Лекция 12

ПРИВЕДЕНИЕ КРИВОЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

§ 1. Преобразование прямоугольных декартовых координат на плоскости

Пусть $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ — это исходная декартова прямоугольная система координат на ориентированной плоскости, а $\{O^{'}, \mathbf{e}_1^{'}, \mathbf{e}_2^{'}\}$ — это другая прямоугольная декартова система координат. Нужно получить формулы, связывающие координаты одной и той же точки в этих системах координат:

$$M(x, y) \quad \text{и} \quad M(x^{'}, y^{'}).$$

Сначала рассмотрим случай $O^{'} = O$. Рассмотрим две системы полярных координат, связанных с системой координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ и «повёрнутой» системой координат $\{O, \mathbf{e}_1^{'}, \mathbf{e}_2^{'}\}$: Пусть (ρ, φ) — это поляр-

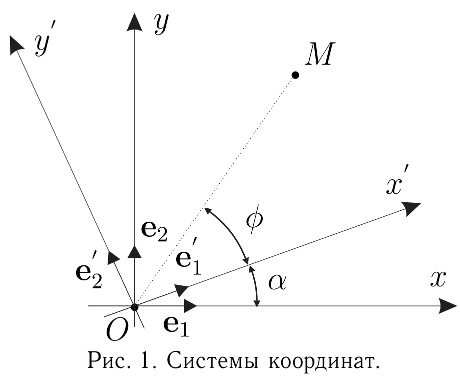

Рис. 1. Системы координат.

ные координаты точки M относительно системы координат $\{O, \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$, т. е. с полярной осью $Ox^{'}$. [1] Тогда $(\rho, \varphi + \alpha)$ — это полярные коорди-

[1] Здесь имеется в виду, что $\varphi \in [0, 2\pi)$ — угол, отсчитываемый против часовой стрелки от оси Ox' до радиус–вектора $\overrightarrow{OM}$.

наты той же точки относительно системы координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, т. е. с полярной осью Ox. [1]) Тогда имеют место следующие формулы:

$$x = \rho\cos(\varphi + \alpha), \quad y = \rho\sin(\varphi + \alpha), \tag{1.1}$$

$$x^{'} = \rho\cos\varphi, \quad y^{'} = \rho\sin\varphi. \tag{1.2}$$

Справедливы следующие две цепочки равенств:

$$x = \rho\cos(\varphi + \alpha) = \rho\cos\varphi\cos\alpha - \rho\sin\varphi\sin\alpha = x^{'}\cos\alpha - y^{'}\sin\alpha, \tag{1.3}$$

$$y = \rho\sin(\varphi + \alpha) = \rho\sin\varphi\cos\alpha + \rho\cos\varphi\sin\alpha = y^{'}\cos\alpha + x^{'}\sin\alpha. \tag{1.4}$$

Итоговые формулы (1.3) и (1.4) можно записать в следующем компактном виде:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{'} \\ y^{'} \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Теперь опять в случае $O^{'} = O$ нужно получить формулы, связывающие базисы $\{\mathbf{e}_1^{'}, \mathbf{e}_2^{'}\}$ и $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$: По правилу треугольника имеем

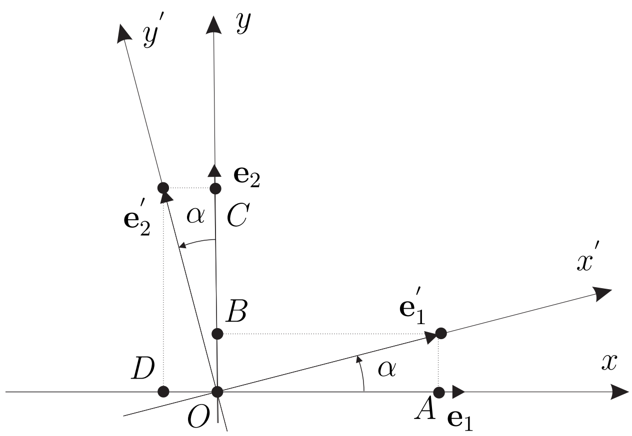

Рис. 2. Базисные векторы.

