c(x,t)|\left|\frac{f(x,t)}{c(x,t)}\right| = -|f(x,t)| \leqslant \\ \leqslant f(x,t) \quad \text{для} \quad (x,t) \in D_T \cup B_T, \quad (3.13)$$

$$v_1(x,t) \geqslant \sup_{(x,t)\in S_T\cup B}|g(x,t)| \geqslant g(x,t) \quad \text{для} \quad (x,t) \in S_T \cup B, \quad (3.14)$$

$$Lv_2 = c(x,t)v_2 = |c(x,t)||v_2| \geqslant |c(x,t)| \sup_{(x,t)\in D_T\cup B_T}\left|\frac{f(x,t)}{c(x,t)}\right| \geqslant \\ \geqslant |c(x,t)|\left|\frac{f(x,t)}{c(x,t)}\right| = |f(x,t)| \geqslant \\ \geqslant f(x,t) \quad \text{для} \quad (x,t) \in D_T \cup B_T, \quad (3.15)$$

$$v_2(x,t) \leqslant -\sup_{(x,t)\in S_T\cup B}|g(x,t)| \leqslant \\ \leqslant -|g(x,t)| \leqslant g(x,t) \quad \text{для} \quad (x,t) \in S_T \cup B. \quad (3.16)$$

В силу признака сравнения для задачи (3.6), (3.7) получим, что справедливы неравенства

$$v_2(x,t) \leqslant u(x,t) \leqslant v_1(x,t) \quad \text{для} \quad (x,t) \in \overline{D}_T, \quad (3.17)$$

из которых вытекает искомая априорная оценка (3.10). ⊠

Устойчивость решения задачи Дирихле. Пусть $k = 1,2$ и функции $u_k(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D_T \cup B_T) \cap \mathbb{C}(\overline{D}_T)$ — решения следующих задач Дирихле:

$$Lu_k(x,t) = f_k(x,t) \quad \text{для} \quad (x,t) \in D_T \cup B_T, \tag{3.18}$$

$$u_k(x,t) = g_k(x,t) \quad \text{для} \quad (x,t) \in S_T \cup B, \tag{3.19}$$

где

$$Lu(x,t) = \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} + \\ + \sum_{j=1}^{N} b_j(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_j} + c(x,t)u(x,t) - \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \tag{3.20}$$

$$a_{ij}(x,t), b_j(x,t), c(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D}_T), \quad c(x,t) \leqslant 0, \tag{3.21}$$

матрица $(a_{ij}(x,t))$ является положительно определенной для всех $(x,t) \in \overline{D}_T$, а область $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ограниченная с гладкой границей Γ. Поэтому, в частности,

$$m := \min_{(x,t)\in\overline{D}_T} \sum_{i=1}^{N} a_{ii}(x,t) > 0, \quad d := \max_{x\in\overline{\Omega}} |x| < +\infty. \tag{3.22}$$

Введем в рассмотрение следующие пять функций:

$$v(x,t) := u_1(x,t) - u_2(x,t), \tag{3.23}$$

$$v_1(x,t) := t \sup_{(x,t)\in D_T\cup B_T} |f(x,t)| + \sup_{(x,t)\in S_T\cup B} |g(x,t)|, \tag{3.24}$$

$$v_2(x,t) := -t \sup_{(x,t)\in D_T\cup B_T} |f(x,t)| - \sup_{(x,t)\in S_T\cup B} |g(x,t)|, \tag{3.25}$$

$$v_3(x,t) := \frac{d^2 - |x|^2}{2m} \sup_{(x,t)\in D_T\cup B_T} |f(x,t)| + \sup_{(x,t)\in S_T\cup B} |g(x,t)|, \tag{3.26}$$

$$v_4(x,t) := -\frac{d^2 - |x|^2}{2m} \sup_{(x,t)\in D_T\cup B_T} |f(x,t)| - \sup_{(x,t)\in S_T\cup B} |g(x,t)|, \tag{3.27}$$

$$f(x,t) := f_1(x,t) - f_2(x,t), \quad g(x,t) := g_1(x,t) - g_2(x,t).$$

Далее рассуждая точно также как и при рассмотрении устойчивости решения первой краевой задачи (1.23), (1.24) лекции 2 для уравнения теплопроводности в силу признака сравнения для задачи (3.6), (3.7), получим неравенства:

$$v_2(x,t) \leqslant v(x,t) \leqslant v_1(x,t) \quad \text{для} \quad (x,t) \in \overline{D}_T, \tag{3.28}$$

$$v_4(x,t) \leqslant v(x,t) \leqslant v_3(x,t) \quad \text{для} \quad (x,t) \in \overline{D}_T, \tag{3.29}$$

из которых вытекает неравенство:

$$\max_{(x,t)\in\overline{D}_T} |u_1(x,t) - u_2(x,t)| \leqslant \min\left\{T, \max_{x\in\overline{\Omega}}\left(\frac{d^2 - |x|^2}{2m}\right)\right\} \times \\ \times \sup_{(x,t)\in D_T\cup B_T} |f_1(x,t) - f_2(x,t)| + \sup_{(x,t)\in S_T\cup B} |g_1(x,t) - g_2(x,t)|, \tag{3.30}$$

из которого вытекает устойчивость решения по правой части и по граничному условию.

Пример неединственности [21]. Заметим, что требование ограниченности коэффициентов параболического оператора L является существенным для применения принципа максимума с целью доказательства единственности решения первой краевой задачи. Действительно, рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{1}{t}u_{xx} + \frac{2}{t}u - u_t = 0 \quad \text{при} \quad t > 0, \quad x \in (0,\pi), \tag{3.31}$$

$$u(x,0) = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \tag{3.32}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \quad \text{при} \quad t > 0. \tag{3.33}$$

Нетрудно проверить, что функция

$$u(x,t) = at\sin x \quad \text{для любой постоянной} \quad a \in \mathbb{R}^1$$

является решением однородной первой краевой задачи (3.31)–(3.33).

§ 4. Примеры решения задач

Задача 1. Сформулировать корректную (имеющую единственное решение) первую краевую задачу для обратно параболического уравнения в ограниченной области D.

Указание. Рекомендуется воспользоваться теоремой 4.

§ 5. Литературные указания

Материал для лекции взят из работ [14], [19], [20], [24].

Лекция 12

ТЕОРЕМА ТИПА ЖИРО

§ 1. Теорема типа Жиро

Для того, чтобы исследовать вопрос о единственности решения *второй* и *третьей смешанных краевых задач* докажем теорему типа Жиро о знаке косой производной. Предварительно определим *свойства строгой сферичности изнутри*.

Определение 1. *Пусть $P_0 = (x_0, t_0)$ — это точка на границе ∂D области D. Если существует такой замкнутый шар $B(\overline{P}; R)$ с центром в точке $\overline{P} = (\overline{x}, \overline{t})$ и положительным радиус ом $R > 0$, что $B \subset \overline{D}$, $B \cap \partial D = \{P_0\}$ и при этом $\overline{x} \neq x_0$, то говорят, что P_0 обладает свойством строгой сферичности изнутри.*

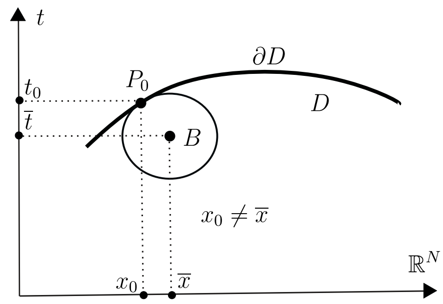


Рис. 28. К определению 1 строгой сферичности.

Замечание. Если исключить требование $\overline{x} \neq x_0$ в определении 1, то мы получим *определение сферичности изнутри*.

Замечание. Свойство строгой сферичности не выполняется для многих естественных областей. На рис. 29 отмечены точки A_0, B_0, C_0 и D_0, которые не обладают даже свойством сферичности (не строгой) изнутри, поскольку не существует малого шара, который коснулся бы этих точек, оставаясь внутри области D. Далее, нижняя крышка B цилиндрической области D обладает свойством сферичности изнутри, но никакая точка нижней крышки не обладает свойством строгой сферичности изнутри. По аналогии верхняя крышка B_T цилиндрической области D обладает лишь свойством сферичности изнутри, а не строгой сферичности изнутри. Наконец, в задачах математической физики лишь часть $S_0 := \partial D \backslash \left(\overline{\gamma(D)} \cup \overline{\gamma_0(D)}\right)$ боковой границы $S := = \partial D \backslash (\gamma(D) \cup \gamma_0(D))$ может обладать свойством строгой сферичности изнутри, [1]) хотя, именно на всей боковой границе S в случае второй и третьей краевых задач ставится условие с косой производной.

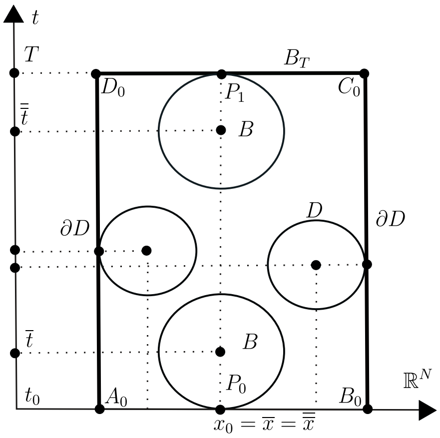


Рис. 29. Условие строгой сферичности.

У с л о в и е I. Пусть функция $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ и

$$Lu(x,t) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad D. \tag{1.1}$$

Предположим, что коэффициенты оператора L ограничены в D, удовлетворяют условиям (B), (C) и условию равномерной параболичности в D. Пусть решение $u(x,t)$ неравенства (1.3) достигает положительный локальный максимум $M > 0$ в точке $P_0 \in S$:

$$u(P_0) = M \quad \text{в точке} \quad P_0 \in S := \partial D \backslash (\gamma(D) \cup \gamma_0(D)), \tag{1.2}$$

причем точка $P_0 \in S$ обладает свойством сферичности изнутри.

У с л о в и е II. Пусть функция $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ и

$$Lu(x,t) \leqslant 0 \quad \text{в} \quad D. \tag{1.3}$$

Предположим, что коэффициенты оператора L ограничены в D, удовлетворяют условиям (B), (C) и условию равномерной параболичности в D. Пусть решение $u(x,t)$ неравенства (1.3) достигает отрицательный локальный минимум $m < 0$ в точке $P_0 \in S$:

$$u(P_0) = m \quad \text{в точке} \quad P_0 \in S := \partial D \backslash (\gamma(D) \cup \gamma_0(D)), \tag{1.4}$$

[1]) Ясно, что $S_0 \subset S$.

причем точка $P_0 \in S$ обладает свойством сферичности изнутри.

При этих условиях справедлива следующая

Теорема типа Жиро. *Если выполняется условие* I *и существует окрестность* V *точки максимума* P_0 *такая, что*

$$u(x,t) < M \quad \text{в} \quad D \cap V, \tag{1.5}$$

то для любого некасательного внутреннего направления l_{P_0}*, если существует производная по этому направлению в самой точке* $P_0 \in \in S$ *в указанном ниже смысле , имеет место неравенство*:

$$\frac{\partial u}{\partial l_{P_0}}(P_0) := \lim_{D\cap l \ni (y,\tau)\to P_0 \in S} \frac{\partial u(y,\tau)}{\partial l_{P_0}} < 0, \tag{1.6}$$

$$l = \{P_0 + sl_{p_0}, s \in \mathbb{R}\}$$

— прямая в $\mathbb{R}^{N+1}$*, проходящая через точку* $P_0 = (x_0, t_0) \in S$ *с направляющим вектором* l_{p_0}.

Если же выполнено условие II *и найдется такая окрестность* V *точки минимума* P_0*, что*

$$u(x,t) > m \quad \text{в} \quad D \cap V,$$

то для любого некасательного внутреннего направления l_{P_0}*, если существует производная по этому направлению в самой точке* $P_0 \in \in S$ *в указанном ниже смысле, имеет место неравенство*:

$$\frac{\partial u}{\partial l_{P_0}}(P_0) := \lim_{D\cap l \ni (y,\tau)\to P_0 \in S} \frac{\partial u(y,\tau)}{\partial l_{P_0}} > 0. \tag{1.7}$$

Замечание. Некасательным внутренним направлением назовем направление из точки P_0 внутрь шара $B(\overline{P}; R)$ при условии строгой сферичности изнутри в точке $P_0 \in S$. Напомним определение производ-

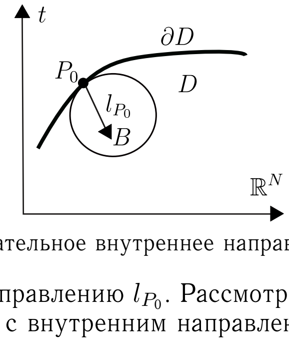


Рис. 30. Некасательное внутреннее направление и шар B.

ной по внутреннему направлению l_{P_0}. Рассмотрим луч, выпущенный из точки $P_0 = (x_0, t_0) \in S$ с внутренним направлением:

$$l_{P_0} = (l_{x_0}, l_{t_0}) = (\cos\beta_{x_{01}}, ..., \cos\beta_{x_{0N}}, \cos\beta_{t_0}),$$

$$\sum_{j=1}^{N} \cos^2 \beta_{x_{0j}} + \cos^2 \beta_{t_0} = 1.$$

Тогда производная функции $u(x,t)$ по внутреннему направлению l_{P_0} в точке $P_0 = (x_0, t_0) \in S$ определяется следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial l_{P_0}}(P_0) := \lim_{0<\lambda\to 0} \frac{u(x_0 + \lambda l_{x_0}, t_0 + \lambda l_{t_0}) - u(x_0, t_0)}{\lambda}. \tag{1.8}$$

Отметим, что при условиях теоремы выполнено неравенство:

$$\frac{\partial u}{\partial l_{P_0}}(P_0) \leqslant 0, \tag{1.9}$$

поскольку в точке $P_0 = (x_0, t_0)$ у функции $u(x,t)$ реализуется максимум, а в части окрестности $D \cap V \supset B$ выполнено неравенство $u(x,t) < M$. Заметим также, что результат теоремы — это соответствующее строгое неравенство.

Доказательство.

Шаг 1. Можно считать, что для внутренности $\operatorname{int} B$ замкнутого шара $B(\overline{P}; R)$ выполнено следующее вложение:

$$\operatorname{int} B := \left\{ (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1} : \sum_{j=1}^{N} (x_j - \overline{x}_j)^2 + |t - \overline{t}|^2 < R^2 \right\} \subset D \cap V \text{ [1]}.$$

Обозначим границу шара B через ∂B. Пусть

$$\pi := \left\{ (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1} : \alpha_0 t + \sum_{j=1}^{N} \alpha_j x_j = \beta \right\}, \quad \alpha_0^2 + \sum_{j=1}^{N} \alpha_j^2 > 0 \text{ [2]}$$

— это гиперплоскость, которая делит пространство $(x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}$ на два полупространства π^- и π^+:

$$\pi^- := \left\{ (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1} : \alpha_0 t + \sum_{j=1}^{N} \alpha_j x_j < \beta \right\},$$

$$\pi^+ := \left\{ (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1} : \alpha_0 t + \sum_{j=1}^{N} \alpha_j x_j > \beta \right\}$$

[1] Можно просто выбрать шар B достаточно малым.

[2] α_0, α_j и β — это некоторые вещественные числа.

таким образом, чтобы

$$\overline{P} = (\overline{x}, \overline{t}) \in \pi^-, \quad P_0 = (x_0, t_0) \in \pi^+.$$

Так как $\overline{x} \neq x_0$, то, варьируя вещественными числами α_0, α_j и β, можно выбрать гиперплоскость π таким образом, чтобы

$$B^+ \stackrel{\text{def}}{=} \pi^+ \cap B \neq \varnothing \quad \text{и} \quad |x - \overline{x}| \geqslant a > 0 \quad \text{для всех} \quad (x, t) \in B^+.$$

При этом граница B^+ состоит из части $C_1 \in \partial B$ и другой части $C_2 = B \cap \pi$.

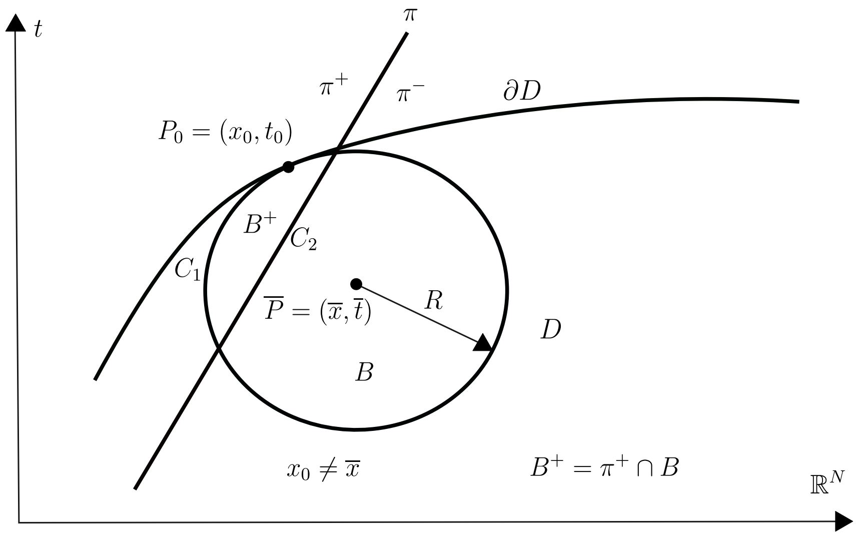


Рис. 31. Множество B^+ и его граница $C_1 \cup C_2$.

Шаг 2. Введем функцию:

$$h(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} \exp\left\{-\alpha\left[|x - \overline{x}|^2 + |t - \overline{t}|^2\right]\right\} - \exp\left\{-\alpha R^2\right\}. \tag{1.10}$$

Напомним, что $R > 0$ — это радиус замкнутого шара $B(\overline{P}; R)$. Имеем:

$$h(x, t) = 0 \quad \text{при} \quad (x, t) \in C_1, \quad h(x, t) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x, t) \in \overline{B^+}, \tag{1.11}$$

причем можно проверить, что [1]

$$Lh(x, t) > 0 \quad \text{в} \quad B^+ \tag{1.12}$$

[1] Здесь существенно, что $x_0 \neq \overline{x}$ и поэтому выполнено следующее неравенство: $|x - \overline{x}| \geqslant a > 0$ для всех $(x, t) \in B^+$.

при достаточно большом $\alpha > 0$.

□ Действительно, имеют место равенства:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -2\alpha(t-\overline{t})\exp\left\{-\alpha\left[|x-\overline{x}|^2+|t-\overline{t}|^2\right]\right\},$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_i} = -2\alpha(x_i-\overline{x}_i)\exp\left\{-\alpha\left[|x-\overline{x}|^2+|t-\overline{t}|^2\right]\right\},$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j} = -[2\alpha\delta_{ij} - 4\alpha^2(x_i-\overline{x}_i)(x_j-\overline{x}_j)]\exp\left\{-\alpha\left[|x-\overline{x}|^2+|t-\overline{t}|^2\right]\right\}.$$

Из этих равенств следует выражение для $Lh(x,t)$:

$$\begin{aligned} Lh(x,t) = \Biggl[4\alpha^2 \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)(x_i-\overline{x}_i)(x_j-\overline{x}_j) - 2\alpha\sum_{i=1}^{N} a_{ii}(x,t) - {} \\ - 2\alpha\sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)(x_i-\overline{x}_i) + 2\alpha(t-\overline{t}) + c(x,t)\Biggr] \times \\ \times \exp\left\{-\alpha\left[|x-\overline{x}|^2+|t-\overline{t}|^2\right]\right\} - \\ - c(x,t)\exp\left\{-\alpha R^2\right\}. \end{aligned} \qquad (1.13)$$

Поскольку по предположению оператор L является равномерно параболическим в D, то найдётся постоянная $m = m(D) > 0$ такая, что имеет место оценка снизу:

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)(x_i-\overline{x}_i)(x_j-\overline{x}_j) \geqslant m|x-\overline{x}|^2 \geqslant ma^2 =: d_1 > 0 \qquad (1.14)$$

для всех $(x,t) \in \overline{B}^+$. В шаре B справедливы неравенства сверху:

$$\left|\sum_{i=1}^{N} a_{ii}(x,t)\right| + \left|\sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)(x_i-\overline{x}_i)\right| + \left|t-\overline{t}\right| \leqslant K_1 < +\infty, \qquad (1.15)$$

$$|c(x,t)| \leqslant K_2 < +\infty, \quad c(x,t) \leqslant 0. \qquad (1.16)$$

Из (1.13) и (1.14)–(1.16) следует неравенство снизу:

$$Lh(x,t) \geqslant \left[4\alpha^2 d_1 - 2\alpha K_1 - K_2\right]\exp\left\{-\alpha\left[|x-\overline{x}|^2+|t-\overline{t}|^2\right]\right\} > 0$$

при достаточно большом $\alpha > 0$. ⊠

Шаг 3. Введём следующую функцию:

$$v(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} u(x,t) + \varepsilon h(x,t), \quad \varepsilon > 0. \qquad (1.17)$$

Для достаточно малого $\varepsilon > 0$ функция $v(x,t)$ удовлетворяет условиям:

$$v(x,t) < M \quad \text{на} \quad C_2\ ^{1)}, \quad v(x,t) = u(x,t) < M \quad \text{на} \quad C_1 \backslash \{P_0\}, \quad (1.18)$$

причем

$$v(P_0) = u(P_0) = M. \qquad (1.19)$$

Поскольку

$$Lv(x,t) = Lu(x,t) + \varepsilon Lh(x,t) > 0 \quad \text{в} \quad B^+, \qquad (1.20)$$

то функция $v(x,t)$ в силу слабого принципа максимума [2] не может принимать своего максимального значения $M > 0$ во внутренней точке B^+. Итак,

$$v(x,t) < M \quad \text{внутри} \quad B^+. \qquad (1.21)$$

Шаг 4. Из (1.19), (1.21) и (1.8) следует, что [3]

$$\frac{\partial v}{\partial l_{P_0}}(P_0) \leqslant 0. \qquad (1.22)$$

Заметим, что

$$\frac{\partial h}{\partial \mathbf{n}_{P_0}}(P_0) < 0, \quad \frac{\partial h}{\partial \tau_{P_0}}(P_0) = 0, \qquad (1.23)$$

где $\mathbf{n}_{P_0}$ — это внешняя нормаль к сфере ∂B в точке P_0, а τ_{P_0} — это произвольная касательная к сфере ∂B в той же точке P_0.

□ Действительно, запишем уравнение (1.10) для функции $h(x,t)$ в сферической системе координат с центром в точке $\overline{P} = (\overline{x}, \overline{t})$:

$$\begin{cases} (r, \varphi, \vartheta_1, ..., \vartheta_{N-1}), & \text{если} \quad N \geqslant 2; \\ (r, \varphi), & \text{если} \quad N = 1. \end{cases}$$

Это уравнение имеет следующий вид:

$$h = h(r) = \exp\left(-\alpha r^2\right) - \exp\left(-\alpha R^2\right).$$

Производная по направлению $\mathbf{n}_{P_0}$ внешней нормали в точке $P_0 \in \partial B$ равна:

$$\frac{\partial h}{\partial \mathbf{n}_{P_0}}(P_0) = \frac{\partial h}{\partial r}(P_0) = -2\alpha R \exp\left(-\alpha R^2\right) < 0,$$

Поскольку функция $h(x,t)$ в выбранной сферической системе координат зависит только от r, то её производная по всякой касательной τ_{P_0} равна нулю:

$$\frac{\partial h}{\partial \tau_{P_0}}(P_0) = 0. \quad \boxtimes$$

---

[1] На C_2, очевидно, $u(x,t) \leqslant M - \delta$ при некотором $\delta > 0$.

[2] Напомним, что у нас выполнено предпоолложение $c(x,t) \leqslant 0$.

[3] Сравни с неравенством (1.9).

Заметим, что

$$\frac{\partial h}{\partial l_{P_0}}(P_0) = \cos(l_{P_0}, \mathbf{n}_{P_0}) \frac{\partial h}{\partial \mathbf{n}_{P_0}}(P_0) + \sum_{j=1}^{N} \cos(l_{P_0}, \tau_{jP_0}) \frac{\partial h}{\partial \tau_{jP_0}}(P_0) = \cos(l_{P_0}, \mathbf{n}_{P_0}) \frac{\partial h}{\partial \mathbf{n}_{P_0}}(P_0) > 0,$$

поскольку

$$\cos(l_{P_0}, \mathbf{n}_{P_0}) < 0,$$

так что l_{P_0} — внутреннее некасательное направление, а $\mathbf{n}_{P_0}$ — внешняя нормаль, где $\{\tau_{1P_0}, ..., \tau_{NP_0}\}$ — это ортонормированный базис в касательной плоскости к $P_0 \in \partial D$.

Следовательно,

$$\frac{\partial h}{\partial l_{P_0}}(P_0) > 0. \tag{1.24}$$

Итак, из (1.22) и (1.24) следует неравенство:

$$\frac{\partial u}{\partial l_{P_0}}(P_0) = \frac{\partial v}{\partial l_{P_0}}(P_0) - \varepsilon \frac{\partial h}{\partial l_{P_0}}(P_0) < 0. \tag{1.25}$$

Лемма доказана.

Замечание. Если $c(x,t) \equiv 0$, то имеет место теорема типа Жиро, если заменить «положительный максимум» на «максимум», а «отрицательный минимум» на «минимум».

Замечание. Важным усилением теоремы типа Жиро является теорема 7 О. А. Олейник из книги [3]. Теорему типа Жиро можно, в частности, распространить на точки границы $\partial\gamma(D)$ верхней крышки [1] $\gamma(D)$.

Пусть точка $P_0 = (x_0, t_0) \in \partial B_{t_0}$, где $B_{t_0} \subset \gamma(D)$ — это связная компонента верхней крышки, расположенная на гиперплоскости $t = t_0$. Согласно определению верхней крышки $\gamma(D)$ и боковой границы $S := = \partial D \setminus \{\gamma(D) \cup \gamma_0(D)\}$ справедливо вложение:

$$P_0 \subset \partial B_{t_0} \cap S.$$

Предположим, что существует такой шар A, что $P_0 \in \partial A$ и все его точки, лежащие в области $0 < t < t_0$, принадлежат D, причем радиус этого шара, проведённый в точку P_0, не параллелен оси t. В этом случае для точки P_0 справедливо строгое неравенство (1.9). Этот случай изображён на рис. 32.

[1] Само утверждение из работы [3] относится ко всем точкам боковой границы S. Просто для нас важен результат теоремы в случае цилиндрической области D.

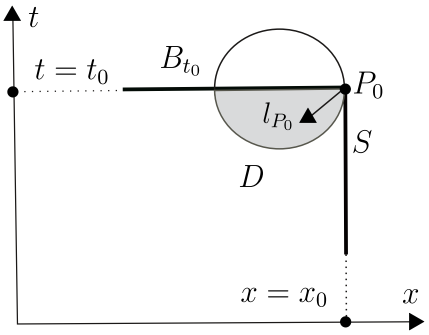


Рис. 32. Шар A.

Сформулируем условия для случая ограниченной цилиндрической области $D_T = \Omega \times (0,T) \subset \mathbb{R}^{N+1}$.

Условие I'. Пусть функция $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D_T \cup B_T) \cap \mathbb{C}(\overline{D}_T)$ и

$$Lu(x,t) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad D_T \cup B_T. \tag{1.26}$$

Предположим, что коэффициенты оператора L ограничены в D_T, удовлетворяют условиям (B), (C) и условию равномерной параболичности в D_T. Пусть решение $u(x,t)$ неравенства (1.26) достигает положительный локальный максимум $M > 0$ в точке $P_0 \in S_T$:

$$u(P_0) = M \quad \text{в точке} \quad P_0 \in S_T. \tag{1.27}$$

Условие II'. Пусть функция $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D_T \cup B_T) \cap \mathbb{C}(\overline{D}_T)$ и

$$Lu(x,t) \leqslant 0 \quad \text{в} \quad D_T \cup B_T. \tag{1.28}$$

Предположим, что коэффициенты оператора L ограничены в D, удовлетворяют условиям (B), (C) и условию равномерной параболичности в D_T. Пусть решение $u(x,t)$ неравенства (1.28) достигает отрицательный локальный минимум $m < 0$ в точке $P_0 \in S_T$:

$$u(P_0) = m \quad \text{в точке} \quad P_0 \in S_T. \tag{1.29}$$

Теорема 1. *Если выполняется условие* I' *и существует окрестность V точки максимума P_0 такая, что*

$$u(x,t) < M \quad \text{в} \quad (D_T \cup B_T \cup B) \cap V, \tag{1.30}$$

то для вектора внешней нормали $\mathbf{n}_{P_0} = (\mathbf{n}_{x_0}, 0)$, при условии существования производной по этому направлению в самой точке $P_0 \in \in S_T$, имеет место неравенство:

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_{P_0}}(P_0) := \lim_{\Omega \times [0,T] \cap l \ni (y,\tau) \to P_0 \in S} \frac{\partial u(y,\tau)}{\partial \mathbf{n}_{P_0}} > 0, \tag{1.31}$$

$$l = \{P_0 + s\mathbf{n}_{P_0}, s \in \mathbb{R}\}$$

— прямая в $\mathbb{R}^{N+1}$*, проходящая через точку* $P_0 = (x_0, t_0) \in S_T$ *с направляющим вектором* l_{p_0}.

Если же выполнено условие II' *и найдется такая окрестность* V *точки минимума* P_0*, что*

$$u(x,t) > m \quad \textit{в} \quad (D_T \cup B_T \cup B) \cap V,$$

при условии существования производной по направлению внешней нормали $\mathbf{n}_{P_0} = (\mathbf{n}_{x_0}, 0)$ *в самой точке* $P_0 \in S_T$*, то имеет место неравенство*:

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_{P_0}}(P_0) := \lim_{\Omega\times[0,T]\cap l\ni(y,\tau)\to P_0\in S_T} \frac{\partial u(y,\tau)}{\partial \mathbf{n}_{P_0}} < 0. \tag{1.32}$$

З а м е ч а н и е. Предположение о том, что

$$u(x,t) < M \quad \text{в} \quad D \cap V,$$

является, конечно, существенным, так как в противном случае функция $u(x,t)$ могла бы быть постоянной в $D \cap V$ и тогда:

$$\frac{\partial u}{\partial l_{P_0}}(P_0) = 0.$$

К о н т р п р и м е р к т е о р е м е т и п а Ж и р о 1. Заметим, что если P_0 — это угловая точка границы ∂D, то теорема типа Жиро может оказаться неверной. Например, определим область D неравенствами:

$$x^2 + t^2 < R^2, \quad t < \gamma_1 x, \quad t < \gamma_2 x, \quad \gamma_1 > 0 > \gamma_2.$$

Пусть

$$P_0 = (0,0), \quad Lu(x,t) = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial t},$$

$$u(x,t) = (t - \gamma_1 x)(\gamma_2 x - t) + 1.$$

Тогда

$$u(x,t) < 1 \quad \text{в} \quad D, \quad u(x,t) = 1 \quad \text{в} \quad P_0,$$

$$Lu(x,t) = -2\gamma_1\gamma_2 + \overline{\overline{o}}(|x| + |t|) > 0,$$

если $R > 0$ — достаточно малое. Однако,

$$\frac{\partial u}{\partial l_{P_0}}(P_0) = 0$$

для любого направления l_{P_0}.

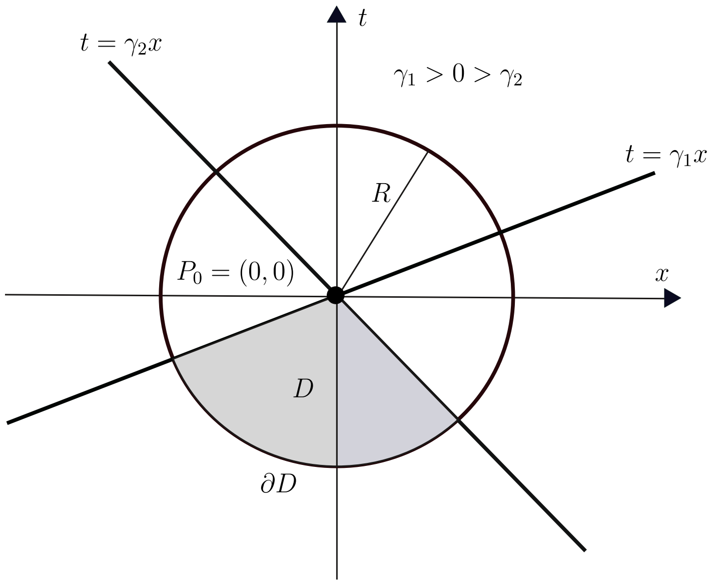


Рис. 33. Область D с угловой точкой $P_0 = (0, 0)$.

Контрпример к теореме типа Жиро 2. Заметим, что условие строгой сферичности изнутри нельзя заменить на условие сферичности изнутри, т. е. условие $x_0 \neq \overline{x}$ — существенно. Действительно, рассмотрим область $D = \{(x, t) : \ x \in \mathbb{R}^1, \ t > 0\}$. Пусть

$$P_0 = (0, 0), \quad Lu(x, t) = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}, \quad u(x, t) = 1 - t^2.$$

Для функции $u(x, t)$ имеем:

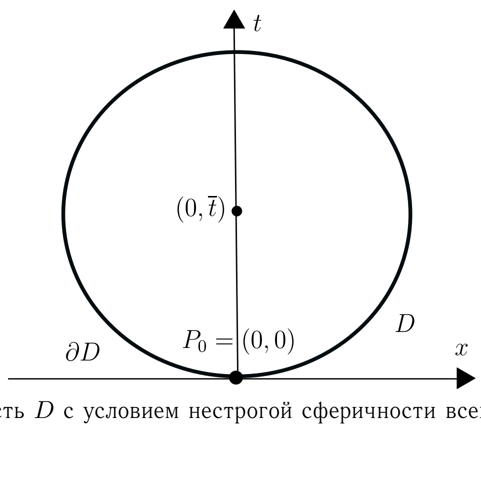


Рис. 34. Область D с условием нестрогой сферичности всей границы ∂D.

$$Lu(x,t) = 2t > 0 \quad \text{в} \quad D, \quad u(P_0) = 1, \quad u(x,t) < 1 \quad \text{в} \quad D,$$

но при этом

$$\frac{\partial u}{\partial l_{P_0}}(P_0) = 0$$

для любого направления l_{P_0}.

§ 2. Вторая и третья смешанные краевые задачи

Будем использовать обозначения первого параграфа. $D_T = \Omega \times \times (0,T) \subset \mathbb{R}^{N+1}$ — цилиндрическая область, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — область с границей $\Gamma \in \mathbb{C}^{1,\alpha}$ при $\alpha \in (0,1]$, $B = \Omega \times \{t = 0\}$ — нижняя крышка цилиндрической области D_T, $B_T = \Omega \times \{t = T\}$ — верхняя крышка цилиндрической области D_T, $S_T = \partial D_T \setminus (B \cup B_T) = \Gamma \times [0,T]$ — это боковая граница цилиндрической области D_T. Пусть функции $f(x,t)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x,t)$ определены соответственно на $D_T \cup B_T$, $\overline{\Omega}$ и на S_T.

Постановка третьей краевой задачи. *Найти функцию $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D_T \cup B_T) \cap \mathbb{C}^{(1,0)}_{x,t}(\mathbf{n}; \overline{D}_T)$, удовлетворяющую уравнению*

$$Lu(x,t) = f(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in D_T \cup B_T, \tag{2.1}$$

начальному условию при $t = 0$

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad \text{при} \quad x \in \overline{\Omega} \tag{2.2}$$

и граничному условию на боковой границе S_T

$$\lim_{(\Omega\times[0,T])\cap l \ni (y,\tau)\to(x,t)\in S_T} \left(\frac{\partial u(y,\tau)}{\partial \mathbf{n}_x} - \beta(y,\tau)u(y,\tau) \right) = \psi(x,t) \tag{2.3}$$

для всех $(x,t) \in S_T$, где $\mathbf{n}_{x,t} = (\mathbf{n}_x, 0)$ — это внешняя нормаль в точке $(x,t) \in S_T$,

$$l = \{(x,t) + s(\mathbf{n}_x, 0), s \in \mathbb{R}\}$$

— прямая, проходящая через точку $(x,t) \in S_T$ с направляющим вектором $\mathbf{a} = (\mathbf{n}_x, 0)$, а

$$\frac{\partial u(y,\tau)}{\partial \mathbf{n}_x} := (\mathbf{n}_x, D_x)u(y,\tau).$$

В том случае, если $\beta(x,t) = 0$, то задача (2.1)–(2.3) называется второй смешанной краевой задачи.

Замечание. Отметим, что каждая точка части $S_0 := = \partial D_T \setminus \left(\overline{B} \cup \overline{B}_T\right)$ боковой границы $S_T = \partial D \setminus (B \cup B_T)$ цилиндрической области $D_T \subset \mathbb{R}^{N+1}$, очевидно, удовлетворяет условию строгой сферичности изнутри.

Замечание. Для простоты будем использовать обозначение:

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}(P_0) := \lim_{(\Omega\times[0,T])\cap l\ni(y,\tau)\to(x,t)\in S_T} \frac{\partial u(y,\tau)}{\partial \mathbf{n}_x}. \tag{2.4}$$

Справедлива следующая

Теорема единственности решения третьей краевой задачи. *Пусть L — это равномерно параболический оператор в $D_T \cup B_T$ с непрерывными и ограниченными в $\overline{D}_T$ коэффициентами. Предположим, что $c(x,t) \leqslant 0$, $\beta(x,t) \leqslant 0$ в $\overline{D}_T$. Тогда, если существует, то не более одного решения третьей смешанной краевой задачи.*

Доказательство. В силу линейности задачи достаточно доказать, что если $f(x,t) \equiv 0$ в $D_T \cup B_T$, $\varphi(x) \equiv 0$ в $\overline{\Omega}$ и $\psi(x,t) \equiv 0$ на S_T, то $u(x,t) \equiv 0$ в $\overline{D}_T$.

Шаг 1. Допустим, что при таких условиях $u(x,t) \not\equiv 0$. Тогда функция $u(x,t)$ имеет глобальный положительный максимум $M > 0$ в $\overline{D}_T$. Если

$$u(P_0) = M, \quad P_0 = (x_0, t_0),$$

то $P_0 \notin B_{t_0}$ при $0 < t_0 \leqslant T$, так как учитывая сильный принцип максимума, получим:

$$u(x,t) \equiv M \quad \text{при} \quad (x,t) \in S(P_0) = (D_T \cup B_T) \cap \{0 < t \leqslant t_0\}.$$

По условию функция $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(1,0)}_{x,t}(\mathbf{n}; \overline{D}_T) \subset \mathbb{C}(\overline{D}_T)$. Следовательно,

$$u(x,0) = M > 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \overline{\Omega},$$

что противоречит предположению о том, что

$$u(x,0) = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Шаг 2. Предположим теперь, что

$$u(P_0) = M > 0 \quad \text{в точке} \quad P_0 = (x_0, t_0) \in S_0 := \partial D_T \setminus \left(\overline{B} \cup \overline{B}_T\right),$$

причём в силу шага 1 имеем:

$$u(x,t) < M \quad \text{для всех} \quad V \cap D,$$

где V — некоторая окрестность точки P_0. Иначе точно так же, как и на первом шаге получим равенство $u(x,t) = 0$. Поскольку всякая точка $P \in S_0$ удовлетворяет условию строгой сферичности изнутри, то можно применить теорему типа Жиро и получить, что

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_{P_0}}(P_0) > 0 \Rightarrow 0 < \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_{P_0}}(P_0) = \beta(P_0) u(P_0) \leqslant 0, \tag{2.5}$$

поскольку $\mathbf{n}_{P_0} = (\mathbf{n}_{x_0}, 0)$ — внешняя нормаль в точке $P_0 = (x_0, t_0) \in S_0$ по отношению к цилиндрической области D_T. Полученный результат является противоречивым.

