Глава 20. Обобщенные функции

Понятие обобщенной функции является обобщением классического понятия функции. Впервые обобщенные функции были введены П. Дираком в 20-е годы прошлого столетия при исследовании задач квантовой механики. Математические основы теории обобщённых функций были заложены советским математиком академиком С.Л. Соболевым (в 30-е годы прошлого века) и французским математиком Л. Шварцем (в начале 50-х годов прошлого века). В настоящее время обобщенные функции находят широкое применение в математике и физике. Они позволяют выразить в математической форме такие идеализированные физические понятия, как плотность массы материальной точки, плотность точечного электрического заряда, интенсивность мгновенного точечного источника, которые не могут быть выражены с помощью обычных функций.

20.1 Понятие обобщенной функции. Пространство обобщенных функций

Будем рассматривать множество всевозможных функций $\varphi(x)$, определённых на всей числовой прямой $\mathbb{R}$ и обладающих следующими свойствами:

1) каждая функция $\varphi(x)$ бесконечно дифференцируема (т.е. имеет производные всех порядков (на всей числовой прямой)); это обозначают так: $\varphi(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$;

2) каждая функция $\varphi(x)$ является финитной, т.е. для каждой функции $\varphi(x)$ существует интервал, вне которого она равна нулю.

Обозначим через X_φ множество всех точек, в которых $\varphi(x) \neq 0$, а через $\overline{X}_\varphi$ — замыкание множества X_φ, т.е. $\overline{X}_\varphi$ является объединением множества X_φ и всех его предельных точек.

Множество $\overline{X}_\varphi$ называется носителем функции $\varphi(x)$ и обозначается так: $\operatorname{supp}\varphi(x)$ (от французского support). Очевидно, что функция $\varphi(x)$ является финитной тогда и только тогда, когда $\operatorname{Supp}\varphi(x)$ — ограниченное множество.

Множество всех финитных бесконечно дифференцируемых функций назовём множеством основных функций и обозначим буквой $\mathcal{D}$.

Примером функции из множества $\mathcal{D}$ является так называемая "шапочка" (рис. 20.1):

$$\omega_a(x) = \begin{cases} e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}}, & |x|<a, \\ 0, & |x| \geq a. \end{cases}$$

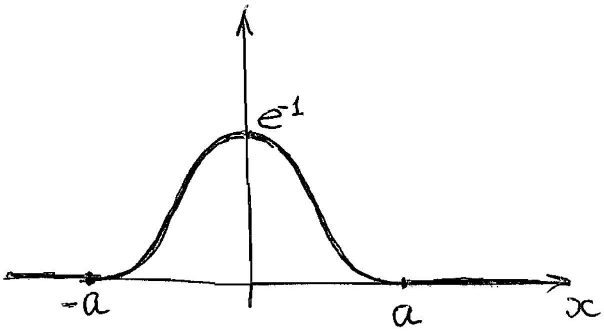

Рис. 20.1

Очевидно, что

$\mathrm{supp}\,\omega_a(x) = [-a, a]$.

Задание. Докажите, что $\forall n:\ \omega^{(n)}(\pm a) = 0$.

Введём понятие сходимости последовательности основных функций.

1.22 Определение. Будем говорить, что последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ основных функций сходится к функции $\varphi(x)$ из множества $\mathcal{D}$, если:

1) существует интервал $(-a, a)$, такой, что $\forall n$: $\mathrm{supp}\,\varphi_n(x) \in (-a, a)$;

2) $\forall k = 0, 1, 2, \ldots$ последовательность $\{\varphi_n^{(k)}(x)\}$ сходится равномерно к $\varphi^{(k)}(x)$ на всей прямой $\mathbb{R}$.

(Заметим, что равномерная сходимость на всей прямой равносильна равномерной сходимости на интервале $(-a, a)$).

Обозначение: $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ при $n \to \infty$ в пространстве $\mathcal{D}$.

Пример. Пусть $\varphi_n(x) = \frac{1}{n}\,\omega_a(x)$, где $\omega_a(x)$ – "шапочка". Докажем, что

$\varphi_n(x) \to \varphi(x) = 0$ при $n \to \infty$ в $\mathcal{D}$.

В самом деле, $\forall k = 0, 1, 2, \ldots$ имеем:

$$\sup_{\mathbb{R}} |\varphi_n^{(k)}(x) - \varphi^{(k)}(x)| = \frac{1}{n} \sup_{[-a,a]} |\omega_a^{(k)}(x)| \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

а это означает, что $\varphi_n^{(k)}(x) \rightrightarrows \varphi^{(k)}(x) \equiv 0$ на $\mathbb{R}$.

Следовательно, $\varphi_n(x) \to \varphi(x) = 0$ при $n \to \infty$ в $\mathcal{D}$.

Множество $\mathcal{D}$ основных функций с введённым понятием сходимости называется <u>пространством основных функций</u>. Будем обозначать его той же буквой $\mathcal{D}$.

Отметим, что $\mathcal{D}$ – линейное пространство с обычными операциями сложения двух функций и умножения функции на вещественное число (при этом $\mathcal{D}$ не является метрическим пространством и введённая сходимость – это сходимость не в метрике пространства).

Введём теперь понятие функционала, лежащее в основе определения обобщённых функций.

Определение. Будем говорить, что на пространстве $\mathcal{D}$ задан функционал, если указано правило, по которому каждой функции $\varphi(x) \in \mathcal{D}$ ставится в соответствие определённое число $u(\varphi)$.

Функционал также будем обозначать $u(\varphi)$.