$$\mathbf{e}_1^{'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}, \quad \overrightarrow{OA} = OA \cdot \mathbf{e}_1, \quad \overrightarrow{OB} = OB \cdot \mathbf{e}_2. \tag{1.6}$$

Справедливы следующие равенства:

$$OA = (\mathbf{e}_1^{'}, \mathbf{e}_1) = |\mathbf{e}_1^{'}||\mathbf{e}_1|\cos\alpha = \cos\alpha, \tag{1.7}$$

$$OB = (\mathbf{e}_1^{'}, \mathbf{e}_2) = |\mathbf{e}_1^{'}||\mathbf{e}_2|\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha, \tag{1.8}$$

[1]) Угол $\alpha \in [0, 2\pi)$ и отсчитывается от оси Ox до оси Ox' против часовой стрелки.

где угол $\alpha \in [0, 2\pi)$ — угол между осью Ox и осью Ox', отсчитываемый против часовой стрелки от оси Ox. Следовательно, из равенств (1.6)–(1.8) получаем равенство

$$\mathbf{e}_1' = \cos\alpha \cdot \mathbf{e}_1 + \sin\alpha \cdot \mathbf{e}_2. \tag{1.9}$$

Для вектора $\mathbf{e}_2^{'}$ справедливо следующее равенство:

$$\mathbf{e}_2^{'} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}. \tag{1.10}$$

Справедливы следующие равенства:

$$\overrightarrow{OC} = OC \cdot \mathbf{e}_2, \quad \overrightarrow{OD} = OD \cdot \mathbf{e}_1, \tag{1.11}$$

$$OC = (\mathbf{e}_2^{'}, \mathbf{e}_2) = |\mathbf{e}_2^{'}||\mathbf{e}_2| \cos\alpha, \tag{1.12}$$

$$OD = (\mathbf{e}_2^{'}, \mathbf{e}_1) = |\mathbf{e}_2^{'}||\mathbf{e}_1| \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right). \tag{1.13}$$

Итак, из равенств (1.10)–(1.13) вытекает искомое выражение

$$\mathbf{e}_2^{'} = -\sin\alpha \cdot \mathbf{e}_1 + \cos\alpha \cdot \mathbf{e}_2. \tag{1.14}$$

Равенства (1.9) и (1.14) можно переписать в компактной форме с учётом правила умножения строчки на матрицу:

$$(\mathbf{e}_1^{'}, \mathbf{e}_2^{'}) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{1.15}$$

□ Действительно, согласно правилу «строчка на столбец» получим следующее равенство:

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \\ = (\mathbf{e}_1 \cdot \cos\alpha + \mathbf{e}_2 \cdot \sin\alpha, -\mathbf{e}_1 \cdot \sin\alpha + \mathbf{e}_2 \cdot \cos\alpha), \tag{1.16}$$

а из равенства строчек

$$(\mathbf{e}_1^{'}, \mathbf{e}_2^{'}) = (\mathbf{e}_1 \cdot \cos\alpha + \mathbf{e}_2 \cdot \sin\alpha, -\mathbf{e}_1 \cdot \sin\alpha + \mathbf{e}_2 \cdot \cos\alpha)$$

мы получим равенства (1.9) и (1.14). ⊠

Теперь мы рассмотрим общую ситуацию: $O^{'} \neq O$. Тогда справедливо следующее равенство:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO^{'}} + \overrightarrow{O^{'}M}. \tag{1.17}$$

Пусть

$$\overrightarrow{OO^{'}} = \alpha \cdot \mathbf{e}_1 + \beta \cdot \mathbf{e}_2 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \tag{1.18}$$

$$\overrightarrow{OM} = x \cdot \mathbf{e}_1 + y \cdot \mathbf{e}_2 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{1.19}$$