Рассмотрим случай, когда $P_0 \in S_T \backslash S_0$. Ясно, что такие точки P_0 не удовлетворяют условию строгой сферичности изнутри. В этом случае воспользовавшись замечанием к теореме типа Жиро, приходим к строгому неравенству (2.5) и к противоречию.

Следовательно, $u(x,t) \equiv 0$ в $\overline{D}_T$.

Теорема доказана.

Замечание. Требование строгой сферичности на множестве $S \cap \cap \{t = T\}$ в случае произвольной области D является очень ограничительным.

Замечание. Условие согласования граничных условий при доказательстве единственности не используется!

Признак сравнения. Пусть функции $v(x,t), w(x,t) \in \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D_T \cup B_T) \cap \mathbb{C}^{(1,0)}_{x,t}(\mathbf{n}; \overline{D}_T)$ — решение следующей задачи:

$$Lv(x,t) \geqslant Lw(x,t) \quad \text{для} \quad (x,t) \in D_T \cup B_T, \tag{2.6}$$

$$v(x,0) \leqslant w(x,0) \quad \text{для} \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{2.7}$$

$$\lim_{(\Omega\times[0,T])\cap l \ni (y,\tau)\to(x,t)\in S_T} \left(\frac{\partial v(y,\tau)}{\partial \mathbf{n}_x} - \beta(y,\tau) v(y,\tau) \right) \leqslant \\ \leqslant \lim_{(\Omega\times[0,T])\cap l \ni (y,\tau)\to(x,t)\in S_T} \left(\frac{\partial w(y,\tau)}{\partial \mathbf{n}_x} - \beta(y,\tau) w(y,\tau) \right) \tag{2.8}$$

для всех $(x,t) \in S_T$, где

$$l = \{(x,t) + \sigma(\mathbf{n}_x, 0), \sigma \in \mathbb{R}\}.$$

Тогда если $c(x,t) \leqslant 0$ и $\beta(x,t) \leqslant 0$, то для всех $(x,t) \in \overline{D}_T$ выполнено неравенство $v(x,t) \leqslant w(x,t)$.

§ 3. Примеры решения задач

Условие строгой сферичности множества точек $S_T \cap \{t = T\}$ можно заменить на требование $\beta(x,T) < 0$. Докажем следующее утверждение.

Задача 1. Доказать единственность решения третьей краевой задачи без требования строгой сферичности боковой границы S_T при условии:

$$\beta(x,t) < 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in S_T.$$

Указание. Заметим, что если не требовать выполнение условия строгой сферичности изнутри множества точек боковой границы S_T, то, вообще говоря, нельзя применять теорему Жиро. Это означает, что в данном случае можно доказать единственность решения третьей краевой задачи без теоремы типа Жиро.

Решение. В модификации нуждается только доказательство теоремы единственности третьей краевой задачи на шаге 3. В частности, имеем:

$$u(P_0) = M > 0 \quad \text{в некоторой точке} \quad P_0 = (x_0, t_0) \in S_T,$$

причём в силу шага 2 имеем:

$$u(x,t) < M \quad \text{для всех} \quad V \cap D,$$

где V — некоторая окрестность точки P_0. Тогда в этой точке выполнены следующие противоречивые неравенства:

$$0 \leqslant \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_{P_0}} = \beta(P_0) u(P_0) < 0.$$

§ 4. Литературные указания

Материал для лекции взят из работ [3], [11], [14], [21], [22].

Лекция 13

ЗАДАЧА КОШИ

§ 1. Положительные решения задачи Коши

В этом параграфе используются следующие обозначения:

$$D_0 = \mathbb{R}^N \times (0, T], \quad D = \mathbb{R}^N \times [0, T].$$

В рамках данной лекции будем предполагается, что функция $u(x, t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D_0) \cap \mathbb{C}_w(D)$, а символом $\overline{u}(x, t)$ обозначается непрерывное продолжение функции $u(x, t)$ из D_0 до D.

Справедлива следующая важная лемма:

Лемма 1. *Пусть оператор L, все коэффициенты которого непрерывны в D, является параболическим в D_0, и функция $c(x, t)$ ограничена сверху. Если $Lu(x, t) \leqslant 0$ в D_0, $\overline{u}(x, 0) \geqslant 0$ в $\mathbb{R}^N$ и равномерно по $t \in [0, T]$ существует*

$$\liminf_{|x| \to +\infty} \overline{u}(x, t) \geqslant 0,$$

то $\overline{u}(x, t) \geqslant 0$ в D.

Доказательство.

Шаг 1. Без ограничения общности будем считать, что $c(x, t) < 0$. В противном случае замена $v(x, t) = \overline{u}(x, t)e^{-\gamma t}$ при

$$\gamma > \sup_{(x,t) \in \mathbb{R}^N \times [0,T]} c(x, t)$$

приводит к уравнению для новой функции $v(x, t)$:

$$[L - \gamma I]\, v(x, t) = 0.$$

Далее, для любого $\varepsilon > 0$ имеем:

$$\overline{u}(x, t) + \varepsilon > 0 \quad \text{при} \quad t = 0,$$

а также при достаточно большом $R > 0$:

$$\overline{u}(x, t) + \varepsilon > 0 \quad \text{при} \quad |x| = R, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Следовательно,

$$L(\overline{u}(x,t)+\varepsilon) = L\overline{u}(x,t) + c(x,t)\varepsilon \leqslant 0 \Rightarrow \overline{u}(x,t)+\varepsilon > 0,$$

если $|x| \leqslant R$ и $t \in [0,T]$ в силу слабого принципа максимума.

Шаг 2. Устремив $\varepsilon \to +0$, получим утверждение этой леммы.

Лемма доказана.

Сделаем следующие предположения относительно коэффициентов параболического оператора L:

$$|a_{ij}(x,t)| \leqslant M, \quad |b_i(x,t)| \leqslant M(1+|x|), \quad |c(x,t)| \leqslant M(1+|x|^2) \tag{1.1}$$

при $(x,t) \in D_0$ и $i,j = \overline{1,N}$. Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть L — параболический оператор в D_0 с коэффициентами, непрерывными в D и удовлетворяющими условиям* (1.1). *Предположим, что $Lu(x,t) \leqslant 0$ в D_0 и*

$$\overline{u}(x,t) \geqslant -B\exp\left[\beta|x|^2\right] \quad \text{при} \quad (x,t) \in D \tag{1.2}$$

для некоторых положительных постоянных[1] *B и β. Если $\overline{u}(x,0) \geqslant 0$ в $\mathbb{R}^N$, то $\overline{u}(x,t) \geqslant 0$ в D.*

Доказательство.

Шаг 1. Рассмотрим функцию:

$$H(x,t) = \exp\left[\frac{k|x|^2}{1-\mu t} + \nu t\right], \quad t \in [0, 1/(2\mu)], \tag{1.3}$$

удовлетворяющую равенству:

$$\frac{LH(x,t)}{H(x,t)} = \frac{4k^2}{(1-\mu t)^2}\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)x_i x_j + \frac{2k}{1-\mu t}\sum_{i=1}^{N} a_{ii}(x,t) + \\ + \frac{2k}{1-\mu t}\sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)x_i + c(x,t) - \frac{\mu k|x|^2}{(1-\mu t)^2} - \nu. \tag{1.4}$$

□ Действительно,

$$\frac{\partial H(x,t)}{\partial x_i} = \frac{2kx_i}{1-\mu t}H(x,t), \quad \frac{\partial H(x,t)}{\partial t} = \left(\frac{\mu k|x|^2}{(1-\mu t)^2} + \nu\right)H(x,t),$$

$$\frac{\partial^2 H(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} = \left(\frac{4k^2}{(1-\mu t)^2}x_i x_j + \frac{2k}{1-\mu t}\delta_{ij}\right)H(x,t). \quad \boxtimes$$

[1] Здесь мы снова сталкиваемся с необходимостью рассматривать решения в классе растущих функций А. Н. Тихонова.

С использованием оценок (1.1) получаем следующую оценку:

$$\frac{LH(x,t)}{H(x,t)} \leqslant \left(16k^2N^2M + 5kNM + M - \mu k\right)|x|^2 + (8kNM + M - \nu)\,. \tag{1.5}$$

□ Действительно, с одной стороны в силу условий (1.1) при $t = 1/(2\mu)$ справедливы следующие неравенства:

$$\frac{4k^2}{(1-\mu t)^2}\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)x_i x_j \leqslant 16k^2MN^2|x|^2,$$

$$\frac{2k}{1-\mu t}\sum_{i=1}^{N} a_{ii}(x,t) \leqslant 4kNM,$$

$$\frac{2k}{1-\mu t}\sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)x_i \leqslant 4kNM(|x| + |x|^2) \leqslant 4kNM + 5kNM|x|^2,$$

где использовалось очевидное неравенство:

$$a \leqslant 1 + \frac{a^2}{4} \quad \text{для любого} \quad a \geqslant 0.$$

С другой стороны,

$$-\frac{\mu k|x|^2}{(1-\mu t)^2} \leqslant -\mu k|x|^2, \quad c(x,t) \leqslant M|x|^2 + M.$$

Из этих неравенств следует неравенство (1.5). ⊠

Таким образом, для любого $k > 0$ найдутся такие достаточно большие постоянные $\mu > 0$ и $\nu > 0$, что будет выполнено неравенство:

$$\frac{LH(x,t)}{H(x,t)} \leqslant 0. \tag{1.6}$$

Шаг 2. Рассмотрим функцию $v(x,t)$, определённую равенством:

$$v(x,t) := \frac{\overline{u}(x,t)}{H(x,t)},$$

где $H(x,t)$ — это функция (1.3) с фиксированными $k > \beta$, $\mu > 0$ и $\nu > 0$, при которых выполняется неравенство (1.6) для $0 \leqslant t \leqslant 1/(2\mu)$. Заметим, что выполнены следующие неравенства:

$$v(x,t) \geqslant -B\frac{\exp\left\{\beta|x|^2\right\}}{H(x,t)} \geqslant -B\exp\left[-(k-\beta)|x|^2\right]e^{-\nu t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \liminf_{|x|\to+\infty} v(x,t) \geqslant 0$$

равномерно по $t \in [0, 1/(2\mu)]$.

Шаг 3. Функция $v(x,t)$ удовлетворяет уравнению:

$$\overline{L}v(x,t) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} \overline{b}_i \frac{\partial v}{\partial x_i} + \overline{c}v - \frac{\partial v}{\partial t} = \overline{f},$$

где

$$\overline{f} = \frac{L\overline{u}(x,t)}{H(x,t)} \leqslant 0, \quad \overline{b}_i = b_i + 2\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\frac{1}{H}\frac{\partial H}{\partial x_j}, \quad \overline{c} = \frac{LH}{H} \leqslant 0.$$

□ Действительно, введём следующее обозначение:

$$f(x,t) := L\overline{u}(x,t).$$

В это выражение подставим функцию $\overline{u}(x,t) = H(x,t)v(x,t)$. Справедливы следующие равенства:

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x_i \partial x_j} = H\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \\ + 2\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\frac{\partial H}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j}v(x,t);$$

$$\sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} = H\sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\frac{\partial v}{\partial x_i} + v\sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\frac{\partial H}{\partial x_i};$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = H\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial H}{\partial t}.$$

В результате получим искомое равенство. ⊠

С использованием леммы 1 приходим к выводу о том, что

$$v(x,t) \geqslant 0 \Rightarrow \overline{u}(x,t) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \times [0, 1/(2\mu)].$$

Шаг 4. Повторяем рассуждения из шагов 1–3 для замкнутой области $\mathbb{R}^N \times [1/(2\mu), 1/\mu]$ с использованием функции:

$$H(x,t) = \exp\left[\frac{k|x|^2}{2-\mu t} + \nu t\right].$$

Дальнейшее доказательство проводится по индукции.

Теорема доказана.

Замечание. Отметим, что доказанная теорема иногда носит название *теоремы Фрагмена–Линделёфа.*

Из доказанной теоремы 1 следует:

Т е о р е м а 2. *Пусть L — это параболический оператор в D_0 с непрерывными в D коэффициентами и выполняются условия* (1.1). *Тогда существует не более одного решения задачи Коши*:

$$Lu(x,t) = f(x,t) \quad \text{в} \quad D_0, \tag{1.7}$$

$$\lim_{D_0 \ni (y,\tau) \to (x,0) \in D} u(y,\tau) = \varphi(x) \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{1.8}$$

удовлетворяющего условию роста А. Н. Тихонова:

$$|\overline{u}(x,t)| \leqslant B \exp\left[\beta |x|^2\right] \tag{1.9}$$

при некоторых положительных константах B и β.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Пусть $f(x,t) \equiv 0$ и $\varphi(x) \equiv 0$. Из условия (1.9) следует, что

$$\overline{u}(x,t) \geqslant -B \exp\left[\beta |x|^2\right] \quad \text{либо} \quad -\overline{u}(x,t) \geqslant -B \exp\left[\beta |x|^2\right]$$

для всех $(x,t) \in D$. В первом случае из теоремы 1 получаем, что $\overline{u}(x,t) \geqslant 0$, а во втором случае имеем, что $-\overline{u}(x,t) \geqslant 0$. Итак, $\overline{u}(x,t) \equiv \equiv 0$ в D.

Т е о р е м а д о к а з а н а.

З а м е ч а н и е. Т е о р е м а В и д д е р а [4]. *Любая неотрицательная функция, непрерывная в $\mathbb{R}^1 \times [0,+\infty)$, равная нулю при $t = 0$ и удовлетворяющая уравнению теплопроводности:*

$$u_{xx} - u_t = 0 \quad \text{в} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^1 \times [0,+\infty),$$

равна нулю тождественно.

А. Н. Тихонов предложил следующий пример:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{g^{(k)}(t)}{(2k)!} x^{2k}, \quad g(t) = \exp(-t^2) \quad t > 0, \quad g(0) = 0, \tag{1.10}$$

который показывает, что условие знакоположительности существенно. Кроме того, функция (1.10) не удовлетворяет условию роста А. Н. Тихонова.

П р и м е р н е е д и н с т в е н н о с т и [21]. Заметим, что во всех теоремах единственности требовалось, чтобы функция $u(x,t)$ была была продолжаема по непрерывности по совокупности переменных (x,t) вплоть до границы ∂D области D. Например, нельзя потребовать, чтобы функция непрерывна по t для каждого x. Действительно, рассмотрим следующую задачу:

$$u_t = u_{xx} \quad \text{при} \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^1, \tag{1.11}$$

$$\lim_{t\to+0} u(x,t) = 0 \quad \text{для каждого фиксированного} \quad x \in \mathbb{R}^1. \tag{1.12}$$

Частное решение этой задачи в классе А. Н. Тихонова имеет следующий вид:

$$u(x,t) = \frac{x}{t^{3/2}} \exp\left[-\frac{x^2}{4t}\right]. \tag{1.13}$$

Отметим, что построенное решение является неограниченным в любой окрестности точки $(0,0)$.

□ Действительно, запишем функцию (1.13) в следующем виде:

$$u(x,t) = \frac{2}{t}\frac{x}{2\sqrt{t}} \exp\left[-\frac{x^2}{4t}\right].$$

Будем стремить точку (x,t) к точке $(0,0)$ по параболе:

$$x = a2\sqrt{t} \quad \text{при} \quad t \to +0, \quad a > 0.$$

Тогда

$$u(x(t),t) = \frac{2}{t}ae^{-a^2} \to +\infty \quad \text{при} \quad t \to +0. \quad \boxtimes$$

§ 2. Примеры решения задач

З а д а ч а 1. Пусть L — параболический в D_0 оператор с непрерывными коэффициентами, удовлетворяющими (1.1). Предположим, что $c(x,t) \geqslant 0$ и

$$\overline{u}(x,t) \geqslant -B\exp\left[\beta|x|^2\right] \quad \text{при} \quad (x,t) \in D,$$

некоторых положительных $B > 0$, $\beta > 0$, и

$$Lu(x,t) \leqslant 0 \quad \text{в} \quad D_0.$$

Доказать, что из условия

$$\overline{u}(x,0) \geqslant M > 0 \Rightarrow \overline{u}(x,t) \geqslant M \quad \text{в} \quad D.$$

Р е ш е н и е. Рассмотрим функцию:

$$v(x,t) \overset{\text{def}}{=} \overline{u}(x,t) - M.$$

Поскольку $c(x,t) \geqslant 0$, то выполнено неравенство:

$$Lv(x,t) = L\overline{u}(x,t) - Mc(x,t) \leqslant 0 \quad \text{в} \quad D_0.$$

Кроме того,

$$v(x,t) \geqslant -M - B\exp\left[\beta|x|^2\right] \geqslant -(M+B)\exp\left[\beta|x|^2\right], \quad v(x,0) \geqslant 0$$

для всех $(x,t) \in D$. Следовательно, из теоремы 1, примененный к функции $v(x,t)$ мы получим, что

$$v(x,t) \geqslant 0 \Rightarrow \overline{u}(x,t) \geqslant M \quad \text{в} \quad D.$$

З а д а ч а 2 [14]. Пусть L — это равномерно параболический оператор в D_0 с непрерывными коэффициентами в D, удовлетворяющими условиям (1.1). Пусть

$$c(x,t) \geqslant \alpha|x|^2 + \gamma, \quad \alpha > 0, \quad \gamma > 0. \tag{2.1}$$

Предположим, что функция $u(x,t)$ удовлетворяет условию роста:

$$\overline{u}(x,t) \geqslant -B \exp\left[\beta|x|^2\right] \quad \text{при} \quad (x,t) \in D$$

при некоторых положительных $B > 0$, $\beta > 0$. Предположим, что

$$Lu(x,t) \leqslant 0 \quad \text{в} \quad D_0, \quad \overline{u}(x,0) \geqslant M_1 > 0 \quad \text{в} \quad D.$$

Доказать, что выполнено неравенство:

$$\overline{u}(x,t) \geqslant M_1 \exp\left[\lambda|x|^2 t + \nu t\right], \quad \lambda > 0 \quad \text{в} \quad D.$$

Р е ш е н и е. Рассмотрим [1]) следующую функцию:

$$v(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{u}(x,t) - M_1 \exp\left[\lambda|x|^2 t + \nu t\right].$$

Справедливы следующие равенства:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \exp\left(\lambda|x|^2 t + \nu t\right) = 2\lambda x_i t \exp\left(\lambda|x|^2 t + \nu t\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \exp\left(\lambda|x|^2 t + \nu t\right) = \left(\lambda|x|^2 + \nu\right) \exp\left(\lambda|x|^2 t + \nu t\right),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \exp\left(\lambda|x|^2 t + \nu t\right) = \left(2\lambda t \delta_{ij} + 4\lambda^2 t^2 x_i x_j\right) \exp\left(\lambda|x|^2 t + \nu t\right).$$

Поэтому имеем:

$$Lv(x,t) = L\overline{u}(x,t) - M_1 L\left(\exp\left(\lambda|x|^2 t + \nu t\right)\right) =$$
$$= L\overline{u}(x,t) - M_1 \Biggl(4\lambda^2 t^2 \sum_{i,j=1,1}^{N,N} x_i x_j a_{ij} + 2\lambda t \sum_{i=1}^{N} a_{ii} +$$

---

1) Переводчиками в этом месте в книге [14] допущена опечатка в выборе вспомогательной функции.

$$+ 2\lambda t \sum_{i=1}^{N} x_i b_i + c - (\lambda |x|^2 + \nu) \Bigr) \exp \Bigl(\lambda |x|^2 t + \nu t\Bigr) .$$

Заметим, что в силу равномерной параболичности оператора L имеют место неравенства:

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} x_i x_j a_{ij} \geqslant m|x|^2, \quad a_{ii} \geqslant m$$

с некоторой постоянной $m = m(D) > 0$. Кроме того, в силу условий (1.1) и (2.1) справедливо следующее неравенство:

$$Lv(x,t) \leqslant -M_1 \Bigl(4\lambda^2 t^2 m|x|^2 + 2\lambda t N m -$$
$$- 2\lambda t M|x|(1+|x|) + (\alpha - \lambda)|x|^2 + \gamma - \nu\Bigr) \leqslant 0.$$

при $t \in [0,T]$ и при достаточно больших $\alpha > \lambda$, $\gamma > \nu$. Заметим, что

$$v(x,t) \geqslant -B \exp\Bigl(\beta|x|^2\Bigr) - M_1 \exp\Bigl(\lambda|x|^2 T + \nu T\Bigr) \geqslant$$
$$\geqslant -B_1(T) \exp\Bigl(\beta_1(T)|x|^2\Bigr)$$

при некоторых $B_1 > 0$ и $\beta_1 > 0$. Кроме того,

$$v(x,0) \geqslant 0.$$

В силу теоремы 1 приходим к утверждению задачи.

Задача 3 [14]. Пусть L — это параболический в D_0 оператор с непрерывными коэффициентами в D и для некоторой постоянной $M > 0$ выполнены неравенства:

$$|a_{ij}(x,t)| \leqslant M(|x|^2+1), \quad |b_i(x,t)| \leqslant M(|x|+1), \quad c(x,t) \leqslant M. \tag{2.2}$$

Доказать, что если

$$Lu(x,t) \leqslant 0 \quad \text{в} \quad D_0, \quad \overline{u}(x,t) \geqslant -A(|x|^q+1) \quad \text{в} \quad D \tag{2.3}$$

для некоторых положительных постоянных A и q, то из условия

$$\overline{u}(x,0) = u_0(x) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N \tag{2.4}$$

следует неравенство:

$$\overline{u}(x,t) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D. \tag{2.5}$$

Решение. (Доказательство взято из работы [3].) Рассмотрим вспомогательную функцию:

$$w(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2A}{r_0^{2p-q}}(|x|^2+Kt)^p e^{\alpha t}, \quad 2p>q. \tag{2.6}$$

Выберем постоянные $K>0$ и $\alpha>0$ таким образом, чтобы для всех $r_0>0$ величина $Lw(x,t)$ была отрицательной.

□ Действительно,

$$a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{4Ap}{r_0^{2p-q}}\left(|x|^2+Kt\right)^{p-1} e^{\alpha t}\left[\frac{2x_i x_j}{|x|^2+Kt}+\delta_{ij}\right]a_{ij}(x,t),$$

$$b_i(x,t)\frac{\partial w}{\partial x_i} = \frac{4Ap}{r_0^{2p-q}}\left(|x|^2+Kt\right)^{p-1} e^{\alpha t} x_i b_i(x,t),$$

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = \frac{2A}{r_0^{2p-q}}\left(|x|^2+Kt\right)^{p-1} e^{\alpha t}\left[pK+\alpha\left(|x|^2+Kt\right)\right].$$

Следовательно,

$$Lw(x,t) = \frac{2A}{r_0^{2p-q}}\left(|x|^2+Kt\right)^{p-1} e^{\alpha t}\Bigg[4p\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}\frac{x_i x_j}{|x|^2+Kt} + 2p\sum_{i=1}^{N} a_{ii} + {} \\ + 2p\sum_{i=1}^{N} x_i b_i + c\left(|x|^2+Kt\right) - pK - \alpha\left(|x|^2+Kt\right)\Bigg].$$

Рассмотрим два случая: $|x|\geqslant 1$ и $|x|<1$. В первом случае с учетом неравенств:

$$|a_{ij}(x,t)| \leqslant M(1+|x|^2) \leqslant 2M|x|^2, \quad |b_i(x,t)| \leqslant M(1+|x|) \leqslant 2M|x|$$

получим следующие оценки:

$$4p\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}\frac{x_i x_j}{|x|^2+Kt} \leqslant 8pMN^2|x|^2,$$

$$2p\sum_{i=1}^{N} a_{ii} \leqslant 4pNM|x|^2, \quad 2p\sum_{i=1}^{N} x_i b_i \leqslant 4pNM|x|^2,$$

из которых получается неравенство:

$$Lw(x,t) \leqslant \frac{2A}{r_0^{2p-q}}\left(|x|^2+Kt\right)^{p-1} e^{\alpha t} \times$$

$$\times \left\{ \left[8pMN^2 + 8pNM + M - \alpha \right] |x|^2 - pK + K(M-\alpha)t \right\} < 0, \quad (2.7)$$

если

$$\alpha > M \left(8pN^2 + 8pN + 1 \right). \quad (2.8)$$

Во втором случае заметим, что

$$|a_{ij}(x,t)| \leqslant 2M, \quad |b_i(x,t)| \leqslant 2M, \quad c(x,t) \leqslant M. \quad (2.9)$$

Поэтому при $|x| < 1$ справедлива оценка:

$$Lw(x,t) \leqslant \frac{2A}{r_0^{2p-q}} \left(|x|^2 + Kt \right)^{p-1} e^{\alpha t} \times$$
$$\times \left[8pMN^2 + 8pNM + M - pK + (M-\alpha)Kt \right] < 0 \quad (2.10)$$

при выполнении ограничения (2.8) на $\alpha > 0$ и условия на $K > 0$:

$$8pMN^2 + 8pNM + M < pK. \quad \boxtimes \quad (2.11)$$

Таким образом, при выполнении неравенств (2.8) и (2.11) справедливо неравенство:

$$L(w(x,t) + \overline{u}(x,t)) < 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D_0. \quad (2.12)$$

Рассмотрим функцию:

$$v(x,t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} w(x,t) + \overline{u}(x,t) \quad (2.13)$$

в замкнутом цилиндре $\overline{Ц_{0,r_0}^{0,T}} = \{|x| \leqslant r_0\} \times \{0 \leqslant t \leqslant T\}$. При $t = 0$ имеем:

$$v(x,0) = u_0(x) + 2A \frac{|x|^{2p}}{r_0^{2p-q}} \geqslant 0, \quad (2.14)$$

а при $r = r_0 > 1$ имеем:

$$v(x,t) \geqslant \frac{2A}{r_0^{2p-q}} \left(r_0^2 + Kt \right)^p e^{\alpha t} - A \left(r_0^q + 1 \right) \geqslant$$
$$\geqslant 2Ar_0^q - A(r_0^q + 1) = A(r_0^q - 1) > 0. \quad (2.15)$$

Согласно принципу максимума выполняется неравенство:

$$v(x,t) \geqslant 0 \Rightarrow \overline{u}(x,t) + w(x,t) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \overline{Ц_{0,r_0}^{0,T}}. \quad (2.16)$$

При фиксированном $(x,t) \in \overline{Ц_{0,r_0}^{0,T}}$ переходим к пределу при $r_0 \to +\infty$ и из явного вида (2.6) функции $w(x,t)$ получаем следующее неравенство:

$$\overline{u}(x,t) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D.$$

К о н т р п р и м е р к з а д а ч е 3. Условия (2.2), налагаемые на коэффициенты оператора L, нельзя ослабить, если ограничиться оценками коэффициентов через степени $|x|$.

□ Действительно, при любом $\delta > 0$ функция

$$u(x,t) = \begin{cases} \int\limits_{F_\delta(x,t)}^{+\infty} \exp\{-y^2\}\,dy & \text{для} \quad 0 < t \leqslant T, \\ 0 & \text{для} \quad t = 0, \end{cases}$$

где

$$F_\delta(x,t) = \frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^\delta}{2\sqrt{t}},$$

является непрерывной и ограниченной в $\mathbb{R}^1 \times [0,T]$, обращается в нуль при $t = 0$ и удовлетворяет при $t > 0$ уравнению:

$$\frac{1}{\delta^2}\left(x^2+1\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)u_{xx} + \\ + \frac{1}{\delta^2}\left(x - \delta\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)u_x - u_t = 0.$$

В этом уравнении коэффициент при u_{xx} растет не быстрее, чем $M|x|^{2+2\delta}$, а коэффициент при u_x растет не быстрее, чем $M|x|^{1+2\delta.}$ Следовательно, при таком росте коэффициентов нарушается единственность решения задачи Коши в классе ограниченных функций. ⊠

З а д а ч а 4 [14]. Пусть коэффициенты $a_{ij}(x,t)$, $b_i(x,t)$ и $c(x,t)$ ограничены в D :

$$|a_{ij}(x,t)| < M, \quad |b_i(x,t)| < M, \quad |c(x,t)| < M, \tag{2.17}$$

а функция $u(x,t)$ удовлетворяет неравенствам:

$$Lu(x,t) \leqslant 0 \quad \text{в} \quad D_0, \quad \overline{u}(x,t) \geqslant -\exp\left[\beta(|x|^2+1)\right] \quad \text{в} \quad D, \tag{2.18}$$

где $\beta > 0$ — некоторая постоянная. Доказать, что

$$u(x,t) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D \tag{2.19}$$

при условии:

$$\overline{u}(x,0) = u_0(x) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{2.20}$$

Р е ш е н и е. (Доказательство взято из работы [3].)

Для доказательства утверждения задачи нужно рассмотреть вспомогательную функцию:

$$w(x,t) \overset{\text{def}}{=} \exp\left[2\beta(|x|^2+1)e^{\alpha t} - \beta(r_0^2+1)\right] \tag{2.21}$$

и повторить рассуждения из предыдущей задачи, проверив, что при соответствующем выбре постоянной $\alpha > 0$ выполняется неравенство:

$$Lw(x,t) < 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D_0. \tag{2.22}$$

□ Действительно, имеем:

$$Lw(x,t) = w(x,t)e^{\alpha t}\Biggl[4\beta\sum_{i=1}^{N} a_{ii} + 16\beta^2 e^{\alpha t}\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}x_i x_j + \\ + 4\beta\sum_{i=1}^{N} b_i x_i + ce^{-\alpha t} - 2\beta\alpha(|x|^2+1)\Biggr] < 0$$

при условии:

$$t \leqslant t_0 = \frac{1}{\alpha},$$

где $\alpha > 0$ — достаточно велико.

□□ Действительно, имеют место следующие оценки:

$$4\beta\sum_{i=1}^{N} a_{ii} \leqslant 4\beta NM, \quad 16\beta^2 e^{\alpha t}\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}x_i x_j \leqslant 16\beta^2 e^{\alpha t} MN^2|x|^2,$$

$$4\beta\sum_{i=1}^{N} b_i x_i \leqslant 4\beta MN|x| \leqslant 2\beta MN|x|^2 + 2\beta MN, \quad ce^{-\alpha t} \leqslant M.$$

Поэтому справедливо неравенство:

$$Lw(x,t) \leqslant w(x,t)e\Bigl[2\beta\left(8\beta eMN^2 + MN - \alpha\right)|x|^2 + \\ + 6\beta NM + M - 2\beta\alpha\Bigr] < 0$$

при $t \leqslant 1/\alpha$ и достаточно большом $\alpha > 0$. ⊠⊠ ⊠

Теперь рассмотрим новую функцию:

$$v(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} w(x,t) + \overline{u}(x,t). \tag{2.23}$$

В замкнутом цилиндре $\overline{\text{Ц}^{0,t_0}_{0,r_0}} = \{|x| \leqslant r_0\} \times \{0 \leqslant t \leqslant t_0\}$ при $t = 0$ имеем:

$$v(x,0) = u_0(x) + w(x,0) \geqslant \exp\left[2\beta(|x|^2+1) - \beta(r_0^2+1)\right] \geqslant 0,$$

а при $r = r_0$ имеем:

$$v(x,t) = \exp\Big[2\beta(r_0^2+1)e^{\alpha t} - \beta(r_0^2+1)\Big] + u_0(x) \geqslant$$
$$\geqslant \exp\Big[\beta(r_0^2+1)\Big] - \exp\Big[\beta(r_0^2+1)\Big] = 0. \quad (2.24)$$

В силу принципа максимума в замкнутом цилиндре $\overline{\text{Ц}^{0,t_0}_{0,r_0}}$ мы получим, что

$$v(x,t) = \overline{u}(x,t) + w(x,t) \geqslant 0.$$

Переходя к пределу при $r_0 \to +\infty$ в выражении для $v(x,t)$ при фиксированном (x,t) получим, что

$$\overline{u}(x,t) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \times [0,t_0].$$

Далее, нужно повторить рассуждения последовательно в полосах:

$$\frac{1}{\alpha} \leqslant t \leqslant \frac{2}{\alpha}, \quad \frac{2}{\alpha} \leqslant t \leqslant \frac{3}{\alpha}, \cdots \frac{n}{\alpha} \leqslant t \leqslant \frac{n+1}{\alpha}, \cdots.$$

В результате получим, что утверждение задачи выполнено для всех $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times [0,T]$.

Замечание к задаче 4. Для уравнения теплопроводности:

$$u_t = u_{xx}$$

известны более сильные результаты, чем рассмотренные. В частности, С. Тэклиндом доказано, что решение задачи Коши единственно в классе функций, удовлетворяющих условию:

$$|u(x,t)| \leqslant \exp\left[\delta|x|h(|x|)\right] \quad \text{при} \quad |x| > 1,$$

где $\delta > 0$ — это произвольная постоянная, $h(r)$ — положительная неубывающая функция и

$$\int\limits_1^\infty \frac{dr}{h(r)} = +\infty.$$

Заметим, что в случае сходимости последнего интеграла единственность решения задачи Коши может нарушаться.

Задача 5 [14]. Пусть ограниченная в D функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению:

$$Lu(x,t) = f(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in D_0, \quad (2.25)$$

причем

$$|\overline{u}(x,0)| \leqslant M_1, \quad |f(x,t)| \leqslant M_2, \quad c(x,t) \leqslant M_3, \quad (2.26)$$

коэффициенты a_{ij} и b_i подчинены условиям (2.2). Тогда всюду в D выполнено неравенство:

$$|\overline{u}(x,t)| \leqslant e^{M_3 t}\,(M_1 + M_2 t)\,. \tag{2.27}$$

Р е ш е н и е. (Доказательство взято из работы [3].)

Для доказательства рассмотрим вспомогательные функции:

$$w_{\pm}(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} e^{M_3 t}\,(M_1 + M_2 t) \pm \overline{u}(x,t).$$

По условию задачи имеем:

$$w_{\pm}(x,0) \geqslant 0.$$

Вычислим $Lw_{\pm}(x,t)$. Имеем:

$$Lw_{\pm}(x,t) = e^{M_3 t}\,[(c - M_3)(M_1 + M_2 t) - M_2] \pm f \leqslant -M_2 e^{M_3 t} \pm f \leqslant 0.$$

Отметим, что в силу ограниченности в D решения $u(x,t)$ найдется такая постоянная $A > 0$, что

$$\overline{u}(x,t) \geqslant -A \Rightarrow \overline{u}(x,t) \geqslant -A(|x|^q + 1) \quad \text{при} \quad (x,t) \in D.$$

В силу результата задачи 3 получим:

$$w_{\pm}(x,t) \geqslant 0 \quad \text{всюду в} \quad D.$$

§ 3. Литературные указания

Материал для лекции взят из работ [3], [14], [15].

Лекция 14
ТЕОРЕМЫ СРАВНЕНИЯ

§ 1. Теорема сравнения решений первой краевой задачи

В этом параграфе рассмотрены теоремы сравнения для *нелинейных краевых задач* достаточно общего вида в цилиндрической области $D_T = \Omega \times [0, T]$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область с границей $\Gamma \in \mathbb{C}^{1,\alpha}$ при $\alpha \in (0, 1]$. Итак, рассмотрим *первую смешанную краевую задачу*:

$$u_t - \Delta u = f(x, t, u, D_x u) \quad \text{в} \quad D_T, \tag{1.1}$$

$$u(x, t) = \psi(x, t) \quad \text{на} \quad B \cup S_T, \tag{1.2}$$

где $D_x = (\partial_{x_1}, ..., \partial_{x_N})$. В этом параграфе мы будем использовать введённые в первом параграфе обозначения D, S, B, а также следующие обозначения:

$$D_\tau \stackrel{\text{def}}{=} D_T \cap \{0 < t < \tau\}, \quad B_\tau \stackrel{\text{def}}{=} D_T \cap \{t = \tau\}, \quad S_\tau \stackrel{\text{def}}{=} S_T \cap \{0 \leqslant t \leqslant \tau\}.$$

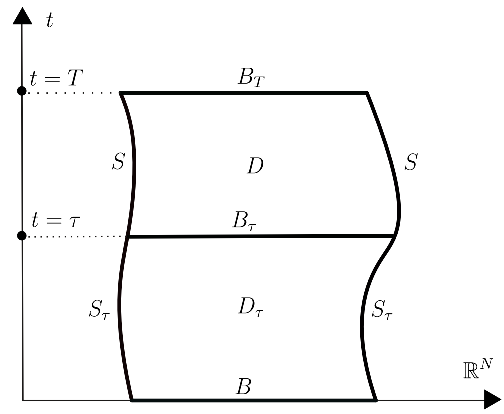


Рис. 35. Область D и множества D_τ, B_τ и S_τ.

В дальнейшем в спецкурсе профессора Н. Н. Нефедова студентам кафедры математики будет изложен *метод верхних и нижних решений* доказательства разрешимости краевых задач для нелинейных уравнений параболического и эллиптического типов [10]. Метод основан на признаке сравнения для соответствующих нелинейных краевых задач. Поэтому мы докажем слабый признак сравнения классических решений первой краевой задачи (1.1), (1.2).

Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть* $v(x,t)$ *и* $w(x,t)$ *принадлежат классу* $\mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D_T)\cap \cap\, \mathbb{C}(\overline{D}_T)$. *Пусть функция* $f(x,t,p,p_1,...,p_N)$ *по переменным* $(x,t,p,p_1,...,p_N)$ *определена на множестве:*

$$E := \overline{D}_T\times\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^N.$$

Если

$$v_t-\Delta v > f(x,t,v,D_x v) \quad \textit{в} \quad D_T, \tag{1.3}$$

$$w_t-\Delta w \leqslant f(x,t,w,D_x w) \quad \textit{в} \quad D_T, \tag{1.4}$$

и если

$$v(x,t) > w(x,t) \quad \textit{на} \quad B\cup S_T, \tag{1.5}$$

то

$$v(x,t) > w(x,t) \quad \textit{в} \quad D_T. \tag{1.6}$$

Доказательство.

Шаг 1. Пусть $t_0\in[0,T]$ таково, что

$$v(x,t) > w(x,t) \quad \text{для всех} \quad (x,t)\in\overline{B}_t, \quad 0\leqslant t<t_0.$$

Если доказать, что $t_0=T$, то теорема будет доказана.