Определение. Функционал $u(\varphi)$ называется линейным, если для $\forall\, \varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ из пространства $\mathcal{D}$ и любых чисел α и β выполняется равенство

$$u(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = \alpha\, u(\varphi_1) + \beta\, u(\varphi_2).$$

Примеры. 1) Пусть функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой и интегрируема на любом сегменте. В таком случае будем называть функцию $f(x)$ локально интегрируемой. С помощью функции $f(x)$ определим на пространстве $\mathcal{D}$ функционал следующим образом: каждой функции $\varphi(x) \in \mathcal{D}$ поставим в соответствие число

$$u(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\, dx. \qquad (20.1)$$

Отметим, что хотя этот интеграл имеет бесконечные пределы интегрирования (и тем самым является несобственным), на самом деле для каждой функции $\varphi(x)$ это обычный определённый интеграл, поскольку любая функция $\varphi(x)$ из пространства $\mathcal{D}$ является финитной и, следовательно, равна нулю вне некоторого интервала.

Данный функционал является линейным, так как

$$u(\alpha\varphi_1+\beta\varphi_2)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\left[\alpha\varphi_1(x)+\beta\varphi_2(x)\right]dx=\alpha\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi_1(x)dx+$$

$$+\beta\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi_2(x)dx=\alpha u(\varphi_1)+\beta u(\varphi_2).$$

Этот функционал в дальнейшем будем обозначать символом $\hat{f}$, а значение функционала $\hat{f}$ на элементе $\varphi(x)$ пространства $\mathcal{D}$ обозначим так: $(\hat{f},\varphi)$, т.е.

$$(\hat{f},\varphi):=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx. \qquad (20.2)$$

Аналогичное обозначение будем использовать в дальнейшем и в том случае, когда линейный функционал не является интегралом вида (20.1). Символ (f,φ) будет обозначать значение функционала f на элементе $\varphi(x)$ пространства $\mathcal{D}$.

2) Рассмотрим множество всех функций, определённых на сегменте $[a,b]$ и имеющих на этом сегменте непрерывную первую производную. Это множество обозначим $C^1[a,b]$. Каждой функции $\varphi(x)$ из этого множества поставим в соответствие число $l(\varphi)$, равное длине кривой, являющейся графиком функции $y=\varphi(x)$, $a\le x\le b$, т.е.

$$l(\varphi)=\int_a^b\sqrt{1+\varphi'^2(x)}\,dx.$$

Тем самым на множестве $C^1[a,b]$ задан функционал. Очевидно, он не является линейным.

Введём теперь понятие непрерывного функционала, определённого на пространстве D основных функций.

Определение. Функционал f, определённый на пространстве D основных функций, называется непрерывным, если для любой последовательности $\{\varphi_n(x)\}$ основных функций, сходящейся в D к функции $\varphi(x)$, числовая последовательность (f, φ_n) сходится к (f, φ).

Пример. Если $f(x)$ — локально интегрируемая функция, то функционал $(f, \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx$ является непрерывным (докажите это).

Введённые понятия дают возможность сформулировать определение обобщённой функции.

Определение. Обобщённой функцией называется любой линейный непрерывный функционал, определённый на пространстве основных функций.

Значение функционала f на элементе $\varphi(x)$, как и было оговорено, будем обозначать (f, φ).

Введём операции сложения двух обобщенных функций и умножения обобщенной функции на число.

Суммой двух обобщённых функций f и g назовём функционал (обозначаем его $f+g$), действующий по правилу:

$$\forall \varphi(x) \in \mathcal{D} : \ (f+g, \varphi) = (f, \varphi) + (g, \varphi).$$

Произведением обобщенной функции f на число α назовём функционал (обозначим его αf), действующий по правилу:

$$\forall \varphi(x) \in \mathcal{D} : \ (\alpha f, \varphi) = \alpha (f, \varphi).$$

Нетрудно доказать (сделайте это), что сумма двух обобщенных функций и также произведение обобщенной функции на число являются линейными непрерывными функционалами, т.е. обобщёнными функциями. Таким образом, введенные операции сложения двух обобщенных функций и умножения обобщенной функции на число не выводят за пределы множества обобщённых функций. Нетрудно проверить, что эти операции удовлетворяют всем аксиомам линейного пространства, в частности, роль нулевого элемента играет функционал, ставящий в соответствие каждой функции из пространства $\mathcal{D}$ число нуль. Следовательно, множество обобщенных функций становится линейным пространством.

Введём понятие сходимости последовательности обобщенных функций.

Определение. Будем говорить, что последовательность $\{f_n\}$ обобщенных функций сходится к обобщённой функции f, если для любой функции $\varphi(x)$ из пространства $\mathcal{D}$ числовая последовательность (f_n, φ) сходится к (f, φ).

Линейное пространство обобщённых функций с введённым понятием сходимости обозначается $\mathcal{D}'$ и называется пространством обобщённых функций.

Сходимость последовательности $\{f_n\}$ обобщенных функций к обобщённой функции f называется слабой сходимостью. Говорят также, что последовательность функционалов $\{f_n\}$ слабо сходится к функционалу f.

Обозначение: $f_n \to f$ при $n \to \infty$ в пространстве $\mathcal{D}'$.

20.2 Регулярные и сингулярные обобщенные функции

Пусть $f(x)$ – локально интегрируемая функция. Она порождает линейный непрерывный функционал $\hat{f}$ на пространстве $\mathcal{D}$, т.е. порождает обобщённую функцию, определённую формулой (20.2). Такая обобщенная функция называется регулярной.

Пример: Рассмотрим функцию Хевисайда (она используется в математической физике)

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Она является локально интегрируемой и, следовательно, порождает регулярную обобщенную функцию $\hat{\Theta}$:

$$\forall \varphi(x) \in \mathcal{D}: \quad (\hat{\Theta}, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Theta(x)\varphi(x)\,dx = \int_{0}^{+\infty} \varphi(x)\,dx.$$

Обобщённые функции, не являющиеся регулярными, называются сингулярными.