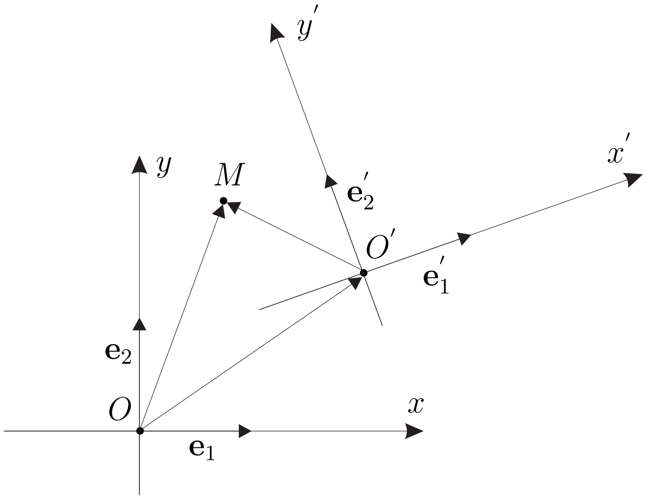

Рис. 3. Поворот и сдвиг системы координат.

$$\overrightarrow{O'M} = x' \cdot \mathbf{e}_1' + y' \cdot \mathbf{e}_2' = (\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2') \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}. \tag{1.20}$$

Из равенств (1.17)–(1.20) и из выражения (1.15) вытекает следующее равенство:

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \\ + (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}. \tag{1.21}$$

Заметим, что справедливо следующее равенство:

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \left[\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \right]. \tag{1.22}$$

□ Действительно, имеет место следующая цепочка равенств:

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + d_1\mathbf{e}_1 + d_2\mathbf{e}_2 = \\ = (c_1 + d_1)\mathbf{e}_1 + (c_2 + d_2)\mathbf{e}_2 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} c_1 + d_1 \\ c_2 + d_2 \end{pmatrix} = \\ = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \left[\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \right]. \quad \boxtimes$$

Произведение

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

— это некоторый столбец. Поэтому из равенства (1.21) в силу свойства (1.22) приходим к следующему равенству:

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \mathbf{e}_1 + 0 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{0}, \tag{1.23}$$

где

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{'} \\ y^{'} \end{pmatrix}. \tag{1.24}$$

Заметим, что согласно правилу умножения «строчка на столбец» имеем

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = z_1 \cdot \mathbf{e}_1 + z_2 \cdot \mathbf{e}_2,$$

а в силу (1.23) мы приходим к следующему равенству:

$$z_1 \cdot \mathbf{e}_1 + z_2 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{0}, \tag{1.25}$$

которое в силу линейной независимости базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ эквивалентно равенствам

$$z_1 = z_2 = 0.$$

Отсюда и из (1.24) получаем искомое равенство

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{'} \\ y^{'} \end{pmatrix} \tag{1.26}$$

или в развёрнутой форме

$$x = x_0 + \cos\alpha \cdot x^{'} - \sin\alpha \cdot y^{'},$$
$$y = y_0 + \sin\alpha \cdot x^{'} + \cos\alpha \cdot y^{'}.$$

§ 2. Матричная форма записи преобразований на плоскости в однородных координатах

Введём следующие обозначения:

$$R := \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

$$X := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad X' := \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \quad X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Тогда матричное уравнение (1.26) с учётом обозначений (2.1), (2.2) можно переписать в следующей компактной матричной форме записи:

$$X = X_0 + RX'. \tag{2.3}$$

Отметим, что справедливо следующее утверждение:
Лемма 1. *Имеет место равенства* $|R| = 1$ *и* $R^T = R^{-1}$.

Доказательство.

Первое утверждение тривиально. Для доказательства второго нужно заметить, что преобразование R — преобразование поворота на угол $\alpha \in [0, 2\pi)$, а обратное преобразование — поворот на угол $-\alpha$. Следовательно,

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = R^T.$$

Хотя, можно проверить и непосредственно. Справедливы следующие равенства:

$$R^T R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$RR^T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Лемма доказана.