Шаг 2. В силу (1.5) и того, что по условию теоремы $v(x,t), w(x,t)\in \in\mathbb{C}(\overline{D}_T)$, выполнено неравенство $t_0>0$. Если $t_0<T$, то функция

$$z(x,t) \overset{\text{def}}{=} v(x,t)-w(x,t) > 0 \quad \text{в} \quad D_{t_0}, \quad z(x,t)\geqslant 0 \quad \text{на} \quad B_{t_0}, \tag{1.7}$$

причём найдется такая точка $P_0=(x_0,t_0)\in\overline{B}_{t_0}$, в которой

$$z(P_0)=0. \tag{1.8}$$

С другой стороны, в силу того, что $\partial B_{t_0}\in S_T$ и выполнено строгое неравенство (1.5) точка $P_0\notin\partial B_{t_0}$. Следовательно, $P_0\in B_{t_0}$ и является точкой минимума функции $z(x,t)$ в области B_{t_0}. Тогда в точке P_0 выполнены необходимое и достаточное условия минимума:

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}(P_0)=0, \quad \Delta z(P_0)\geqslant 0. \tag{1.9}$$

Шаг 3. В силу равенств (1.8) и (1.9) и неравенств (1.3), (1.4) выполнено равенство:

$$f(x_0, t_0, v(P_0), D_x v(P_0)) = f(x_0, t_0, w(P_0), D_x w(P_0)) \Rightarrow \\ \Rightarrow v_t(P_0) - \Delta v(P_0) > w_t(P_0) - \Delta w(P_0) \Rightarrow \\ \Rightarrow z_t(P_0) > \Delta z(P_0) \geqslant 0 \Rightarrow v_t(P_0) > w_t(P_0). \quad (1.10)$$

С другой стороны, в силу (1.7) имеем: [1])

$$0 = z(P_0) < z(P) \quad \text{для всех} \quad P \in D_{t_0}.$$

Следовательно, поскольку производная $z_t(P_0)$ существует, то при ее вычислении с помощью предела разностного отношения при $t \uparrow t_0$ получим следующие неравенства:

$$z_t(P_0) = \lim_{t \uparrow t_0} \frac{z(x_0, t_0) - z(x_0, t)}{t_0 - t} \Rightarrow z_t(P_0) \leqslant 0 \Rightarrow v_t(P_0) \leqslant w_t(P_0),$$

что противоречит неравенству (1.10).

Полученное противоречие доказывает, что $t_0 = T$.

Теорема доказана.

Замечание. Совокупность из двух условий (1.3) и (1.4) может быть заменена на совокупность условий:

$$v_t - \Delta v \geqslant f(x, t, v, D_x v) \quad \text{в} \quad D_T, \quad (1.11)$$

$$w_t - \Delta w < f(x, t, w, D_x w) \quad \text{в} \quad D_T. \quad (1.12)$$

Устойчивость решения первой нелинейной краевой задачи. Пусть $k = 1, 2$ и $u_k(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D_T) \cap \mathbb{C}(\overline{D}_T)$ — решения следующих краевых задач:

$$u_{kt} - \Delta u_k = f(x, u_k, D_x u_k) \quad \text{в} \quad (x,t) \in D_T, \quad (1.13)$$

$$u_k(x,t) = g_k(x,t) \quad \text{для} \quad (x,t) \in S_T \cup B. \quad (1.14)$$

Заметим, что справедливо равенство:

$$f(x, t, u_1, D_x u_1) - f(x, t, u_2, D_x u_2) = \int\limits_0^1 \frac{d}{ds} f(x, t, u_s, D_x u_s)\, ds = \\ = \overline{c}(x,t) v(x,t) + \sum_{j=1}^{N} \overline{b}_j(x,t) \frac{\partial v(x,t)}{\partial x_j}, \quad u_s = s u_1 + (1-s) u_2, \quad (1.15)$$

---

[1]) Заметим, что согласно определению $B_{t_0} \notin D_{t_0}$

$$v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t),$$

$$\overline{c}(x,t) := \int\limits_0^1 \frac{\partial f(x,t,u_s,D_x u_s)}{\partial u_s}\,ds, \quad \overline{b}_j(x,t) := \int\limits_0^1 \frac{\partial f(x,t,u_s,D_x u_s)}{\partial u_{sx_j}}\,ds. \tag{1.16}$$

Потребуем, чтобы

$$\frac{\partial f(x,t,p,p_1,\ldots,p_N)}{\partial p} \leqslant 0, \quad (x,t,p,p_1,\ldots,p_N) \in D_T \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N. \tag{1.17}$$

Тогда $\overline{c}(x,t) \leqslant 0$ для всех $(x,t) \in D_T$. Введем в рассмотрение следующие три функции:

$$v(x,t) := u_1(x,t) - u_2(x,t), \tag{1.18}$$

$$v_1(x,t) := \sup_{(x,t)\in S_T\cup B} \left|g_1(x,t) - g_2(x,t)\right|, \tag{1.19}$$

$$v_2(x,t) := -\sup_{(x,t)\in S_T\cup B} \left|g_1(x,t) - g_2(x,t)\right|. \tag{1.20}$$

Заметим, что в силу (1.15) функции $v(x,t)$, $v_1(x,t)$ и $v_2(x,t)$ удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\widetilde{L}v(x,t) = 0 \quad \text{для} \quad (x,t) \in D_T, \tag{1.21}$$

$$v(x,t) = g_1(x,t) - g_2(x,t) \quad \text{для} \quad (x,t) \in S_T \cup B, \tag{1.22}$$

$$\widetilde{L}v_1(x,t) \leqslant 0 \quad \text{для} \quad (x,t) \in D_T, \tag{1.23}$$

$$v_1(x,t) > g_1(x,t) - g_2(x,t) = v(x,t) \quad \text{для} \quad (x,t) \in S_T \cup B, \tag{1.24}$$

$$\widetilde{L}v_2(x,t) \geqslant 0 \quad \text{для} \quad (x,t) \in D_T, \tag{1.25}$$

$$v_2(x,t) \leqslant g_1(x,t) - g_2(x,t) = v(x,t) \quad \text{для} \quad (x,t) \in S_T \cup B, \tag{1.26}$$

$$\widetilde{L}u(x,t) := \Delta u(x,t) + \sum_{j=1}^N \overline{b}_j(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_j} + \\ + \overline{c}(x,t)u(x,t) - \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}. \tag{1.27}$$

Осталось воспользоваться признаком сравнения из лекции 11 и получить неравенство:

$$\left|u_1(x,t) - u_2(x,t)\right| \leqslant \sup_{(x,t)\in S_T\cup B} \left|g_1(x,t) - g_2(x,t)\right|, \tag{1.28}$$

из которого в свою очередь получим:

$$\sup_{(x,t)\in D_T} \left|u_1(x,t) - u_2(x,t)\right| \leqslant \sup_{(x,t)\in S_T\cup B} \left|g_1(x,t) - g_2(x,t)\right|. \tag{1.29}$$

Отсюда вытекает устойчивость первой краевой задачи (1.13), (1.14) по граничному условию.

§ 2. Теорема сравнения для решений второй и третьей краевых задач

Рассмотрим *нелинейную смешанную третью краевую задачу* и докажем признак сравнения для неё:

$$u_t - \Delta u = f(x, t, u, D_x u) \quad \text{в} \quad D_T, \tag{2.1}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad \text{при} \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{2.2}$$

$$\lim_{\Omega\times[0,T]\cap l\ni(y,\tau)\to(x,t)\in S_T} \left(\frac{\partial u(y,\tau)}{\partial \mathbf{n}_x} - \beta(y, \tau, u(y, \tau)) \right) = \psi(x, t) \tag{2.3}$$

для всех $(x, t) \in S_T = \Gamma \times [0, T]$, где $D_x = (\partial_{x_1}, ..., \partial_{x_N})$, $\mathbf{n}_{x,t} = (\mathbf{n}_x, 0)$ — внешняя нормаль в точке $(x, t) \in S_T$,

$$l = \{(x, t) + s(\mathbf{n}_x, 0), s \in \mathbb{R}\}$$

— прямая, проходящая через точку $(x, t) \in S_T$, с направляющим вектором $\mathbf{n}_{x,t} = (\mathbf{n}_x, 0)$, причем

$$\frac{\partial u(y,\tau)}{\partial \mathbf{n}_x} := (\mathbf{n}_x, D_x)u(y, \tau). \tag{2.4}$$

Справедлива следующая теорема *о признаке сравнения для третьей краевой задачи*:

Теорема 2. *Пусть предположения теоремы* 1 *остаются без изменений. Если* $v(x, t)$, $w(x, t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D_T) \cap \mathbb{C}^{(1,0)}_{x,t}(\mathbf{n}; \overline{D}_T)$ *и*

$$v_t - \Delta v > f(x, t, v, D_x v) \quad \textit{в} \quad D_T, \tag{2.5}$$

$$w_t - \Delta w \leqslant f(x, t, w, D_x w) \quad \textit{в} \quad D_T \tag{2.6}$$

и если

$$v(x, t) > w(x, t) \quad \textit{для} \quad (x, t) \in \overline{B}, \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial \mathbf{n}_x} - \beta(x, t, v(x, t)) > \frac{\partial w(x,t)}{\partial \mathbf{n}_x} - \beta(x, t, w(x, t)) \quad \textit{на} \quad S_T, \tag{2.8}$$

то

$$v(x, t) > w(x, t) \quad \textit{в} \quad D_T, \tag{2.9}$$

где $\beta = \beta(x, t, p) \in \mathbb{C}(\overline{D}_T \times \mathbb{R}^1)$, $\mathbf{n}_{x,t} = (\mathbf{n}_x, 0)$ — *внешняя нормаль в точке* $(x, t) \in S_T$, *где использовано обозначение:*

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \mathbf{n}_x} := \lim_{\Omega\times[0,T]\cap l\ni(y,\tau)\to(x,t)\in S_T} \frac{\partial u(y,\tau)}{\partial \mathbf{n}_x}. \tag{2.10}$$

Доказательство. Доказательство этой теоремы в точности повторяет доказательство на шагах 1 и 2 предыдущей теоремы. Отличие состоит в том, что точка P_0 не может принадлежать ∂B_{t_0} поскольку, с одной стороны,

$$\frac{\partial z(P_0)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}} = \lim_{0>\lambda\to 0} \frac{z(x_0+\lambda \mathbf{n}_{x_0}, t_0) - z(x_0, t_0)}{\lambda} \leqslant 0, \tag{2.11}$$

а, с другой стороны, в силу неравенства (2.8) имеем:

$$\frac{\partial z(P_0)}{\partial \mathbf{n}_{P_0}} > 0.$$

Теорема доказана.

§ 3. Случай нелинейного параболического оператора общего вида. Теоремы сравнения

В этом параграфе доказывается признак сравнения для общего нелинейного параболического оператора в цилиндрической области $D_T = \Omega \times (0,T)$ в случае, когда $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область с гладкой границей Γ:

$$L(u)(x,t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} F\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right) - \frac{\partial u}{\partial t}, \tag{3.1}$$

где функция $F = F(x,t,p,p_i,p_{ij})$ определена на множестве $\overline{D}_T \times \mathbb{R}^1 \times \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N^2}$, на котором она является непрерывно дифференцируемой функцией от N^2+N+3 переменных. Потребуем, чтобы функция $F = F(x,t,p,p_i,p_{ij})$ определяла эллиптический оператор. Для этого достаточно потребовать, чтобы выполнялось следующее неравенство:

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} \frac{\partial F}{\partial p_{ij}} \xi_i \xi_j > 0 \quad \text{для всех} \quad 0 \neq \xi \in \mathbb{R}^N \tag{3.2}$$

и для всех $(x,t,p,p_i,p_{ij}) \in D_T \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N^2}$.

Заметим, что если функция $F = F(x,t,p,p_i,p_{ij})$ является непрерывно дифференцируемой по переменным (p,p_i,p_{ij}), то справедлива формула Адамара среднего значения:

$$F(x,t,u,u_i,u_{ij}) - F(x,t,v,v_i,v_{ij}) = \\ = \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(u_{ij}-v_{ij}) + \sum_{i=1}^{N} b_i(u_i-v_i) + c(u-v), \tag{3.3}$$

где

$$a_{ij} := \int\limits_0^1 F_{p_{ij}}(x,t,w_\sigma,w_{i\sigma},w_{ij\sigma})\,d\sigma, \tag{3.4}$$

$$b_i := \int\limits_0^1 F_{p_i}(x,t,w_\sigma,w_{i\sigma},w_{ij\sigma})\,d\sigma, \tag{3.5}$$

$$c := \int\limits_0^1 F_p(x,t,w_\sigma,w_{i\sigma},w_{ij\sigma})\,d\sigma, \tag{3.6}$$

$$w_\sigma = \sigma u + (1-\sigma)v, \quad w_{i\sigma} = \sigma u_i + (1-\sigma)v_i, \tag{3.7}$$

$$w_{ij\sigma} = \sigma u_{ij} + (1-\sigma)v_{ij}. \tag{3.8}$$

□ Действительно, справедливы равенства:

$$F(x,t,u,u_i,u_{ij}) - F(x,t,v,v_i,v_{ij}) = \int\limits_0^1 \frac{d}{d\sigma}F(x,t,w_\sigma,w_{i\sigma},w_{ij\sigma})\,d\sigma, \tag{3.9}$$

где функции $w_\sigma, w_{i\sigma}, w_{ij\sigma}$ определены равенствами (3.7) и (3.8),

$$\begin{gathered}\frac{d}{d\sigma}F(x,t,w_\sigma,w_{i\sigma},w_{ij\sigma}) = \\ = F_p(x,t,w_\sigma,w_{i\sigma},w_{ij\sigma})(u-v) + F_{p_i}(x,t,w_\sigma,w_{i\sigma},w_{ij\sigma})(u_i-v_i)+ \\ + F_{p_{ij}}(x,t,w_\sigma,w_{i\sigma},w_{ij\sigma})(u_{ij}-v_{ij}).\end{gathered} \tag{3.10}$$

Из равенств (3.9) и (3.10) следует равенство (3.3). ⊠

Теперь применим формулу Адамара среднего значения (см. равенство (3.3)) следующего вида:

$$\begin{gathered}F(x,t,u,u_{x_i},u_{x_ix_j}) - u_t - F(x,t,v,v_{x_i},v_{x_ix_j}) + v_t = \\ = \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\frac{\partial z(x,t)}{\partial x_i} + \\ + c(x,t)z(x,t) - z_t(x,t) := Lz(x,t), \quad z(x,t) = u(x,t) - v(x,t),\end{gathered} \tag{3.11}$$

где

$$a_{ij}(x,t) = \int\limits_0^1 F_{p_{ij}}\left(x,t,m,m_{x_i},m_{x_ix_j}\right)\,d\sigma, \tag{3.12}$$

$$b_i(x,t) = \int\limits_0^1 F_{p_i}\left(x,t,m,m_{x_i},m_{x_ix_j}\right)\, d\sigma, \tag{3.13}$$

$$c(x,t) = \int\limits_0^1 F_p\left(x,t,m,m_{x_i},m_{x_ix_j}\right)\, d\sigma, \quad m = \sigma u + (1-\sigma)v. \tag{3.14}$$

Предположим в дальнейшем, что для фиксированных функций $u(x,t), v(x,t), w(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D_T \cup B_T) \cap \mathbb{C}(\overline{D}_T)$ оператор L является параболическим на замыкании E подмножества из $D \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^N \times \times \mathbb{R}^{N^2}$:

$$\begin{gathered} E = \Big\{(x,t,p,p_i,p_{ij}) : \\ p \in \{\sigma u(x,t) + (1-\sigma)v(x,t)\} \cup \{\sigma u(x,t) + (1-\sigma)w(x,t)\}, \\ p_i \in \{\sigma u_{x_i}(x,t) + (1-\sigma)v_{x_i}(x,t)\} \cup \{\sigma u_{x_i}(x,t) + (1-\sigma)w_{x_i}(x,t)\}, \\ p_{ij} \in \{\sigma u_{x_ix_j}(x,t) + (1-\sigma)v_{x_ix_j}(x,t)\} \cup \\ \cup \{\sigma u_{x_ix_i}(x,t) + (1-\sigma)w_{x_ix_j}(x,t)\}, (x,t) \in D,\ \sigma \in [0,1]\ i,j = \overline{1,N}\Big\}, \end{gathered}$$

Кроме этого, предположим, что

$$c(x,t) = \int\limits_0^1 F_p\left(x,t,m,m_{x_i},m_{x_ix_j}\right)\, d\sigma \leqslant 0$$

при $m = \sigma u(x,t) + (1-\sigma)v(x,t)$ и $m = \sigma u(x,t) + (1-\sigma)w(x,t)$ для всех $(x,t) \in D_T$.

З а м е ч а н и е. Это условие можно заменить другим:

$$\sup_{(x,t)\in D_T} |c(x,t)| < +\infty.$$

Таким образом, приходим к следующему признаку сравнения для нелинейной первой смешанной краевой задачи [21]:

Т е о р е м а 3. *Если* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D_T \cup B_T) \cap \mathbb{C}(\overline{D}_T)$ *— это решение задачи*

$$L(u)(x,t) = f(x,t) \quad \textit{при} \quad (x,t) \in D_T \cup B_T, \tag{3.15}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \textit{при} \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{3.16}$$

$$u(x,t) = \psi(x,t) \quad \textit{на} \quad S_T, \tag{3.17}$$

а функции $v(x,t)$ *и* $w(x,t)$ *из класса* $\mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D_T \cup B_T) \cap \mathbb{C}(\overline{D}_T)$ *удовлетворяют неравенствам*:

$$L(w)(x,t) \leqslant f(x,t) \leqslant L(v)(x,t) \quad \textit{в} \quad D_T \cup B_T. \tag{3.18}$$

то при выполнении условий на входные данные задачи (3.15–(3.17)):

$$v(x,0) \leqslant u_0(x) \leqslant w(x,0) \quad \textit{в} \quad \overline{\Omega}, \tag{3.19}$$

$$v(x,t) \leqslant \psi(x,t) \leqslant w(x,t) \quad \textit{на} \quad S_T, \tag{3.20}$$

решение задачи удовлетворяет неравенствам:

$$v(x,t) \leqslant u(x,t) \leqslant w(x,t) \quad \textit{в} \quad \overline{D}_T. \tag{3.21}$$

Доказательство. Докажем, например, что $v(x,t) \leqslant u(x,t)$ для всех $(x,t) \in \overline{D}_T$. Действительно, функция $z(x,t) = v(x,t) - u(x,t) \in \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D_T \cup B_T) \cap \mathbb{C}(\overline{D}_T)$ удовлетворяет следующей задаче:

$$Lz(x,t) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad D_T \cup B_T, \tag{3.22}$$

$$z(x,t) \leqslant 0 \quad \text{на} \quad S_T \cup B, \tag{3.23}$$

где оператор L определен равенством (3.11). Предположим, что найдется такая точка $(x_0,t_0) \in \overline{D}_T$, в которой $z(x_0,t_0) > 0$. Значит, поскольку $z(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D}_T)$, то в какой-то точке из $\overline{D}_T$ достигается глобальный положительный максимум. Без ограничения общности будем считать, что это точка (x_0,t_0). Ясно, что точка $(x_0,t_0) \notin S_T \cup B$ Если $(x_0,t_0) \in \in D_T \cup B_T$, то согласно теореме 2 из лекции 11 получим, что

$$u(x,t) = u(x_0,t_0) \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \overline{D}_{t_0}.$$

Тогда $u(x,t) = u(x_0,t_0) > 0$ для $(x,t) \in S_{t_0} \cup B$, что противоречит неравенству (3.23). Значит,такой точки $(x_0,t_0) \in \overline{D}_T$ не существует.

Теорема доказана.

Справедлив следующий признак сравнения второй смешанной краевой задачи.

Теорема 4. *Если* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D_T \cup B_T) \cap \mathbb{C}^{(1,0)}_{x,t}(\mathbf{n};\overline{D}_T)$ *— это решение задачи*

$$L(u)(x,t) = f(x,t) \quad \textit{при} \quad (x,t) \in D_T \cup B_T, \tag{3.24}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \textit{при} \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{3.25}$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \mathbf{n}_x} = \psi(x,t) \quad \textit{на} \quad S_T, \tag{3.26}$$

а функции $v(x,t)$ *и* $w(x,t)$ *из класса* $\mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D_T \cup B_T) \cap \mathbb{C}^{(1,0)}_{x,t}(\mathbf{n};\overline{D}_T)$ *удовлетворяют неравенствам*:

$$L(w)(x,t) \leqslant f(x,t) \leqslant L(v)(x,t) \quad \textit{в} \quad D_T \cup B_T, \tag{3.27}$$

то при условии, что

$$v(x,0) \leqslant u_0(x) \leqslant w(x,0) \quad \textit{в} \quad \overline{\Omega}, \tag{3.28}$$

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial \mathbf{n}_x}(x,t) \leqslant \psi(x,t) \leqslant \frac{\partial w(x,t)}{\partial \mathbf{n}_x} \quad \textit{на} \quad S_T, \tag{3.29}$$

выполняются неравенства:

$$v(x,t) \leqslant u(x,t) \leqslant w(x,t) \quad \textit{в} \quad \overline{D}_T, \tag{3.30}$$

где мы использовалось обозначение:

$$\frac{\partial h(x,t)}{\partial \mathbf{n}_x} := \lim_{(D_T \cup B_T \cup B)\cap l \ni (y,\tau) \to (x,t) \in S_T} \frac{\partial h(y,\tau)}{\partial \mathbf{n}_x} \tag{3.31}$$

для $(x,t) \in S_T$, $l = \{(x,t) + s(\mathbf{n}_x, 0), s \in \mathbb{R}\}$, $\mathbf{n}_x$ *— внешняя нормаль по отношению к области* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *к* $x \in \Gamma$, $\Gamma \in \mathbb{C}^{1,\alpha}$ *при* $\alpha \in (0,1]$.

Доказательство. Докажем, например, что $v(x,t) \leqslant u(x,t)$ для всех $(x,t) \in \overline{D}_T$. Рассмотрим разность: $z(x,t) = v(x,t) - u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D_T \cup B_T) \cap \mathbb{C}^{(1,0)}_{x,t}(\mathbf{n}; \overline{D}_T)$. Функция $z(x,t)$ удовлетворяет неравенствам:

$$Lz(x,t) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D_T \cup B_T, \tag{3.32}$$

$$z(x,0) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{3.33}$$

$$\frac{\partial z(x,t)}{\partial \mathbf{n}_x} \leqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in S_T, \tag{3.34}$$

где оператор L определен равенством (3.11). Предположим, что существует такая точка $(x_0,t_0) \in \overline{D}_T$, в которой $z(x_0,t_0) > 0$. Поскольку $z(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D}_T)$, то в какой–то точке достигается глобальный положительный максимум. Без ограничения общности будем считать, что это точка (x_0,t_0). Если $(x_0,t_0) \in D_T \cup B_T$, то

$$u(x,t) = u(x_0,t_0) \quad \text{для всех} \quad \overline{D}_{t_0}$$

и тогда в силу непрерывности функции $z(x,t)$ приходим к выводу о том, что $u(x,t) = u(x_0,t_0) > 0$ для $(x,t) \in B$, что противоречит неравенству (3.33). Теперь предположим, что $(x_0,t_0) \in S_T$. Тогда либо в любой окрестности $O((x_0,t_0);\varepsilon) \cap D_{t_0}$ функция постоянна, либо найдется такая малая окрестность, в которой $z(x,t) < z(x_0,t_0)$. В первом случае приходим к противоречию с условием (3.33). Во втором случае в силу теоремы 1 (усиленный вариант теоремы типа Жиро) лекции 12 получаем неравенство:

$$\frac{\partial z(x_0,t_0)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}} > 0,$$

которое противоречит неравенству (3.34). Значит,такой точки $(x_0,t_0) \in \overline{D}_T$ не существует.

Теорема доказана.

§ 4. Примеры решения задач

Теперь мы рассмотрим примеры применения теоремы 1 сравнения решений.

З а д а ч а 1 [14]. Пусть

$$\frac{\partial v}{\partial t} > \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + av^2 \quad \text{при} \quad (x,t) \in (0,1) \times (0,4M), \quad a > 0, \tag{4.1}$$

$$v(x,0) > \frac{\mu}{M}, \quad v(0,t) > \frac{\mu}{M}, \quad v(1,t) > \frac{\mu}{M} \tag{4.2}$$

при $(x,t) \in [0,1] \times [0,4M]$, а константы удовлетворяют следующим неравенствам:

$$a\mu > 8M + \frac{1}{4}, \quad a > 0, \quad M > 0, \quad \mu > 0. \tag{4.3}$$

Тогда

$$v(1/2,t) \to +\infty \quad \text{при} \quad t \to 4M. \tag{4.4}$$

Р е ш е н и е. Рассмотрим следующую функцию:

$$w(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mu}{M - tx(1-x)}. \tag{4.5}$$

Заметим, что при условии (4.3) имеет место следующее неравенство:

$$\frac{\partial w}{\partial t} \leqslant \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + aw^2 \quad \text{при} \quad (x,t) \in (0,1) \times (0,4M), \quad a > 0. \tag{4.6}$$

□ Действительно,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\mu t}{(M - tx(1-x))^2}[2x-1], \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\mu x(1-x)}{(M - tx(1-x))^2},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{2\mu t^2}{(M - tx(1-x))^3}[2x-1]^2 - \frac{2\mu t}{(M - tx(1-x))^2},$$

$$w^2 = \frac{\mu^2}{(M - tx(1-x))^2}.$$

Получим условие на величину $a > 0$ для того, чтобы в области $D = (0,1) \times (0,4M)$ было выполнено неравенство:

$$\frac{\mu x(1-x)}{(M - tx(1-x))^2} \leqslant \frac{2\mu t^2}{(M - tx(1-x))^3}[2x-1]^2 - \\ - \frac{2\mu t}{(M - tx(1-x))^2} + a\frac{\mu^2}{(M - tx(1-x))^2}.$$

Достаточным условием является следующее неравенство:

$$\mu x(1-x)+2\mu t<a\mu^2 \Rightarrow a\mu>\frac{1}{4}+8M. \quad \boxtimes$$

Причём

$$w(x,0)=\frac{\mu}{M}, \quad w(0,t)=\frac{\mu}{M}, \quad w(1,t)=\frac{\mu}{M}. \tag{4.7}$$

Применяя теорему 1, получим, что

$$v(x,t)>w(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t)\in(0,1)\times(0,4M). \tag{4.8}$$

Следовательно, при $x=1/2$ имеем:

$$v(1/2,t)>\frac{4\mu}{4M-t}.$$

З а д а ч а 2. Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$u_t-\Delta u+|u|^p=0 \quad \text{при} \quad (x,t)\in\mathbb{R}^{N+1}_+, \tag{4.9}$$

$$u(x,0)=u_0(x) \quad \text{при} \quad x\in\mathbb{R}^N, \tag{4.10}$$

при $p\in(0,1)$ и $\mathbb{R}^{N+1}_+=\{(x,t)\in\mathbb{R}^{N+1}:\, t>0\}$. Будем рассматривать только классические решения этой задачи Коши, т. е. $u(x,t)\in\in\mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(\mathbb{R}^{N+1}_+)\cap\mathbb{C}(\overline{\mathbb{R}^{N+1}_+})$. Нужно доказать, что за конечное время решение этой задачи обращается в нуль всюду в пространстве $\mathbb{R}^N$.

Р е ш е н и е. Предположим, что

$$0\leqslant u_0(x)\leqslant M, \quad M>0, \quad x\in\mathbb{R}^N. \tag{4.11}$$

Пункт 1. Из сильного принципа сравнения, который будет сформулирован ниже, и из условия $u_0(x)\geqslant 0$ следует неравенство: $u(x,t)\geqslant 0$.

Пункт 2. Функция $v(x,t)=M+\varepsilon$ при $\varepsilon>0$ является решением следующего дифференциального неравенства:

$$v_t-\Delta v>-|v|^p, \quad v(x,0)=M+\varepsilon>u_0(x). \tag{4.12}$$

Поэтому если в теореме 1 взять в качестве $w(x,t)=u(x,t)$, то мы получим следующее неравенство:

$$u(x,t)<M+\varepsilon \quad \text{для всех} \quad (x,t)\in\mathbb{R}^{N+1}_+.$$

В пределе при $\varepsilon\to+0$ получим искомое неравенство:

$$u(x,t)\leqslant M \quad \text{для всех} \quad (x,t)\in\mathbb{R}^{N+1}_+. \tag{4.13}$$

Итак, $0\leqslant u(x,t)\leqslant M$.

Пункт 3. Рассмотрим следующую вспомогательную задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$z_t + z^p = 0 \quad \text{при} \quad t > 0, \quad z(0) = M > 0. \tag{4.14}$$

Нетрудно проверить, что решением этой задачи в классе

$$z(t) \in \mathbb{C}^{(1)}[0, +\infty)$$

является следующая функция:

$$z(t) = \begin{cases} \left(M^{1-p} - (1-p)t\right)^{1/(1-p)}, & \text{если} \quad t \in [0, t_0]; \\ 0, & \text{если} \quad t > t_0, \end{cases} \tag{4.15}$$

где

$$t_0 = \frac{M^{1-p}}{1-p}. \tag{4.16}$$

□ Действительно, легко проверить, что в точке $t = t_0$ имеем:

$$z(t_0) = 0, \quad z'(t_0) = \frac{1-p}{1-p}\left(M^{1-p} - (1-p)t_0\right)^{p/(1-p)} = 0.$$

Во всех других точках $t \in [0, t_0) \cup (t_0, +\infty)$ функция (4.15) удовлетворяет уравнению (4.14). ⊠

Функция

$$v(x, t) = z(t) + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0 \tag{4.17}$$

удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$v_t - \Delta v > -v^p \quad \text{при} \quad (x, t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+. \tag{4.18}$$

□ Действительно, функция $z = z(t)$ удовлетворяет равенству:

$$z_t - \Delta z = -z^p \Rightarrow (z+\varepsilon)_t - \Delta(z+\varepsilon) = -z^p > -(z+\varepsilon)^p. \quad ⊠$$

Кроме этого,

$$v(x, 0) = M + \varepsilon > u_0(x) \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{4.19}$$

Применим теорему сравнения 1, в которой возьмём $w(x,t) = u(x,t)$. Тогда получим неравенства:

$$u(x,t) < v(x,t) = z(t) + \varepsilon \Rightarrow 0 \leqslant u(x,t) \leqslant z(t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+. \tag{4.20}$$

Итак, делаем важный вывод: *каждое решение задачи Коши* (4.9), (4.10) *обращается в нуль всюду в* $\mathbb{R}^N$ *за конечное время* $0 < t_1 \leqslant t_0$ *при условиях* $0 \leqslant u_0(x) \leqslant M$ *и* $u_0(x) \not\equiv 0$, *где время* $t_0 > 0$ *определено явной формулой* (4.16).

Задача 3. Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$u_t - \Delta u = |u|^p \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+, \quad p > 1, \tag{4.21}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{4.22}$$

Решения задачи (4.21), (4.22) рассматриваем в классе $u(x,t) \in \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(\mathbb{R}^{N+1}_+) \cap \mathbb{C}(\overline{\mathbb{R}^{N+1}_+})$. Требуется получить достаточные условия разрушения решения этой задачи за конечное время.

Решение.

Пункт 1. Заметим, что

$$\Delta u - u_t = -|u|^p \leqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+, \quad u_0(x) \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

В предположении, что решение $u(x,t)$ ограничено для всех $(x,t) \in \in \mathbb{R}^N \times [0,T]$ при некотором малом $T > 0$, можно из теоремы 3 о принципе максимума для ограниченных решений в неограниченных областях получить, что $u(x,t) \geqslant 0$ для всех $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times [0,T]$.

Пункт 2. Рассмотрим вспомогательную задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$z_t = z^p \quad \text{при} \quad t > 0, \quad z(0) = M > 0. \tag{4.23}$$

Её решение дается следующей явной формулой:

$$z(t) = \left(M^{1-p} - (p-1)t\right)^{-1/(p-1)} \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t < t_0, \tag{4.24}$$

где

$$t_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{(p-1)M^{p-1}}. \tag{4.25}$$

Отметим, что функция $z = z(t)$ является монотонно возрастающей, причем

$$\lim_{t \to t_0} z(t) = +\infty.$$

Пункт 3. Предположим, что выполнено следующее неравенство:

$$u_0(x) > M + \varepsilon \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad \varepsilon > 0. \tag{4.26}$$

Введём функцию:

$$w(x,t) = z(t) + \varepsilon. \tag{4.27}$$

Эта функция удовлетворяет дифференциальному неравенству:

$$w_t - \Delta w < w^p \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+. \tag{4.28}$$

□ Действительно,

$$z_t - \Delta z = z^p \Rightarrow (z+\varepsilon)_t - \Delta(z+\varepsilon) = z^p < (z+\varepsilon)^p$$

при $\varepsilon \in (0, M)$. $\boxtimes$

Кроме этого,

$$w(x,0) = M + \varepsilon < u_0(x) \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Пункт 4. Воспользуемся теоремой 1, в которой нужно взять $v(x,t) = u(x,t)$ и получить следующее неравенство:

$$u(x,t) > z(t) + \varepsilon \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}. \tag{4.29}$$

Таким образом, мы приходим к следующему важному выводу: *при условии* $u_0(x) > M + \varepsilon > 0$ *выполнена оценка* (4.29), *из которой следует, что для некоторого* $0 < t_1 \leqslant t_0$ *решение задачи Коши* (4.21), (4.22) *разрушается за конечное время*:

$$\lim_{t \to t_1} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} u(x,t) = +\infty. \tag{4.30}$$

Задача 4. Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$u_t - \Delta u = |u|^p \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+, \quad p \in (0,1), \tag{4.31}$$

$$u(x,0) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{4.32}$$

Решения задачи (4.31), (4.32) рассматриваем в классе $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(\mathbb{R}^{N+1}_+) \cap \mathbb{C}(\overline{\mathbb{R}^{N+1}_+})$. Доказать, что в нелинейном случае единственность решения этой задачи может быть нарушена, даже если решение ищется в классе А. Н. Тихонова.

Решение. Действительно, как и в предыдущем примере, имеем $u(x,t) \geqslant 0$. Рассмотрим вспомогательную задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$z_t = z^p \quad \text{при} \quad t > 0, \quad z(0) = 0. \tag{4.33}$$

Семейство всех решений может быть представлено в следующем виде:

$$z(t) = (1-p)^{1/(1-p)} \begin{cases} (t-t_0)^{1/(1-p)}, & \text{если} \quad t \geqslant t_0; \\ 0, & \text{если} \quad t \in [0, t_0], \end{cases} \tag{4.34}$$

где t_0 — любое неотрицательное число. Ясно, что решения $u(x,t) = z(t)$ удовлетворяют задаче Коши (4.31), (4.32).

Задача 5. Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$u_t - \Delta u + |u|^p = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+, \quad p > 1, \tag{4.35}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{4.36}$$

Решения задачи (4.35), (4.36) рассматриваем в классе $u(x,t) \in \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(\mathbb{R}^{N+1}_+) \cap \mathbb{C}(\overline{\mathbb{R}^{N+1}_+})$. Получить оценку сверху на скорость убывания решения при $t \to +\infty$ этой задачи.

Решение. Как и в первом примере, используя сильный признак сравнения можно доказать, что $u(x,t) \geqslant 0$

Предположим, что $0 \leqslant u_0(x) \leqslant M$. Рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$z_t + z^p = 0 \quad \text{при} \quad t > 0, \quad z(0) = M > 0, \quad p > 1. \tag{4.37}$$

Единственное решение дается следующей формулой:

$$z(t) = \left(M^{1-p} + (p-1)t\right)^{-1/(p-1)}, \quad t \geqslant 0. \tag{4.38}$$

Как и ранее, можно легко показать, что функция

$$v(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} z(t) + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0 \tag{4.39}$$

удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$v_t - \Delta v > -v^p, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+, \tag{4.40}$$

причем

$$v(x,0) = M + \varepsilon > M \geqslant u_0(x) = u(x,0) \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{4.41}$$

Применя теорему сравнения 1, в которой $w(x,t) = u(x,t)$, и получаем оценку:

$$\begin{gathered} 0 \leqslant u(x,t) < v(x,t) = z(t) + \varepsilon \Rightarrow \\ \Rightarrow 0 \leqslant u(x,t) \leqslant z(t) = \\ = \frac{1}{\left(M^{1-p} + (p-1)t\right)^{1/(p-1)}} \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+. \end{gathered} \tag{4.42}$$

Задача для самостоятельного решения 1. Рассмотреть задачу Коши:

$$u_t - \Delta u + |\nabla u|^q + |u|^p = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+, \tag{4.43}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N \tag{4.44}$$

при условиях $q > 0$, $p \in (0,1)$, $0 \leqslant u_0(x) \leqslant M$ и $u(x,t) \geqslant 0$. Доказать, что для решения этой задачи имеет место неравенство (4.20)

Задача для самостоятельного решения 2. Рассмотреть задачу Коши:

$$u_t - \Delta u = |\nabla u|^q + |u|^p \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+, \tag{4.45}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N \tag{4.46}$$

при условиях $q > 0$, $1 < p$, $0 < M \leqslant u_0(x)$. Доказать, что для решения этой задачи имеет место неравенство (4.29).

Задача 6 [17]. Рассмотрим следующую задачу с *нелинейными граничным условием* в цилиндрической области $D_T = \Omega \times (0, T)$:

$$u_t = \Delta u \quad \text{при} \quad (x,t) \in D_T \cup B_T, \tag{4.47}$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \mathbf{n}_x} = |u(x,t)|^p \quad \text{при} \quad (x,t) \in S_T, \quad p > 1, \tag{4.48}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{4.49}$$

где $\mathbf{n}_{x,t} = (\mathbf{n}_x, 0)$ — это вектор внешней нормали к боковой границе $S_T = \Gamma \times [0,T]$, $\Gamma \in \mathbb{C}^{1,\alpha}$ при $\alpha \in (0,1]$. Доказать, что всякое нетривиальное решение $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2+1)}_{x,t}(D_T \cup B_T) \cap \mathbb{C}^{(1+1)}_{x,t}(D_T \cup S_T) \cap \mathbb{C}(\overline{D}_T)$ разрушается за конечное время.

Решение.

Шаг 1. Докажем, что

$$u(x,t) \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \overline{D}_T. \tag{4.50}$$

Действительно, докажем, что $u(x,t) \geqslant 0$. Если предположить, что $u(x,t) < 0$ где–то в области $\overline{D}_T$, то в некоторой точке $(x_0,t_0) \in \overline{D}_T$ достигается глобальный отрицательный минимум. В силу условия (4.49) имеем: $(x_0,t_0) \notin \overline{B}$. Если $(x_0,t_0) \in D_T \cup B_T$, то в силу сильного принципа минимума имеем:

$$u(x,t) = const < 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D_{t_0} \cup B_{t_0},$$

но тогда $u(x,0) < 0$. Приходим к противоречию с условием (4.49). Поэтому $(x_0,t_0) \in S_T$. Тогда найдется такая окрестность $V(x_0,t_0)$, что для всех $(x,t) \in D_T \cap V(x_0,t_0)$ решение $u(x,t) \neq const$ и по теореме Жиро имеет место неравенство:

$$\frac{\partial u(x_0,t_0)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}} < 0,$$

которое противоречит граничному условию (4.48), поскольку из него следует неравенство:

$$\frac{\partial u(x_0,t_0)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}} \geqslant 0.$$

Значит, $u(x,t) \geqslant 0$ для всех $(x,t) \in \overline{D}_T$.