Важным примером сингулярной обобщенной функции является δ-функция, которая определяется следующим образом:

$$\forall \varphi(x) \in \mathcal{D}: \ (\delta, \varphi) = \varphi(0).$$

Из самого определения ещё не следует, что δ-функция является линейным непрерывным функционалом, т.е. является обобщённой функцией. Это предстоит нам доказать.

Теорема 1. δ-функция является обобщенной функцией.

Доказательство. Докажем сначала, что δ-функция — линейный функционал. В самом деле, $\forall \varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ из пространства $\mathcal{D}$ и $\forall$ чисел α и β имеем (согласно определению δ-функции):

$$(\delta, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = \alpha\varphi_1(0) + \beta\varphi_2(0) = \alpha(\delta, \varphi_1) + \beta(\delta, \varphi_2),$$

а это и означает, что δ-функция — линейный функционал.

Докажем теперь, что δ-функция — непрерывный функционал. Для этого, согласно определению непрерывного функционала, нужно доказать, что для любой последовательности $\{\varphi_n(x)\}$ основных функций, сходящейся в $\mathcal{D}$ к функции $\varphi(x)$, соответствующая числовая последовательность (δ, φ_n) сходится к (δ, φ). Но $(\delta, \varphi_n) = \varphi_n(0)$, $(\delta, \varphi) = \varphi(0)$ (по определению δ-функции), поэтому нужно доказать, что если

$$\varphi_n(x) \to \varphi(x) \text{ при } n \to \infty \text{ в } \mathcal{D}, \qquad (20.3)$$

то

$$\varphi_n(0) \to \varphi(0) \text{ при } n \to \infty. \qquad (20.4)$$

Из (20.3) по определению сходимости в пространстве $\mathcal{D}$ следует, что $\varphi_n(x) \rightrightarrows \varphi(x)$ на всей числовой прямой, в частности, $\varphi_n(0) \to \varphi(0)$, т.е. выполнено условие (20.4).

Теорема 1 доказана.

<u>Теорема 2.</u> δ-функция является сингулярной обобщённой функцией.

<u>Доказательство.</u> Предположим, что δ-функция является регулярной обобщённой функцией. Тогда существует локально интегрируемая функция $f(x)$, такая, что

$$\forall \varphi(x) \in \mathcal{D} : \ (\delta, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0).$$

Возьмём в качестве $\varphi(x)$ "шапочку" $\omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - x^2}}, & |x|<\varepsilon, \\ 0, & |x| \geq \varepsilon. \end{cases}$

Для неё выполнены соотношения

$$0 \leq \omega_\varepsilon(x) \leq e^{-1}, \quad \omega_\varepsilon(0) = e^{-1}.$$

По определению δ-функции $(\delta, \omega_\varepsilon) = \omega_\varepsilon(0) = e^{-1}$, а согласно нашему предположению

$$(\delta, \omega_\varepsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\omega_\varepsilon(x)\,dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)\omega_\varepsilon(x)\,dx.$$

Таким образом, $\forall \varepsilon > 0$ должно выполняться равенство

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)\omega_\varepsilon(x)\,dx = e^{-1}. \qquad (20.5)$$

Так как функция $f(x)$ локально интегрируема, то она ограничена на любом отрезке, поэтому

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)\omega_\varepsilon(x)\,dx \to 0 \ \text{ при } \ \varepsilon \to 0.$$

Но это противоречит равенству (20.5) и, следовательно, наше предположение неверно, а, значит, δ-функция является сингулярной обобщенной функцией. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. δ-функцию можно представить как предел в пространстве $\mathcal{D}'$ последовательности регулярных обобщённых функций.

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ введём функцию

$$\delta_\varepsilon(x) = C_\varepsilon \cdot \omega_\varepsilon(x),$$

где $\omega_\varepsilon(x)$ – "шапочка", а C_ε – такое число, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(x)\,dx = C_\varepsilon \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - x^2}}\,dx = 1. \qquad (20.6)$$

Сделав замену переменной $x = \varepsilon t$, получим

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - x^2}}\,dx = \varepsilon \int_{-1}^{1} e^{-\frac{1}{1-t^2}}\,dt.$$

Определённый интеграл в правой части равенства равен некоторому положительному числу, которое обозначим буквой k и положим $m = \frac{1}{k}$. Отметим, что число m не зависит от ε. Из второго равенства в (20.6) получаем: $C_\varepsilon = \frac{m}{\varepsilon}$ и, следовательно,

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{m}{\varepsilon} e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - x^2}}, & |x| < \varepsilon, \\ 0, & |x| \geq \varepsilon. \end{cases} \qquad (20.7)$$

Регулярную обобщенную функцию, порождаемую функцией $\delta_\varepsilon(x)$, обозначим $\hat{\delta}_\varepsilon$ и докажем, что семейство обобщенных функций $\hat{\delta}_\varepsilon(x)$, зависящих от непрерывно изменяющегося положительного параметра ε, стремится к δ-функции при $\varepsilon \to +0$, т.е.

$$\forall \varphi(x) \in \mathcal{D} : \quad (\hat{\delta}_\varepsilon, \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx \to (\delta, \varphi) = \varphi(0) \text{ при } \varepsilon \to +0. \quad (20.8)$$

Из (20.8), очевидно, следует утверждение теоремы.