С учётом результата этой леммы справедливы следующие формулы:

$$\begin{aligned} X - X_0 = RX' \Leftrightarrow X' = R^{-1}(X - X_0) = R^T(X - X_0) = \\ = -R^T X_0 + R^T X \Leftrightarrow X' = X'_0 + R^T X, \quad X'_0 = -R^T X_0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Запись преобразований плоскости в однородных координатах. Выпишем следующие столбцы:

$$Z = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \left\| \begin{array}{c} X \\ \hline 1 \end{array} \right\|, \quad Z' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \left\| \begin{array}{c} X' \\ \hline 1 \end{array} \right\|. \tag{2.5}$$

Введём теперь расширенную матрицу преобразования

$$P = \left(\begin{array}{cc|c} \cos\alpha & -\sin\alpha & x_0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & y_0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left\| \begin{array}{c|c} R & X_0 \\ \hline O & 1 \end{array} \right\|. \tag{2.6}$$

Справедливо следующее утверждение:

Лемма 2. *Матрица P обратима и обратная имеет следующий вид*:

$$P^{-1} = \left(\begin{array}{cc|c} \cos\alpha & \sin\alpha & x'_0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & y'_0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left\| \begin{array}{c|c} R^T & -R^T X_0 \\ \hline O & 1 \end{array} \right\|. \tag{2.7}$$

Доказательство.

Используя правило перемножения блочных матриц, получим следующую цепочку равенств:

$$P^{-1} \cdot P = \left\| \begin{array}{c|c} R^T & -R^T X_0 \\ \hline O & 1 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c|c} R & X_0 \\ \hline O & 1 \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{c|c} R^T R & R^T X_0 - R^T X_0 \\ \hline O & 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} \mathbb{I} & O \\ \hline O & 1 \end{array} \right\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P \cdot P^{-1} = \left\| \begin{array}{c|c} R & X_0 \\ \hline O & 1 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c|c} R^T & -R^T X_0 \\ \hline O & 1 \end{array} \right\| \cdot =$$

$$= \left\| \begin{array}{c|c} RR^T & -RR^T X_0 + X_0 \\ \hline O & 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} \mathbb{I} & O \\ \hline O & 1 \end{array} \right\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *Справедливы следующие равенства*:

$$Z = PZ', \quad Z' = P^{-1} Z.$$

Доказательство.

$$PZ' = \left\| \begin{array}{c|c} R & X_0 \\ \hline O & 1 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} X' \\ \hline 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} R \cdot X' + X_0 \\ \hline 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} X \\ \hline 1 \end{array} \right\| = Z;$$

$$P^{-1} \cdot Z = \left\| \begin{array}{c|c} R^T & -R^T X_0 \\ \hline O & 1 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} X \\ \hline 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} R^T \cdot X - R^T \cdot X_0 \\ \hline 1 \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{c} R^T \cdot (X - X_0) \\ \hline 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} X' \\ \hline 1 \end{array} \right\| = Z'.$$

Лемма доказана.

Замечание 1. Справедливо равенство

$$P^{-1} = \left\| \begin{array}{c|c} R^T & -R^T X_0 \\ \hline O & 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc|c} \cos\alpha & \sin\alpha & x_0' \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & y_0' \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right\|,$$

где

$$X_0' = -R^T X_0,$$

которое можно переписать в следующем виде:

$$\begin{cases} x_0' = -x_0 \cos\alpha - y_0 \sin\alpha, \\ y_0' = x_0 \sin\alpha - y_0 \cos\alpha. \end{cases}$$

§ 3. Уравнения квадрики на плоскости

Пусть на ориентированной плоскости задана декартова прямоугольная система координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$.

Определение 1. *Линия на плоскости, координаты точек* $M(x,y)$ *которой и только они являются решениями уравнения*

$$F(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0, \tag{3.1}$$

причём коэффициенты этого уравнения вещественные числа и

$$|a_{11}| + |a_{12}| + |a_{22}| > 0$$

называется уравнением линии второго порядка или квадрикой.