Шаг 2. Докажем, что

$$\inf_{x\in\Omega} u(x,\varepsilon) = c > 0 \quad \text{для достаточно малого} \quad \varepsilon > 0. \tag{4.51}$$

Заметим, что если

$$u(x_0, \varepsilon) = 0 \quad \text{при} \quad x_0 \in \Omega,$$

то в силу сильного принципа максимума имеем:

$$u(x, t) = 0 \quad \text{для всех} \quad (x, t) \in \overline{\Omega} \times [0, \varepsilon].$$

Тогда $u_0(x) = 0$ для всех $x \in \overline{\Omega}$. Это противоречит тому, что $u_0(x) \not\equiv 0$. Если же $u(x, t) \not\equiv 0$ при $(x, t) \in \Omega \times [0, \varepsilon]$ и

$$u(x_0, \varepsilon) = 0 \quad \text{при} \quad x_0 \in \partial\Omega,$$

то в этой точке минимума в силу граничного условия (4.48) получим:

$$\frac{\partial u(x_0, \varepsilon)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}} = 0.$$

Если предположить, что существует малая окрестность точки $(x_0, \varepsilon) \in \in O((x_0, \varepsilon); \delta)$ при $\delta > 0$ такая, что

$$u(x, t) > 0 \quad \text{для всех} \quad (x, t) \in O((x_0, \varepsilon); \delta) \cap D,$$

то в силу теоремы Жиро имеет место строгое неравенство:

$$\frac{\partial u(x_0, \varepsilon)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}} > 0.$$

Следовательно, найдётся такая внутренняя точка $(x_1, t_1) \in \in O((x_0, \varepsilon); \delta) \cap D$, что

$$u(x_1, t_1) = 0.$$

Применяя сильный принцип максимума, получим, что

$$u(x, t) = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \Omega, \quad t \in [0, t_1] \Rightarrow u(x, 0) = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \Omega.$$

Пришли к противоречию.

Шаг 3. Меняя, если необходимо, $t = 0$ на $t = \varepsilon > 0$ без ограничения общности можем сразу же считать, что

$$\inf_{x \in \Omega} u_0(x) = c > 0. \tag{4.52}$$

Рассмотрим следующую вспомогательную задачу:

$$\varphi_t = \Delta\varphi \quad \text{при} \quad (x, t) \in D_T, \tag{4.53}$$

$$\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial \mathbf{n}_x} = |\varphi(x, t)|^p \quad \text{при} \quad (x, t) \in S_T, \tag{4.54}$$

$$\varphi(x,0) = \varphi_0(x) > 0 \quad \text{при} \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{4.55}$$

где функция $\varphi_0(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega})$ удовлетворяет следующим условиям [1]:

$$\inf_{x\in\Omega} \Delta\varphi_0(x) > 0, \quad \frac{\partial\varphi_0(x)}{\partial \mathbf{n}_x} = \varphi_0^p(x) \quad \text{при} \quad x \in \Gamma,$$

$$\frac{c}{2} \leqslant \varphi_0(x) \leqslant c \quad \text{при} \quad x \in \Omega.$$

Сравнивая $\varphi(x,t)$ с функцией $u(x,t)$, получим неравенство:

$$u(x,t) \geqslant \varphi(x,t) \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \overline{D}_T. \tag{4.56}$$

Шаг 4. Рассмотрим следующую функцию:

$$\psi(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(x,t+\eta) - \varphi(x,t) \quad \text{при} \quad \eta > 0. \tag{4.57}$$

Эта функция удовлетворяет следующей задаче:

$$\psi_t = \Delta\psi \quad \text{при} \quad (x,t) \in D_{T-\eta} \cup B_{T-\eta}, \tag{4.58}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial \mathbf{n}_x} = \frac{\partial\varphi(x,t+\eta)}{\partial \mathbf{n}_x} - \frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial \mathbf{n}_x} = (\varphi^p(x,t+\eta) - \varphi^p(x,t)) = \\ = p\xi^{p-1}(x,t)\psi(x,t) \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in S_{T-\eta}, \tag{4.59}$$

где $\xi(x,t) \in [\varphi(x,t), \varphi(x,t+\eta)]$,

$$\psi(x,0) = \varphi(x,\eta) - \varphi_0(x) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in \overline{\Omega}. \tag{4.60}$$

Используя признак сравнения по аналогии с шагом 1, получим, что

$$\psi(x,t) \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in D_{T-\eta} \cup B_{T-\eta} \Rightarrow \\ \Rightarrow \varphi_t(x,t) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \overline{D}_T. \tag{4.61}$$

Шаг 5. Отметим, что в классе

$$\varphi(x,t) \in \mathbb{C}^{(2+1)}_{x,t}(D_T \cup B_T) \cap \mathbb{C}^{(1+1)}_{x,t}(D_T \cup S_T) \cap \mathbb{C}(\overline{D}_T)$$

функция

$$z(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_t(x,t)$$

удовлетворяет следующей задаче:

$$z_t = \Delta z \quad \text{при} \quad (x,t) \in D_T \cup B_T, \tag{4.62}$$

[1] Такая функция существует [18].

$$\frac{\partial z(x,t)}{\partial \mathbf{n}_x} = p\varphi^{p-1}(x,t)z(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in S_T, \tag{4.63}$$

$$z(x,0) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in \overline{\Omega}. \tag{4.64}$$

По аналогии с доказательством свойства (4.51) докажем, что для достаточно малого $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство:

$$\inf_{x\in\Omega} z(x,\varepsilon) = \inf_{x\in\Omega} \varphi_t(x,\varepsilon) > 0. \tag{4.65}$$

Шаг 6. Рассмотрим следующую функцию:

$$w(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_t(x,t) - \delta\varphi^p(x,t). \tag{4.66}$$

Справедливо неравенство:

$$\begin{aligned} w_t - \Delta w = \varphi_{tt} - \delta p\varphi^{p-1}\varphi_t - \Delta\varphi_t + \delta\Delta\varphi^p = \\ = -\delta p\varphi^{p-1}\Delta\varphi + p(p-1)\delta\varphi^{p-2}|D_x\varphi|^2 + \delta p\varphi^{p-1}\Delta\varphi = \\ = p(p-1)\delta\varphi^{p-2}|D_x\varphi|^2 \geqslant 0, \end{aligned} \tag{4.67}$$

поскольку

$$\varphi_{tt} = \Delta\varphi_t.$$

Кроме этого,

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}_x} = \frac{\partial \varphi_t}{\partial \mathbf{n}_x} - \delta\frac{\partial \varphi^p}{\partial \mathbf{n}_x} = p\varphi^{p-1}\left(\varphi_t - \delta\frac{\partial\varphi}{\partial \mathbf{n}_x}\right) = \\ = p\varphi^{p-1}\left(\varphi_t - \delta\varphi^p\right) = p\varphi^{p-1}w. \end{aligned} \tag{4.68}$$

При достаточно малом $\delta > 0$ в силу (4.65) выполнено следующее неравенство:

$$w(x,\varepsilon) = \varphi_t(x,\varepsilon) - \delta\varphi^p(x,\varepsilon) \geqslant 0. \tag{4.69}$$

Используя признак сравнения по аналогии с шагом 1 получим, что

$$w(x,t) \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \Omega \times [\varepsilon, T]. \tag{4.70}$$

Шаг 7. Итак, выполнено неравенство:

$$\varphi_t(x,t) \geqslant \delta\varphi^p(x,t) \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \Omega \times [\varepsilon, T]. \tag{4.71}$$

Решением этого дифференциального неравенства является следующее неравенство:

$$\varphi(x,t) \geqslant \left(\varphi(x,\varepsilon) - (p-1)\delta(t-\varepsilon)\right)^{-1/(p-1)} \tag{4.72}$$

для всех $(x,t) \in \Omega \times [\varepsilon, T]$. В силу неравенства (4.56) получим, что имеет место неравенство:

$$u(x,t) \geqslant (\varphi(x,\varepsilon) - (p-1)\delta(t-\varepsilon))^{-1/(p-1)} \tag{4.73}$$

для всех $(x,t) \in \Omega \times [\varepsilon, T]$. Это неравенство означает, что $T < +\infty$.

Таким образом, утверждение задачи доказано.

Задача 7 [12]. Рассмотрим следующую первую краевую задачу для *уравнения нелинейной диффузии* в ограниченной цилиндрической области $D_T = \Omega \times (0,T)$:

$$u_t = \Delta u^{1+p} \quad \text{в} \quad D_T \cup B_T, \quad p > 1, \tag{4.74}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \geqslant 0, \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{4.75}$$

$$u(x,t) = 0 \quad \text{на} \quad S_T. \tag{4.76}$$

Рассматривая решения этой задачи с разделенными переменными, с помощью признака сравнения получить оценки решения во времени.

Решение. Заметим, что $u(x,t) \geqslant 0$ в силу теоремы 3, в которой нужно положить $v(x,t) = 0$. Будем искать частное решение уравнения (4.74) в виде:

$$u_a(x,t) = f_a(x)\varphi_a(t).$$

Подставляя в уравнение (4.74), мы получим равенство:

$$\varphi_{at}(t) f_a(x) = \varphi_a^{1+p}(t)\Delta f_a^{1+p}(x) \Rightarrow \frac{\varphi_{at}(t)}{\varphi_a^{1+p}(t)} = \frac{\Delta f_a^{1+p}(x)}{f_a(x)} = \lambda.$$

Рассмотрим два случая: $\lambda < 0$ и $\lambda > 0$.

Случай первый: глобальная разрешимость. Для удобства положим:

$$\lambda = -\frac{1}{p}.$$

С учетом этого получим два уравнения:

$$\varphi_{at}(t) + \frac{1}{p}\varphi_a^{1+p}(t) = 0, \quad \Delta f_a^{1+p}(x) + \frac{1}{p} f_a(x) = 0, \quad (x,t) \in D. \tag{4.77}$$

Функция $\varphi_a(t)$ имеет следующий явный вид:

$$\varphi_a(t) = \frac{1}{(a+t)^{1/p}}, \tag{4.78}$$

где $a > 0$ — произвольная постоянная. Потребуем, чтобы функция $f_a(x)$ удовлетворяла граничному условию:

$$f_a(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Gamma. \tag{4.79}$$

Итак, функция
$$u_a(x,t) \overset{\text{def}}{=} \frac{f_a(x)}{(a+t)^{1/p}}, \quad a>0 \tag{4.80}$$
удовлетворяет уравнению
$$u_{at} = \Delta u_a^{p+1} \quad \text{в} \quad D_T \quad \text{для любого} \quad T>0 \tag{4.81}$$
и граничным условиям
$$u_a(x,0) = \frac{f_a(x)}{a^{1/p}} \quad \text{в} \quad \overline{\Omega}, \tag{4.82}$$
$$u_a(x,t) = 0 \quad \text{на} \quad S_T \quad \text{для любого} \quad T>0. \tag{4.83}$$
Пусть начальное условие $u_0(x)$ удовлетворяет следующим неравенствам:
$$\frac{f_{a_1}(x)}{a_1^{1/p}} \leqslant u_0(x) \leqslant \frac{f_{a_2}(x)}{a_2^{1/p}}, \quad a_1>0,\ a_2>0. \tag{4.84}$$
Тогда в силу теоремы 3, в которой
$$v(x,t) = \frac{f_{a_1}(x)}{(a_1+t)^{1/p}}, \quad w(x,t) = \frac{f_{a_2}(x)}{(a_2+t)^{1/p}},$$
получим неравенства:
$$\frac{f_{a_1}(x)}{(a_1+t)^{1/p}} \leqslant u(x,t) \leqslant \frac{f_{a_2}(x)}{(a_2+t)^{1/p}} \quad \text{при} \quad (x,t)\in D_T \tag{4.85}$$
для любого $T>0$. Отметим, что существует (см. [12]) ненулевое решение $f_a(x) \not\equiv 0$ краевой задачи:
$$\Delta f_a^{1+p}(x) + \frac{1}{p} f_a(x) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \quad f_a(x)=0 \quad \text{на} \quad \Gamma. \tag{4.86}$$

Случай второй: разрушение за конечное время. Для удобства положим:
$$\lambda = \frac{1}{p}.$$
Аналогичным образом, получим следующую функцию:
$$u_b(x,t) = \frac{f_b(x)}{(T-t)^{1/p}}, \quad T>0 \tag{4.87}$$
— это произвольная постоянная,
$$\Delta f_b^{p+1}(x) - \frac{1}{p} f_b(x) = 0 \quad \text{при} \quad x\in\Omega, \tag{4.88}$$

$$f_b(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Gamma. \tag{4.89}$$

Нетривиальное решение краевой задачи (4.88), (4.89) существует (см. монографию [23]). Предположим, что начальная функция $u_0(x)$ удовлетворяет следующим неравенствам:

$$\frac{f_{b_1}(x)}{T_1^{1/p}} \leqslant u_0(x) \leqslant \frac{f_{b_2}(x)}{T_2^{1/p}}, \quad 0 < T_2 < T_1. \tag{4.90}$$

Тогда в силу теоремы 3, в которой

$$v(x,t) = \frac{f_{b_1}(x)}{(T_1 - t)^{1/p}}, \quad w(x,t) = \frac{f_{b_2}(x)}{(T_2 - t)^{1/p}},$$

получим неравенства:

$$\frac{f_{b_1}(x)}{(T_1 - t)^{1/p}} \leqslant u(x,t) \leqslant \frac{f_{b_2}(x)}{(T_2 - t)^{1/p}} \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \quad t \in [0, T_2). \tag{4.91}$$

Отметим, что в силу оценки снизу в (4.91) вытекает *разрушение за конечное время* $T_0 \in [T_2, T_1]$.

§ 5. Литературные указания

Материал для лекции взят из работ [10], [12], [17], [18], [23].

Тематическая лекция IV

ОЦЕНКИ ШАУДЕРА

Лекция 15

ПРОСТРАНСТВА ГЁЛЬДЕРА

В данной лекции рассматриваются параболические пространства Гёльдера, априорные оценки решений первой краевой задачи в пространствах Гёльдера, называемые априорными оценками Шаудера, и, наконец, с использованием метод продолжения по параметру, доказывается существование единственного, в силу принципа максимума, решения первой краевой задачи в параболических пространствах Гёльдера.

§ 1. Параболические пространства Гёльдера

В пространстве $(x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}$ эвклидово расстояние между точками $z_1 = (x_1, t_1)$ и $z_2 = (x_2, t_2)$ определяется следующим образом:

$$d(z_1, z_2) = |x_1 - x_2| + |t_1 - t_2|. \tag{1.1}$$

Однако, для целей данной лекции метрическое пространство $(\mathbb{R}^{N+1}, d)$ не удобно. Поэтому введем, так называемое, *параболическое расстояние*:

$$\rho(z_1, z_2) = |x_1 - x_2| + |t_1 - t_2|^{1/2}. \tag{1.2}$$

Нужно только проверить, что $\rho(z_1, z_2)$ удовлетворяет аксиомам расстояния. Докажем неравенство треугольника:

$$\rho(z_1, z_2) \leqslant \rho(z_1, z_3) + \rho(z_3, z_2). \tag{1.3}$$

Очевидно, что:

$$|t_1 - t_2| \leqslant |t_1 - t_3| + |t_3 - t_2| \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |t_1 - t_2|^{1/2} \leqslant (|t_1 - t_3| + |t_3 - t_2|)^{1/2} \leqslant |t_1 - t_3|^{1/2} + |t_3 - t_2|^{1/2}.$$

Отсюда следует неравенство (1.3).

З а м е ч а н и е. Параболическое расстояние $\rho(z_1, z_2)$ обладает следующим важным свойством: если $z_1 = (rx_1, r^2 t_1)$ и $z_2 = (rx_2, r^2 t_2)$, то

$$\rho(z_1, z_2) = r \left(|x_1 - x_2| + |t_2 - t_1|^{1/2} \right).$$

Это свойство инвариантности относительно указанного растяжения важно для параболических уравнений.

Для функции $u(x,t)$, определенной в области $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$, введем следующие обозначения:

$$[u]_{\alpha/2,\alpha;D} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{z_1 \neq z_2, z_1, z_2 \in D} \frac{|u(z_1) - u(z_2)|}{\rho^\alpha(z_1, z_2)}, \tag{1.4}$$

$$|u|_{\alpha/2,\alpha;D} \stackrel{\text{def}}{=} |u|_{0;D} + [u]_{\alpha/2,\alpha;D}, \quad |u|_{0;D} = \sup_{(x,t)\in D} |u(x,t)| \tag{1.5}$$

для $\alpha \in (0,1]$. Посредством символа $\mathbb{C}^{\alpha/2,\alpha}(\overline{D})$ обозначим линейное пространство всех функций $u(x,t)$, для которых конечна *норма* $|u|_{\alpha/2,\alpha;D} < +\infty$.

Параболическое пространство Гёльдера $\mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{D})$ определим как множество всех вещественнозначных функций $u(x,t)$, заданных в D и таких, что

$$|u|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} \stackrel{\text{def}}{=} |u|_{0;D} + \sum_{i=1}^{N} |u_{x_i}|_{0;D} + |u_t|_{0;D} + \\ + \sum_{i,j=1,1}^{N,N} |u_{x_i x_j}|_{0;D} + [u]_{1+\alpha/2;2+\alpha;D} < +\infty, \tag{1.6}$$

где

$$[u]_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} \stackrel{\text{def}}{=} [u_t]_{\alpha/2,\alpha;D} + \sum_{i,j=1,1}^{N,N} [u_{x_i x_j}]_{\alpha/2,\alpha;D}. \tag{1.7}$$

Можно доказать, что пространства $\mathbb{C}^{\alpha/2,\alpha}(\overline{D})$ и $\mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{D})$ являются банаховыми, т. е. полными нормированными пространствами относительно норм (1.4) и (1.7). Действительно, справедлива следующая теорема:

Теорема 1. *Пространства* $\mathbb{C}^{\alpha/2,\alpha}(\overline{D})$ *и* $\mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{D})$ *являются банаховыми относительно норм* $|\cdot|_{\alpha/2,\alpha;D}$ *и* $|\cdot|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D}$, *соответственно.*

Доказательство. Доказательство проведем для пространства $\mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{D})$.

То, что величина $|\cdot|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D}$ является нормой — очевидно. Поэтому достаточно доказать полноту пространства $\mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{D})$.

Шаг 1. Пусть $\{u_m\}$ — фундаментальная последовательность в $\mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{D})$, т. е.

$$|u_m - u_k|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} \to +0 \quad \text{при} \quad m,k \to +\infty. \tag{1.8}$$

Отсюда следует, что числовая последовательность $|u_m - u_{k_1}|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D}$ является ограниченной для каждого фиксированного $k_1 \in \mathbb{N}$. Поэтому в силу неравенства треугольника справедливо следующее неравенство:

$$|u_m|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} \leqslant |u_m - u_{k_1}|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} + |u_{k_1}|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} \leqslant K, \quad (1.9)$$

где $K > 0$ и не зависит от $m \in \mathbb{N}$.

Шаг 2. В частности, справедливы следующие неравенства [1]:

$$\left|D^2_{x_i x_j} u_m\right|_{0;D} \leqslant K, \quad [D^2_{x_i x_j} u_m]_{\alpha/2,\alpha;D} \leqslant K. \quad (1.10)$$

Из первого неравенства получим, что последовательность $\{D^2_{x_i x_j} u_m\}$ является равномерно ограниченной, а из второго неравенства имеем:

$$\left|D^2_{x_i x_j} u_m(x_1, t_1) - D^2_{x_i x_j} u_m(x_2, t_2)\right| \leqslant K \left[|x_1 - x_2| + |t_1 - t_2|^{1/2}\right]^{\alpha},$$

но это означает, что последовательность $\{D^2_{x_i x_j} u_m\}$ является равностепенно непрерывной. По теореме Арцела существует такая подпоследовательность $\{D^2_{x_i x_j} u_{m'}\}$, которая равномерно сходится в $\mathbb{C}(\overline{D})$, т. е. существует такая функция $v_{ij}(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D})$, что

$$\sup_{(x,t)\in D} \left|D^2_{x_i x_j} u_{m'} - v_{ij}(x,t)\right| \to +0 \quad \text{при} \quad m^{'} \to +\infty. \quad (1.11)$$

Таким же образом, доказываются аналогичные результаты для самой последовательности $\{u_m\}$, последовательностей $\{D_t u_m\}$ и $\{D_{x_i} u_m\}$.

Шаг 3. Докажем, что если $\{u_{m''}\}$ — это итоговая подпоследовательность последовательности $\{u_m\}$ и при этом

$$u_{m''}(x,t) \rightrightarrows u(x,t) \quad \text{равномерно в} \quad (x,t) \in D \quad \text{при} \quad m^{''} \to +\infty, \quad (1.12)$$

то

$$D_{x_i} u_{m''}(x,t) \rightrightarrows D_{x_i} u(x,t), \quad D^2_{x_i x_j} u_{m''}(x,t) \rightrightarrows D^2_{x_i x_j} u(x,t), \quad (1.13)$$

$$D_t u_{m''}(x,t) \rightrightarrows D_t u(x,t) \quad \text{равномерно в} \quad (x,t) \in D \quad (1.14)$$

при $m^{''} \to +\infty$. Равномерные сходимости (1.12)–(1.14) — очевидное следствие того, что из фундаментальности последовательности $\{u_m\}$ в $\mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{D})$ следует ее фундаментальность в пространстве $\mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(\overline{D}) \supset \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{D})$, которое является банаховым пространством.

[1] Здесь мы используем обозначение $D^2_{x_i x_j} u$ для соответствующей частной производной второго порядка от функции u по переменным x_i и x_j.

Шаг 4. Докажем теперь, что $u(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{D})$. Для этого достаточно доказать, что

$$[D_t u(x,t)]_{\alpha/2,\alpha;D} < +\infty, \quad [D^2_{x_i x_j} u(x,t)]_{\alpha/2,\alpha;D} < +\infty.$$

Докажем, например, второе неравенство.

$\square$ Действительно, имеем:

$$\frac{\left|D^2_{x_i x_j} u_m(P) - D^2_{x_i x_j} u_m(Q)\right|}{\rho^\alpha(P,Q)} \leqslant K.$$

Положим в этом неравенстве $m = m''$ и устремим $m'' \to +\infty$. В результате получим, что

$$\frac{\left|D^2_{x_i x_j} u(P) - D^2_{x_i x_j} u(Q)\right|}{\rho^\alpha(P,Q)} \leqslant K. \quad \boxtimes$$

Итак, $u(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{D})$.

Шаг 5. Осталось доказать, что $\{u_m\}$ сходится по норме к $u(x,t)$. Заметим, что справедливо неравенство:

$$|u_m - u|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} \leqslant \\ \leqslant |u_{m''} - u|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} + |u_m - u_{m''}|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D}, \quad (1.15)$$

а поскольку в силу фундаментальности $\{u_m\}$

$$|u_m - u_{m''}|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} \to +0 \quad \text{при} \quad m, m'' \to +\infty, \quad (1.16)$$

то достаточно доказать, что

$$|u_{m''} - u|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} \to +0 \quad \text{при} \quad m'' \to +\infty. \quad (1.17)$$

В силу фундаментальности $\{u_m\}$ для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие достаточно большие m'' и k'', что

$$\left[D^2_{x_i x_j} u_{m''} - D^2_{x_i x_j} u_{k''}\right]_{\alpha/2,\alpha;D} \leqslant \varepsilon. \quad (1.18)$$

Отсюда получаем, что для любых $P, Q \in \overline{D}$ имеет место неравенство:

$$\frac{1}{\rho^\alpha(P,Q)}\Big|D^2_{x_i x_j} u_{m''}(P) - D^2_{x_i x_j} u_{k''}(P) - \\ - D^2_{x_i x_j} u_{m''}(Q) + D^2_{x_i x_j} u_{k''}(Q)\Big| \leqslant \varepsilon. \quad (1.19)$$

Устремим в этом неравенстве $k'' \to +\infty$:

$$\frac{1}{\rho^\alpha(P,Q)}\left|D^2_{x_ix_j}u_{m''}(P) - D^2_{x_ix_j}u(P) - D^2_{x_ix_j}u_{m''}(Q) + D^2_{x_ix_j}u(Q)\right| \leqslant \varepsilon. \tag{1.20}$$

Взяв supremum от обеих частей этого неравенства, где $P, Q \in \overline{D}$, $P \neq Q$, в результате получим, что

$$\left[D^2_{x_ix_j}u_{m''} - D^2_{x_ix_j}u\right]_{\alpha/2,\alpha;D} \leqslant \varepsilon \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left[D^2_{x_ix_j}u_{m''} - D^2_{x_ix_j}u\right]_{\alpha/2,\alpha;D} \to +0 \tag{1.21}$$

при $m'' \to +\infty$. Аналогичным образом можно рассмотреть все слагаемые в выражении (1.17) и доказать его справедливость.

Теорема доказана.

Справедлива следующая важная

Лемма 1. *Если* $\{u_m(x,t)\} \subset \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{D})$, $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$ — *ограниченная область, причем*

$$|u_m|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} \leqslant M < +\infty, \tag{1.22}$$

то существует такая подпоследовательность $\{u_{m_n}(x,t)\} \subset \subset \{u_m(x,t)\}$, *что*

$$u_{m_n}(x,t) \to u(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{D}) \quad \textit{сильно в} \quad \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(\overline{D}) \tag{1.23}$$

при $m_n \to +\infty$ *и выполнено неравенство*:

$$|u|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} \leqslant M. \tag{1.24}$$

Доказательство. *Шаг 1.* Имеет место непрерывное вложение $\mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{D}) \subset \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(\overline{D})$. Тогда последовательность $\{f_m(x,t)\} \subset \subset \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(\overline{D})$ и в силу (1.22) справедливо неравенство:

$$|u_m|_{2,1;D} \leqslant M < +\infty \quad \text{для всех} \quad m \in \mathbb{N}, \tag{1.25}$$

где символом $|\cdot|_{2,1;D}$ обозначена норма в банаховом пространстве $\mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(\overline{D})$. Значит, последовательность $\{u_m(x,t)\}$ равномерно ограниченна в $\mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(\overline{D})$.

Шаг 2. Символом D^k_x обозначим произвольную частную производную порядка $k \in \mathbb{N}$ по переменной $x = (x_1, \ldots, x_N)$, а символом D^0_x — единичный оператор. Тогда справедливы следующие соотношения:

$$D^k_x u_m(x'', t'') - D^k_x u_m(x', t') = \int\limits_0^1 \frac{d}{ds} D^k_x u_m(x_s, t_s)\, ds, \tag{1.26}$$

$$x_s = sx'' + (1-s)x', \quad t_s = st'' + (1-s)t',$$

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{ds} D_x^k u_m(x_s, t_s) = \\
&\qquad = \sum_{l=1}^{N} D_{x_{sl}} D_x^k u_m(x_s, t_s)[x_l'' - x_l'] + D_t D_x^k u_m(x_s, t_s)[t'' - t'] = \\
&\qquad = (D_x D_x^k u_m(x_s, t_s), x'' - x') + D_t D_x^k u_m(x_s, t_s)[t'' - t']. \quad (1.27)
\end{aligned}$$

С одной стороны, из (1.25) и (1.27) получаем неравенство:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{d}{ds} D_x^k u_m(x_s, t_s)\right| &\leqslant (N+1)|u_m|_{2,1;D}\left[|x'' - x'| + |t'' - t'|\right] \leqslant \\
&\leqslant (N+1)M\left[|x'' - x'| + |t'' - t'|\right], \quad (1.28)
\end{aligned}$$

а отсюда и из (1.26) — оценку:

$$\left|D_x^k u_m(x'', t'') - D_x^k u_m(x', t')\right| \leqslant (N+1)M\left[|x'' - x'| + |t'' - t'|\right] \quad (1.29)$$

при $k = 0, 1$. С другой стороны, в силу (1.22) имеем:

$$\left|D_x^2 u_m(x'', t'') - D_x^2 u_m(x', t')\right| \leqslant M\left[|x'' - x'| + |t'' - t'|^{1/2}\right]^{\alpha}, \quad (1.30)$$

$$|D_t u_m(x'', t'') - D_t u_m(x', t')| \leqslant M\left[|x'' - x'| + |t'' - t'|^{1/2}\right]^{\alpha}. \quad (1.31)$$

Таким образом, из (1.29)–(1.31) следует, что последовательность $\{u_m(x,t)\}$ равностепенно непрерывна в $\mathbb{C}_{x,t}^{(2,1)}(\overline{D})$. Значит, отсюда и из результата шага 1 в силу теоремы Арцела получаем, что $\{u_m(x,t)\}$ предкомпактна в $\mathbb{C}_{x,t}^{(2,1)}(\overline{D})$. Следовательно, найдется такая подпоследовательность $\{u_{m_n}(x,t)\} \subset \{u_m(x,t)\}$, что будет выполнено предельное свойство:

$$u_{m_n}(x,t) \to u(x,t) \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{C}_{x,t}^{(2,1)}(\overline{D}) \quad (1.32)$$

при $m_n \to +\infty$. В частности, из (1.32) следует, что

$$|u_{m_n}|_{2,1;D} \to |u|_{2,1;D} \quad \text{при} \quad m_n \to +\infty. \quad (1.33)$$

Шаг 3. В силу (1.22) справедливо следующее неравенство:

$$\begin{aligned}
&\frac{\left|D_x^2 u_{m_n}(x'', t'') - D_x^2 u_{m_n}(x', t')\right|}{\rho^{\alpha}(z', z'')} + \\
&\qquad + \frac{|D_t u_{m_n}(x'', t'') - D_t u_{m_n}(x', t')|}{\rho^{\alpha}(z', z'')} \leqslant M < +\infty \quad (1.34)
\end{aligned}$$

где $z'' = (x'', t'')$, $z' = (x', t')$. Переходя к пределу при $m_n \to +\infty$ в неравенстве (1.34), получим неравенство:

$$\frac{\left|D_x^2 u(x'', t'') - D_x^2 u(x', t')\right|}{\rho^\alpha(z', z'')} + \\ + \frac{|D_t u(x'', t'') - D_t u(x', t')|}{\rho^\alpha(z', z'')} \leqslant M < +\infty, \quad (1.35)$$

из которого с учетом результата шага 2 следует вывод о том, что

$$u(x, t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2, 2+\alpha}(\overline{D}).$$

Таким образом, из определения полунормы $[\cdot]_{1+\alpha/2,2+\alpha;D}$ и предельного свойства (1.33) можно доказать неравенство:

$$|u|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} \leqslant M. \quad (1.36)$$

□ Действительно, в силу (1.22) справедливо следующее неравенство:

$$|u_{m_n}|_{2,1;D} + \frac{|D_t u_{m_n}(x'', t'') - D_t u_{m_n}(x', t')|}{\rho^\alpha(z', z'')} + \\ + \sum_{i,j=1,1}^{N,N} \frac{\left|D^2_{x_i x_j} u_{m_n}(x'', t'') - D^2_{x_i x_j} u_{m_n}(x', t')\right|}{\rho^\alpha(z', z'')} \leqslant \\ \leqslant |u_{m_n}|_{2,1;D} + [u_{m_n}]_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} = |u_{m_n}|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} \leqslant M, \quad (1.37)$$

из которого предельным переходом при $m_n \to +\infty$ получим неравенство:

$$|u|_{2,1;D} + \frac{|D_t u(x'', t'') - D_t u(x', t')|}{\rho^\alpha(z', z'')} + \\ + \sum_{i,j=1,1}^{N,N} \frac{\left|D^2_{x_i x_j} u(x'', t'') - D^2_{x_i x_j} u(x', t')\right|}{\rho^\alpha(z', z'')} \leqslant M. \quad (1.38)$$

Вычисляя suprеmum по $z'', z' \in D$ при $z' \neq z''$ от обеих частей (1.38), получаем неравенство (1.36). ⊠

Л е м м а д о к а з а н а.

Справедливы следующие неравенства:

$$[uv]_{\alpha/2,\alpha;D} \leqslant |u|_{0;D}[v]_{\alpha/2,\alpha;D} + |v|_{0;D}[u]_{\alpha/2,\alpha;D}, \quad (1.39)$$

$$|uv|_{\alpha/2,\alpha;D} \leqslant |u|_{\alpha/2,\alpha;D}|v|_{\alpha/2,\alpha;D} \quad (1.40)$$

для всех $u, v \in \mathbb{C}^{\alpha/2,\alpha}(\overline{D})$.

□ Действительно, справедливо следующее элементарное неравенство:

$$|u(z_1)v(z_1) - u(z_2)v(z_2)| \leqslant |u(z_1)||v(z_1) - v(z_2)| + |v(z_2)||u(z_1) - u(z_2)|,$$

из которого, разделив обе части на $\rho^\alpha(z_1, z_2)$ и взяв supremum по $z_1, z_2 \in D$, мы получим следующее неравенство:

$$[uv]_{\alpha/2,\alpha;D} \leqslant |u|_{0;D}[v]_{\alpha/2,\alpha;D} + |v|_{0;D}[u]_{\alpha/2,\alpha;D}. \qquad (1.41)$$

Заметим, что справедливо следующее неравенство:

$$\begin{aligned} |uv|_{\alpha/2,\alpha;D} &= |uv|_{0;D} + [uv]_{\alpha/2,\alpha;D} \leqslant \\ &\leqslant |u|_{0;D}|v|_{0;D} + |u|_{0;D}[v]_{\alpha/2,\alpha;D} + |v|_{0;D}[u]_{\alpha/2,\alpha;D} \leqslant \\ \leqslant |u|_{0;D}|v|_{0;D} &+ |u|_{0;D}[v]_{\alpha/2,\alpha;D} + |v|_{0;D}[u]_{\alpha/2,\alpha;D} + [u]_{\alpha/2,\alpha;D}[v]_{\alpha/2,\alpha;D} = \\ &= |u|_{\alpha/2,\alpha;D}|v|_{\alpha/2,\alpha;D}. \quad \boxtimes \qquad (1.42) \end{aligned}$$

Имеет место следующее важное утверждение:

Л е м м а 2. *Для всякой функции* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{D})$ *и для всех* $a_{ij}(x,t), c(x,t) \in \mathbb{C}^{\alpha/2,\alpha}(\overline{D})$ *найдется такая постоянная* $M > 0$, *не зависящая от* u, *что имеет место следующее неравенство*:

$$|Lu|_{\alpha/2,\alpha;D} \leqslant M|u|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D}, \qquad (1.43)$$

$$Lu(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} + c(x,t)u(x,t) - \frac{\partial u(x,t)}{\partial t},$$

где $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$ *— это ограниченная область.*

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Шаг 1. Заметим, что в силу неравенства (1.42) имеет место оценка:

$$\left|a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{\alpha/2,\alpha;D} \leqslant |a_{ij}|_{\alpha/2,\alpha;D}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{\alpha/2,\alpha;D} \leqslant M_1|u|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D}. \qquad (1.44)$$

Шаг 2. В силу неравенства (1.42) и формулы Тейлора имеем:

$$\begin{aligned} |cu|_{\alpha/2,\alpha;D} &\leqslant |c|_{\alpha/2,\alpha;D}|u|_{\alpha/2,\alpha;D} \leqslant \\ &\leqslant M_2\left[|u_t|_{0;D} + \sum_{i=1}^N |u_{x_i}|_{0;D}\right] \leqslant M_2|u|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D}. \qquad (1.45) \end{aligned}$$

Шаг 3. Справедливо неравенство:

$$|u_t|_{\alpha/2,\alpha;D} \leqslant |u|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D}. \qquad (1.46)$$

Из неравенств (1.44)–(1.46) следует оценка (1.43).

Л е м м а д о к а з а н а.

§ 2. Эквивалентные полунормы

Отметим, что величины $[u]_{1+\alpha/2;2+\alpha;D}$ и $[u]_{\alpha/2,\alpha;D}$ являются *полунормами*, т. е. функциями для которых выполнены все свойства нормы за исключением того свойства, что

$$\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0,$$

поскольку, например, из равенства $[u]_{\alpha/2,\alpha;D} = 0$ следует, что $u = const$. С целью получения априорной оценки Шаудера в $\mathbb{R}^{N+1}$ по методу Сафонова определим эквивалентную полунорму $[u]'_{1+\alpha/2;2+\alpha;D}$.

Итак, пусть $\mathcal{P}_2$ — это множество всех полиномов не выше второго порядка вида:

$$\mathcal{P}_2 \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \alpha t + \sum_{i=1}^{N} \alpha^i x_i + \sum_{i,j=1,1}^{N,N} \alpha^{ij} x_i x_j + \beta \right\} \tag{2.1}$$

с вещественными коэффициентами относительно переменных $t, x_1, ..., x_N$. Пусть

$$B_\rho(x) = \left\{ y \in \mathbb{R}^N : |x - y| < \rho \right\}, \quad Q_\rho(z) = (t - \rho^2, t) \times B_\rho(x) \subset \mathbb{R}^{N+1}$$

при $z = (t, x) \in \mathbb{R}^{N+1}$. Определим следующую полунорму:

$$[u]'_{1+\alpha/2,2+\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{z=(x,t)\in\mathbb{R}^{N+1}} \sup_{\rho>0} \frac{1}{\rho^{2+\alpha}} \inf_{p(z)\in\mathcal{P}_2} |u(z) - p(z)|_{0;Q_\rho(z)}. \tag{2.2}$$

Справедлива следующая

Теорема 2. *Существуют константы* $c_1 = c_1(N) > 0$ *и* $c_2 = c_2(N) > 0$ *такие, что для любой функции* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\mathbb{R}^{N+1})$ *справедливы оценки*: [1])

$$[u]'_{1+\alpha/2,2+\alpha} \leqslant c_1 [u]_{1+\alpha/2,2+\alpha}, \quad [u]_{1+\alpha/2,2+\alpha} \leqslant c_2 [u]'_{1+\alpha/2,2+\alpha}. \tag{2.3}$$

Доказательство.

Шаг 1. Сначала докажем первое неравенство в (2.3). С одной стороны, согласно формуле Тейлора для любых точек $z = (t, x)$, $z_0 = (t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{N+1}$ имеет место следующее равенство:

$$u(z) = u(t_0, x) + (t - t_0) u_t(\vartheta, x) =$$

$$= u(z_0) + (t - t_0) u_t(\vartheta, x) + \sum_{i=1}^{N} u_{x_i}(z_0)(x_i - x_{0i}) +$$

[1]) В случае $D = \mathbb{R}^{N+1}$ мы индекс D во всех нормах и полунормах не пишем, а пишем, например, $|\cdot|_{1+\alpha/2,2+\alpha}$ вместо $|\cdot|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D}$.