Для доказательства утверждения (20.8) нужно доказать, что $\forall \mu > 0 \ \exists\, \varepsilon_0 > 0$, такое, что

$$\left| (\hat{\delta}_\varepsilon, \varphi) - (\delta, \varphi) \right| < \mu \quad \text{при} \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0. \qquad (20.9)$$

Так как $\varphi(x)$ – непрерывная функция во всех точках и, в частности, в точке $x = 0$, то $\forall \mu > 0 \ \exists\, \varepsilon_0 > 0$, такое, что

$$|\varphi(x) - \varphi(0)| < \mu \quad \text{при} \quad |x| < \varepsilon_0.$$

Следовательно, если $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, то, учитывая равенства (20.6) и (20.7), получаем:

$$\left| (\hat{\delta}_\varepsilon, \varphi) - (\delta, \varphi) \right| = \left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx - \varphi(0) \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx - \varphi(0) \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta_\varepsilon(x)\,dx \right| \le \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta_\varepsilon(x) \left| \varphi(x) - \varphi(0) \right| dx <$$

$$< \mu \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta_\varepsilon(x)\,dx = \mu.$$

Тем самым (20.9) и теорема 3 доказаны.

<u>Замечания.</u> 1) На рисунке 20.2 изображены графики функции $y = \delta_\varepsilon(x)$ для нескольких значений ε ($\varepsilon = 1$, $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $\varepsilon = \frac{1}{4}$). Обратим внимание на поточечный (при каждом x) предел $\delta_\varepsilon(x)$ при $\varepsilon \to +0$:

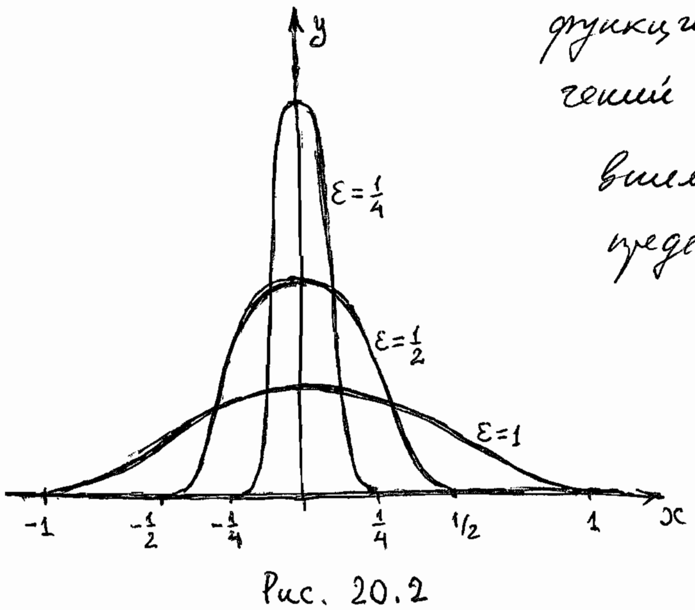

Рис. 20.2

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & x \ne 0, \\ +\infty, & x = 0. \end{cases}$$

Очевидно, что этот предел не является функцией в обычном смысле.

2) Оказывается, что утверждение, аналогичное теореме 3, имеет место для любой сингулярной обобщённой функции: <u>любую сингулярную обобщенную функцию можно представить как предел в пространстве $\mathcal{D}'$ последовательности регулярных обобщённых функций.</u>

Иначе говоря, пространство обобщенных функций является пополнением пространства классических локально интегрируемых функций, т.е. получается путём добавления к пространству локально интегрируемых функций всех предельных элементов в смысле слабой сходимости.

Это аналогично тому, как множество всех вещественных чисел можно получить путём добавления ко множеству рациональных чисел всех пределов последовательностей рациональных чисел (поскольку любое иррациональное число можно представить как предел последовательности рациональных чисел).

3) δ-функцию можно представить как предел в $\mathcal{D}'$ других (отличных от $\hat{\delta}_\varepsilon$) семейств регулярных обобщённых функций, зависящих от параметра ε. Рассмотрим функции

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}}\, e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}, \quad g_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi x}\sin\frac{x}{\varepsilon}, \quad h_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi}\,\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}.$$

Порождаемые ими регулярные обобщенные функции обозначим $\hat{f}_\varepsilon, \hat{g}_\varepsilon, \hat{h}_\varepsilon$.

Докажите, что $\hat{f}_\varepsilon \to \delta$-функции при $\varepsilon \to +0$ в $\mathcal{D}'$,

$\hat{g}_\varepsilon \to \delta$-функции при $\varepsilon \to +0$ в $\mathcal{D}'$,

$\hat{h}_\varepsilon \to \delta$-функции при $\varepsilon \to +$. в $\mathcal{D}'$.

Локальные свойства обобщенных функций.

Обобщённые функции, в отличие от обычных функций, не имеют значений в отдельных точках. Тем не менее можно говорить об обращении в нуль обобщенной функции на каком-то интервале.

<u>Определение.</u> Говорят, что обобщённая функция f равна нулю на интервале I, если $\forall \varphi(x) \in \mathcal{D}$, носитель которой $\operatorname{Supp} \varphi(x) \in I$, выполняется равенство $(f, \varphi) = 0$.

Это записывают так: $f = 0$ на интервале I или $f(x) = 0$ при $x \in I$. Нужно только понимать условность последней записи — $f(x)$ не имеет значений в отдельных точках x из интервала I, а равенство $f(x) = 0$ при $x \in I$ понимается в смысле данного определения.

<u>Определение.</u> Обобщённые функции f и g называются равными на интервале I, если $f(x) - g(x) = 0$ при $x \in I$.

Объединение всех интервалов, на которых обобщённая функция f равна нулю, называется нулевым множеством обобщённой функции f. Обозначим его O_f. Дополнение O_f до всей числовой прямой называется носителем обобщенной функции f (обозначение: $\operatorname{Supp} f$). Очевидно, что $\operatorname{Supp} f = R - O_f$.

Если $\operatorname{Supp} f$ — ограниченное множество, то обобщённая функция f называется финитной.