Введём следующие матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad a_{21} = a_{12}, \quad B = (b_1, b_2), \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Уравнение (3.1) квадрики можно записать в следующем виде:

$$X^T A X + 2BX + c = 0. \tag{3.2}$$

□ Действительно, справедливы следующие равенства:

$$X^T A X = (x,y) \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{12}x + a_{22}y \end{pmatrix} = a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{12}yx + a_{22}y^2. \tag{3.3}$$

⊠

Уравнение квадрики в однородных координатах. Рассмотрим следующие блочные матрицы:

$$D = \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ \hline b_1 & b_2 & c \end{array}\right) = \left\| \begin{array}{c|c} A & B^T \\ \hline B & c \end{array} \right\|, \quad Z = \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ \hline 1 \end{array}\right) = \left\| \begin{array}{c} X \\ \hline 1 \end{array} \right\|. \tag{3.4}$$

Тогда уравнение квадрики (3.2) можно записать в следующем виде:

$$Z^T D Z = 0. \tag{3.5}$$

□ Действительно,

$$\begin{aligned} \left\| \, X^T \middle| \, 1 \, \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c|c} A & B^T \\ \hline B & c \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} X \\ \hline 1 \end{array} \right\| = \\ = \left\| \, X^T A + B \middle| X^T B^T + c \, \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} X \\ \hline 1 \end{array} \right\| = \\ = X^T A X + BX + X^T B^T + c = X^T A X + 2BX + c, \end{aligned}$$

где мы воспользовались равенством $BX = (BX)^T = X^T B^T$, которое справедливо, поскольку произведение BX — число. ⊠

§ 4. Ортогональные преобразования уравнения квадрики

Рассмотрим на плоскости помимо $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ ещё одну декартову прямоугольную систему координат $\{O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$, полученную из $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ параллельным переносом и поворотом. Напомним, что однородные координаты в этих системах координат связаны соотношением

$$Z = PZ', \quad P = \left(\begin{array}{cc|c} \cos\alpha & -\sin\alpha & x_0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & y_0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left\| \begin{array}{c|c} R & X_0 \\ \hline O & 1 \end{array} \right\|, \tag{4.1}$$

где

$$Z = \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ \hline 1 \end{array}\right) = \left\| \begin{array}{c} X \\ \hline 1 \end{array} \right\|, \quad Z' = \left(\begin{array}{c} x' \\ y' \\ \hline 1 \end{array}\right) = \left\| \begin{array}{c} X' \\ \hline 1 \end{array} \right\|.$$

После подстановки в уравнение (3.5) преобразования (4.1) получим следующую цепочку равенств:

$$0 = Z^T D Z = Z'^T P^T D P Z' = Z'^T D' Z',$$

где

$$D' = P^T D P, \quad D' = \left\| \begin{array}{c|c} A' & B'^T \\ \hline B' & c' \end{array} \right\|. \tag{4.2}$$

$$\square \quad P^T \cdot D = \left\| \begin{array}{c|c} R^T & O \\ \hline X_0^T & 1 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c|c} A & B^T \\ \hline B & c \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} R^T A & R^T B^T \\ \hline X_0^T A + B & X_0^T B^T + c \end{array} \right\|,$$

$$\begin{aligned} \left(P^T \cdot D\right) \cdot P &= \left\| \begin{array}{c|c} R^T A & R^T B^T \\ \hline X_0^T A + B & X_0^T B^T + c \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c|c} R & X_0 \\ \hline O & 1 \end{array} \right\| = \\ &= \left\| \begin{array}{c|c} R^T A R & R^T A X_0 + R^T B^T \\ \hline X_0^T A R + B R & X_0^T A X_0 + B X_0 + X_0^T B^T + c \end{array} \right\| = \\ &= \left\| \begin{array}{c|c} R^T A R & R^T (A X_0 + B^T) \\ \hline (X_0^T A + B) R & X_0^T A X_0 + 2 B X_0 + c \end{array} \right\|, \end{aligned} \tag{4.3}$$

где мы воспользовались равенством $X_0^T B^T = B X_0$, поскольку это матрица размера 1×1 — число, а также тем, что $A^T = A$. Сравнивая формулы (4.2) и (4.3) мы получим равенства

$$A' = R^T A R, \quad B' = (X_0^T A + B) R, \quad c' = X_0^T A X_0 + 2 B X_0 + c, \tag{4.4}$$

а уравнение квадрики в новой системе координат примет следующий вид:

$$X'^T A' X' + 2 B' X' + c' = 0. \quad \boxtimes \tag{4.5}$$

Наблюдение 1. Матрица A меняется только при повороте.