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1,1}^{N,N} u_{x_i x_j}(t_0,\xi)(x_i-x_{0i})(x_j-x_{0j}), \quad (2.4)$$

где $\vartheta \in [t,t_0]$ и $\xi \in [x,x_0]$. С другой стороны, для полинома Тейлора по определению имеем:

$$T_{z_0}u(z) \stackrel{\text{def}}{=} u(z_0)+(t-t_0)u_t(z_0)+ \\ +\sum_{i=1}^{N} u_{x_i}(z_0)(x_i-x_{0i})+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1,1}^{N,N} u_{x_i x_j}(z_0)(x_i-x_{0i})(x_j-x_{0j}). \quad (2.5)$$

Пусть $\rho(z,z_0)\leqslant\rho$, где

$$\rho(z,z_0)=|x-x_0|+|t-t_0|^{1/2}.$$

Тогда, в частности, получим:

$$|t-t_0|\leqslant\rho^2, \quad |x-x_0|\leqslant\rho.$$

Из (2.4) и (2.5) получим следующую оценку:

$$|u(z)-T_{z_0}u(z)|\leqslant|t-t_0|\,|u_t(\vartheta,x)-u_t(z_0)|+ \\ +\frac{1}{2}\sum_{i,j=1,1}^{N,N}\left|u_{x_i x_j}(z_0)-u_{x_i x_j}(t_0,\xi)\right||x_i-x_{0i}||x_j-x_{0j}|\leqslant \\ \leqslant\rho^2\,|u_t(\vartheta,x)-u_t(z_0)|+\rho^2\frac{1}{2}\sum_{i,j=1,1}^{N,N}\left|u_{x_i x_j}(z_0)-u_{x_i x_j}(t_0,\xi)\right|\leqslant \\ \leqslant c_1\rho^2[u]_{1+\alpha/2,2+\alpha}\left(\rho^\alpha\left((\vartheta,x),z_0\right)+\rho^\alpha\left((t_0,\xi),z_0\right)\right)\leqslant \\ \leqslant c_1\rho^{2+\alpha}[u]_{1+\alpha/2,2+\alpha}. \quad (2.6)$$

Учитывая (2.6) получаем оценку:

$$\inf_{p(z)\in\mathcal{P}_2}|u(z)-p(z)|\leqslant c_1\rho^{2+\alpha}[u]_{1+\alpha/2,2+\alpha}\Rightarrow \\ \Rightarrow\sup_{\rho>0}\frac{1}{\rho^{2+\alpha}}\inf_{p(z)\in\mathcal{P}_2}|u(z)-p(z)|\leqslant c_1[u]_{1+\alpha/2,2+\alpha}\Rightarrow \\ \Rightarrow\sup_{z\in\mathbb{R}^{N+1}}\sup_{\rho>0}\frac{1}{\rho^{2+\alpha}}\inf_{p(z)\in\mathcal{P}_2}|u(z)-p(z)|\leqslant c_1[u]_{1+\alpha/2,2+\alpha}\Rightarrow \\ \Rightarrow[u]'_{1+\alpha/2,2+\alpha}\leqslant c_1[u]_{1+\alpha/2,2+\alpha}. \quad (2.7)$$

Шаг 2. Докажем [1] второе неравенство в (2.3). Обозначим через D один из следующих операторов:

$$D_t := \frac{\partial}{\partial t}, \quad D^2_{x_i x_j} := \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Стандартным образом сопоставим этим операторам следующие конечно–разностные операторы σ_h при $h > 0$:

$$u(t,x) \to \frac{1}{h^2}\left[u(t,x) - u(t-h^2,x)\right], \tag{2.8}$$

$$u(t,x) \to \frac{1}{h^2}\Big[u(t,x+he_i+he_j) - \\ - u(t,x+he_i) - u(t,x+he_j) + u(t,x)\Big]. \tag{2.9}$$

Кроме того, введем операторы $\sigma^{'}_h$, следующего вида:

$$u(t,x) \to u_t(t-h^2,x), \tag{2.10}$$

$$u(t,x) \to \frac{1}{2}\Big[u_{x_i x_i}(t,x+he_i+he_j) + u_{x_j x_j}(t,x+he_i+he_j) + \\ + 2u_{x_i x_j}(t,x+he_i+he_j) - u_{x_i x_i}(t,x+he_i) - u_{x_j x_j}(t,x+he_j)\Big] \tag{2.11}$$

Используя формулу Тейлора в квадратных скобках в выражениях (2.8) и (2.9) получим следующее равенство:

$$\sigma_h u(z) = \sigma^{'}_{h'} u(z) \quad \text{при} \quad h^{'} = h^{'}(z) \leqslant h. \tag{2.12}$$

□ Действительно, докажем сначала равенство (2.12) для $D = D_t$. Справедливо равенство:

$$u(t,x) = u(t-h^2,x) + u_t(t-h^{'2},x)h^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \sigma_h u(z) := \frac{1}{h^2}\left[u(t,x) - u(t-h^2,x)\right] = \\ = u_t(t-h^{'2},x) =: \sigma^{'}_{h'} u(z) \quad \text{при некотором} \quad 0 \leqslant h^{'}(z) \leqslant h. \tag{2.13}$$

Теперь мы докажем равенство (2.12) для случая $D = D^2_{x_i x_j}$. Справедливы следующие равенства в силу формулы Тейлора:

[1] Эта часть доказательства в силу его сложности доказывается в курсе в том случае, если имеется дополнительное время.

$$u(t, x + he_i + he_j) = u(t, x) + u_{x_i}(t, x)h + u_{x_j}(t, x)h+$$
$$+ \frac{1}{2}u_{x_i x_i}(t, x + h_1^{'}e_i + h_1^{'}e_j)h^2 + \frac{1}{2}u_{x_j x_j}(t, x + h_1^{'}e_i + h_1^{'}e_j)h^2+$$
$$+ u_{x_i x_j}(t, x + h_1^{'}e_i + h_1^{'}e_j)h^2, \quad (2.14)$$

$$u(t + he_i, x) = u(t, x) + u_{x_i}(t, x)h + \frac{1}{2}u_{x_i x_i}(t + h_2^{'}e_i, x)h^2, \qquad (2.15)$$

$$u(t + he_j, x) = u(t, x) + u_{x_j}(t, x)h + \frac{1}{2}u_{x_j x_j}(t + h_3^{'}e_j, x)h^2 \qquad (2.16)$$

при некотором $h_j^{'} \in [0, h]$ при $j = 1, 2, 3$. В силу равенств (2.14)–(2.16) получим следующее равенство:

$$f(h) :=$$
$$= \frac{1}{h^2}\Big[u(t, x + he_i + he_j) - u(t, x + he_i) - u(t, x + he_j) + u(t, x)\Big] =$$
$$= \frac{1}{2}\Big[u_{x_i x_i}(t, x + h^{'}e_i + h^{'}e_j) + u_{x_j x_j}(t, x + h^{'}e_i + h^{'}e_j)+$$
$$+ 2u_{x_i x_j}(t, x + h^{'}e_i + h^{'}e_j) - u_{x_i x_i}(t + h^{'}e_i, x) - u_{x_j x_j}(t + h^{'}e_j, x)\Big] =$$
$$=: \sigma_{h^{'}}^{'}u(z), \quad h^{'} \in [0, h], \quad (2.17)$$

где использовалось разложение Тейлора функции $f(h)$ по степеням h с учётом формул (2.14)–(2.16). ☒

В частности, для любого $p(z) \in \mathcal{P}_2$ выражение $\sigma_h p(z)$ — это константа, не зависящая от h и z.

☐ Действительно, рассмотрим сначала $D = D_t$. Тогда

$$\sigma_h p(z) = \sigma_{h^{'}}^{'} p(z) = \alpha, \quad p(z) := \alpha t + \sum_{i=1}^{N} \alpha^i x_i + \sum_{i,j=1,1}^{N,N} \alpha^{ij} x_i x_j + \beta.$$

Рассмотрим случай оператора $D = D_{x_i x_j}^2$:

$$\sigma_h p(z) = \sigma_{h^{'}}^{'} p(z) = \frac{1}{2}\left[\alpha^{ii} + \alpha^{jj} + 2\alpha^{ij} - \alpha^{ii} - \alpha^{jj}\right] = \alpha^{ij}. \quad ☒$$

Если $u(z) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2, 2+\alpha}(\mathbb{R}^{N+1})$, то справедлива оценка:

$$|\sigma_h u(z) - Du(z)| = \left|\sigma_{h^{'}}^{'} u(z) - Du(z)\right| \leqslant c_2 h^\alpha [u]_{1+\alpha/2, 2+\alpha}, \qquad (2.18)$$

где c_2 — это абсолютная постоянная.

☐ Действительно, в случае $D = D_t$ получим:

$$\left|\sigma_{h^{'}}^{'} u(z) - u_t(z)\right| = |u_t(t - h^{'2}, x) - u_t(t, x)| \leqslant$$

$$\leqslant h'^{\alpha}[u_t]_{\alpha/2,\alpha} \leqslant h^{\alpha}[u]_{1+\alpha/2,2+\alpha},$$

поскольку [1])

$$\rho((t,x);(t-h'^2,x)) = h' \quad \text{и} \quad h' \in [0,h].$$

В случае $D = D^2_{x_i x_j}$ имеет место оценка:

$$\begin{gathered}
\left|\sigma'_{h'} u(z) - u_{x_i x_j}(z)\right| \leqslant \frac{1}{2}\left|u_{x_i x_i}(t, x+h'e_i+h'e_j) - u_{x_i x_i}(t, x+h'e_i)\right| + \\
+ \frac{1}{2}\left|u_{x_j x_j}(t, x+h'e_i+h'e_j) - u_{x_j x_j}(t, x+h'e_j)\right| + \\
+ \left|u_{x_i x_j}(t, x+h'e_i+h'e_j) - u_{x_i x_j}(t,x)\right| \leqslant \\
\leqslant [D^2_{x_i x_i} u]_{\alpha/2,\alpha}\frac{1}{2}h'^{\alpha} + [D^2_{x_j x_j} u]_{\alpha/2,\alpha}\frac{1}{2}h'^{\alpha} + [D^2_{x_i x_j} u]_{\alpha/2,\alpha} 2^{\alpha/2} h'^{\alpha} \leqslant \\
\leqslant c_2 h^{\alpha}[u]_{1+\alpha/2,2+\alpha}. \quad \boxtimes
\end{gathered}$$

Шаг 3. Для двух значений z_1, z_2 рассмотрим $\rho = \rho(z_1, z_2)$ и определим $h = \varepsilon\rho$, где константу $\varepsilon \in (0,1)$ выберем позже. Без ограничения общности будем считать, что $t_1 \leqslant t_2$. Тогда все точки

$$(t_n - h^2, t_n), \quad (t_n, x_n + he_i + he_j) \in Q_{3\rho}(z_2), \quad n = 1,2.$$

Следовательно, для любого $p(z) \in \mathcal{P}_2$ имеем:

$$\begin{gathered}
|Du(z_1) - Du(z_2)| \leqslant |Du(z_1) - \sigma_h u(z_1)| + |Du(z_2) - \sigma_h u(z_2)| + \\
+ |\sigma_h(u-p)(z_1) - \sigma_h(u-p)(z_2)| \leqslant 2c_2 h^{\alpha}[u]_{1+\alpha/2,2+\alpha} + \\
+ |\sigma_h(u-p)(z_1)| + |\sigma_h(u-p)(z_2)|,
\end{gathered}$$

причем

$$|\sigma_h(u-p)(z_i)| \leqslant \frac{4}{h^2}|u-p|_{0;Q_{3\rho}(z_2)}.$$

□ Действительно, имеем в случае $D = D_t$ оценку:

$$\begin{gathered}
|\sigma_h u(z_i) - \sigma_h p(z_i)| \leqslant \\
\leqslant \frac{1}{h^2}|u(z_i) - p(z_i)| + \frac{1}{h^2}\left|u(t_i - h^2, x_i) - p(t_i - h^2, x_i)\right| \leqslant \\
\leqslant \frac{2}{h^2}|u-p|_{0;Q_{3\rho}(z_2)}.
\end{gathered}$$

[1]) Напомним, что параболическое расстояние равно $\rho(z_1,z_2) = |t_1 - t_2|^{1/2} + |x_1 - x_2|$.

Аналогичным образом получаем в случае $D = D^2_{x_i x_j}$ неравенство:

$$|\sigma_h u(z_i) - \sigma_h p(z_i)| \leqslant \frac{4}{h^2}\,|u-p|_{0;Q_{3\rho}(z_2)}\,. \quad \boxtimes$$

Заметим, что согласно определению полунормы $[\cdot]'_{1+\alpha/2,2+\alpha}$ имеет место неравенство:

$$[u]'_{1+\alpha/2,2+\alpha} \geqslant \frac{1}{3^{2+\alpha}}\frac{1}{\rho^{2+\alpha}} \inf_{p(z)\in P_2(z)} |u(z)-p(z)|_{0;Q_{3\rho}(z)}\,,$$

из которого следует неравенство:

$$\frac{4}{h^2}|u-p|_{0;Q_{3\rho}(z_2)} \leqslant c_3\varepsilon^{-2}\rho^{\alpha}[u]'_{1+\alpha/2,2+\alpha},$$

поскольку $h = \varepsilon\rho$.

Шаг 4. Итак, получаем:

$$|Du(z_1) - Du(z_2)| \leqslant 2c_2\varepsilon^{\alpha}\rho^{\alpha}[u]_{1+\alpha/2,2+\alpha} + c_3\varepsilon^{-2}\rho^{\alpha}[u]'_{1+\alpha/2,2+\alpha}.$$

Отсюда, разделив обе части на ρ^{α} и взяв supremum от обеих частей неравенства, приходим к следующему неравенству:

$$[u]_{1+\alpha/2,2+\alpha} \leqslant 2c_2\varepsilon^{\alpha}[u]_{1+\alpha/2,2+\alpha} + c_3\varepsilon^{-2}[u]'_{1+\alpha/2,2+\alpha}.$$

Осталось выбрать величину $\varepsilon \in (0,1)$ настолько малой, чтобы

$$2c_2\varepsilon^{\alpha} \leqslant \frac{1}{2}$$

и получить требуемое неравенство.

Теорема доказана.

§ 3. Литературные указания

Материал для лекции взят из работ [4], [14].

Лекция 16

ОЦЕНКИ БЕРНШТЕЙНА И ШАУДЕРА

§ 1. Оценки Бернштейна

В данном параграфе на основе метода Бернштейна получены важные оценки. Справедливо следующее утверждение:

Теорема 1. *Пусть* $R > 0$ *и* $Q_R = B_R \times (-R^2, 0)$, $B_R = \{x \in \in \mathbb{R}^N : |x| < R\}$. *Пусть функция* $u(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{Q}_R) \cap \mathbb{C}^\infty(Q_R)$ *и удовлетворяет уравнению*:

$$\Delta u - u_t = 0 \quad \textit{в} \quad Q_R.$$

Тогда при любом мультииндексе $\alpha \in \mathbb{N}$ *и целом* $n \geqslant 0$ *справедлива оценка*:

$$|D_t^n D_x^\alpha u(0)| \leqslant \frac{M^{|\alpha|+2n}(|\alpha|+2n)^{|\alpha|+2n}}{R^{|\alpha|+2n}} |u|_{0;Q_R}. \tag{1.1}$$

Доказательство.

Шаг 1. Уравнение $\Delta u - u_t = 0$ инвариантно при замене $u(x,t)$ на $u(Rx, R^2t.)$ Следовательно, достаточно доказать (1.1) только для $R = 1$, а затем сделать параболическое растяжение, т. е. замену переменных:

$$(x,t) \to (Rx, R^2t).$$

Шаг 2. Применим метод Бернштейна. Возьмем функцию $\varphi(x,t) \in \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$ с носителем в $B_R \times (-R^2, R^2)$. Предположим, что $\varphi(0,0) = 1$ и определим функцию:

$$w(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi^2(x,t)|D_x u|^2 + \mu|u|^2, \quad \mu > 0, \tag{1.2}$$

причем выбор постоянной μ будет сделан ниже. Поскольку

$$\Delta u - u_t = 0, \quad \Delta u_{x_i} - u_{x_i t} = 0,$$

то имеет место оценка снизу:

$$\Delta w - w_t = |D_x u|^2 \Delta(\varphi^2) + \varphi^2 \left[2u_{x_i} \Delta u_{x_i} + 2 \sum_{i,j=1,1}^{N,N} u^2_{x_i x_j} \right] +$$

$$+ 8\varphi\varphi_{x_i}u_{x_j}u_{x_ix_j} + 2\mu|D_xu|^2 + 2\mu u\Delta u - 2\varphi\varphi_t|D_xu|^2 - 2\varphi^2 u_{x_i}u_{x_it} - \\ - 2\mu u u_t = |D_xu|^2[2\mu + \Delta(\varphi^2) - 2\varphi\varphi_t] + \\ + 2\varphi^2\sum_{i,j=1,1}^{N,N} u^2_{x_ix_j} + 8[\varphi_{x_i}u_{x_j}][\varphi u_{x_ix_j}] \geqslant \\ \geqslant |D_xu|^2\left[2\mu + \Delta(\varphi^2) - 8|D_x\varphi|^2 - 2\varphi\varphi_t\right], \quad (1.3)$$

где использовались следующие неравенства:

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}b_{ij} \leqslant \left(\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a^2_{ij}\right)^{1/2}\left(\sum_{i,j=1,1}^{N,N} b^2_{ij}\right)^{1/2}, \quad a_{ij}, b_{ij} \geqslant 0,$$

$$\left(\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a^2_{ij}\right)^{1/2}\left(\sum_{i,j=1,1}^{N,N} b^2_{ij}\right)^{1/2} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a^2_{ij} + \frac{1}{2\varepsilon}\sum_{i,j=1,1}^{N,N} b^2_{ij}, \quad \varepsilon > 0.$$

Положив

$$a_{ij} = \varphi_{x_i}u_{x_j}, \quad b_{ij} = -\varphi u_{x_ix_j}, \quad \varepsilon = 2,$$

получим следующую оценку:

$$2\varphi^2\sum_{i,j=1,1}^{N,N} u^2_{x_ix_j} + 8\varphi_{x_i}u_{x_j}\varphi u_{x_ix_j} \geqslant -8|D_xu|^2|D_x\varphi|^2.$$

Шаг 3. Выбирая $\mu > 0$ достаточно большим, из неравенства (1.3) получим неравенство:

$$\Delta w - w_t \geqslant 0. \quad (1.4)$$

Согласно принципу максимума справедливы следующие неравенства:

$$|D_xu|^2(0) \leqslant \sup_{(x,t)\in Q_1} w(x,t) \leqslant \sup_{(x,t)\in\partial' Q_1} w(x,t) = \mu \sup_{(x,t)\in\partial' Q_1} |u|^2. \quad (1.5)$$

Отсюда получаем (1.1) для $|\alpha| = 1$, $n = 0$ и $R = 1$. Выполним замену переменных:

$$(x,t) \to (y,\tau) = (Rx, R^2t) \Rightarrow \\ \Rightarrow |D_yu(0)|^2 \leqslant \frac{\mu}{R^2}\sup_{(y,\tau)\in\partial' Q_R} |u(y,\tau)|^2 \leqslant \frac{\mu}{R^2}|u|^2_{0;Q_R}. \quad (1.6)$$

Отметим, что выбор начала координат в оценке Бернштейна несущественен. Поэтому справедлива следующая оценка:

$$|D_yu(z_0)| \leqslant \frac{M(N)}{R}|u|_{0;z_0+Q_R}. \quad (1.7)$$

Шаг 4. Для доказательства утверждения теоремы при $|\alpha| = 2$ и $n = 0$ заметим, что

$$\Delta D_j u - (D_j u)_t = 0.$$

Заменив R на $R/2$ в силу неравенства (1.7) имеем:

$$|D_i D_j u(0)| \leqslant \frac{M(N)}{R/2} |D_i u|_{0;Q_{R/2}} \leqslant \frac{M(N)}{R/2} \frac{M(N)}{R/2} |u|_{0;Q_R}.$$

Аналогичные рассуждения справедливы при любом $|\alpha|$ так, что неравенство (1.1) доказано при $n = 0$. При $n \geqslant 1$ достаточно заметить, что

$$\Delta(D_t u) - (D_t u)_t = 0.$$

Отсюда следует (1.1) для $n = 1$ и $|\alpha| = 1$. В общем случае при $n \geqslant 1$ и $|\alpha| \geqslant 1$ выполняется уравнение:

$$\Delta(D_x^\alpha D_t u) - (D_x^\alpha D_t u)_t = 0.$$

Теорема доказана.

Замечание. Выбор начала координат является несущественным. Поэтому при любом мультииндексе $\alpha \in \mathbb{N}$ и целом $n \geqslant 0$ справедлива оценка:

$$|D_t^n D_x^\alpha u(z)| \leqslant \frac{M^{|\alpha|+2n}(|\alpha| + 2n)^{|\alpha|+2n}}{R^{|\alpha|+2n}} |u|_{0;Q_R(z)}, \tag{1.8}$$

где $Q_R(z) = z + Q_R$. Более того, из оценки (1.8) следует оценка:

$$|D_t^n D_x^\alpha u(z)|_{0;Q_\rho(z_0)} \leqslant \frac{M^{|\alpha|+2n}(|\alpha| + 2n)^{|\alpha|+2n}}{R^{|\alpha|+2n}} |u|_{0;Q_{R+\rho}(z_0)}. \tag{1.9}$$

Теорема типа Лиувилля. *Решение* $u(x,t) \in \mathbb{C}_{x,t}^{(2,1)}(\mathbb{R}^{N+1})$ *уравнения*

$$\Delta u - u_t = 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^{N+1},$$

удовлетворяющая условию $|u(x,t)| \leqslant M_1$ $(M_1 > 0)$, *является постоянным*:

$$u(x,t) = const.$$

Доказательство.

В силу неравенства (1.8) и условия $|u(x,t)| \leqslant M$ мы получим два неравенства:

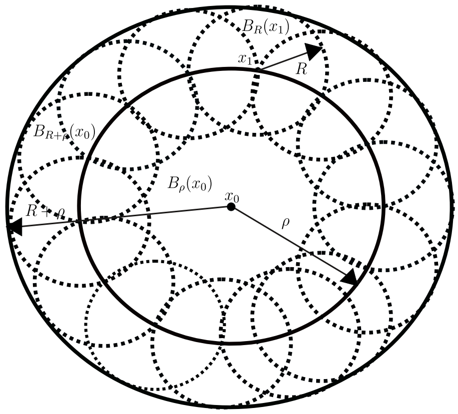
$$|D_t u(z)| \leqslant \frac{M_2}{R^2}, \quad |D_x^\alpha u(z)| \leqslant \frac{M_3}{R}, \quad |\alpha| = 1, \tag{1.10}$$

где постоянные $M_2 > 0$ и $M_3 > 0$ не зависят от $R > 0$. Устремив $R \to +\infty$ в неравенствах (1.10), получим следующие равенства:

$$|D_t u(z)| = 0, \quad |D_x^\alpha u(z)| = 0, \quad |\alpha| = 1 \Rightarrow u(z) = const$$

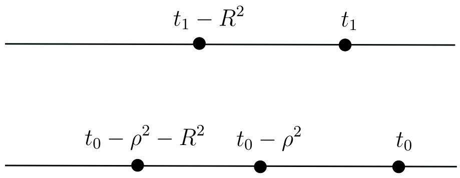
для всех $z = (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}$.

Теорема доказана.



$$\sup_{x_1\in B_\rho(x_0)} |u|_{0;B_R(x_1)} = |u|_{0;B_{\rho+R}(x_0)}$$

Рис. 36. К формуле (1.9) x переменная.



$$\sup_{t_1\in(t_0-\rho^2,t_0)} |u|_{0;(t_1-R^2,t_1)} = |u|_{0;(t_0-\rho^2-R^2,t_0)}$$

Рис. 37. К формуле (1.9) t переменная.

§ 2. Априорная оценка Шаудера в $\mathbb{R}^{N+1}$

В этом параграфе приведем доказательство основной априорной оценки в параболических пространствах Гельдера, доказанной оригинальным методом Сафоновым примерно в 1984 г. Пусть $\alpha \in (0,1)$.

Т е о р е м а 2. *Пусть* $u(x,t) \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$. *Если* $f = \Delta u - u_t$, *то существует константа* $M = M(N,\alpha) > 0$ *такая, что*

$$[u]_{1+\alpha/2,2+\alpha} \leqslant M[f]_{\alpha/2,\alpha}. \tag{2.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Шаг 1. Возьмем $z_0 = (x_0,t_0) \in \mathbb{R}^{N+1}$, $\rho > 0$ и константу $K \geqslant 1$, которую уточним ниже. Выберем также функцию $\varphi(z) \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$ такую, что

$$\varphi(z) = 1 \quad \text{при} \quad z = (x,t) \in Q_{(K+1)\rho}(z_0),$$

где напомним

$$Q_{(K+1)\rho}(z_0) := B_{(K+1)\rho}(x_0) \times (t_0 - (K+1)^2\rho^2, t_0).$$

Определим теперь следующую величину:

$$T_{z_0}u(z) \stackrel{\text{def}}{=} u(z_0) + (t-t_0)u_t(z_0) + \\ + u_{x_i}(z_0)(x_i - x_{0i}) + \frac{1}{2}u_{x_i x_j}(z_0)(x_i - x_{0i})(x_j - x_{0j}), \quad (2.2)$$

где $\rho(z, z_0) \leqslant \rho$ и поэтому, в частности, $|t - t_0| \leqslant \rho^2$ и $|x - x_0| \leqslant \rho$. Пусть

$$g(z) \stackrel{\text{def}}{=} \Delta\left(\varphi(z)T_{z_0}u(z)\right) - \left(\varphi(z)T_{z_0}u(z)\right)_t, \quad z = (x,t). \quad (2.3)$$

Справедливо следующее равенство:

$$g(z) = \Delta\left(T_{z_0}u(z)\right) - \left(T_{z_0}u(z)\right)_t = f(z_0) \quad (2.4)$$

при $z = (x,t) \in Q_{(K+1)\rho}(z_0)$.

□ Действительно, непосредственным вычислением с учетом определения (2.2) величины $T_{z_0}u(z)$ получим равенство:

$$\Delta\left(T_{z_0}u(z)\right) = \Delta u(z_0), \quad \left(T_{z_0}u(z)\right)_t = u_t(z_0) \Rightarrow \\ \Rightarrow \Delta\left(T_{z_0}u(z)\right) - \left(T_{z_0}u(z)\right)_t = \Delta u(z_0) - u_t(z_0) = f(z_0). \quad \boxtimes$$

Шаг 2. В силу того, что $u(x,t) \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$, то имеет место следующее равенство:

$$u(x,t) = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^N} G_0(t-s, x-y)f(y,s)\,dy\,ds = -G_0 * f, \quad (2.5)$$

$$f = \Delta u - u_t,$$

где

$$G_0(x,t) = \frac{\vartheta(t)}{(4\pi t)^{N/2}}\exp\left[-\frac{|x|^2}{4t}\right].$$

В силу (2.3) имеем:

$$\varphi(z)T_{z_0}u(z) = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^N} G_0(t-s, x-y)g(y,s)\,dy\,ds = -G_0 * g. \quad (2.6)$$

Поэтому при $z = (x,t) \in Q_{(K+1)\rho}(z_0)$ в силу (2.4) имеет место следующее равенство:

$$u(z) - T_{z_0}u(z) = u(z) - \varphi(z)T_{z_0}u(z) = G_0 * (g - f) = \\ = G_0 * \left[(f(z_0) - f(z))I_{Q_{(K+1)\rho}(z_0)}\right] + G_0 * \left[(g(z) - f(z))I_{Q^c_{(K+1)\rho}(z_0)}\right] =$$

$$=: r(z) + h(z), \quad (2.7)$$

где

$$I_D(z) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & \text{если} \quad z \in D; \\ 0, & \text{если} \quad z \notin D, \end{cases} \quad D^c := \mathbb{R}^N \backslash D.$$

Шаг 3. Заметим, что

$$h(z) = G_0 * [(g - f) I_{Q^c_{(K+1)\rho}(z_0)}] =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^N} G_0(t - s, x - y) \left[(g(y, s) - f(y, s)) I_{Q^c_{(K+1)\rho}(z_0)}(y, s) \right] dy\, ds. \quad (2.8)$$

При $z = (x, t) \in Q_{(K+1)\rho}(z_0)$ у подынтегрального выражения нет особенности: оно равно нулю при $(y, s) \in Q_{(K+1)\rho}(z_0)$. Особенность фундаментального решения $G(t - s, x - y)$ имеется при $t = s$ и $x = y$, а при $t > s$ и $x \neq y$ фундаментальное решение бесконечное число раз дифференцируемо по (x, t). Следовательно,

$$h(z) \in \mathbb{C}^\infty(Q_{(K+1)\rho}(z_0)), \quad (2.9)$$

$$\Delta h(z) - (h(z))_t = 0 \quad \text{при} \quad z = (x, t) \in Q_{(K+1)\rho}(z_0), \quad (2.10)$$

потому, что

$$\frac{\partial G_0(t - s, x - y)}{\partial t} = \Delta_x G_0(t - s, x - y) \quad \text{при} \quad t \neq s.$$

Шаг 4. Заметим, что для $z = (x, t) \in Q_\rho(z_0)$ в силу формулы Тейлора имеет место следующее неравенство:

$$|h_t(\vartheta, x) - h_t(z_0)| \leqslant \rho^2 \left| D_t^2 h \right|_{0; Q_\rho(z_0)} + \rho \left| D_x D_t h \right|_{0; Q_\rho(z_0)}. \quad (2.11)$$

Наконец, в силу (2.6) из предыдущей лекции и оценок Бернштейна (1.9) справедлива оценка:

$$|h(z) - T_{z_0} h(z)| \leqslant |t - t_0| \, |h_t(\vartheta, x) - h_t(z_0)| +$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} \left| h_{x_i x_j}(z_0) - h_{x_i x_j}(t_0, \xi) \right| |x_i - x_{0i}| |x_j - x_{0j}| \leqslant$$
$$\leqslant \rho^4 \left| D_t^2 h \right|_{0; Q_\rho(z_0)} + \rho^3 \left| D_x D_t h \right|_{0; Q_\rho(z_0)} +$$
$$+ \rho^3 \sum_{i,j,k=1,1,1}^{N,N,N} |D_i D_j D_k h(z)|_{0; Q_\rho(z_0)} \leqslant$$

$$\leqslant M\left(K^{-4}+K^{-3}\right)|h|_{0;Q_{(K+1)\rho}(z_0)} \leqslant MK^{-3}|h|_{0;Q_{(K+1)\rho}(z_0)}. \quad (2.12)$$

Шаг 5. Оценим функцию $r(z)$ из (2.7). Действительно,

$$\begin{aligned}|r(z)| &= \left|G_0 * \left[(f(z_0)-f(z))I_{Q_{(K+1)\rho}(z_0)}(z)\right]\right| = \\ &= \left|G_0 * \left[\left(\frac{f(z_0)-f(z)}{\rho^\alpha(z,z_0)}\right) I_{Q_{(K+1)\rho}(z_0)}(z)\rho^\alpha(z,z_0)\right]\right| \leqslant \\ &\leqslant [f]_{\alpha/2,\alpha}\left[(K+1)\rho\right]^\alpha \left|G_0 * I_{Q_{(K+1)\rho}(z_0)}(z)\right| \leqslant \\ &\leqslant [f]_{\alpha/2,\alpha}\left[(K+1)\rho\right]^{2+\alpha}, \quad (2.13)\end{aligned}$$

где учтено, что $K>1$ и неравенство:

$$|G_0 * I_{Q_R}| \leqslant R^2,$$

которое мы докажем.

□ Действительно,

$$\begin{aligned}G_0 * I_{Q_R(z_0)} &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} ds \int\limits_{\mathbb{R}^N} dy\, G_0(x-y,t-s)I_{Q_R(z_0)}(y,s) = \\ &= \int\limits_{t_0-R^2}^{t_0} ds \int\limits_{B_R(x_0)} dy\, \frac{1}{(4\pi(t-s))^{N/2}}\exp\left[-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}\right] \leqslant \\ &\leqslant \int\limits_{t_0-R^2}^{t_0} ds \int\limits_{\mathbb{R}^N} dy\, \frac{1}{(4\pi(t-s))^{N/2}}\exp\left[-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}\right] = R^2, \quad (2.14)\end{aligned}$$

где использовалось легко проверяемое равенство:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} dy\, \frac{1}{(4\pi(t-s))^{N/2}}\exp\left[-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}\right] = 1 \quad \text{при} \quad t>s. \quad \boxtimes$$

Теперь воспользуемся неравенством (2.6) из лекции 10, которое имеет следующий вид:

$$|u(z)-T_{z_0}u(z)|_{0;Q_{(K+1)\rho}(z_0)} \leqslant M[(K+1)\rho]^{2+\alpha}[u]_{1+\alpha/2,2+\alpha}. \quad (2.15)$$

Наконец, в силу (2.13) и (2.15) справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned}|h|_{0;Q_{(K+1)\rho}(z_0)} &= |u-T_{z_0}u-r|_{0;Q_{(K+1)\rho}(z_0)} \leqslant \\ &\leqslant |u-T_{z_0}u|_{0;Q_{(K+1)\rho}(z_0)} + |r|_{0;Q_{(K+1)\rho}(z_0)} \leqslant\end{aligned}$$

$$\leqslant M(K+1)^{2+\alpha}\rho^{2+\alpha}\left([u]_{1+\alpha/2,2+\alpha}+[f]_{\alpha/2,\alpha}\right). \quad (2.16)$$

Шаг 6. В силу неравенств (2.12), (2.13) и (2.16) имеем:

$$\begin{aligned}\inf_{p(z)\in\mathcal{P}_2}|u(z)-p(z)|_{0;Q_\rho(z_0)} &\leqslant |u(z)-T_{z_0}u(z)-T_{z_0}h(z)|_{0;Q_\rho(z_0)}\leqslant\\ &\leqslant |u(z)-T_{z_0}u(z)-h(z)|_{0;Q_\rho(z_0)}+|h(z)-T_{z_0}h(z)|_{0;Q_\rho(z_0)}=\\ &=|r|_{0;Q_\rho(z_0)}+|h(z)-T_{z_0}h(z)|_{0;Q_\rho(z_0)}\leqslant\\ &\leqslant [f]_{\alpha/2,\alpha}\left[(K+1)\rho\right]^{2+\alpha}+\\ &+K^{-3}M(K+1)^{2+\alpha}\rho^{2+\alpha}\left([u]_{1+\alpha/2,2+\alpha}+[f]_{\alpha/2,\alpha}\right). \quad (2.17)\end{aligned}$$

Разделив обе части последнего неравенства на $\rho^{2+\alpha}$ и взяв supremum от обеих частей по всем $z_0\in\mathbb{R}^{N+1}$ и $\rho>0$, в силу эквивалентности полунорм $[u]'_{1+\alpha/2,2+\alpha}$ и $[u]_{1+\alpha/2,2+\alpha}$ получим следующее неравенство:

$$\begin{aligned}[u]_{1+\alpha/2,2+\alpha}\leqslant MK^{-3}(K+1)^{2+\alpha}[u]_{1+\alpha/2,2+\alpha}+&\\ +M(K+1)^{2+\alpha}\left(1+K^{-3}\right)[f]_{\alpha/2,\alpha}.& \quad (2.18)\end{aligned}$$

Осталось выбрать $K>0$ настолько большим, чтобы величина

$$MK^{-3}(K+1)^{2+\alpha}\leqslant\frac{1}{2},$$

поскольку по условию $\alpha\in(0,1)$.

Теорема доказана.

§ 3. Литературные указания

Материал для лекции взят из работ [4], [14].

Лекция 17

МЕТОД ПРОДОЛЖЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ

§ 1. Априорная оценка Шаудера в ограниченной области D

Пусть $D = \Omega \times (0, T)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область с гладкой границей $\Gamma \in \mathbb{C}^{1,\alpha}$ при $\alpha \in (0, 1]$. Пусть выполнены условия:

($\overline{A}$) Коэффициенты $a_{ij}(x, t)$, $b_i(x, t)$ и $c(x, t)$ параболического оператора L принадлежат классу $\mathbb{C}^{\alpha/2,\alpha}(\overline{D})$, причём

$$|a_{ij}|_{\alpha/2,\alpha;D} \leqslant K_1, \quad |b_i|_{\alpha/2,\alpha;D} \leqslant K_1, \quad |c|_{\alpha/2,\alpha;D} \leqslant K_1. \tag{1.1}$$

($\overline{B}$) Для любой точки $(x, t) \in D$ и любого действительного вектора ξ выполняется следующее неравенство:

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x, t)\xi_i\xi_j \geqslant K_2|\xi|^2, \quad K_2 > 0. \tag{1.2}$$

($\overline{C}$) Функция $f(x, t) \in \mathbb{C}^{\alpha/2,\alpha}(\overline{D})$.

Рассмотрим вопрос о получении вблизи границы априорных оценок для решения $u(x, t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{D})$ первой краевой задачи следующего вида:

$$Lu(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in D \cup B_T, \tag{1.3}$$

$$u(x, t) = 0 \quad \text{для} \quad (x, t) \in \partial' D = B \cup S_T. \tag{1.4}$$

Справедлива следующая основная теорема об априорной оценке Шаудера, которая приводится без доказательства:

Теорема 1. *Если выполняются условия* ($\overline{A}$), ($\overline{B}$) *и* ($\overline{C}$), *то существует постоянная* $K_3 = K_3(\alpha, D) > 0$, *такая, что для решения* $u(x, t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{D})$ *первой краевой задачи* (1.3), (1.4) *имеет место следующая априорная оценка Шаудера*:

$$|u|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} \leqslant K_3|f|_{\alpha/2,\alpha;D}. \tag{1.5}$$

§ 2. Решение первой краевой задачи

Рассмотрим первую краевую задачу (1.3), (1.4).Справедлива следующая

Т е о р е м а 2. *Если выполняются условия* $(\overline{A})$, $(\overline{B})$, $(\overline{C})$, *то существует единственное решение* $u(x,t)$ *первой краевой задачи* (1.3), (1.4) *из класса* $\mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{D})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Шаг 1. Единственность была ранее доказана с помощью принципа максимума.

Шаг 2. Изложим схему доказательства на основе *метода продолжения по параметру*. Рассмотрим однопараметрическое семейство параболических операторов:

$$L_\lambda = \lambda L + (1-\lambda)L_0, \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1, \tag{2.1}$$

где

$$L_0 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \frac{\partial}{\partial t}.$$

Обозначим через Σ множество всех значений λ, для которых задача

$$L_\lambda u_\lambda(x,t) = f(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in D \cup B_T, \tag{2.2}$$

$$u_\lambda(x,t) = 0 \quad \text{на} \quad B \cup S_T \tag{2.3}$$

имеет единственное решение $u_\lambda(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{D})$ для любой $f(x,t) \in \mathbb{C}^{\alpha/2,\alpha}(\overline{D})$ такой, что $f(x,t) = 0$ на ∂B.

Требуется доказать следующие свойства:

(i) Σ содержит $\lambda = 0$, т. е. множество Σ — не пусто;

(ii) Σ — открытое множество на сегменте $[0,1]$, т. е. если $\lambda_0 \in \Sigma$, то существует такое $\varepsilon > 0$, что все λ такие, что $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$ содержатся в Σ;

(iii) Σ — замкнутое множество, т. е. для любой последовательности $\{\lambda_n\} \subset \Sigma$ такой, что $\lambda_n \to \overline{\lambda}$ следует, что $\overline{\lambda} \in \Sigma$.

Если $\Sigma \subset [0,1]$ удовлетворяет свойствам (i)–(iii), то это множество является непустым открыто–замкнутым множеством в метрическом пространстве $([0,1], d(a,b) = |a-b|)$. Известно, что в этом метрическом пространстве имеется только два открыто–замкнутых множества — это пустое множество $\varnothing$ и сам отрезок $[0,1]$. Поскольку в силу (i) множество $\Sigma \neq \varnothing$, то $\Sigma = [0,1]$. Значит, краевая задача

$$L_1 u_1(x,t) = f(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in D \cup B_T, \tag{2.4}$$

$$u_1(x,t) = 0 \quad \text{на} \quad B \cup S_T \tag{2.5}$$

имеет единственное решение $u_1(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{D})$ для любой $f(x,t) \in \mathbb{C}^{\alpha/2,\alpha}(\overline{D})$ такой, что $f(x,t) = 0$ на ∂B. Это и есть решение первой краевой задачи для параболического оператора L.

Шаг 3. Доказательство свойства (i) довольно сложное, но существенно проще, чем непосредственное доказательство однозначной разрешимости первой краевой задачи для общего параболического уравнения. Будем считать результат (i) известным.