<u>Примеры.</u> 1) δ-функция (будем её обозначать также $\delta(x)$) равна нулю на любом интервале, не содержащем точку $x = 0$. В самом деле, если точка $x = 0$ не принадлежит

интервалу I, а $\operatorname{Supp}\varphi(x)\subset I$, то $\varphi(0)=0$ и поэтому $(\delta,\varphi)=\varphi(0)=0$.

$\operatorname{Supp}\delta(x)$ состоит из одной точки $x=0$, и, следовательно, δ-функция — финитная функция.

2) Функция $f(x)=c=const\neq 0$, $x\in R$ порождает регулярную обобщенную функцию $\hat{f}$, такую, что $\forall\varphi(x)\in\mathcal{D}$: $(\hat{f},\varphi)=c\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,dx$. Так как для любого интервала I $\exists\varphi(x)\in\mathcal{D}$, такая, что $\operatorname{Supp}\varphi(x)\in I$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,dx\neq 0$, то данная обобщённая функция $\hat{f}$ не равна нулю ни на каком интервале и, следовательно, $O_{\hat{f}}=\Theta$, а $\operatorname{Supp}\hat{f}=R$.

20.3 Действия над обобщёнными функциями

1. Умножение обобщенной функции на бесконечно дифференцируемую функцию

Пусть $f(x)$ — локально интегрируемая функция, $\hat{f}$ — порождаемая функцией $f(x)$ регулярная обобщенная функция, $a(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция на всей прямой R (т.е. $a(x)\in C^{\infty}(R)$). Тогда $a(x)f(x)$ — локально интегрируемая функция и $\forall\varphi(x)\in\mathcal{D}$ функция $a(x)\varphi(x)\in\mathcal{D}$. Поэтому для обобщенной функции $\widehat{af}$, порождаемой функцией $a(x)f(x)$, получаем равенство

$$(\widehat{af},\varphi)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}a(x)f(x)\varphi(x)\,dx=(\hat{f},a\varphi). \qquad (20.10)$$

Итак, для любой регулярной обобщённой функции

$\hat{f}$ и для любой функции $a(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ справедливо равенство

$$(a\hat{f}, \varphi) = (\hat{f}, a\varphi), \quad \varphi(x) \in \mathcal{D}.$$

Для сингулярных обобщенных функций мы примем это равенство в качестве определения произведения обобщённой функции на бесконечно дифференцируемую функцию. Таким образом, мы приходим к следующему определению.

Определение. Произведением обобщенной функции f на бесконечно дифференцируемую функцию $a(x)$ называется обобщенная функция (обозначим её af), действующая по правилу:

$$\forall \varphi(x) \in \mathcal{D} : \ (af, \varphi) = (f, a\varphi).$$

Подчеркнём, что для регулярных обобщенных функций это равенство было обосновано (см. (20.10)), а для сингулярных обобщенных функций оно принимается по определению.

Пример. $a(x)\delta(x)$ — это такая (по определению) обобщённая функция, что $(a\delta, \varphi) = (\delta, a\varphi) = a(0)\varphi(0) = a(0)(\delta, \varphi)$, т.е. умножение δ-функции на бесконечно дифференцируемую функцию $a(x)$ равносильно умножению δ-функции на число $a(0)$: $a(x)\delta(x) = a(0)\,\delta(x)$.

Отметим, что произведение двух обобщенных функций не определяется.

2. Линейная замена переменных в обобщённых функциях.

Пусть $f(x)$ — локально интегрируемая функция, a и b — произвольные числа, $a \neq 0$. Рассмотрим функцию $f(ax+b)$ и порождаемую ею регулярную обобщенную функцию, которую обозначим $\hat{f}(ax+b)$. Для любой функции $\varphi(x) \in \mathcal{D}$ имеем равенство:

$$\left(\hat{f}(ax+b), \varphi(x)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(ax+b)\varphi(x)\,dx. \qquad (20.11)$$

Сделаем в интеграле замену переменной $t = ax+b$. Тогда $dx = \frac{1}{a}dt$, $x = \frac{t-b}{a}$ и мы приходим к равенствам

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(ax+b)\varphi(x)\,dx = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi\left(\frac{t-b}{a}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi\left(\frac{x-b}{a}\right)dx = \frac{1}{|a|}\left(\hat{f}(x), \varphi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right). \qquad (20.12)$$

Отметим, что если $a>0$, то после замены переменной получается интеграл $\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi\left(\frac{t-b}{a}\right)dt$, а если $a<0$, то — интеграл $\frac{1}{a}\int_{+\infty}^{-\infty} f(t)\varphi\left(\frac{t-b}{a}\right)dt$, оба эти случая укладываются в единую запись $\frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi\left(\frac{t-b}{a}\right)dt$.
Из (20.11) и (20.12) следует, что для любой регулярной обобщенной функции $\hat{f}(x)$ и любых чисел $a \neq 0$ и b справедливо равенство

$$\left(\hat{f}(ax+b), \varphi(x)\right) = \left(\hat{f}(x), \varphi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right).$$

Для сингулярных обобщенных функций примем это равенство в качестве определения линейной замены переменных. Таким образом, мы вводим следующее определение.