Шаг 4. Доказательство свойства (ii). Запишем уравнение $L_\lambda u_\lambda = f$ в следующем эквивалентном виде:

$$L_{\lambda_0} u_\lambda = (L_{\lambda_0} u_\lambda - L_\lambda u_\lambda) + f = F(u_\lambda). \tag{2.6}$$

Рассмотрим линейное преобразование:

$$v = A(u),$$

определенное следующим образом: для функции $u(x,t) \in \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{D})$, равной нулю на $B \cup S$, возьмем в качестве $A(u)$ (единственное) решение задачи:

$$L_{\lambda_0} v = F(u) \quad \text{при} \quad (x,t) \in D \cup B_T, \quad v = 0 \quad \text{на} \quad B \cup S_T. \tag{2.7}$$

Так как $\lambda_0 \in \Sigma$ и $F(u)(x,t) \in \mathbb{C}^{\alpha/2,\alpha}(\overline{D})$, $F(x,t) = 0$ на ∂B, то преобразование $v = Au$ определено для всех $u \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{D})$, равных нулю на $B \cup S$.

Если доказать, что для некоторой функции $u(x,t)$ выполняется равенство $Au = u$, то u будет единственным решением задачи (2.2), (2.3) и, следовательно, $\lambda \in \Sigma$.

Заметим, что имеет место следующее равенство:

$$\begin{aligned} F(u) = f + [\lambda_0 L + (1-\lambda_0) L_0]\, u - [\lambda L + (1-\lambda) L_0]\, u = \\ = f + (\lambda_0 - \lambda) L u + (\lambda - \lambda_0) L_0 u, \end{aligned} \tag{2.8}$$

из которого следует оценка:

$$|F(u)|_{\alpha/2,\alpha;D} \leqslant K_4 |\lambda - \lambda_0| |u|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} + |f|_{\alpha/2,\alpha;D}, \tag{2.9}$$

где K_4 — это постоянная, не зависящая от λ, u и f. Здесь использовались следующие неравенства:

$$|Lu|_{\alpha/2,\alpha;D} \leqslant M |u|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D}, \quad |L_0 u|_{\alpha/2,\alpha;D} \leqslant M_0 |u|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D},$$

справедливость которых является следствием оценки (1.43) из лекции 11.

Применяя априорную оценку Шаудера (1.5), получим из (2.7) и (2.9) следующее неравенство:

$$|v|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} \leqslant K_3 K_4 |\lambda - \lambda_0| |u|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} + K_3 |f|_{\alpha/2,\alpha;D}, \tag{2.10}$$

где K_3 не зависит от λ, u и f. Воспользуемся снова априорной оценкой Шаудера (1.5) и получим, что, в частности,

$$|u|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} \leqslant 2K_3 |f|_{\alpha/2,\alpha;D}. \tag{2.11}$$

С другой стороны, имеем:

$$K_3K_4|\lambda - \lambda_0| \leqslant \frac{1}{2} \Rightarrow |v|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} \leqslant 2K_3|f|_{\alpha/2,\alpha;D}. \tag{2.12}$$

Обозначая через X_0 замкнутое в $\mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$ множество, определенное следующим образом:

$$X_0 \stackrel{\text{def}}{=} \left\{u(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D):\ |u|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} \leqslant 2K_3|f|_{\alpha/2,\alpha;D}\right\} \cap \\ \cap \left\{u(x,t) = 0 \quad \text{на} \quad (x,t) \in B \cup S_T\right\}, \tag{2.13}$$

из (2.11) и (2.12) получаем, что линейный оператор A отображает X_0 в X_0.

Докажем, что оператор A — сжимающий на X_0.

□ Действительно, пусть

$$v_1 = Au_1, \quad v_2 = Au_2, \quad u_1, u_2 \in X_0.$$

Тогда

$$L_{\lambda_0}(v_1 - v_2) = L_{\lambda_0}(u_1 - u_2) - L_\lambda(u_1 - u_2) \quad \text{при} \quad (x,t) \in D \cup B_T,$$

$$v_1 - v_2 = 0 \quad \text{на} \quad B \cup S_T.$$

По аналогии с использованием априорной оценки Шаудера (1.5) получим неравенство:

$$|v_1 - v_2|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} \leqslant \\ \leqslant K_3K_4|\lambda - \lambda_0||u_1 - u_2|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} \leqslant \frac{1}{2}|u_1 - u_2|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D}$$

при условии:

$$K_3K_4|\lambda - \lambda_0| \leqslant \frac{1}{2}. \quad \boxtimes$$

Таким образом, при таких λ оператор является сжимающим на X_0 — замкнутом, выпуклом и ограниченном множестве из $\mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{D})$. Следовательно, в силу теоремы о сжимающем отображении существует единственная неподвижная точка $u(x,t) \in X_0$.

Шаг 6. Доказательство свойства (iii). Пусть $\lambda_m \in \Sigma$ и

$$\lambda_m \to \sigma \quad \text{при} \quad m \to +\infty.$$

Докажем, что $\sigma \in \Sigma$, т. е. для любой $f(x,t) \in \mathbb{C}^{\alpha/2,\alpha}(\overline{D})$, равной нулю на ∂B, существует функция $u(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{D})$, такая, что

$$L_\sigma u = f \quad \text{при} \quad (x,t) \in D \cup B_T, \tag{2.14}$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad B \cup S_T. \tag{2.15}$$

По предположению для каждого m существует функция $u_m(x,t) \in \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{D})$ такая, что

$$L_{\lambda_m} u_m = f \quad \text{при} \quad (x,t) \in D \cup B_T, \tag{2.16}$$

$$u_m = 0 \quad \text{на} \quad B \cup S_T. \tag{2.17}$$

Заметим, что коэффициенты семейства операторов L_λ удовлетворяют условиям $(\overline{\mathrm{A}})$ и $(\overline{\mathrm{B}})$ с константами K_1 и K_2, не зависящими от λ. Поэтому применяя априорную оценку Шаудера (1.5), получим следующее неравенство:

$$|u_m|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} \leqslant K_3 |f|_{\alpha/2,\alpha;D}, \tag{2.18}$$

где K_3 не зависит от $m \in \mathbb{N}$. Далее, используя теорему Асколи–Арцела, докажем, что существует подпоследовательность последовательности $\{u_m\}$, которую мы снова обозначим через $\{u_m\}$, такая, что

$$\{u_m\}, \quad \{D_{x_i} u_m\}, \quad \{D^2_{x_i x_j} u_m\}, \quad \{D_t u_m\} \tag{2.19}$$

равномерно сходятся в D. Если $u_m \to u$ равномерно в D, то соответствующие последовательности производных сходятся равномерно к соответствующим производным функции $u(x,t)$, причем

$$u(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{D}).$$

Переходя к пределу при $m \to +\infty$ в равенствах (2.16) и (2.17), записанных для соответствующей подпоследовательности $\{u_m\}$, получим задачу:

$$L_\sigma u = f \quad \text{при} \quad (x,t) \in D \cup B_T, \tag{2.20}$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad B \cup S_T. \tag{2.21}$$

Следовательно, $\sigma \in \Sigma$. Поэтому множество Σ замкнуто.

Теорема доказана.

§ 3. Литературные указания

Материал для лекции взят из работ [4], [14].

Лекция 18

МЕТОД ВЕРХНИХ И НИЖНИХ РЕШЕНИЙ

§ 1. Интерполяционное неравенство

Пусть $D = \Omega \times (0, T)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — это область с гладкой границей Γ. Далее символом $\partial' D$ обозначим параболическую границу области D: [1])

$$\partial' D := B \cup S, \quad B := \Omega \times \{t = 0\}, \quad S := \Gamma \times [0, T],$$
$$B_T := \Omega \times \{t = T\}, \quad \partial B_T := \Gamma \times \{t = T\}.$$

Напомним следующие обозначения:

$$|u|_{1+\alpha/2, 2+\alpha; D} \stackrel{\text{def}}{=} |u|_{0;D} + \sum_{i=1}^{N} |u_{x_i}|_{0;D} + |u_t|_{0;D} + \\ + \sum_{i,j=1,1}^{N,N} |u_{x_i x_j}|_{0;D} + [u]_{1+\alpha/2, 2+\alpha; D} < +\infty, \quad (1.1)$$

где

$$[u]_{1+\alpha/2, 2+\alpha; D} \stackrel{\text{def}}{=} [u_t]_{\alpha/2, \alpha; D} + \sum_{i,j=1,1}^{N,N} [u_{x_i x_j}]_{\alpha/2, \alpha; D}, \quad (1.2)$$

$$[u]_{\alpha/2, \alpha; D} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{z_1 \neq z_2, z_1, z_2 \in D} \frac{|u(z_1) - u(z_2)|}{\rho^{\alpha}(z_1, z_2)}, \text{ [2])} \quad (1.3)$$

$$|u|_{\alpha/2, \alpha; D} \stackrel{\text{def}}{=} |u|_{0;D} + [u]_{\alpha/2, \alpha; D}, \quad |u|_{0;D} = \sup_{(x,t) \in D} |u(x, t)| \quad (1.4)$$

для $\alpha \in (0, 1]$. Символом $\mathbb{C}^{\alpha/2, \alpha}(\overline{D})$ обозначим банахово пространство всех функций $u(x, t)$, для которых конечна *норма* $|u|_{\alpha/2, \alpha; D} < +\infty$, а символом $\mathbb{C}^{1+\alpha/2, 2+\alpha}(\overline{D})$ обозначим банахово пространство вещественнозначных функций $u(x, t)$, заданных в D таких, что *норма* $|u|_{1+\alpha/2, 2+\alpha; D} < +\infty$.

---

[1]) Напомним, что полная граница $\partial D = B_T \cup B \cup S$.

[2]) Параболическое расстояние: $\rho(z_1, z_2) = |x_1 - x_2| + |t_1 - t_2|^{1/2}$.

В дальнейшем будем использовать следующие оценки величины $|h|_{\alpha/2,\alpha;D}$ для функции $h(x,t,u) \in \mathbb{C}^{\alpha/2,\alpha,\alpha}(\overline{D}\times\mathbb{R}^1)$ при условии, что $u(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{D})$. Справедлива следующая оценка:

$$
\begin{aligned}
&|h|_{\alpha/2,\alpha;D} = \\
&\quad = |h|_{0;D} + \sup_{z_1\neq z_2} \frac{|h(x_1,t_1,u_1)-h(x_2,t_2,u_2)|}{\rho^\alpha((z_1,u_1),(z_2,u_2))}\frac{\rho^\alpha((z_1,u_1),(z_2,u_2))}{\rho^\alpha(z_1,z_2)} \leqslant \\
&\qquad \leqslant |h|_{0;D} + K_1\Bigl(1+|u_t|_{0;D}+\sum_{i=1}^N |u_{x_i}|_{0;D}\Bigr) \leqslant \\
&\qquad\qquad \leqslant |h|_{0;D} + K_1 + \varepsilon|u|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} + c_1(\varepsilon)|u|_{0;D},
\end{aligned} \tag{1.5}
$$

$$
u_1 = u(z_1), \quad u_2 = u(z_2), \quad z_1 = (x_1,t_1), \quad z_2 = (x_2,t_2),
$$

$$
\rho(z_1,z_2) \overset{\text{def}}{=} |x_1-x_2| + |t_1-t_2|^{1/2},
$$

$$
\rho((z_1,u_1),(z_2,u_2)) \overset{\text{def}}{=} \rho(z_1,z_2) + |u_1-u_2|.
$$

□ Действительно,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\rho^\alpha((z_1,u_1),(z_2,u_2))}{\rho^\alpha(z_1,z_2)} = \left(1+\frac{|u(z_1)-u(z_2)|}{\rho(z_1,z_2)}\right)^\alpha \leqslant \\
&\qquad \leqslant 1 + \frac{|u(z_1)-u(z_2)|}{\rho(z_1,z_2)} \leqslant 1 + \frac{|u(x_1,t_1)-u(x_1,t_2)|}{|t_1-t_2|^{1/2}} + \\
&\quad + \frac{|u(x_2,t_2)-u(x_1,t_2)|}{|x_1-x_2|} \leqslant 1 + |u_t|_{0;D}|t_1-t_2|^{1/2} + \sum_{i=1}^N |u_{x_i}|_{0;D} \leqslant \\
&\qquad\qquad \leqslant 1 + T^{1/2}|u_t|_{0;D} + \sum_{i=1}^N |u_{x_i}|_{0;D},
\end{aligned} \tag{1.6}
$$

поскольку $\alpha \in (0,1]$. Далее, воспользуемся известным интерполяционным неравенством из книги Н. В. Крылова [4]:

$$
\begin{aligned}
&|u_{xx}|_{0;D} + |u_t|_{0;D} + |u_x|_{\alpha/2,\alpha;D} + |u|_{\alpha/2,\alpha;D} \leqslant \\
&\qquad \leqslant \varepsilon|u|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} + c(\varepsilon)|u|_{0;D}
\end{aligned} \tag{1.7}
$$

для всех $u(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{D})$ и всех $\varepsilon > 0$. ⊠

Замечание. Вместо условия принадлежности $h(x,t,u)$ классу $\mathbb{C}^{\alpha/2,\alpha,\alpha}(\overline{D}\times\mathbb{R}^1)$ можно потребовать выполнение следующих условий:

$$
h(x,t,u) \in \mathbb{C}^{0,0,1}_{x,t,u}(\overline{D}\times\mathbb{R}^1),
$$

$$
|h(x_1,t_1,u) - h(x_2,t_2,u)| \leqslant K_1\left[|x_1-x_2| + |t_1-t_2|^{1/2}\right]^\alpha \quad \text{при} \quad |u| \leqslant M_1,
$$

$$
|h'_u(x,t,u)| \leqslant K_2 \quad \text{при} \quad |u| \leqslant M_1,
$$

где K_1, K_2 — это положительные константы, не зависящие от (x_1,t_1,u), (x_2,t_2,u) и от (x,t,u) соответственно.

§ 2. Определение верхних и нижних решений

Рассмотрим метод верхних и нижних решений с целью доказательства существования классического решения $u(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{D})$ первой краевой задачи для полулинейного параболического уравнения в цилиндрической области $D \in \Omega \times (0,T)$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область с гладкой границей $\Gamma \in \mathbb{C}^{1,\alpha}$ при $\alpha \in (0,1]$.

Рассмотрим следующую первую краевую задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - Lu(x,t) = f(x,t,u) \quad \text{в} \quad (x,t) \in D \cup B_T, \tag{2.1}$$

$$u(x,t) = g(x,t) \quad \text{на} \quad (x,t) \in B \cup S_T, \tag{2.2}$$

$$Lu(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} + \\ + \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i} + c(x,t)u(x,t), \tag{2.3}$$

где

$$a_{ij}(x,t),\ b_i(x,t),\ c(x,t) \in \mathbb{C}^{\alpha/2,\alpha}(\overline{D}), \quad a_{ij}(x,t) = a_{ji}(x,t), \tag{2.4}$$

причем найдутся такие постоянные $\lambda > 0$ и $\Lambda > 0$, что

$$\lambda|\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \leqslant \Lambda|\xi|^2 \quad \text{для всех} \quad \xi \in \mathbb{R}^N \tag{2.5}$$

и для всех $(x,t) \in D$. Предположим, что функция $f(x,t,u) \in \in \mathbb{C}^{\alpha/2,\alpha,\alpha}(\overline{D} \times \mathbb{R}^1)$ и существует такое непрерывное продолжение $\overline{g}(x,t)$ из $S_T \cup B$ до $\overline{D}$ функции $g(x,t)$, что $\overline{g}(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{D})$ при некотором $\alpha \in (0,1]$.

Отметим, что в силу классической априорной оценки Шаудера [1]) имеет место априорная оценка для решения задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - Lu(x,t) = \widehat{f}(x,t) \in \mathbb{C}^{\alpha/2,\alpha}(\overline{D}), \tag{2.6}$$

$$u(x,t) = g(x,t), \quad \overline{g}(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{D}) \text{ [2])} \tag{2.7}$$

---

[1]) Более детально смотри, например, книгу [4] Крылова Н. В.

[2]) Здесь имеется в виду, что существует продолжение $\overline{g}(x,t)$ функции $g(x,t)$ с параболической границы $\partial' D$ на замыкание $\overline{D}$ указанного класса.

следующего вида:

$$|u|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} \leqslant K(N,D,\alpha)\left(|\widehat{f}|_{\alpha/2,\alpha;D} + |g|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D}\right), \tag{2.8}$$

где символом

$$|g|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} := \inf_{\overline{g}(x,t)\in\mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{D})} |\overline{g}|_{1+\alpha/2,2+\alpha}.$$

Определим верхние и нижние решения первой краевой задачи (2.1), (2.2).

Определение 1. *Функция* $\overline{U}(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D)\cap\mathbb{C}(\overline{D})$ *называется верхним решением первой краевой задачи* (2.1), (2.2), *если*

$$\frac{\partial\overline{U}(x,t)}{\partial t} - L\overline{U}(x,t) \geqslant f(x,t,\overline{U}) \quad \text{при} \quad (x,t)\in D\cup B_T, \tag{2.9}$$

$$\overline{U}(x,t) \geqslant g(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t)\in S_T\cup B. \tag{2.10}$$

Определение 2. *Функция* $\underline{U}(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D)\cap\mathbb{C}(\overline{D})$ *называется нижним решением первой краевой задачи* (2.1), (2.2), *если*

$$\frac{\partial\underline{U}(x,t)}{\partial t} - L\underline{U}(x,t) \leqslant f(x,t,\underline{U}) \quad \text{при} \quad (x,t)\in D\cup B_T, \tag{2.11}$$

$$\underline{U}(x,t) \leqslant g(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t)\in S_T\cup B. \tag{2.12}$$

Замечание. Решение $u(x,t)\in\mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D)\cap\mathbb{C}(\overline{D})$ является и верхним и нижним решением одновременно.

В дальнейшем мы будем предполагать, что верхнее решение $\overline{U}(x,t)$ и нижнее решение $\underline{U}(x,t)$ упорядочены: [1])

$$\overline{U}(x,t) \geqslant \underline{U}(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t)\in\overline{D}. \tag{2.13}$$

Определение 3. *Для любой упорядоченной пары* $\overline{U}(x,t)$ *и* $\underline{U}(x,t)$ *определим множество*:

$$\left\langle \underline{U},\overline{U}\right\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \Big\{u(x,t)\in\mathbb{C}(\overline{D}) : \\ \underline{U}(x,t)\leqslant u(x,t)\leqslant\overline{U}(x,t), \quad (x,t)\in\overline{D}\Big\}. \tag{2.14}$$

Предположим, что нелинейная функция $f(x,t,u)$ удовлетворяет одностороннему условию Липшица:

$$f(x,t,u_1)-f(x,t,u_2) \geqslant -\underline{c}(u_1-u_2), \quad \underline{U}\leqslant u_2\leqslant u_1\leqslant\overline{U}, \tag{2.15}$$

[1]) Это не всегда так.

где $\underline{c} > 0$ — это некоторая постоянная.

ПРИМЕР 1. Например, функция

$$f(x,t,u) = f_0(x,t)|u|^{p-2}u, \quad f_0(x,t) \geqslant 0, \quad p > 1$$

удовлетворяет условию (2.15) с постоянной $\underline{c} = 0$.

Заметим, что в силу условия (2.15) функция

$$F(x,t,u) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \underline{c}u + f(x,t,u) \tag{2.16}$$

является монотонно неубывающей по u для всех $(x,t) \in D$ и для всех $u \in \left\langle \underline{U}, \overline{U} \right\rangle$. Перепишем уравнение (2.1) в следующем эквивалентном виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - Lu(x,t) + \underline{c}u = F(x,t,u) \quad \text{в} \quad (x,t) \in D. \tag{2.17}$$

§ 3. Итерационная схема

Рассмотрим итерационную схему:

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} - Lu_k(x,t) + \underline{c}u_k = F(x,t,u_{k-1}) \quad \text{в} \quad (x,t) \in D \cup B_T. \tag{3.1}$$

$$u_k(x,t) = g(x,t) \quad \text{на} \quad (x,t) \in S_T \cup B, \tag{3.2}$$

где в качестве $u_0(x,t)$ пока выбрана произвольная функция из класса $\mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$.

Как известно из линейной $\mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}$–теории параболических уравнений [1)] первая итерация

$$u_1(x,t) \in \mathbb{C}^{\alpha/2,\alpha}(\overline{D}),$$

а последующие итерации

$$u_k(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{D}) \quad \text{при} \quad k = 2, 3, \ldots .$$

Теперь в качестве начального приближения $u_0(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ возьмем либо

$$u_0(x,t) = \overline{U}(x,t), \quad \text{либо} \quad u_0(x,t) = \underline{U}(x,t), \tag{3.3}$$

которые удовлетворяют условию (2.13). При этом итерационную последовательность решений задачи (3.1), (3.2) с начальным условием $u_0(x,t) = \overline{U}(x,t)$ мы обозначим через $\overline{u}_k(x,t)$ при $k \in \mathbb{N}$, а с начальным условием $u_0(x,t) = \underline{U}(x,t)$ обозначим через $\underline{u}_k(x,t)$ при $k \in \mathbb{N}$.

Замечание. Следует различать обозначение $\overline{u}_k(x,t)$ и использованное ранее обозначение $\overline{u}(x,t)$ для непрерывного продолжения функции $u(x,t) \in \mathbb{C}_w(\overline{D}_T)$ из множества $D_T \cup B_T$ до $S_T \cup B$.

Справедлива следующая

---

1) Смотри книгу Н. В. Крылова [4].

Лемма 1. *Пусть* $\overline{U}(x,t)$, $\underline{U}(x,t)$ — *это упорядоченные верхнее и нижнее решения первой краевой задачи* (2.1), (2.2) *и функция* $f(x,t,u)$ *удовлетворяет условию* (2.15). *Тогда последовательности* $\{\overline{u}_k(x,t)\}$ *и* $\{\underline{u}_k(x,t)\}$ *обладают следующим свойством монотонности*:

$$\underline{U}(x,t) = \underline{u}_0(x,t) \leqslant \underline{u}_k(x,t) \leqslant \underline{u}_{k+1}(x,t) \leqslant \\ \leqslant \overline{u}_{k+1}(x,t) \leqslant \overline{u}_k(x,t) \leqslant \overline{u}_0(x,t) = \overline{U}(x,t), \quad (x,t) \in \overline{D} \quad (3.4)$$

для всех $k \in \mathbb{N}$.

Доказательство.

Шаг 1. Пусть

$$w(x,t) = \overline{u}_0(x,t) - \overline{u}_1(x,t) = \overline{U}(x,t) - \overline{u}_1(x,t), \quad (x,t) \in \overline{D}.$$

Тогда $w(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ — это решение задачи

$$\frac{\partial w}{\partial t} - Lw + \underline{c}w \geqslant F(x,t,\overline{U}) - F(x,t,\overline{U}) = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D \cup B_T,$$

$$w(x,t) \geqslant g(x,t) - g(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in S_T \cup B.$$

Слабый принцип максимума дает неравенство $w(x,t) \geqslant 0$ на $\overline{D}$, т. е.

$$\overline{u}_1(x,t) \leqslant \overline{u}_0(x,t) = \overline{U}(x,t), \quad (x,t) \in \overline{D}.$$

Аналогичным образом доказывается неравенство

$$\underline{u}_1(x,t) \geqslant \underline{u}_0(x,t) = \underline{U}(x,t), \quad (x,t) \in \overline{D}.$$

Шаг 2. Пусть

$$w_1(x,t) = \overline{u}_1(x,t) - \underline{u}_1(x,t), \quad (x,t) \in \overline{D}.$$

Тогда $w_1(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ удовлетворяет уравнению и неравенству на границе:

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} - Lw_1 + \underline{c}w_1 = F(x,t,\overline{U}) - F(x,t,\underline{U}) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D \cup B_T,$$

$$w_1(x,t) \geqslant g(x,t) - g(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in S_T \cup B.$$

В силу слабого принципа максимума имеем:

$$w_1(x,t) \geqslant 0 \quad \text{на} \quad (x,t) \in \overline{D}.$$

Следовательно, имеем:

$$\underline{u}_0(x,t) = \underline{U}(x,t) \leqslant \underline{u}_1(x,t) \leqslant \overline{u}_1(x,t) \leqslant \overline{U}(x,t) = \overline{u}_0(x,t), \quad (x,t) \in \overline{D}.$$

Шаг 3. Предположим, что

$$\underline{u}_{k-1}(x,t) \leqslant \underline{u}_k(x,t) \leqslant \overline{u}_k(x,t) \leqslant \overline{u}_{k-1}(x,t), \quad (x,t) \in \overline{D}.$$

Тогда функция

$$w_k(x,t) = \overline{u}_k(x,t) - \overline{u}_{k+1}(x,t), \quad (x,t) \in \overline{D}$$

удовлетворяет:

$$\frac{\partial w_k}{\partial t} - Lw_k + \underline{c}w_k \geqslant F(x,t,\overline{u}_{k-1}) - F(x,t,\overline{u}_k) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D \cup B_T,$$

$$w_k(x,t) = g(x,t) - g(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in S_T \cup B.$$

В силу слабого принципа максимума имеем $w_k(x,t) \geqslant 0$ в $\overline{D}$, т.е.

$$\overline{u}_{k+1}(x,t) \leqslant \overline{u}_k(x,t), \quad (x,t) \in \overline{D}.$$

Аналогичным образом доказывается, что

$$\underline{u}_{k+1}(x,t) \leqslant \underline{u}_k(x,t), \quad \underline{u}_{k+1}(x,t) \leqslant \overline{u}_{k+1}(x,t), \quad (x,t) \in \overline{D}.$$

Лемма доказана.

Заметим, что итерационная последовательность $\{\overline{u}_k(x,t)\}$ является монотонно невозрастающей и ограниченной снизу нижним решением $\underline{U}(x,t)$, а итерационная последовательность $\{\underline{u}_k(x,t)\}$ является монотонно неубывающей и ограниченной сверху верхним решением $\overline{U}(x,t)$. Следовательно, существуют поточечные пределы:

$$\lim_{k\to+\infty} \overline{u}_k(x,t) = \overline{u}(x,t), \lim_{k\to+\infty} \underline{u}_k(x,t) = \underline{u}(x,t), \quad (x,t) \in \overline{D}, \tag{3.5}$$

причем

$$\underline{U}(x,t) \leqslant \underline{u}(x,t) \leqslant \overline{u}(x,t) \leqslant \overline{U}(x,t), \quad (x,t) \in \overline{D}.$$

Ниже будет доказано, что обе функции $\overline{u}(x,t)$ и $\underline{u}(x,t)$ являются решениями первой краевой задачи (2.1), (2.2). Более того, если

$$f_p(x,t,p) \leqslant 0 \quad \text{для} \quad (x,t,p) \in \overline{D}_T \times \mathbb{R}, \tag{3.6}$$

то решение первой краевой задачи — единственно.

□ Действительно, пусть $u_1(x,t), u_2(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D_T \cup B_T) \cap \mathbb{C}(\overline{D}_T)$ — решения задачи (2.1), (2.2). Тогда с учетом (3.6) их разность $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ удовлетворяет неравенствам

$$\frac{\partial v}{\partial t} - Lv - \overline{c}v = 0 \quad \text{для} \quad (x,t) \in D_T \cup B_T, \tag{3.7}$$

$$v(x,t) = 0 \quad \text{для} \quad (x,t) \in S_T \cup B, \tag{3.8}$$

где

$$\overline{c}(x,t) = \int\limits_0^1 \frac{\partial f(x,t,u_s)}{\partial u_s}\,ds \leqslant 0, \quad u_s = su_1 + (1-s)u_2,$$

и мы воспользовались следующим равенством:

$$f(x,t,u_1) - f(x,t,u_2) = \int\limits_0^1 \frac{d}{ds} f(x,t,u_s)\,ds = \\ = \int\limits_0^1 \frac{\partial f(x,t,u_s)}{\partial u_s}\,ds [u_1(x,t) - u_2(x,t)]. \quad (3.9)$$

Тогда в силу теоремы единственности первой краевой задачи имеем

$$v(x,t) = 0 \quad \text{для} \quad (x,t) \in \overline{D}_T. \quad (3.10)$$

Следовательно, из (3.10) вытекает равенство $u_1(x,t) = u_2(x,t)$. ⊠

§ 4. Основная теорема

Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть* $\overline{U}(x,t)$ *и* $\underline{U}(x,t)$ — *упорядоченные верхнее и нижнее решения первой краевой задачи* (2.1), (2.2), *а функция* $f(x,t,u)$ *удовлетворяет условию* (2.15). *Тогда*

(i) *Последовательность* $\{\overline{u}_k(x,t)\}$ *сходится монотонно сверху к решению* $\overline{u}(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{D})$ *первой краевой задачи* (2.1), (2.2), *а последовательность* $\{\underline{u}_k(x,t)\}$ *сходится монотонно снизу к решению* $\underline{u}(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{D})$ *той же первой краевой задачи, причем*

$$\underline{u}(x,t) \leqslant \overline{u}(x,t), \quad (x,t) \in \overline{D}; \quad (4.1)$$

(ii) *Всякое решение* $u^*(x,t) \in \langle \underline{U}, \overline{U} \rangle$ *первой краевой задачи* (2.1), (2.2) *удовлетворяют неравенству*:

$$\underline{u}(x,t) \leqslant u^*(x,t) \leqslant \overline{u}(x,t), \quad (x,t) \in \overline{D}; \quad (4.2)$$

(iii) *Если выполнено условие* (3.6), *то* $\overline{u}(x,t) = \underline{u}(x,t)$ *является единственным решением в* $\langle \underline{U}, \overline{U} \rangle$.

Доказательство.

Шаг 1. Поскольку последовательность $\{\overline{u}_k(x,t)\}$ монотонно сверху сходится к $\overline{u}(x,t)$, то в силу монотонности функции $F(x,t,u)$ последовательность $\{F(x,t,\overline{u}_k)\}$ монотонно сверху сходится к $F(\overline{u},x,t)$ для всех $(x,t) \in \overline{D}$. По аналогии последовательность $\{F(\underline{u}_k, x, t)\}$ монотонно снизу сходится к $F(\underline{u}, x, t)$. Ранее было доказано,

$$\underline{u}_1(x,t),\ \overline{u}_1(x,t) \in \mathbb{C}^{\alpha/2,\alpha}(\overline{D}),$$

$$\underline{u}_k(x,t),\ \overline{u}_k(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{D}) \quad \text{при} \quad k = 2, 3, \ldots.$$

В силу классических априорных оценок Шаудера для обеих итерационных схем (3.1)–(3.3) имеют место следующие оценки:

$$|\overline{u}_k|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} \leqslant K \left(|g|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} + |F(x,t,\overline{u}_{k-1})|_{\alpha/2,\alpha;D}\right), \qquad (4.3)$$

$$|\underline{u}_k|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} \leqslant K \left(|g|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} + |F(x,t,\underline{u}_{k-1})|_{\alpha/2,\alpha;D}\right), \qquad (4.4)$$

где $k \geqslant 2$ и постоянная $K = K(N, D, \alpha) > 0$ и не зависит от $k \in \mathbb{N}$. В силу неравенства (1.5) из первого параграфа настоящей лекции справедлива оценка: [1]

$$\begin{aligned}|F(x,t,u_{k-1})|_{\alpha/2,\alpha;D} &\leqslant \underline{c}|u_{k-1}|_{\alpha/2,\alpha;D} + |f(x,t,u_{k-1})|_{\alpha/2,\alpha;D} \leqslant \\ &\leqslant \varepsilon|u_{k-1}|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} + c_2(\varepsilon)|u_{k-1}|_{0;D} + |f(x,t,u_{k-1})|_{0;D} + \\ &+ K_1 + \varepsilon|u_{k-1}|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} + c_3(\varepsilon)|u_{k-1}|_{0;D} = \\ &= 2\varepsilon|u_{k-1}|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} + K_1 + c_4(\varepsilon)|u_{k-1}|_{0;D} + |f(x,t,u_{k-1})|_{0;D}. \qquad (4.5)\end{aligned}$$

Отметим, что

$$|u_{k-1}|_{0;D} \leqslant \sup_{x\in D}\left\{|\underline{U}(x)|, |\overline{U}(x)|\right\} = c_4$$

и

$$|f(x,t,u_{k-1})|_{0;D} \leqslant c_5.$$

В силу неравенств (4.3), (4.4) и неравенства (4.5) получим неравенство:

$$|u_k|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} \leqslant 2\varepsilon K|u_{k-1}|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} + K_2(\varepsilon). \qquad (4.6)$$

Переобозначив

$$2\varepsilon K \to \varepsilon$$

из неравенства (4.6) получим неравенство:

$$|u_k|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} \leqslant \varepsilon|u_{k-1}|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} + K_3(\varepsilon) \quad \text{при} \quad k \geqslant 3. \qquad (4.7)$$

Рассмотрим отдельно итерационное неравенство:

$$z_{k+1} \leqslant \varepsilon z_k + d, \quad \varepsilon \in (0,1), \quad k \geqslant 2.$$

[1] В этом неравенстве мы обе итерационные последовательности обозначаем как $\{u_k(x,t)\}$.

Отсюда следует оценка:

$$z_k \leqslant z_2 + K_1 \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon^n = K_4(\varepsilon) < +\infty \quad \text{при} \quad k \geqslant 2.$$

Следовательно, обе последовательности $\{\underline{u}_k(x,t)\}$ и $\{\overline{u}_k(x,t)\}$ равномерно по $k \geqslant 2$ ограничены в пространстве $\mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{D})$. Поэтому в силу леммы 1 из лекции 15 существуют подпоследовательности

$$\{\overline{u}_\mu\}, \quad \{\underline{u}_\mu\}$$

такие, что

$$\overline{u}_\mu \to \overline{u} \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(\overline{D}) \quad \text{при} \quad \mu \to +\infty,$$

$$\underline{u}_\mu \to \underline{u} \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(\overline{D}) \quad \text{при} \quad \mu \to +\infty,$$

причём предельные функции

$$\underline{u}(x,t), \quad \overline{u}(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{D}).$$

Перейдем к пределу при $\mu \to +\infty$ в равенствах (3.1) и (3.2), записанных для соответствующих подпоследовательностей. Тем самым, свойство (i) доказано.

Шаг 2. Заметим, что если $u^*(x,t) \in \left\langle \underline{U}, \overline{U} \right\rangle$ — это решение из класса $\mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$. Очевидно, $u^*(x,t)$ — это верхнее и нижнее решение одновременно. Поэтому если рассмотреть упорядоченные пары

$$\left\langle u^*, \overline{U} \right\rangle \quad \text{и} \quad \left\langle \underline{U}, u^* \right\rangle,$$

то после рассмотрения указанной ранее итерационной схемы получим, что

$$u^*(x,t) \leqslant \overline{u}(x,t) \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \overline{D},$$
$$u^*(x,t) \geqslant \underline{u}(x,t) \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \overline{D}.$$

Таким образом, свойство (ii) доказано.

Шаг 3. Для того, чтобы доказать свойство (iii) достаточно показать, что

$$\overline{u}(x,t) \leqslant \underline{u}(x,t) \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \overline{D}. \tag{4.8}$$

Действительно, функция

$$w(x,t) = \underline{u}(x,t) - \overline{u}(x,t), \quad (x,t) \in \overline{D}$$

удовлетворяет:

$$\frac{\partial w}{\partial t} - Lw = f(x,t,\underline{u}) - f(x,t,\overline{u}) \geqslant -\overline{c}w \quad \text{при} \quad (x,t) \in D \cup B_T,$$

$$w(x,t) = g(x,t) - g(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in S_T \cup B.$$

Следовательно, в силу слабого принципа максимума имеем $w(x,t) \geqslant 0$ в $\overline{D}$. Таким образом, свойство (iii) доказано.

Теорема доказана.

§ 5. Устойчивость решения

В этом параграфе рассмотрена следующая задача:

$$u_t(x,t) - Lu(x,t) = f(x,t,u(x,t)) \quad \text{для} \quad (x,t) \in D_T \cup B_T, \tag{5.1}$$

$$u(x,t) = g(x,t) \quad \text{для} \quad (x,t) \in S_T \cup B, \tag{5.2}$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область с гладкой границей Γ,

$$Lu(x,t) := \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{N} b_j(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_j} + c(x,t)u(x,t), \tag{5.3}$$

$$a_{ij}(x,t),\ c(x,t) \in \mathbb{C}^{\alpha/2,\alpha}(\overline{D}_T), \quad \alpha \in (0,1], \tag{5.4}$$

$$\max_{i,j=\overline{1,N}} \left\{ |a_{ij}|_{\alpha/2,\alpha;D_T}, |c|_{\alpha/2,\alpha;D_T}, |g(x,t)|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D_T} \right\} \leqslant K_1 \tag{5.5}$$

и для всех $(x,t) \in \overline{D}_T$ матрица $(a_{ij}(x,t))$ является положительно определенной и поэтому

$$m := \min_{(x,t)\in\overline{D}_T} \sum_{i=1}^{N} a_{ii}(x,t) > 0, \quad d := \max_{x\in\overline{\Omega}} |x| < +\infty. \tag{5.6}$$

Пусть, кроме того,

$$c(x,t) \leqslant 0 \quad \text{для} \quad (x,t) \in \overline{D}_T. \tag{5.7}$$

Напомним, что в силу (2.8) в классе функций $u(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{D}_T)$ справедлива оценка Шаудера:

$$|u(x,t)|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D_T} \leqslant \\ \leqslant K(N,D,\alpha)\left(|f(x,t,u(x,t))|_{\alpha/2,\alpha;D} + |g(x,t)|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D_T}\right), \tag{5.8}$$

$$|g|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D_T} := \inf_{\overline{g}(x,t)\in\mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{D}_T)} |\overline{g}|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D_T}, \tag{5.9}$$

$$\overline{g}(x,t) = g(x,t) \quad \text{для} \quad (x,t) \in S_T \cup B. \tag{5.10}$$

Справедлива следующая
Лемма 2. *Для решений задачи* (5.1), (5.2) *из класса* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{D}_T)$, *удовлетворяющих априорной оценке*:

$$|u(x,t)|_{0;D_T} \leqslant K_2 \tag{5.11}$$

при условии, что

$$\max\Big\{|f(x,t,0)|_{0;D_T}, |D_x f(x,t,u(x,t))|_{0;D_T},$$
$$, |f_t(x,t,u(x,t))|_{0;D_T}, |f_u(x,t,u(x,t))|_{0;D_T}\Big\} \leqslant K_3 \quad (5.12)$$

имеет место априорная оценка:

$$|u(x,t)|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D_T} \leqslant M. \quad (5.13)$$

Доказательство. В силу оценки (5.8) требуется получить оценку величины $|f(x,t,u(x,t))|_{\alpha/2,\alpha;D_T}$. Сначала получим оценку величины $|f(x,t,u(x,t))|_{0;D_T}$. Действительно, имеем:

$$f(x,t,u) = f(x,t,0) + \int\limits_0^1 \frac{d}{ds} f(x,t,su)\,ds, \quad (5.14)$$

$$|f(x,t,u(x,t))|_{0;D_T} \leqslant |f(x,t,0)|_{0;D_T} +$$
$$+ |f_u(x,t,u(x,t))|_{0;D_T} |u(x,t)|_{0;D_T} \leqslant K_3(1 + |u(x,t)|_{0;D_T}). \quad (5.15)$$

Теперь получим оценку величины $[f(x,t,u(x,t))]_{\alpha/2,\alpha;D_T}$. Действительно, имеем:

$$f(x_1,t_2,u_1) - f(x_2,t_2,u_2) = \int\limits_0^1 \frac{d}{ds} f(x_s,t_s,u_s)\,ds =$$
$$= \int\limits_0^1 \frac{\partial f(x_s,t_s,u_s)}{\partial x_s}\,ds\,[x_1 - x_2] + \int\limits_0^1 \frac{\partial f(x_s,t_s,u_s)}{\partial t_s}\,ds\,[t_1 - t_2] +$$
$$+ \int\limits_0^1 \frac{\partial f(x_s,t_s,u_s)}{\partial u_s}\,ds[u_1 - u_2], \quad (5.16)$$

$$x_s = sx_1 + (1-s)x_2, \quad t_s = st_1 + (1-s)t_2, \quad u_s = su_1 + (1-s)u_2,$$

$$[f(x,t,u(x,t))]_{\alpha/2,\alpha;D_T} \leqslant$$
$$\leqslant K_3\left(d_1^{1-\alpha} + T^{1-\alpha/2} + [u(x,t)]_{\alpha/2,\alpha;D_T}\right), \quad (5.17)$$

$$d_1 := \sup_{x_1,x_2\in\Omega} |x_1 - x_2|.$$

Итак, учитывая в совокупности (5.15) и (5.17) приходим к искомой оценке:

$$|f(x,t,u(x,t))|_{\alpha/2,\alpha;D_T} \leqslant \\ \leqslant K_3\left(1 + d_1^{1-\alpha} + T^{1-\alpha/2} + K_2 + [u(x,t)]_{\alpha/2,\alpha;D_T}\right). \tag{5.18}$$

С учетом оценки Шаудера (5.8) получим оценку:

$$|u(x,t)|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D_T} \leqslant KK_3[u(x,t)]_{\alpha/2,\alpha;D_T} + M_1, \tag{5.19}$$

$$M_1 := K\Big(K_3\left(1 + d_1^{1-\alpha} + T^{1-\alpha/2} + K_2\right) + \\ + |g(x,t)|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D_T}\Big). \tag{5.20}$$

Осталось воспользоваться интерполяционным неравенством (см. [4]) следующего вида:

$$[u(x,t)]_{\alpha/2,\alpha;D_T} \leqslant \varepsilon_1|u(x,t)|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D_T} + \frac{c_1}{\varepsilon_1^{\alpha/2}}|u(x,t)|_{0;D_T}, \tag{5.21}$$

где постоянная $c_1 = c_1(N,\alpha) > 0$ и от $\varepsilon_1 > 0$ не зависит. Тогда выполняя замену

$$\varepsilon = KK_3\varepsilon_1,$$

из (5.21) получим неравенство:

$$KK_3[u(x,t)]_{\alpha/2,\alpha;D_T} \leqslant \varepsilon|u(x,t)|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D_T} + \\ + \frac{c_1(KK_3)^{1+\alpha/2}}{\varepsilon^{\alpha/2}}|u(x,t)|_{0;D_T}, \quad \varepsilon \in (0,1). \tag{5.22}$$

Из неравенств (5.19) и (5.22) следует оценка:

$$|u(x,t)|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D_T} \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon}\left(M_1 + \frac{M_2}{\varepsilon^{\alpha/2}}\right), \tag{5.23}$$

где

$$M_2 := c_1K_2(KK_3)^{1+\alpha/2}.$$

Для простоты положим в неравенстве (5.23) параметр $\varepsilon = 1/2$ и получим искомую оценку:

$$|u(x,t)|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D_T} \leqslant 2M_1 + 2^{1+\alpha/2}M_2 := M, \tag{5.24}$$

где

$$M = 2K\Big(K_3\left(1 + d_1^{1-\alpha} + T^{1-\alpha/2} + K_2\right) + K_1\Big) + \\ + 2^{1+\alpha/2}c_1K_2(KK_3)^{1+\alpha/2}. \tag{5.25}$$

Лемма доказана.