Определение. Обобщенная функция $f(ax+b)$ – это функционал, действующий по правилу:

$$\forall \varphi(x) \in \mathcal{D}: \quad (f(ax+b), \varphi(x)) = \left(f(x), \varphi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right).$$

В частности, при $a=1$, $b=-c$, получаем формулу сдвига аргумента обобщенной функции:

$$(f(x-c), \varphi(x)) = (f(x), \varphi(x+c)),$$

а при $b=0$, $a \neq 0$ – формулу растяжения аргумента обобщённой функции:

$$(f(ax), \varphi(x)) = \frac{1}{|a|}\left(f(x), \varphi\left(\frac{x}{a}\right)\right).$$

Примеры. 1) $(\delta(x-c), \varphi(x)) = (\delta(x), \varphi(x+c)) = \varphi(x+c)\Big|_{x=0} = \varphi(c)$;

2) $(\delta(ax), \varphi(x)) = \frac{1}{|a|}\left(\delta(x), \varphi\left(\frac{x}{a}\right)\right) = \frac{1}{|a|}\varphi(0) = \frac{1}{|a|}(\delta(x), \varphi(x))$,

т.е. растяжение аргумента обобщенной функции $\delta(x)$ с коэффициентом a равносильно умножению $\delta(x)$ на число $\frac{1}{|a|}$: $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$.

В частности, при $a=-1$ получаем равенство

$$\delta(-x) = \delta(x). \quad (\text{"чётность } \delta\text{-функции"}).$$

3. Дифференцирование обобщённых функций.

Пусть $f(x) \in C^\infty(R)$. Операцию дифференцирования будем обозначать либо штрихом (как это делалось раньше), либо буквой D (так принято в теории обобщенных функций):

$$f'(x) = Df(x), \; f''(x) = (f'(x))' = D(Df(x)) = D^2 f(x),$$
$$\ldots, \; f^{(k)}(x) = D^k f(x).$$

Функция $Df(x)$ порождает регулярную обобщённую функцию $\widehat{Df}$, действие которой на произвольную функцию $\varphi(x)$ из пространства D выражается равенством

$$(\widehat{Df}, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx.$$

Применяя к интегралу формулу интегрирования по частям

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx = f(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx$$

и учитывая, что первое слагаемое в правой части равенства равно нулю, поскольку $\varphi(x)$ – финитная функция, а второе слагаемое можно записать в виде $-(\hat{f}, D\varphi)$, приходим к равенству

$$(\widehat{Df}, \varphi) = -(\hat{f}, D\varphi). \qquad (20.13)$$

Аналогично получается равенство (путём k-кратного применения формулы интегрирования по частям)

$$(\widehat{D^k f}, \varphi) = (-1)^k(\hat{f}, D^k\varphi), \; k=2,3,\ldots \qquad (20.14)$$

Равенства (20.13) и (20.14) получены для регулярной обобщенной функции $\hat{f}$, порождённой бесконечно дифференцируемой функцией $f(x)$. Для произвольных обобщенных функций примем эти равенства в качестве определения её производных.

<u>Определение.</u> Производной k-го порядка обобщённой функции f называется обобщенная функция (она обозначается $\mathcal{D}^k f$), действующая по правилу:

$$\forall \varphi(x) \in \mathcal{D}: \ (\mathcal{D}^k f, \varphi) = (-1)^k (f, \mathcal{D}^k \varphi), \ k = 1, 2, \ldots$$

Заметим, что для любой обобщенной функции f правая часть равенства определена для любого $k = 1, 2, \ldots$, Это означает, что <u>любая обобщенная функция бесконечно дифференцируема</u>, т.е. имеет производные всех порядков.

<u>Примеры.</u> 1) Найдём производную обобщённой функции Хевисайда.

$\forall \varphi(x) \in \mathcal{D}: \ (\hat{\theta}, \varphi) = \int\limits_0^{+\infty} \varphi(x)\,dx$, поэтому, согласно определению производной обобщённой функции,

$$(\mathcal{D}\hat{\theta}, \varphi) = -(\hat{\theta}, \mathcal{D}\varphi) = -(\hat{\theta}, \varphi') = -\int\limits_0^{+\infty} \varphi'(x)\,dx =$$

$$= -\varphi(x)\Big|_0^{+\infty} = \varphi(0) = (\delta(x), \varphi(x)).$$

Следовательно, $\mathcal{D}\hat{\theta} = \delta(x)$, т.е. производная обобщённой функции Хевисайда равна δ-функции.

2) Рассмотрим обобщенные функции $\widehat{\sin x}$ и $\widehat{\cos x}$, порождённые функциями $\sin x$ и $\cos x$:

$$\forall \varphi(x) \in \mathcal{D}: \ (\widehat{\sin x}, \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin x \cdot \varphi(x)\,dx, \ (\widehat{\cos x}, \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos x \cdot \varphi(x)\,dx.$$

Найдём производную $\mathcal{D}\widehat{\sin x}$ обобщенной функции $\widehat{\sin x}$. Согласно определению производной,

$$\forall \varphi(x) \in \mathcal{D}: \quad (\mathcal{D}\widehat{\sin x}, \varphi) = -(\widehat{\sin x}, \mathcal{D}\varphi) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x \cdot \varphi'(x)\,dx$$

$$= -\sin x \cdot \varphi(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} \cos x \cdot \varphi(x)\,dx = (\widehat{\cos x}, \varphi).$$

Отсюда следует, что $\mathcal{D}\widehat{\sin x} = \widehat{\cos x}$.

Аналогично доказывается, что $\mathcal{D}\widehat{\cos x} = -\widehat{\sin x}$.

3) Найдём производную δ-функции.

$$\forall \varphi(x) \in \mathcal{D}: \ (\mathcal{D}\delta(x), \varphi(x)) = -(\delta(x), \mathcal{D}\varphi(x)) =$$

$$= -(\delta(x), \varphi'(x)) = -\varphi'(0).$$

Таким образом, производная δ-функции ставит в соответствие каждой функции $\varphi(x)$ из пространства $\mathcal{D}$ число $-\varphi'(0)$. Аналогичным образом получаем:

$$\forall k \in \mathbb{N} \text{ и } \forall \varphi(x) \in \mathcal{D}: \ (\mathcal{D}^k \delta(x), \varphi(x)) = (-1)^k (\delta(x), \mathcal{D}^k \varphi(x)) = (-1)^k \varphi^{(k)}(0).$$

<u>Замечание.</u> В теории обобщенных функций доказывается, что если носитель обобщённой функции состоит из одной точки $x=0$, то эту обобщенную функцию можно представить (и притом единственным способом) в виде линейной комбинации δ-функции и её производных.

Пусть функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой и является кусочно-гладкой на любом сегменте. Рассмотрим случай, когда она имеет единственную точку разрыва — точку x_0. Как и ранее, обозначим регулярную обобщенную функцию, порождённую функцией $f(x)$, через $\hat{f}$, а регулярную обобщённую функцию, порождённую производной $f'(x)$, обозначим $\widehat{f'}$. Кроме того, введём обозначение для скачка функции $f(x)$ в точке x_0:

$$[f]_{x_0} = f(x_0+0) - f(x_0-0).$$

Теорема 4. Справедливо равенство

$$\mathcal{D}\hat{f} = \widehat{f'} + [f]_{x_0} \cdot \delta(x-x_0), \qquad (20.15)$$

где $\delta(x-x_0)$ — δ-функция со сдвигом аргумента на x_0.

Доказательство. Для доказательства справедливости равенства (20.15) нужно доказать, что

$$\forall \varphi(x) \in \mathcal{D} : \ (\mathcal{D}\hat{f}, \varphi) = (\widehat{f'}, \varphi) + [f]_{x_0} (\delta(x-x_0), \varphi(x)),$$

т.е.

$$(\mathcal{D}\hat{f}, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx + [f]_{x_0} \cdot \varphi(x_0). \qquad (20.16)$$

По определению производной $\mathcal{D}\hat{f}$ имеем:

$$(\mathcal{D}\hat{f}, \varphi) = -(\hat{f}, \mathcal{D}\varphi) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx.$$

Представим интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty}$ в виде суммы двух интегралов: $\int_{-\infty}^{x_0} + \int_{x_0}^{+\infty}$ и к каждому из слагаемых применим метод интегрирования по частям. Получим:

$$(\mathcal{D}\hat{f}, \varphi) = -\int_{-\infty}^{x_0} f(x)\,d\varphi(x) - \int_{x_0}^{+\infty} f(x)\,d\varphi(x) = -f(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{x_0-0} +$$

$$+ \int_{-\infty}^{x_0} f'(x)\varphi(x)\,dx - f(x)\varphi(x)\Big|_{x_0+0}^{+\infty} + \int_{x_0}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx + \left[f(x_0+0) - f(x_0-0)\right] \cdot \varphi(x_0) =$$

$$= (\widehat{f'}, \varphi) + [f(x)]_{x_0} \cdot \varphi(x_0).$$

Таким образом, мы получили равенство (20.16), что и требовалось доказать. Теорема 4 доказана.

Примеры. 1) Функция Хевисайда $\theta(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ 1, & x\geq 0 \end{cases}$ удовлетворяет условиям теоремы 4, причём $x_0 = 0$, $[\theta]_{x=0} = 1$. Так как $\theta'(x) = 0$ при $x \neq 0$, то $\forall \varphi(x)$: $(\widehat{\theta'}, \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \theta'(x)\varphi(x)\,dx = 0$, т.е. $\widehat{\theta'} = 0$. По формуле (20.15) получаем:

$$\mathcal{D}\hat{\theta} = \widehat{\theta'} + [\theta]_{x=0} \cdot \delta(x), \quad \text{т.е. } \mathcal{D}\hat{\theta} = \delta(x).$$

Отметим, что это равенство уже было получено ранее.

2) Аналогичным образом для функции $\operatorname{Sgn} x = \begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$ следует равенство (обоснуйте его)

$$\mathcal{D}(\widehat{\operatorname{Sgn}}\, x) = 2\delta(x).$$

4. Разложение δ-функции в ряд Фурье.

Пусть $\{\psi_n(x)\}$ — ортонормированная замкнутая система функций в пространстве $Q[a,b]$ кусочно-непрерывных функций. Обозначим через $\mathcal{D}[a,b]$ множество всех таких основных функций из пространства $\mathcal{D}$, носитель которых $\operatorname{Supp}\varphi(x) \in [a,b]$. Регулярную обобщённую функцию, порождаемую функцией $\psi_n(x)$ и действующую на множестве $\mathcal{D}[a,b]$, обозначим $\hat{\psi}_n(x)$. Тогда $\forall \varphi(x) \in \mathcal{D}[a,b]$: $(\hat{\psi}_n, \varphi) = \int\limits_a^b \psi_n(x)\varphi(x)\,dx = \varphi_n$,

где φ_n — коэффициент Фурье функции $\varphi(x)$ по системе $\{\psi_n(x)\}$.

Пусть $x_0 \in (a;b)$. Напишем формальное разложение обобщённой функции $\delta(x-x_0)$ по системе обобщённых функций $\{\hat{\psi}_n(x)\}$:

$$\delta(x-x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \cdot \hat{\psi}_n(x). \qquad (20.17)$$

Используя это равенство, получаем:

$$(\delta(x-x_0), \psi_k(x)) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n (\hat{\psi}_n(x), \psi_k(x)).$$

Левая часть равенства равна $\psi_k(x_0)$, а в правой части

$$(\hat{\psi}_n(x), \psi_k(x)) = \int_a^b \psi_n(x)\psi_k(x)\,dx = \delta_{nk} = \begin{cases} 1, & n = k, \\ 0, & n \neq k. \end{cases}$$

и, следовательно, правая часть равна δ_k. Итак, $\delta_k = \psi_k(x_0)$, и равенство (20.17) принимает вид

$$\delta(x-x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x_0)\hat{\psi}_n(x). \qquad (20.18)$$

Это и есть разложение обобщённой функции $\delta(x-x_0)$ в ряд Фурье по системе обобщённых функций $\{\hat{\psi}_n(x)\}$.