При некоторых ограничениях на функцию $f(x,t,u)$

$$f(x,t,p) \in \mathbb{C}^{(1)}(\overline{D}_T \times \mathbb{R}), \quad f(x,t,0) \not\equiv 0, \quad f_p(x,t,p) \leqslant 0. \tag{5.26}$$

получим априорную оценку (5.11). Перепишем задачу (5.1) и (5.2) в следующем виде:

$$u_t(x,t) - Lu(x,t) = f(x,t,0) + F(x,t,u(x,t)) \quad \text{для} \quad (x,t) \in D_T \cup B_T, \tag{5.27}$$

$$u(x,t) = g(x,t) \quad \text{для} \quad (x,t) \in S_T \cup B, \tag{5.28}$$

$$F(x,t,u) := f(x,t,u) - f(x,t,0), \quad F_u(x,t,u) \leqslant 0.$$

Теперь рассмотрим следующие два барьера:

$$v_1(t) := -t \sup_{(x,t)\in D_T \cup B_T} |f(x,t,0)| - \sup_{(x,t)\in S_T \cup B} |g(x,t)|, \tag{5.29}$$

$$v_2(t) := t \sup_{(x,t)\in D_T \cup B_T} |f(x,t,0)| + \sup_{(x,t)\in S_T \cup B} |g(x,t)|. \tag{5.30}$$

Справедливы следующие дифференциальные неравенства:

$$\begin{aligned} v_{1t}(t) - Lv_1(t) = -\sup_{(x,t)\in D_T \cup B_T} |f(x,t,0)| - c(x,t)v_1(t) \leqslant \\ \leqslant f(x,t,0) \leqslant f(x,t,0) + F(x,t,v_1(t)) = \\ = f(x,t,v_1(t)) \quad \text{для} \quad (x,t) \in D_T \cup B_T, \end{aligned} \tag{5.31}$$

$$v_1(t) \leqslant -\sup_{(x,t)\in S_T \cup B} |g(x,t)| \leqslant g(x,t) \quad \text{для} \quad (x,t) \in S_T \cup B, \tag{5.32}$$

$$\begin{aligned} v_{2t}(t) - Lv_2(t) = \sup_{(x,t)\in D_T \cup B_T} |f(x,t,0)| - c(x,t)v_2(t) \geqslant \\ \geqslant f(x,t,0) \geqslant f(x,t,0) + F(x,t,v_2(t)) = \\ = f(x,t,v_2(t)) \quad \text{для} \quad (x,t) \in D_T \cup B_T, \end{aligned} \tag{5.33}$$

$$v_2(t) \geqslant \sup_{(x,t)\in S_T \cup B} |g(x,t)| \geqslant g(x,t) \quad \text{для} \quad (x,t) \in S_T \cup B, \tag{5.34}$$

поскольку

$$\begin{aligned} F_p(x,t,p) \leqslant 0, \quad F(x,t,0) = 0, \quad v_1(t) \leqslant 0 \leqslant v_2(t) \Rightarrow \\ \Rightarrow F(x,t,v_1) \geqslant F(x,t,0) = 0 \geqslant F(x,t,v_2). \end{aligned} \tag{5.35}$$

В силу теоремы 3 из лекции 14 приходим к выводу о том, что выполнены неравенства:

$$v_1(t) \leqslant u(x,t) \leqslant v_2(t) \quad \text{для} \quad (x,t) \in \overline{D}_T, \tag{5.36}$$

с учетом которых получаем неравенство:

$$|u(x,t)|_{0;D_T} \leqslant K_2 = T \sup_{(x,t)\in D_T\cup B_T} |f(x,t,0)| + \sup_{(x,t)\in S_T\cup B} |g(x,t)|. \tag{5.37}$$

Таким образом,доказана следующая

Л е м м а 3. *Если выполнены условия* (5.12), (5.26), *то для решения задачи* (5.1), (5.2) *из класса функций* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{D}_T)$ *справедлива априорная оценка* (5.13) *с постоянной* $M > 0$, *определенной равенством* (5.25), *в котором постоянная* $K_2 > 0$ *определена равенством* (5.37).

З а м е ч а н и е. Если в эллиптическом операторе L коэффициенты

$$b_j(x,t) \equiv 0 \quad \text{для} \quad (x,t) \in \overline{D}_T, \quad j = \overline{1,N}, \tag{5.38}$$

то можно рассмотреть еще два барьера:

$$v_3(x) := -\frac{d^2-|x|^2}{2m} \sup_{(x,t)\in D_T\cup B_T} |f(x,t,0)| - \sup_{(x,t)\in S_T\cup B} |g(x,t)|, \tag{5.39}$$

$$v_4(x) := \frac{d^2-|x|^2}{2m} \sup_{(x,t)\in D_T\cup B_T} |f(x,t,0)| + \sup_{(x,t)\in S_T\cup B} |g(x,t)|, \tag{5.40}$$

которые будут удовлетворять дифференциальным неравенствам:

$$\begin{aligned} v_{3t}(x) - Lv_3(x) &= -\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} a_{ii}(x,t) \sup_{(x,t)\in D_T\cup B_T} |f(x,t,0)| \leqslant \\ &\leqslant -\sup_{(x,t)\in D_T\cup B_T} |f(x,t,0)| \leqslant f(x,t,0) \leqslant f(x,t,0) + F(x,t,v_3(x)) = \\ &= f(x,t,v_3(x)) \quad \text{для} \quad (x,t)\in D_T\cup B_T, \end{aligned} \tag{5.41}$$

$$v_3(x) \leqslant -\sup_{(x,t)\in S_T\cup B} |g(x,t)| \leqslant g(x,t) \quad \text{для} \quad (x,t)\in S_T\cup B, \tag{5.42}$$

$$\begin{aligned} v_{4t}(x) - Lv_4(x) &= \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} a_{ii}(x,t) \sup_{(x,t)\in D_T\cup B_T} |f(x,t,0)| \geqslant \\ &\geqslant \sup_{(x,t)\in D_T\cup B_T} |f(x,t,0)| \geqslant f(x,t,0) \geqslant f(x,t,0) + F(x,t,v_4(x)) = \\ &= f(x,t,v_4(x)) \quad \text{для} \quad (x,t)\in D_T\cup B_T, \end{aligned} \tag{5.43}$$

$$v_4(x) \geqslant \sup_{(x,t)\in S_T\cup B} |g(x,t)| \geqslant g(x,t) \quad \text{для} \quad (x,t)\in S_T\cup B. \tag{5.44}$$

В силу теоремы 3 из лекции 14 приходим к выводу о том, что выполнены неравенства:

$$v_3(t) \leqslant u(x,t) \leqslant v_4(t) \quad \text{для} \quad (x,t)\in \overline{D}_T, \tag{5.45}$$

с учетом которых получаем неравенство:

$$|u(x,t)|_{0;D_T} \leqslant K_2 = \max_{x\in\overline{\Omega}} \left(\frac{d^2-|x|^2}{2m}\right) \sup_{(x,t)\in D_T\cup B_T} |f(x,t,0)| + \\ + \sup_{(x,t)\in S_T\cup B} |g(x,t)|. \quad (5.46)$$

В совокупности с оценкой (5.37) приходим к следующей оценке:

$$|u(x,t)|_{0;D_T} \leqslant K_2 = \min\left\{T, \max_{x\in\overline{\Omega}} \left(\frac{d^2-|x|^2}{2m}\right)\right\} \sup_{(x,t)\in D_T\cup B_T} |f(x,t,0)| + \\ + \sup_{(x,t)\in S_T\cup B} |g(x,t)|. \quad (5.47)$$

Таким образом, доказана следующая

Л е м м а 4. *Если выполнены условия* (5.12), (5.26), *то для решения задачи* (5.1), (5.2) *из класса функций* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{D}_T)$, *в которой коэффициенты*

$$b_j(x,t) \equiv 0 \quad \textit{для} \quad (x,t) \in \overline{D}_T, \quad j = \overline{1,N},$$

справедлива априорная оценка (5.13) *с постоянной* $M > 0$, *определенной равенством* (5.25), *в котором постоянная* $K_2 > 0$ *определена равенством* (5.47).

Заметим, что барьеры $v_1(t)$ и $v_2(t)$ являются нижним и верхним решениями в смысле определений 2 и 1 соответственно, а барьеры $v_3(x)$ и $v_4(x)$ являются нижним и верхним решениями при дополнительном условии (5.38). Поэтому справедлива теорема 1. Таким образом, имеет место следующая

Т е о р е м а 2. *Существует единственное решение задачи* (5.1), (5.2) *из класса функций* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{D}_T)$ *при условиях* (5.12), (5.26) *на функцию* $f(x,t,u)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем единственность решения. Пусть $u_1(x,t), u_2(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D_T \cup B_T) \cap \mathbb{C}(\overline{D}_T)$ — это два решения задачи (5.1), (5.2). Тогда образуем их разность $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$, которая будет удовлетворять задаче:

$$v_t(x,t) - Lv(x,t) - \overline{c}(x,t)v(x,t) = 0 \quad \text{для} \quad (x,t) \in D_T \cup B_T, \quad (5.48)$$

$$v(x,t) = 0 \quad \text{для} \quad (x,t) \in S_T \cup B, \quad (5.49)$$

где использовалось равенство:

$$f(x,t,u_1) - f(x,t,u_2) = \int_0^1 \frac{d}{ds} f(x,t,u_s)\,ds = \overline{c}(x,t)v(x,t), \quad (5.50)$$

$$u_s = su_1 + (1-s)u_2, \quad \overline{c}(x,t) := \int\limits_0^1 \frac{\partial f(x,t,u_s)}{\partial u_s}\, ds \leqslant 0.$$

Осталось воспользоваться теоремой единственности решения первой краевой задачи, доказанной в лекции 11.

Теорема доказана.

Обратимся к получению априорной оценки, с использованием которой будет доказана коэффициентная устойчивость и устойчивость по отношению к граничному условию задачи (5.1), (5.2). С этой целью рассмотрим две задачи:

$$u_{kt}(x,t) - L_k u_k(x,t) = f_k(x,t,u_k(x,t)) \quad \text{для} \quad (x,t) \in D_T \cup B_T, \tag{5.51}$$

$$u_k(x,t) = g_k(x,t) \quad \text{для} \quad (x,t) \in S_T \cup B, \tag{5.52}$$

$$L_k u(x,t) := \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{kij}(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{N} b_{kj}(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_j} + \\ + c_k(x,t)u(x,t), \quad k = 1,2, \tag{5.53}$$

$$f_k(x,t,p) = h_k(x,t) + F(x,t,p), \quad F(x,t,0) = 0. \tag{5.54}$$

Предположим, что относительно функции $f_k(x,t,p)$ выполнены условия (5.12) и (5.26). Образуем разность:

$$v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t). \tag{5.55}$$

Тогда функция $v(x,t)$ удовлетворяет следующей задаче:

$$v_t(x,t) - \widetilde{L}v(x,t) = h(x,t) \quad \text{для} \quad (x,t) \in D_T \cup B_T, \tag{5.56}$$

$$v(x,t) = g(x,t) \quad \text{для} \quad (x,t) \in S_T \cup B, \tag{5.57}$$

$$h(x,t) = h_1(x,t) - h_2(x,t) + \sum_{i,j=1,1}^{N,N} \left(a_{1ij}(x,t) - a_{2ij}(x,t)\right)\frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} + \\ + \sum_{j=1}^{N} \left(b_{1j}(x,t) - b_{2j}(x,t)\right)\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial x_j} + (c_1(x,t) - c_2(x,t))u_2(x,t), \tag{5.58}$$

$$g(x,t) = g_1(x,t) - g_2(x,t), \quad \overline{c}(x,t) = \int\limits_0^1 \frac{\partial F(x,t,u_s)}{\partial u_s}\, ds \leqslant 0, \tag{5.59}$$

$$u_s = su_1 + (1-s)u_2,$$

$$\widetilde{L}u(x,t) := \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{1ij}(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} + \\ + \sum_{j=1}^{N} b_{1j}(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_j} + (c_1(x,t) + \overline{c}(x,t))u(x,t). \quad (5.60)$$

Введем в рассмотрение следующие два барьера:

$$w_1(t) = -t \sup_{(x,t)\in D_T\cup B_T} |h(x,t)| - \sup_{(x,t)\in S_T\cup B} |g(x,t)|, \quad (5.61)$$

$$w_2(t) = t \sup_{(x,t)\in D_T\cup B_T} |h(x,t)| + \sup_{(x,t)\in S_T\cup B} |g(x,t)|. \quad (5.62)$$

Легко установить, что эти барьеры являются решениями следующих неравенств:

$$w_{1t}(t) - \widetilde{L}w_1(t) \leqslant h(x,t) \quad \text{для} \quad (x,t) \in D_T \cup B_T, \quad (5.63)$$

$$w_1(t) \leqslant g(x,t) \quad \text{для} \quad (x,t) \in S_T \cup B, \quad (5.64)$$

$$w_{2t}(t) - \widetilde{L}w_2(t) \geqslant h(x,t) \quad \text{для} \quad (x,t) \in D_T \cup B_T, \quad (5.65)$$

$$w_2(t) \geqslant g(x,t) \quad \text{для} \quad (x,t) \in S_T \cup B. \quad (5.66)$$

Поэтому в силу признака сравнения, доказанного в лекции 11, получим оценку:

$$|v(x,t)| \leqslant t \sup_{(x,t)\in D_T\cup B_T} |h(x,t)| + \sup_{(x,t)\in S_T\cup B} |g(x,t)|, \quad (5.67)$$

из которой следует, что

$$|v(x,t)|_{0;D_T} \leqslant T \sup_{(x,t)\in D_T\cup B_T} |h(x,t)| + \sup_{(x,t)\in S_T\cup B} |g(x,t)|, \quad (5.68)$$

причем справедлива оценка:

$$\sup_{(x,t)\in D_T\cup B_T} |h(x,t)| \leqslant \sup_{(x,t)\in D_T\cup B_T} |h_1(x,t) - h_2(x,t)| + \\ + M^{(2)} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} \sup_{(x,t)\in D_T\cup B_T} |a_{1ij}(x,t) - a_{2ij}(x,t)| + \\ + M^{(2)} \sum_{j=1}^{N} \sup_{(x,t)\in D_T\cup B_T} |b_{1j}(x,t) - b_{2j}(x,t)| +$$

$$+ M^{(2)} \sup_{(x,t)\in D_T\cup B_T} |c_1(x,t) - c_2(x,t)|, \quad (5.69)$$

где постоянная $M^{(k)} > 0$ — константа в правой части оценки (5.13), соответствующая решению $u_k(x,t)$ при $k = 1, 2$. Делая допустимую замену индексов $1 \leftrightarrow 2$, получим искомую оценку:

$$\begin{aligned}
|u_1(x,t) - u_2(x,t)|_{0;D_T} \leqslant T \min\left\{M^{(1)}, M^{(2)}\right\} \times \\
\times \Biggl(\sup_{(x,t)\in D_T\cup B_T} |h_1(x,t) - h_2(x,t)| + \\
+ \sum_{i,j=1,1}^{N,N} \sup_{(x,t)\in D_T\cup B_T} |a_{1ij}(x,t) - a_{2ij}(x,t)| + \\
+ \sum_{j=1}^{N} \sup_{(x,t)\in D_T\cup B_T} |b_{1j}(x,t) - b_{2j}(x,t)| + \\
+ \sup_{(x,t)\in D_T\cup B_T} |c_1(x,t) - c_2(x,t)| \Biggr) + \\
+ \sup_{(x,t)\in S_T\cup B} |g_1(x,t) - g_2(x,t)|, \quad (5.70)
\end{aligned}$$

из которой следует устойчивость решения по отношению к коэффициентам, правой части и граничным условиям. Действительно, достаточно заметить, что в допустимом классе

$$\begin{aligned}
W = \Bigl\{ a_{kij}(x,t),\ b_{kj}(x,t),\ c_k(x,t) \in \mathbb{C}^{\alpha/2,\alpha}(\overline{D}_T), \\
g_k(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha,2+\alpha}(\overline{D}_T),\ h_k(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D}_T) : \\
: |a_{ij}, b_j, c|_{\alpha/2,\alpha;D_T} \leqslant K_1, \quad |g_k|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D_T} \leqslant K_1, \\
|h_k(x,t)|_{0;D_T} \leqslant K_1 \Bigr\}, \quad (5.71)
\end{aligned}$$

где постоянная $K_1 > 0$ задана и поэтому

$$\min\left\{M^{(1)}, M^{(2)}\right\}$$

зависит только от $K_1 > 0$.

§ 6. Литературные указания

Материал для лекции взят из работы [24].

Лекция 19

ОЦЕНКИ ТИПА БЕРНШТЕЙНА ГРАДИЕНТА РЕШЕНИЯ

§ 1. Повышенная гладкость решения

Определим новые параболические пространства Гельдера $\mathbb{C}^{\alpha/2,\alpha}(D)$, $\mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$. Для этого сформулируем определение локально непрерывной по Гельдеру функции на множестве $D \subset \mathbb{R}^N$.

Определение 1. *Будем говорить, что функция $u(x,t)$ локально непрерывна по Гельдеру на множестве D с показателем $\alpha \in (0,1]$, если для всякого компактного множества $G \subset D$ имеем:*

$$[u(x,t)]_{\alpha/2,\alpha;G} := \sup_{z_1 \neq z_2, z_1, z_2 \in G} \frac{|u(z_1) - u(z_2)|}{\rho^\alpha(z_1,z_2)} < +\infty, \tag{1.1}$$

где $z_1 = (x_1,t_1)$, $z_2 = (x_2,t_2)$, $\rho(z_1,z_2) := |x_1 - x_2| + |t_1 - t_2|^{1/2}$. Справедлива следующая

Лемма 1. *Для того, чтобы функция $u(x,t)$ была локально непрерывной по Гельдеру в области D необходимо и достаточно, чтобы*

$$[u(x,t)]_{\alpha/2,\alpha;\text{Ц}^{R,r}_{x,t}} < +\infty, \tag{1.2}$$

$$\text{Ц}^{R,r}_{x,t} := \bigl\{(\xi,\tau) \in \mathbb{R}^{N+1} : \ |\xi - x| < R, \ t - r < \tau < t\bigr\} \tag{1.3}$$

при $R > 0$, $r > 0$ для любого $\text{Ц}^{R,r}_{x,t} \subset D$.

Доказательство. Необходимость условия следует из того, что $\overline{\text{Ц}^{R,r}_{x,t}}$ — компакт. Достаточность следует из того, что если $G \subset D$ — компакт, то он допускает конечное покрытие конечным числом цилиндров $\text{Ц}^{R_j,r_j}_{x_j,t_j}$ при $j = \overline{1,m}$ таких, что

$$G \subset \bigcup_{j=1}^m \overline{\text{Ц}^{R_j,r_j}_{x_j,t_j}} \subset D.$$

Тогда

$$[u(x,t)]_{\alpha/2,\alpha;G} \leqslant \max_{j=\overline{1,m}} [u(x,t)]_{\alpha/2,\alpha;\text{Ц}^{R,r}_{x,t}} < +\infty.$$

Лемма доказана.

Определим пространства $\mathbb{C}^{\alpha/2,\alpha}(D)$ и $\mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$.

Определение 2. *Пространство* $\mathbb{C}^{\alpha/2,\alpha}(D)$ *есть подпространство пространства функций* $u(x) \in \mathbb{C}(D)$, *которые являются локально непрерывными по Гельдеру с показателем* $\alpha \in (0,1]$.

Определение 3. *Пространство* $\mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$ *есть подпространство пространства функций* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D)$ *таких, что*

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i \partial x_j}, \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \in \mathbb{C}^{\alpha/2,\alpha}(D).$$

Пусть $D_T = \Omega \times (0,T)$ и $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область с гладкой границей Γ. Пусть, кроме того, имеются два непустых цилиндра $Ц^{R_0,r_0}_{x_0,t_0}$ и $Ц^{R_1,r_1}_{x_1,t_1}$, причем выполнены вложения:

$$\overline{Ц^{R_1,r_1}_{x_1,t_1}} \subset Ц^{R_0,r_0}_{x_0,t_0} \subset \overline{Ц^{R_0,r_0}_{x_0,t_0}} \subset D_T. \tag{1.4}$$

Предположим, что

$$a_{ij}(x,t),\ b_j(x,t),\ c(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D_T), \tag{1.5}$$

$$c(x,t) \leqslant 0 \quad \text{для} \quad (x,t) \in D_T, \tag{1.6}$$

$$Lu(x,t) := L_0 u(x,t) - \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \tag{1.7}$$

$$L_0 u(x,t) := \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} + \\ + \sum_{j=1}^{N} b_j(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_j} + c(x,t)u(x,t), \tag{1.8}$$

где оператор L_0 является равномерно эллиптическим в области D_T. Тогда имеет место следующая *внутренняя оценка Шаудера*:

$$|u(x,t)|_{\alpha/2,\alpha;Ц^{R_1,r_1}_{x_1,t_1}} \leqslant M_{sh} \left[|Lu(x,t)|_{\alpha/2,\alpha;Ц^{R_0,r_0}_{x_0,t_0}} + |u(x,t)|_{0;Ц^{R_0,r_0}_{x_0,t_0}} \right], \tag{1.9}$$

где постоянная $M_{sh} = M_{sh}(d_0, \lambda, \Lambda, a) > 0$,

$$0 < d_0 \leqslant d := \mathrm{distance}\{Ц^{R_0,r_0}_{x_0,t_0}, Ц^{R_1,r_1}_{x_1,t_1}\} > 0,$$

$$a := \max\left\{ |a_{ij}|_{\alpha/2,\alpha;Ц^{R_0,r_0}_{x_0,t_0}}, |b_j|_{\alpha/2,\alpha;Ц^{R_0,r_0}_{x_0,t_0}}, |c|_{\alpha/2,\alpha;Ц^{R_0,r_0}_{x_0,t_0}} \right\},$$

$$\lambda := \inf_{(x,t)\in D_T, |\xi|=1} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j, \quad \Lambda := \sup_{(x,t)\in D_T} \sum_{i=1}^{N} a_{ii}(x,t).$$

Рассмотрим в произвольном ограниченном цилиндре $D_T \subset \mathbb{R}^N$ следующее уравнение:

$$Lu(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in D_T, \ f(x,t) \in \mathbb{C}^{\alpha/2,\alpha}(D_T). \tag{1.10}$$

Справедлив первый результат:
Лемма 2. *Если* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D_T)$ *— решение уравнения* (1.10) *и выполнены условия* (1.5), (1.6), (1.10), *то* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D_T)$.

Доказательство. Пусть $Ц^{R_0,r_0}_{x_0,t_0}$ — произвольный не пустой цилиндр такой, что $\overline{Ц^{R_0,r_0}_{x_0,t_0}} \subset D_T$. Рассмотрим следующую задачу Дирихле:

$$Lv(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in \overline{Ц^{R_0,r_0}_{x_0,t_0}}, \tag{1.11}$$

$$v(x,t) = u(x,t), \quad (x,t) \in S \cup B, \tag{1.12}$$

где $S = \partial O(x_0,R_0) \times [t_0 - r_0, t_0]$, $B = O(x_0,R_0) \times \{t=0\}$. В силу теоремы 10 из главы III работы [14] существует решение этой задачи в классе функций $v(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}\left(\overline{Ц^{R_0,r_0}_{x_0,t_0}}\right)$, а в силу единственности решения получаем, что

$$u(x,t) = v(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}\left(\overline{Ц^{R_0,r_0}_{x_0,t_0}}\right).$$

В силу произвольности цилиндра $Ц^{R_0,r_0}_{x_0,t_0}$ и в соответствии с леммой 1 получаем, что $u(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D_T)$.

Лемма доказана.

Справедлива следующая
Теорема 1. *Если* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D_T)$ *— решение уравнения* (1.10), *причем*

$$a_{ij}(x,t),\ b_j(x,t),\ c(x,t),\ f(x,t) \in \mathbb{C}^{\alpha/2,\alpha}(D_T),\ k = \overline{1,N}, \tag{1.13}$$

$$\frac{\partial a_{ij}(x,t)}{\partial x_k},\ \frac{\partial b_j(x,t)}{\partial x_k},\ \frac{\partial c(x,t)}{\partial x_k},\ \frac{\partial f(x,t)}{\partial x_k} \in \mathbb{C}^{\alpha/2,\alpha}(D_T),\ k = \overline{1,N}, \tag{1.14}$$

то $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(3,1)}_{x,t}(D_T)$ *и*

$$\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k},\ \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_k \partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t \partial x_k} \in \mathbb{C}^{\alpha/2,\alpha}(D_T) \tag{1.15}$$

при $i,j,k = \overline{1,N}$.

Доказательство. *Шаг 1.* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D_T)$. Из условий теоремы и леммы 2 следует, что $u(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha 2,2+\alpha}(D_T)$.

Шаг 2. $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(3,1)}_{x,t}(D_T)$. Пусть $\{O, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_N, \mathbf{e}_{N+1}\}$ — некоторая прямоугольная декартова система координат в $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}^{N+1}$. Определим разностный оператор:

$$\delta_k^h v(x,t) := \frac{v(x+h\mathbf{e}_k, t) - v(x,t)}{h}, \quad k = \overline{1,N}. \tag{1.16}$$

Для любых $x, x + h\mathbf{e}_k \in \Omega$ справедливы равенства:

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{N} b_j(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_j} + \\ + c(x,t)u(x,t) - \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = f(x,t), \tag{1.17}$$

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x+h\mathbf{e}_k,t)\frac{\partial^2 u(x+h\mathbf{e}_k,t)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{N} b_j(x+h\mathbf{e}_k,t)\frac{\partial u(x+h\mathbf{e}_k,t)}{\partial x_j} + \\ + c(x+h\mathbf{e}_k,t)u(x+h\mathbf{e}_k,t) - \frac{\partial u(x+h\mathbf{e}_k,t)}{\partial t} = f(x+h\mathbf{e}_k,t). \tag{1.18}$$

Вычитая из равенства (1.17) равенство (1.18) и путем деления на $h \neq \neq 0$, получим следующее равенство:

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 \delta_k^h u(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{N} b_j(x,t)\frac{\partial \delta_k^h u(x,t)}{\partial x_j} + \\ + c(x,t)\delta_k^h u(x,t) - \frac{\partial \delta_k^h u(x,t)}{\partial t} = F_h(x,t), \tag{1.19}$$

$$F_h(x,t) := \delta_k^h f(x,t) - \sum_{i,j=1,1}^{N,N} \delta_k^h a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u(x+h\mathbf{e}_k,t)}{\partial x_i \partial x_j} - \\ - \sum_{j=1}^{N} \delta_k^h b_j(x,t)\frac{\partial u(x+h\mathbf{e}_k,t)}{\partial x_j} - \delta_k^h c(x,t)u(x+h\mathbf{e}_k,t). \tag{1.20}$$

Заметим, что справедливы следующие равенства:

$$\delta_k^h f(x,t) = \frac{1}{h}\left[f(x+h\mathbf{e}_k,t) - f(x,t)\right] = \frac{1}{h}\int_0^1 \frac{d}{ds} f(x+sh\mathbf{e}_k,t)\,ds =$$

$$
= \frac{1}{h}\int\limits_0^1 \sum_{j=1}^N \frac{\partial f(x+sh\mathbf{e}_k,t)}{\partial x_{sj}}\frac{dx_{sj}}{ds}\,ds = \frac{1}{h}\int\limits_0^1 \frac{\partial f(x+sh\mathbf{e}_k,t)}{\partial x_{sk}}\,ds\cdot h =
$$

$$
= \int\limits_0^1 \frac{\partial f(x+sh\mathbf{e}_k,t)}{\partial x_{sk}}\,ds, \quad x_s = x+sh\mathbf{e}_k. \qquad (1.21)
$$

Пусть $O(x_0,R_0)$ — произвольный непустой шар такой, что $\overline{O(x_0,R_0)}\subset$ $\subset\Omega$. Пусть $h_0>0$ настолько мало, что

$$
\overline{O(x_0,R_0+h_0)}\subset\Omega.
$$

Тогда при $0<|h|<h_0$ имеем:

$$
|x+sh\mathbf{e}_k-x_0|\leqslant|x-x_0|+h_0\leqslant R_0+h_0
$$

для любого $x\in O(x_0,R_0)$, т.е. если $x\in O(x_0,R_0)$, то $x+sh\mathbf{e}_k\in$ $\in O(x_0,R_0+h_0)$. Заметим, что в силу равенств (1.21) справедливы соотношения:

$$
\delta_k^h f(x,t_1)-\delta_k^h f(y,t_2) = \int\limits_0^1 \left[\frac{\partial f(x+sh\mathbf{e}_k,t_1)}{\partial x_{sk}} - \frac{\partial f(y+sh\mathbf{e}_k,t_2)}{\partial y_{sk}}\right] ds, \qquad (1.22)
$$

$$
x_s = x+sh\mathbf{e}_k, \quad y_s = y+sh\mathbf{e}_k
$$

для любых $(x,t_1),(y,t_2)\in \text{Ц}_{x_0,t_0}^{R_0,r_0}$ Тогда из (1.21) и (1.22) следует оценка:

$$
\left|\delta_k^h f(x,t)\right|_{\alpha/2,\alpha;\text{Ц}_{x_0,t_0}^{R_0,r_0}} \leqslant \left|\frac{\partial f(x,t)}{\partial x_k}\right|_{\alpha/2,\alpha;\text{Ц}_{x_0,t_0}^{R_0+h_0,r_0}}. \qquad (1.23)
$$

Окончательно имеем:

$$
\left|\delta_k^h f(x,t)\right|_{\alpha/2,\alpha;\text{Ц}_{x_0,t_0}^{R_0,r_0}} \leqslant M, \qquad (1.24)
$$

где $M>0$ и от h не зависит. Для простоты все постоянные, не зависящие от h, будем обозначать той же буквой M. Совершенно таким же образом, как и при выводу оценки (1.24) можно доказать следующие неравенства:

$$
\left|\delta_k^h a_{ij}(x,t)\right|_{\alpha/2,\alpha;\text{Ц}_{x_0,t_0}^{R_0,r_0}} \leqslant M, \qquad (1.25)
$$

$$
\left|\delta_k^h b_j(x,t)\right|_{\alpha/2,\alpha;\text{Ц}_{x_0,t_0}^{R_0,r_0}} \leqslant M, \qquad (1.26)
$$

$$
\left|\delta_k^h c(x,t)\right|_{\alpha/2,\alpha;\text{Ц}_{x_0,t_0}^{R_0,r_0}} \leqslant M. \qquad (1.27)
$$

Кроме того, в силу результата шага 1 имеем:

$$u(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D_T) \subset \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}\left(\text{Ц}^{R_0+h_0,r_0}_{x_0,t_0}\right).$$

Поэтому справедлива оценка:

$$|u(x+h\mathbf{e}_k,t)|_{\alpha/2,\alpha;\text{Ц}^{R_0+h_0,r_0}_{x_0,t_0}} \leqslant M. \tag{1.28}$$

Таким образом, из оценок (1.24)–(1.28) следует, что

$$|F_h(x,t)|_{\alpha/2,\alpha;\text{Ц}^{R_0,r_0}_{x_0,t_0}} \leqslant M. \tag{1.29}$$

Кроме того, аналогично оценке (1.23) можно доказать оценку:

$$\left|\delta^h_k u(x,t)\right|_{\alpha/2,\alpha;\text{Ц}^{R_0,r_0}_{x_0,t_0}} \leqslant \left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_k}\right|_{\alpha/2,\alpha;\text{Ц}^{R_0+h_0,r_0}_{x_0,t_0}} \leqslant M. \tag{1.30}$$

Теперь заметим, что для решения $\delta^h_k u(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{\text{Ц}^{R_0,r_0}_{x_0,t_0}})$ уравнения (1.19), которое, очевидно, существует в этом классе, справедлива внутренняя оценка Шаудера (1.9):

$$|\delta^h_k u(x,t)|_{\alpha/2,\alpha;\text{Ц}^{R_1,r_1}_{x_1,t_1}} \leqslant M_{sh}\left[|F_h(x,t)|_{\alpha/2,\alpha;\text{Ц}^{R_0,r_0}_{x_0,t_0}} + |\delta^h_k u(x,t)|_{0;\text{Ц}^{R_0,r_0}_{x_0,t_0}}\right] \leqslant \leqslant 2MM_{sh} = D_1 \tag{1.31}$$

для любого цилиндра $\text{Ц}^{R_1,r_1}_{x_1,t_1}$ такого, что

$$\overline{\text{Ц}^{R_1,r_1}_{x_1,t_1}} \subset \text{Ц}^{R_0,r_0}_{x_0,t_0}, \quad d_0 \leqslant d := \text{distance}\{\text{Ц}^{R_1,r_1}_{x_1,t_1}, \text{Ц}^{R_0,r_0}_{x_0,t_0}\},$$

где $d_0 > 0$ — заданное достаточно малое число, а постоянная $D_1 > > 0$ и не зависит от h. С одной стороны, точно так же как при доказательстве леммы 1 из лекции 15 можно доказать, что семейство функций $\{\delta^h_k u(x,t)\}$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно в $\mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}\left(\overline{\text{Ц}^{R_1,r_1}_{x_1,t_1}}\right)$ и поэтому по теореме Арцела любая последовательность функций $\{\delta^{h_n}_k u(x,t) : n \in \mathbf{N}\}$ из множества $\{\delta^h_k u(x,t)\}$ содержит равномерно сходящуюся в $\mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}\left(\overline{\text{Ц}^{R_1,r_1}_{x_1,t_1}}\right)$ подпоследовательность:

$$\delta^{h_n}_k u(x,t) \to w_k(x,t) \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}\left(\overline{\text{Ц}^{R_1,r_1}_{x_1,t_1}}\right) \tag{1.32}$$

при $n \to +\infty$, причем

$$w_k(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{\text{Ц}^{R_1,r_1}_{x_1,t_1}}). \tag{1.33}$$

С другой стороны, в силу (1.21) справедливо равенство:

$$\delta_k^h u(x,t) - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_k} = \int\limits_0^1 \left[\frac{\partial u(x_s,t)}{\partial x_{sk}} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_k} \right] ds, \tag{1.34}$$

где $x_s = x + sh\mathbf{e}_k$. Отсюда следует неравенство:

$$\begin{aligned} &\left| \delta_k^h u(x,t) - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_k} \right|_{0;\overline{\text{Ц}_{x_1,t_1}^{R_1,r_1}}} \leqslant \\ &\qquad \leqslant \sup_{(x,t,s)\in\overline{\text{Ц}_{x_1,t_1}^{R_1,r_1}}\times[0,1]} \left| \frac{\partial u(x_s,t)}{\partial x_{sk}} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_k} \right| \leqslant \\ &\qquad \leqslant \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} \right|_{\alpha/2,\alpha;\overline{\text{Ц}_{x_0,t_0}^{R_0+h_0,r_0}}} \sup_{(x,t,s)\in\overline{\text{Ц}_{x_1,t_1}^{R_1,r_1}}\times[0,1]} |x + sh\mathbf{e}_k - x|^\alpha = \\ &\qquad = \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} \right|_{\alpha/2,\alpha;\overline{\text{Ц}_{x_0,t_0}^{R_0+h_0,r_0}}} |h|^\alpha \to +0 \quad \text{при} \quad h \to 0. \end{aligned} \tag{1.35}$$

Значит,

$$\delta_k^h(x,t) \rightrightarrows \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_k} \quad \text{равномерно в} \quad \overline{\text{Ц}_{x_1,t_1}^{R_1,r_1}} \quad \text{при} \quad h \to 0. \tag{1.36}$$

Поэтому существует последовательность $\{h_n\}$ такая, что

$$h_n \to +0$$

и при этом

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} \delta_k^{h_n}(x,t) \rightrightarrows \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x_j \partial x_i \partial x_k} \quad \text{равномерно в} \quad \overline{\text{Ц}_{x_1,t_1}^{R_1,r_1}} \tag{1.37}$$

при $n \to +\infty$. Тогда получаем, что $u(x,t) \in \mathbb{C}_{x,t}^{(3,1)}(D_T)$ и справедливы свойства (1.15).

Теорема доказана.

Аналогичным образом можно доказать следующую теорему:

Теорема 2. *Если* $u(x,t) \in \mathbb{C}_{x,t}^{(2,1)}(D_T)$ *— решение уравнения* (1.10), *причем*

$$a_{ij}(x,t),\ b_j(x,t),\ c(x,t),\ f(x,t) \in \mathbb{C}^{\alpha/2,\alpha}(D_T),\ k = \overline{1,N}, \tag{1.38}$$

$$\frac{\partial a_{ij}(x,t)}{\partial t},\ \frac{\partial b_j(x,t)}{\partial t},\ \frac{\partial c(x,t)}{\partial t},\ \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} \in \mathbb{C}^{\alpha/2,\alpha}(D_T),\ k = \overline{1,N}, \tag{1.39}$$

тогда $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,2)}_{x,t}(D_T) \cap \mathbb{C}^{(2+1)}(D_T)$ *и*

$$\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x_i \partial x_j \partial t} = \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x_i \partial t \partial x_j} = \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial t \partial x_i \partial x_j} \in \mathbb{C}^{\alpha/2,\alpha}(D_T), \tag{1.40}$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \in \mathbb{C}^{\alpha/2,\alpha}(D_T). \tag{1.41}$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть разностный оператор:

$$\delta^h_t v(x,t) := \frac{v(x,t+h) - v(x,t)}{h}.$$

Далее дословно повторить рассуждения предыдущей теоремы.

Теорема доказана.

§ 2. Оценка Бернштейна градиента решения

Рассмотрим следующее нелинейное уравнение:

$$L(u) := \Delta u(x,t) - \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + f(x,t,u,D_x u) = 0 \quad \text{для} \quad x \in \Omega, \tag{2.1}$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область с гладкой границей Γ и $f = f(x,t,p,p_1,\ldots,p_N) \in \mathbb{C}^{(1)}(D_T \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$. Предположим, что решение $u(x)$ уравнения (2.1) принадлежит классу $\mathbb{C}^{(3,1)}_{x,t}(D_T) \cap \mathbb{C}^{(1+1)}(D_T)$. Тогда продифференцировав обе части уравнения (2.1) по переменной x_k, $k = \overline{1,N}$, получим равенство:

$$\Delta \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_j \partial x_k} + \\ + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_k} + \frac{\partial f}{\partial x_k} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t \partial x_k} = 0, \tag{2.2}$$

которое умножим на:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_k}$$

и просуммируем по $k = 1, N$. В результате получим следующее равенство:

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_k} \Delta \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial p_j} \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_k} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j \partial x_k} + \\ + \frac{\partial f}{\partial p} \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_k} \right)^2 + \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_k} -$$

$$
-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_k}\right)^2 = 0. \qquad (2.3)
$$

Преобразуем некоторые слагаемые, входящие в (2.3):

$$
\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_k}\Delta\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^{N}\operatorname{div}\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_k}D_x\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_k}\right) -
$$

$$
-\sum_{k=1}^{N}\left(D_x\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_k}, D_x\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_k}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\Delta\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_k}\right)^2 -
$$

$$
-\sum_{j,k=1,1}^{N,N}\left(\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_j \partial x_k}\right)^2 = \frac{1}{2}\Delta v(x,t) -
$$

$$
-\sum_{j,k=1,1}^{N,N}\left(\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_j \partial x_k}\right)^2, \quad v(x,t) := |D_x u(x,t)|^2, \qquad (2.4)
$$

$$
\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial p_j}\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_k}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial v(x,t)}{\partial x_j}, \qquad (2.5)
$$

$$
\frac{\partial f}{\partial p}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_k}\right)^2 = \frac{\partial f}{\partial p}v(x,t). \qquad (2.6)
$$

Таким образом, из (2.3) с учетом (2.4)–(2.6) получим уравнение:

$$
\Delta v(x,t) - \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} - 2\sum_{j,k=1,1}^{N,N}\left(\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_j \partial x_k}\right)^2 +
$$

$$
+\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial v(x,t)}{\partial x_j} + 2\frac{\partial f}{\partial p}v(x,t) + 2\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_k} = 0, \qquad (2.7)
$$

которое можно переписать в следующем виде:

$$
\Delta v(x,t) - \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} - 2\sum_{j,k=1,1}^{N,N}\left(\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_j \partial x_k}\right)^2 +
$$

$$
+\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial v(x,t)}{\partial x_j} + 2\left(d_{x,p}f\right)v(x,t) = 0, \qquad (2.8)
$$

где

$$
d_{x,p} = \frac{\partial}{\partial p} + \frac{1}{p_1^2 + \cdots + p_N^2}\sum_{k=1}^{N}p_k\frac{\partial}{\partial x_k}. \qquad (2.9)
$$

Действительно, имеют место следующие равенства:

$$\frac{\partial f}{\partial p} v(x,t) + \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_k} = \frac{\partial f}{\partial p} v(x,t) + \sum_{k=1}^{N} p_k \frac{\partial f}{\partial x_k} =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial p} v(x,t) + \frac{1}{p_1^2 + \cdots + p_N^2} \sum_{k=1}^{N} p_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \left(p_1^2 + \cdots + p_N^2\right) =$$
$$= \left[\left(\frac{\partial}{\partial p} + \frac{1}{p_1^2 + \cdots + p_N^2} \sum_{k=1}^{N} p_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right) f\right] v(x,t). \quad (2.10)$$

Заметим, что справедливо неравенство Шварца:

$$\left(\sum_{j,k=1,1}^{N,N} a_{jk} b_{jk}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{j,k=1,1}^{N,N} a_{jk}^2\right) \left(\sum_{j,k=1,1}^{N,N} b_{jk}^2\right) \qquad (2.11)$$

для любых матриц (a_{jk}) и (b_{jk}) размера $N \times N$, из которого при

$$a_{jk} = \delta_{jk}, \quad b_{jk} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_j \partial x_k}$$

следует оценка:

$$(\Delta u(x,t))^2 = \left(\sum_{j,k=1,1}^{N,N} \delta_{jk} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_j \partial x_k}\right)^2 \leqslant$$
$$\leqslant \left(\sum_{j,k=1,1}^{N,N} \delta_{jk}^2\right) \left(\sum_{j,k=1,1}^{N,N} \left(\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_j \partial x_k}\right)^2\right) =$$
$$= N \sum_{j,k=1,1}^{N,N} \left(\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_j \partial x_k}\right)^2, \quad (2.12)$$

а также оценка снизу:

$$\sum_{j,k=1,1}^{N,N} \left(\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_j \partial x_k}\right)^2 \geqslant \frac{1}{N} (\Delta u(x,t))^2 = \frac{f^2}{N}, \qquad (2.13)$$

поскольку $u(x) \in \mathbb{C}_{x,t}^{(3,1)}(D_T) \cap \mathbb{C}^{(1+1)}(D_T)$ — решение уравнения (2.1). С учетом неравенства (2.13) из уравнения (2.8) получаем неравенства:

$$\Delta v(x,t) - \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial v(x,t)}{\partial x_j} =$$

$$= 2 \sum_{j,k=1,1}^{N,N} \left(\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_j \partial x_k} \right)^2 - 2(d_{x,p} f) v(x,t) \geqslant$$

$$\geqslant 2 \left(\frac{f^2}{N} - (d_{x,p} f) v(x,t) \right) \geqslant 0 \quad \text{для} \quad (x,t) \in D_T, \quad (2.14)$$

если выполнено следующее условие на функцию $f = f(x,t,p,p_1,\ldots,p_N):$

$$f^2 \geqslant N(p_1^2 + \cdots + p_N^2)(d_{x,p} f). \quad (2.15)$$

Используя признак сравнения, доказанный в лекции 11, получим следующую априорную оценку:

$$v(x,t) \leqslant \sup_{(x,t) \in S_T \cup B} v(x,t) \quad \text{для} \quad (x,t) \in D_T, \quad (2.16)$$

из которого следует искомая оценка градиента решения:

$$|D_x u(x,t)| \leqslant \sup_{(x,t) \in S_T \cup B} |D_x u(x,t)| \quad \text{для} \quad (x,t) \in D_T. \quad (2.17)$$

Таким образом, доказана следующая

Т е о р е м а 3. *Если для функции* $f(x,t,p,p_1,\ldots,p_N) \in \mathbb{C}^{(1)}(D_T \times \mathbb{R} \times \times \mathbb{R}^N)$ *выполнено неравенство* (2.15), *то для решений* $u(x,t) \in \in \mathbb{C}^{(3,1)}_{x,t}(D_T) \cap \mathbb{C}^{(1+1)}(D_T)$ *уравнения* (2.1) *справедлива априорная оценка* (2.17).

Перейдем к получению априорной оценки производной по времени решения уравнения (2.1). С этой целью в классе функций $u(x,t) \in \in \mathbb{C}^{(2+1)}(D_T \cup B_T) \cap \mathbb{C}^{(0,1)}_{x,t}(\overline{D}_T)$ продифференцируем по t обе части равенства (2.1) и получим уравнение:

$$\Delta v(x,t) - \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + \sum_{j=1}^{N} f_{p_j} \frac{\partial v(x,t)}{\partial x_j} + f_p v(x,t) = -f_t, \quad (2.18)$$

где

$$v(x,t) := \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \quad f = f(x,t,p,p_1,\ldots,p_N) \in \mathbb{C}^{(1)}(\overline{D}_T \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N),$$

Потребуем выполнения условия

$$f_p(x,t,p,p_1,\ldots,p_N) \leqslant 0, \quad (x,t,p,p_1,\ldots,p_N) \in \overline{D}_T \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N. \quad (2.19)$$

Осталось воспользоваться априорной оценкой для задачи (3.6), (3.7) из лекции 11 и получить такую оценку:

$$\sup_{(x,t) \in \overline{D}_T} \left| \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right| \leqslant \max\{M_1, M_2\}, \quad (2.20)$$

$$M_1 := \sup_{(x,t)\in D_T\cup B_T, p\in[-M,M],(p_1,...,p_N)\in\mathbb{R}^N} \left|\frac{f_t(x,t,p,p_1,\ldots,p_N)}{f_p(x,t,p,p_1,\ldots,p_N)}\right|, \quad (2.21)$$

$$M_2 := \sup_{(x,t)\in S_T\cup B}\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|, \quad M := \sup_{(x,t)\in \overline{D}_T}|u(x,t)|. \quad (2.22)$$

§ 3. Оценки градиента решения на параболической границе

Пусть $D_T = \Omega\times(0,T)$, $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ — ограниченная область с гладкой границей $\Gamma\in\mathbb{C}^{1,\alpha}$ при $\alpha\in(0,1]$, причем граница Γ обладает следующим свойством *равномерной сферичности извне*.

Определение 4. *Будем говорить, что граница $\Gamma\in\mathbb{R}^N$ обладает свойством равномерной сферичности извне, если для любой точки $x_0\in\Gamma$ найдется такой шар $O(y,R)$, что*

$$\overline{O(y,R)}\cap\overline{\Omega} = \overline{O(y,R)}\cap\Gamma = \{x_0\},$$

причем существует такое $R_0 = R_0(\Gamma) > 0$, что $R \geqslant R_0$.

Пусть $u(x,t)\in\mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D_T\cup B_T)\cap\mathbb{C}^{(1,0)}_{x,t}(\overline{D}_T)$ — решение следующей задачи:

$$L(u)(x,t) := \Delta u(x,t) - \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \\ + f(x,t,u(x,t),D_x u(x,t)) = 0 \quad (x,t)\in D_T\cup B_T, \quad (3.1)$$

$$u(x,t) = 0 \quad \text{для} \quad (x,t)\in S_T\cup B, \quad (3.2)$$

причем функция $f(x,t,p,p_1,\ldots,p_N)\in\mathbb{C}(\overline{D}_T\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N)$. Определим нелинейный оператор:

$$\overline{L}(v)(x,t) := \Delta v(x,t) - \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + f(x,t,u(x,t),D_x v(x,t)), \quad (3.3)$$

где $u(x,t)\in\mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D_T\cup B_T)\cap\mathbb{C}^{(1,0)}_{x,t}(\overline{D}_T)$ — решение задачи (3.1), (3.2).

Признак сравнения. Пусть функции $u_1(x,t), u_2(x,t)\in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(U_T\cup B_T)\cap\mathbb{C}(\overline{U}_T)$, где $U_T = U\times(0,T)$, $B_T = U\times\{t=T\}$, и удовлетворяют следующей задаче:

$$\overline{L}(u_1)(x,t)\geqslant\overline{L}(u_2)(x,t) \quad \text{для} \quad (x,t)\in U_T\cup B_T, \quad (3.4)$$

$$u_1(x,t)\leqslant u_2(x,t) \quad \text{для} \quad (x,t)\in S_T\cup B, \quad (3.5)$$

где $S_T = \partial U\times[0,T]$, $B = U\times\{t=0\}$. Рассмотрим разность этих решений $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$, которая удовлетворяет следующим неравенствам:

$$\Delta v(x,t) + \sum_{j=1}^N \overline{b}_j(x,t)\frac{\partial v(x,t)}{\partial x_j} - \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} \geqslant 0 \quad \text{для} \quad (x,t)\in D_T\cup B_T, \quad (3.6)$$

$$v(x,t) \leqslant 0 \quad \text{для} \quad (x,t) \in S_T \cup B, \tag{3.7}$$

где использовалось следующее равенство:

$$f(x,t,u,D_x u_1) - f(x,t,u,D_x u_2) = \int\limits_0^1 \frac{d}{ds} f(x,t,u,D_x u_s)\, ds =$$

$$= \sum_{j=1}^N \overline{b}_j(x,t) \frac{\partial v(x,t)}{\partial x_j}, \quad u_s = s u_1 + (1-s) u_2, \tag{3.8}$$

$$\overline{b}_j(x,t) := \int\limits_0^1 \frac{\partial f(x,t,u,p_1,\ldots,p_N)}{\partial p_j}\, ds, \quad p_j := \frac{\partial u_s(x,t)}{\partial x_j}. \tag{3.9}$$

Стандартным образом из (3.6), (3.7) получаем, что

$$v(x,t) \leqslant 0 \quad \text{для} \quad (x,t) \in \overline{U}_T \Rightarrow$$
$$\Rightarrow u_1(x,t) \leqslant u_2(x,t) \quad \text{для} \quad (x,t) \in \overline{U}_T. \tag{3.10}$$

Предположим, что для функции $f(x,t,p,p_1,\ldots,p_N)$ выполнено следующее структурное

Условие 1. Существует такая монотонно неубывающая положительная функция $\mu = \mu(|p|)$, ограниченная на всяком компакте из $[0,+\infty)$, что выполнено неравенство:

$$\left(p_1^2 + \cdots + p_N^2\right)^{1/2} + |f(x,t,p,p_1,\ldots,p_N)| \leqslant$$
$$\leqslant \mu(|p|) \left(p_1^2 + \cdots + p_N^2\right) \quad \text{для} \quad (x,t,p,p_1,\ldots,p_N) \in D_T \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \tag{3.11}$$

таких, что

$$|p| \leqslant M, \quad \gamma\mu(M) \leqslant (p_1^2 + \cdots + p_N^2)^{1/2}, \tag{3.12}$$

$$\gamma := \inf_{z \in \mathbb{R}^N \setminus O(0,1)} \max_{k=\overline{1,N}} \left|\frac{z_k}{|z|}\right| > 0.$$

Теперь рассмотрим следующие два барьера (см. параграф 3 из лекции 19 курса «Эллиптические уравнения»):

$$w_\pm(x) := \pm\frac{1}{\nu} \ln\left(1 + k d(x)\right), \quad x \in U := U(x_0, a), \tag{3.13}$$

$$d(x) := |x - y| - R \quad \text{для} \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus O(y,R), \tag{3.14}$$

$$U(x_0, a) := \{x \in \Omega :\ d(x) < a\}, \tag{3.15}$$

где $O(y,R)$ — шар из определения 4. При этом

$$\nu := \left(1 + \frac{N-1}{\gamma R_0}\right)\mu(M), \quad M = \sup_{(x,t)\in D_T\cup B_T} |u(x,t)|, \tag{3.16}$$

где параметры $k > 0$ и $a > 0$ выбраны следующим образом:

$$k = \nu\mu(M)\exp(\nu M), \quad \frac{1}{\nu}\ln(1+ka) = M. \tag{3.17}$$

Замечание. Функция $d(x)$, определенная равенством (3.14), есть не что иное, как расстояние от точки $x \in \mathbb{R}^N\backslash O(y,R)$ до сферы $\partial O(y,R)$.

С использованием формул из третьего параграфа 19 лекций курса «Эллиптические уравнения» получим следующие неравенства:

$$\overline{L}(w_+)(x,t) \leqslant 0 \leqslant \overline{L}(w_-)(x,t) \quad \text{для} \quad (x,t) \in U_T \cup B_T, \tag{3.18}$$

$$w_-(x,t) \leqslant 0 \leqslant w_+(x,t) \quad \text{для} \quad (x,t) \in S_T \cup B, \tag{3.19}$$

где

$$U_T = U(x_0,a)\times(0,T), \quad S_T = \partial U(x_0,a)\times[0,T],$$
$$B_T = U(x_0,a)\times\{t=T\}, \quad B = U(x_0,a)\times\{t=T\},$$

причем $u(x,t)$, как решение задачи (3.1), (3.2), является решением задачи:

$$\overline{L}(u)(x,t) = 0 \quad \text{для} \quad (x,t) \in U_T \cup B_T, \tag{3.20}$$

$$u(x,t) = 0 \quad \text{для} \quad (x,t) \in S_T \cup B. \tag{3.21}$$

В силу признака сравнения для задачи (3.4), (3.5) приходим к выводу о том, что имеют место следующие неравенства:

$$w_-(x) \leqslant u(x,t) \leqslant w_+(x) \quad \text{для} \quad (x,t) \in \overline{U(x_0,a)}\times[0,T], \tag{3.22}$$

$$w_-(x_0) = u(x_0,t) = w_+(x_0) = 0 \quad \text{для} \quad (x_0,t) \in S_T. \tag{3.23}$$

Из неравенств (3.22), (3.23) в свою очередь вытекает такое неравенство:

$$\frac{w_-(x)-w_-(x_0)}{|x-x_0|} \leqslant \frac{u(x,t)-u(x_0,t)}{|x-x_0|} \leqslant \frac{w_+(x)-w_+(x_0)}{|x-x_0|} \tag{3.24}$$

для всех $(x,t) \in \overline{U(x_0,a)}\times[0,T]$. Рассмотрим два случая:

$$|D_x u(x_0,t_0)| = 0 \quad \text{и} \quad |D_x u(x_0,t_0)| > 0 \quad \text{при} \quad t_0 \in [0,T]. \tag{3.25}$$

Во втором случае определено векторное поле:

$$\mathbf{n}_{x_0,t_0} := \pm\frac{D_x u(x_0,t_0)}{|D_x u(x_0,t_0)|} \quad \text{для} \quad x_0 \in \Gamma, \tag{3.26}$$

знак в котором выбирается таким образом, чтобы направление $\mathbf{n}_{x_0,t_0}$ было внутренним по отношению к области U_T. Можно заметить, что это направление нормали в точке $(x_0,t_0) \in S_T$, которое не зависит от $t_0 \in [0,T]$ и поэтому имеем:

$$\mathbf{n}_{x_0,t_0} = (\mathbf{n}_{x_0}, 0), \quad \mathbf{n}_{x_0} = \pm \frac{D_x u(x_0,t_0)}{|D_x u(x_0,t_0)|} \quad \text{для} \quad x_0 \in \Gamma. \tag{3.27}$$

Тогда можно вычислить производные по *внутреннему направлению* $\mathbf{n}_{x_0,t_0} = (\mathbf{n}_{x_0}, 0)$ функций $w_\pm(x)$. Действительно, справедливы следующие равенства:

$$\left.\frac{\partial w_\pm(x)}{\partial \mathbf{n}_{x_0,t_0}}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{\partial w_\pm(x)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}\right|_{x=x_0} = \\ = \lim_{\lambda \to +0} \frac{w_\pm(x_0 + \lambda \mathbf{n}_{x_0}) - w_\pm(x_0)}{\lambda}, \quad \lambda = |x - x_0|, \tag{3.28}$$

а также равенства:

$$\left.\frac{\partial w_\pm(x)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}\right|_{x=x_0} = \pm \left(\mathbf{n}_{x_0}, D_x\right) \psi(d(x))\Big|_{x=x_0} = \\ = \pm \frac{k}{\nu} \frac{1}{1 + kd(x_0)} \left(\mathbf{n}_{x_0}, D_x\right) d(x)\Big|_{x=x_0} = \pm \frac{k}{\nu} \frac{(\mathbf{n}_{x_0}, x_0 - y)}{|x_0 - y|}, \tag{3.29}$$

причем имеют место следующие оценки:

$$\left.\frac{\partial w_+(x)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}\right|_{x=x_0} \leqslant \frac{k}{\nu} \left| \frac{(\mathbf{n}_{x_0}, x_0 - y)}{|x_0 - y|} \right| \leqslant \frac{k}{\nu}, \tag{3.30}$$

$$\left.\frac{\partial w_-(x)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}\right|_{x=x_0} \geqslant -\frac{k}{\nu} \left| \frac{(\mathbf{n}_{x_0}, x_0 - y)}{|x_0 - y|} \right| \geqslant -\frac{k}{\nu}. \tag{3.31}$$

Из (3.24) с учетом неравенств (3.28)–(3.31) получаем неравенства:

$$-\frac{k}{\nu} \leqslant \left.\frac{\partial w_-(x)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}\right|_{x=x_0} \leqslant \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}\right|_{(x,t)=(x_0,t_0)} \leqslant \left.\frac{\partial w_+(x)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}\right|_{x=x_0} \leqslant \frac{k}{\nu}, \tag{3.32}$$

$$|D_x u(x_0,t_0)| = |(\mathbf{n}_{x_0}, D_x u(x_0,t_0))| = \left| \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}\right|_{(x,t)=(x_0,t_0)} \right| \leqslant \frac{k}{\nu}. \tag{3.33}$$

Таким образом, с одной стороны, в обоих случаях $|D_x u(x_0,t_0)| = 0$ и $|D_x u(x_0,t_0)| > 0$ приходим к оценке:

$$|D_x u(x_0,t_0)| \leqslant \frac{k}{\nu} = \mu(M) \exp(\nu M) \quad \text{для} \quad (x_0,t_0) \in S_T. \tag{3.34}$$

С другой стороны, поскольку $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(1,0)}_{x,t}(\overline{D}_T)$ и выполнено граничное условие (3.2), то справедливо равенство:

$$|D_x u(x_0,0)| = 0 \quad \text{для} \quad (x_0,0) \in B. \tag{3.35}$$

Следовательно, доказана следующая

Теорема 4. *Для любого решения* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D_T \cup B_T) \cap \cap \mathbb{C}^{(1,0)}_{x,t}(\overline{D}_T)$ *задачи Дирихле* (3.1), (3.2) *при выполнении условий* (3.11), (3.12) *и условия равномерной сферичности извне* $\Gamma \subset \mathbb{R}^N$ *имеет место граничная оценка градиента*:

$$\sup_{(x,t)\in S_T\cup B} |D_x u(x,t)| \leqslant \mu(M)\exp(\nu M), \tag{3.36}$$

$$\nu := \left(1 + \frac{N-1}{\gamma R_0}\right)\mu(M), \quad M = \sup_{(x,t)\in D_T\cup B_T} |u(x,t)|.$$

Теперь рассмотрим следующую задачу в классе функций $u(x,t) \in \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D_T \cup B_T) \cap \mathbb{C}^{(1,0)}_{x,t}(\overline{D}_T)$:

$$\Delta u(x,t) - \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + f(x,t,u,D_x u) = 0 \quad \text{для} \quad (x,t) \in D_T \cup B_T, \tag{3.37}$$

$$u(x,t) = \varphi(x,t) \quad \text{для} \quad (x,t) \in S_T \cup B, \tag{3.38}$$

где существует продолжение функции $\varphi(x,t)$ с $S_T \cup B$ на $\overline{D}_T$ и $\varphi(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(\overline{D}_T)$. Введем новую функцию $\overline{u}(x,t) := u(x,t) - \varphi(x,t)$, которая будет удовлетворять следующей задаче:

$$\Delta \overline{u}(x,t) - \frac{\partial \overline{u}(x,t)}{\partial t} + \overline{f}(x,t,\overline{u},D_x\overline{u}) = 0 \quad \text{для} \quad (x,t) \in D_T \cup B_T, \tag{3.39}$$

$$\overline{u}(x,t) = 0 \quad \text{для} \quad (x,t) \in S_T \cup B, \tag{3.40}$$

$$\overline{f}(x,t,\overline{u},D_x\overline{u}) := f(x,t,\overline{u}+\varphi, D_x\overline{u} + D_x\varphi). \tag{3.41}$$

Предположим, что функция $\overline{f}(x,t,p,p_1,\ldots,p_N)$ удовлетворяет структурным условиям (3.11), (3.12), которые следуют из условия:

Условие 2. Существует такая монотонно неубывающая положительная функция $\mu = \mu(|p|)$, ограниченная на всяком компакте из $[0,+ +\infty)$, что выполнено неравенство:

$$\begin{gathered}\left(p_1^2 + \cdots + p_N^2\right)^{1/2} + \sup_{(x,t)\in D_T} \left|\Delta\varphi(x,t) - \frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}\right| + \\ + |f(x,t,p+\varphi,p_1+\varphi_1,\ldots,p_N+\varphi_N)| \leqslant \\ \leqslant \mu(|p|)\left(p_1^2+\cdots+p_N^2\right) \quad \text{для} \quad (x,t,p,p_1,\ldots,p_N) \in D_T\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N,\end{gathered} \tag{3.42}$$

$$\varphi_j := \frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial x_j} \quad \text{для} \quad j = \overline{1,N},$$

таких, что

$$|p| \leqslant M, \quad \gamma\mu(M) \leqslant (p_1^2 + \dots + p_N^2)^{1/2}, \tag{3.43}$$

$$\gamma := \inf_{z\in\mathbb{R}^N\setminus O(0,1)} \max_{k=\overline{1,N}} \left|\frac{z_k}{|z|}\right| > 0.$$

При этом справедлива следующая:

Теорема 5. *Для любого решения* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D_T \cup B_T) \cap \cap\, \mathbb{C}^{(1,0)}_{x,t}(\overline{D}_T)$ *задачи Дирихле* (3.37), (3.37) *при выполнении условий* (3.42), (3.43) *и условия равномерной сферичности извне* $\Gamma \subset \subset \mathbb{R}^N$ *м существования непрерывного продолжения граничной функции* $\varphi(x,t)$ *в классе* $\mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(\overline{D}_T)$ *имеет место граничная оценка градиента*:

$$\sup_{(x,t)\in S_T\cup B} |D_x u(x,t)| \leqslant \sup_{(x,t)\in S_T\cup B} |D_x\varphi(x,t)| + \mu(M)\exp(\nu M), \tag{3.44}$$

$$\nu := \left(1 + \frac{N-1}{\gamma R_0}\right)\mu(M),$$

$$M = \sup_{(x,t)\in D_T\cup B_T} |u(x,t)| + \sup_{(x,t)\in D_T\cup B_T} |\varphi(x,t)|.$$

§ 4. Оценка производной по времени решения на параболической границе

Рассмотрим два барьера:

$$v_\pm(t) := \pm kt, \quad k > 0. \tag{4.1}$$

Справедлив следующий

Признак сравнения. Пусть $u_1(x,t), u_2(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D_T \cup \cup\, B_T) \cap \mathbb{C}(\overline{D}_T)$ — решение следующей задачи:

$$L(u_1)(x,t) \geqslant L(u_2)(x,t) \quad \text{для} \quad (x,t) \in D_T \cup B_T, \tag{4.2}$$

$$u_1(x,t) \leqslant u_2(x,t) \quad \text{для} \quad (x,t) \in S_T \cup B. \tag{4.3}$$

Предположим, что выполнены следующие условия:

Условия 3. $f(x,t,p,p_1,\dots,p_N) \in \mathbb{C}^{(1)}(\overline{D}_T \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^N)$, причем

$$f'_p(x,t,p,p_1,\dots,p_N) \leqslant 0 \quad \text{для} \quad (x,t,p,p_1,\dots,p_N) \in \overline{D}_T \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^N. \tag{4.4}$$

Тогда

$$u_1(x,t) \leqslant u_2(x,t) \quad \text{для} \quad (x,t) \in \overline{D}_T. \tag{4.5}$$

Действительно, заметим, что справедливы следующие равенства:

$$f(x,t,u_1,D_x u_1) - f(x,t,u_2,D_x u_2) = \int\limits_0^1 \frac{d}{ds} f(x,t,u_s,D_x u_s)\,ds =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{\partial f(x,t,u_s,D_x u_s)}{\partial p}\,ds (u_1(x,t) - u_2(x,t)) +$$

$$+ \sum_{j=1}^N \int\limits_0^1 \frac{\partial f(x,t,u_s,D_x u_s)}{\partial p_j}\,ds \left(\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x_j} - \frac{\partial u_2(x,t)}{\partial x_j}\right) =$$

$$= \overline{c}(x,t)v(x,t) + \sum_{j=1}^N \overline{b}_j(x,t)\frac{\partial v(x,t)}{\partial x_j}, \; u_s = su_1 + (1-s)u_2, \tag{4.6}$$

$$p := u_s, \quad p_j := \frac{\partial u_s}{\partial x_j}, \quad v(x,t) := u_1(x,t) - u_2(x,t),$$

$$\overline{c}(x,t) := \int\limits_0^1 \frac{\partial f(x,t,u_s,D_x u_s)}{\partial p}\,ds \leqslant 0 \quad \text{для} \quad (x,t) \in \overline{D}_T, \tag{4.7}$$

$$\overline{b}_j(x,t) := \int\limits_0^1 \frac{\partial f(x,t,u_s,D_x u_s)}{\partial p_j}\,ds. \tag{4.8}$$

Итак, с учетом (4.6) из (4.2) и (4.3) получаем задачу:

$$\Delta v(x,t) - \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + \sum_{j=1}^N \overline{b}_j(x,t)\frac{\partial v(x,t)}{\partial x_j} +$$
$$+ \overline{c}(x,t)v(x,t) \geqslant 0 \quad \text{для} \quad (x,t) \in U_T \cup B_T, \tag{4.9}$$

$$v(x,t) \leqslant 0 \quad \text{для} \quad (x,t) \in S_T \cup B. \tag{4.10}$$

Поскольку в силу (4.7) (из (4.4)) имеем $c(x,t) \leqslant 0$, то стандартным образом получаем (4.5).

Рассмотрим следующие функции:

$$f_1(x,t) := f(x,t,0,0\ldots,0), \tag{4.11}$$

$$F(x,t,p) := f(x,t,p,0,\ldots,0) - f(x,t,0,0\ldots,0), \tag{4.12}$$

для которых в силу (4.4) выполнены следующие неравенства:

$$F(x,t,-p) \geqslant F(x,t,0) = 0 \geqslant \\ \geqslant F(x,t,p) \quad \text{для} \quad (x,t) \in \overline{D}_T, \quad p \geqslant 0. \quad (4.13)$$

Теперь заметим, что если положить

$$k := \sup_{(x,t)\in D_T\cup B_T} |f_1(x,t)|, \quad (4.14)$$

то с учетом (4.13) получаются следующие оценки:

$$L(v_+)(x,t) = -k + f(x,t,v_+,0,\ldots,0) \leqslant -k + f_1(x,t) + F(x,t,v_+) \leqslant \\ \leqslant -k + \sup_{(x,t)\in D_T\cup B_T} |f_1(x,t)| + F(x,t,v_+) \leqslant \\ \leqslant 0 = L(u)(x,t) \quad \text{для} \quad (x,t) \in D_T \cup B_T, \quad (4.15)$$

$$L(v_-)(x,t) = k + f(x,t,v_-,0,\ldots,0) \geqslant k + f_1(x,t) + F(x,t,v_-) \geqslant \\ \geqslant k - \sup_{(x,t)\in D_T\cup B_T} |f_1(x,t)| + F(x,t,v_-) \geqslant \\ \geqslant 0 = L(u)(x,t) \quad \text{для} \quad (x,t) \in D_T \cup B_T. \quad (4.16)$$

Кроме того, имеем:

$$v_+(t) \geqslant 0 = u(x,t) \geqslant v_-(t) \quad \text{для} \quad (x,t) \in S_T \cup B. \quad (4.17)$$

Из (4.15)–(4.17) следуют оценки:

$$v_+(t) \geqslant u(x,t) \geqslant v_-(t) \quad \text{для} \quad (x,t) \in \overline{D}_T, \quad (4.18)$$

причем

$$v_+(0) = u(x,0) = v_-(0) = 0 \quad \text{для} \quad x \in \overline{\Omega}. \quad (4.19)$$

Из (4.18) и (4.19) получаем, что

$$\frac{v_+(t) - v_+(0)}{t} \geqslant \frac{u(x,t) - u(x,0)}{t} \geqslant \frac{v_-(t) - v_-(0)}{t} \quad (4.20)$$

для всех $x \in \overline{\Omega}$ и $t > 0$. С одной стороны, переходя к пределу при $t \to \to 0 + 0$ из (4.20) имеем оценку:

$$\max_{x\in\overline{\Omega}} \left|\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}\right| \leqslant k = \sup_{(x,t)\in D_T\cup B_T} |f(x,t,0,0,\ldots,0)|. \quad (4.21)$$

С другой стороны, в классе решений $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D_T \cup B_T) \cap \cap \mathbb{C}^{(0,1)}_{x,t}(\overline{D}_T)$ получаем, что

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 0 \quad \text{для} \quad (x,t) \in S_T. \quad (4.22)$$

Таким образом, доказана

Теорема 6. *Если* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D_T \cup B_T) \cap \mathbb{C}^{(0,1)}_{x,t}(\overline{D}_T)$ *— решение задачи* (3.1), (3.2) *и выполнено условие* (4.4), *то справедлива априорная оценка производной решения по времени на параболической границе*:

$$\sup_{(x,t)\in S_T\cup B} \left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right| \leqslant \sup_{(x,t)\in D_T\cup B_T} |f(x,t,0,0,\ldots,0)|. \tag{4.23}$$

В заключение рассмотрим задачу (3.37), (3.38). В качестве параметра $k > 0$ в выражениях для барьеров (4.1) возьмем

$$k := \sup_{(x,t)\in D_T\cup B_T} \left|\Delta\varphi(x,t) - \frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t} + f(x,t,\varphi(x,t), D_x\varphi(x,t))\right|, \tag{4.24}$$

где $\varphi(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(\overline{D}_T)$ и совпадает с решением $u(x,t)$ на параболической границе $S_T \cup B$. Тогда повторяя рассуждения при выводе оценки (4.23), приходим к следующей

Теорема 7. *Если* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D_T \cup B_T) \cap \mathbb{C}^{(0,1)}_{x,t}(\overline{D}_T)$ *— решение задачи* (3.37), (3.38), *выполнено условие* (4.4), *а также существует непрерывное продолжение граничной функции* $\varphi(x,t)$ *в классе* $\mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(\overline{D}_T)$, *то справедлива априорная оценка производной решения по времени на параболической границе*:

$$\begin{gathered}\sup_{(x,t)\in S_T\cup B} \left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right| \leqslant \sup_{(x,t)\in S_T\cup B} \left|\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t}\right| + \\ + \sup_{(x,t)\in D_T\cup B_T} \left|\Delta\varphi(x,t) - \frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t} + f(x,t,\varphi(x,t), D_x\varphi(x,t))\right| \end{gathered} \tag{4.25}$$

§ 5. Литературные указания

Материал для лекции взят из работы [24].

Предметный указатель

Список литературы

1. *Боголюбов А. Н., Кравцов В. В., Свешников А. Г.* Лекции по математической физике. М.: Издательство МГУ; Наука, 2004.— 416 с.
2. *Вентцель Т. Д., Горицкий А. Ю., Капустина Т. О. и др.* Сборник задач по уравнениям с частными производными. Под редакцией А. С. Шамаева. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005, 158 с.
3. *Ильин А. М., Калашников А. С., Олейник О. А.* Линейные уравнения второго порядка параболического типа// УМН, 17:3(105), 1962, 3–146 с.
4. *Крылов Н. В.* Лекции по эллиптическим и параболическим уравнениям в пространствах Гельдера. Новосибирск: Научная книга, 1998, 178 с.
5. *Крылов Н. В.* Нелинейные эллиптические и параболические уравнения второго порядка. Москва: Наука, 1985, 376 с.
6. *Кудряшов Н. А.* Методы нелинейной математической физики. Издательский дом «Интеллект», 2010.– 368 с.
7. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейный и квазилинейные уравнения параболического типа. Москва: Наука, 1967, 736 с.
8. *Ландис Е. М.* Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. Москва: Наука, 1971, 288 с.
9. *Михлин С. Г.* Линейные уравнения в частных производных. М.: Высшая школа, 1977, 431 с.
10. *Нефедов Н. Н.* Дополнительные главы к курсу Методы математической физики. "Нелинейные эллиптические уравнения. Метод дифференциальных неравенств.". Москва: Изд-во физического факультета МГУ, 1998.
11. *Олейник О. А.* Лекции об уравнениях с частными производными. I часть. Москва: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2005. – 252 с.
12. *Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. Москва: Наука, 1987, 480 с.
13. *Тихонов А. Н.* Теорема единственности для уравнения теплопроводности// Мат. сборник.— 1935.– т. 42, N 2, – с. 189–216.
14. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. Москва: Мир, 1968, 428 с.
15. *Эванс Л. К.* Уравнения с частными производными. Новосибирск: Тамара Рожковская, 2003, 562 с. — (Университетская серия; Т. 7).
16. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. М.: Наука, 1964, 448 с.
17. *Hu Bei* Blow-up theories for semilinear parabolic equations. Lecture Notes in Mathematics, 2018. Springer, Heidelberg, 2011. 125 pp.

18. *Bei Hu, H. M. Yin* The profile near blow-up time for solution of the heat equation with a nonlinear boundary condition, Trans. Amer. Math. Soc., 346 (1994) 117–135.
19. *Krylov N. V.* Lectures on Elliptic and Parabolic Equations in Sobolev Spaces. Graduate Studies in Mathematics Volume 96 American Mathematical Society. 2000, 374 pp.
20. *Patrizia Pucci, James Serrin* The Maximum Principle. Birkhauser, Basel–Boston–Berlin. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications. Volume 73. 2007, 240 pp.
21. *Protter M. H., Weinberger H. F.* Maximum principles in differential equations. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J. 1967, 261 pp.
22. *Vicentiu D. Radulescu* Qualitative Analysis of Nonlinear Elliptic Partial Differential Equations: Monotonicity, Analytic, and Variational Methods. Hindawi Publishing Corporation. 2008, 205 pp.
23. *Vazquez J. L.* The porous medium equation. Mathematical theory. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2007, 624 pp.
24. *Zhuoqun Wu, Jingxue Yin, Chunpeng Wang* Elliptic and Parabolic Equations. World Scientific. 2006, 425 pp.

КОРПУСОВ Максим Олегович

Лекции о параболических уравнениях
второго порядка

Подписано к печати 16.06.2023 г.
Формат А5. Объем 18,25 п.л.Тираж 25 экз.
Заказ №

Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова
119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, стр.2

Отпечатано в Типографии МГУ им. М.В. Ломоносова