Равенство (20.18) нужно понимать так: обобщённая функция $\delta(x-x_0)$ есть предел (в смысле слабой сходимости) последовательности частичных сумм ряда (20.18).

Более точно, имеет место следующее утверждение: Если $\forall \varphi(x) \in \mathcal{D}[a,b]$ ряд Фурье $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \psi_n(x)$ сходится в точке x_0 к $\varphi(x_0)$ $\left(\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \psi_n(x_0) = \varphi(x_0)\right)$, то $\hat{\delta}_n(x,x_0) \to \delta(x-x_0)$ при $n \to \infty$ в пространстве $\mathcal{D}'[a,b]$, где $\hat{\delta}_n(x,x_0) = \sum_{k=1}^{n} \psi_k(x_0)\hat{\psi}_k(x)$ — частичная сумма ряда (20.18), т.е. $\forall \varphi(x) \in \mathcal{D}[a,b]$ числовая последовательность $(\hat{\delta}_n(x,x_0), \varphi(x))$ сходится к $(\delta(x-x_0), \varphi(x)) = \varphi(x_0)$.

В самом деле,

$$(\hat{\delta}_n(x,x_0), \varphi(x)) = \left(\sum_{k=1}^{n} \psi_k(x_0)\hat{\psi}_k(x), \varphi(x)\right) = \sum_{k=1}^{n} \psi_k(x_0)(\hat{\psi}_k, \varphi) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \varphi_k \psi_k(x_0) \xrightarrow[(n\to\infty)]{} \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \psi_k(x_0) = \varphi(x_0),$$

что и доказывает сформулированное утверждение.

В частности, если $\{\psi_n(x)\}$ — ортонормированная тригонометрическая система на сегменте $[-\pi, \pi]$, т.е.

$$\{\psi_n(x)\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\ n = 1, 2, \dots\right\},$$ то

$$\forall x_0 \in (-\pi, \pi):\ \delta(x - x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \widehat{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos nx_0 \cdot \widehat{\cos nx} + \sin nx_0 \cdot \widehat{\sin nx}\right).$$

Иногда знак $\wedge$ опускают и пишут так:

$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\cos n(x - x_0)\right).$$

Такая запись используется, например, в учебнике А.Н. Тихонова и А.А. Самарского "Уравнения математической физики".

5. Преобразование Фурье обобщённых функций.

В § 11 гл. 19 образ Фурье функции $f(x)$ мы обозначали символом $\hat{f}(\lambda)$:

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t}\,dt.$$

Поскольку в данной главе мы используем символ $\hat{f}$ (или $\hat{f}(x)$) для регулярной обобщённой функции, порождаемой локально интегрируемой функцией $f(x)$, то для образа Фурье функции $f(x)$ будем использовать другое обозначение: $F_f(\lambda)$ вместо $\hat{f}(\lambda)$, т.е.

$$F_f(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t}\,dt.$$

В теории обобщённых функций вводится ещё одно пространство основных функций. Оно обозначается буквой S и содержит все функции из пространства $C^\infty(\mathbb{R})$, убывающие вместе с производными всех порядков при $|x| \to \infty$ быстрее, чем любая степень $\frac{1}{|x|}$. Очевидно, что любая функция $\varphi(x)$ из пространства $\mathcal{D}$ принадлежит пространству S, поскольку $\varphi(x)$ — финитная функция.

Образ Фурье $F_f(\lambda)$ функции $f(x)$ порождает линейный непрерывный функционал $\hat{F}_f$ на пространстве S основных функций:

$$\forall \varphi(x) \in S: \ (\hat{F}_f, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_f(\lambda)\varphi(\lambda)d\lambda =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt\right)\varphi(\lambda)d\lambda.$$

Изменив порядок интегрирования в правой части равенства, получим

$$(\hat{F}_f, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\lambda)e^{-i\lambda t}d\lambda\right)dt.$$

Так как $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\lambda)e^{-i\lambda t}d\lambda = F_\varphi(t)$ — образ Фурье функции $\varphi(\lambda)$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)F_\varphi(t)dt = (\hat{f}, F_\varphi)$, то мы приходим к равенству:

$$\forall \varphi(x) \in S: (\hat{F}_f, \varphi) = (\hat{f}, F_\varphi). \qquad (20.19)$$

Любой линейный непрерывный функционал, определённый на пространстве S основных функций, называется обобщённой функцией медленного роста, а пространство обобщённых функций медленного роста обозначается S'.

Равенство (20.19) примем в качестве определения преобразования Фурье обобщённых функций медленного роста:

Обобщённая функция $\widehat{F_\varphi}$, действующая по правилу, выраженному равенством (20.19), является образом Фурье обобщённой функции $\hat{f}$, определённой на пространстве S.

Для обобщённой функции $\delta(x-x_0)$ по формуле (20.19) получаем (в качестве f берём $\delta(x-x_0)$) $\forall\, \varphi(x) \in S$:

$$\left(\widehat{F}_{\delta(x-x_0)}, \varphi\right) = \left(\delta(x-x_0), F_\varphi(x)\right) = F_\varphi(x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\, e^{-ix_0t}\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ix_0t}\right)\varphi(t)\,dt = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ix_0t}, \varphi(t)\right).$$

Отсюда следует, что

$$\widehat{F}_{\delta(x-x_0)}(t) = \widehat{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ix_0t}}$$ — образ Фурье обобщённой функции $\delta(x-x_0)$.

В частности, при $x_0 = 0$ имеем:

$$\widehat{F}_{\delta(x)} = \widehat{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}}.$$