Наблюдение 2. Матрица B меняется и при повороте и при параллельном переносе.

Наблюдение 3. Свободный член c меняется только при параллельном переносе.

Ортогональные инварианты уравнения квадрики. Теорема 1. *При ортогональных преобразованиях декартовой прямоугольной системы координат величины*

$$S := \operatorname{tr} A, \quad \delta := \det A, \quad \triangle := \det D \tag{4.6}$$

не изменяются.

Доказательство.

$$\operatorname{tr} A' = \operatorname{tr}(R^T AR) = \operatorname{tr}(ARR^T) = \operatorname{tr}(ARR^{-1}) = \operatorname{tr} A;$$

$$\det A' = \det(R^T AR) = \det R^T \det A \det R = \det A, \quad \det R = 1;$$

$$\det D' = \det(P^T DP) = \det P^T \det D \det P = \det D, \quad \det P = 1.$$

Теорема доказана.

Определение 2. *Величины* (4.6) *называются ортогональными инвариантами.*

§ 5. Уничтожение слагаемого $2a_{12}xy$ при помощи поворота на угол α

Задача заключается в том, чтобы найти поворот на такой угол α, при котором справедливо равенство

$$A' = R^T AR = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}. \tag{5.1}$$

Лемма 4. *При наличии в уравнении квадрики* (3.1) *слагаемого* $2a_{12}xy$ *необходимо выполняется условие* $\lambda_1 \neq \lambda_2$ [1].

Доказательство.

Пусть $\lambda_1 = \lambda_2$. Тогда

$$A = (R^T)^{-1} A' R^{-1} = RA'R^{-1} = R\,(\lambda\mathbb{I})\,R^{-1} = \lambda RR^{-1} = \lambda\mathbb{I}.$$

Лемма доказана.

Замечание 2. Числа λ_1 и λ_2 могут быть найдены с помощью ортогональных инвариантов.

□ Действительно, имеем

$$S = \operatorname{tr} A = \operatorname{tr} A' = \lambda_1 + \lambda_2, \quad \delta = \det A = \det A' = \lambda_1\lambda_2.$$

[1] Отметим, что это утверждение имеет место только в прямоугольных декартовых системах координат.

Поэтому по теореме Виета числа λ_1 и λ_2 являются решениями следующего квадратного уравнения:

$$\lambda^2 - S\lambda + \delta = 0. \quad \boxtimes \tag{5.2}$$

Характеристический многочлен. Итак, при ортогональном преобразовании R ($R^T = R^{-1}$) матрица A квадрики преобразуется по следующему закону:

$$A^{'} = R^T A R \Leftrightarrow R A^{'} = A R, \tag{5.3}$$

поскольку $R^T = R^{-1}$. Нам нужно найти такой новый базис $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'$, в котором матрица $A^{'}$ имеет вид

$$A^{'} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Воспользуемся равенством (5.3) и получим следующее выражение:

$$A\|R_1, R_2\| = \|R_1, R_2\| \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \|\lambda_1 R_1, \lambda_2 R_2\|. \tag{5.4}$$

Заметим теперь, что согласно формуле произведения матрицы A на матрицу $R = \|R_1, R_2\|$ имеет место равенство

$$AR = A\|R_1, R_2\| = \|AR_1, AR_2\|. \tag{5.5}$$

Из равенств (5.4) и (5.5) мы приходим к равенствам

$$\|AR_1, AR_2\| = \|\lambda_1 R_1, \lambda_2 R_2\| \Leftrightarrow AR_k = \lambda_k R_k \quad \text{при} \quad k = 1, 2. \tag{5.6}$$

Уравнения (5.6) можно переписать в следующем виде:

$$(A - \lambda_k \mathbb{I})\, R_k = O \quad \text{при} \quad k = 1, 2. \tag{5.7}$$

Нетривиальные решения систем уравнений (5.7) существуют тогда и только тогда, когда λ_1 и λ_2 являются решениями следующего уравнения:

$$\det\,(A - \lambda \mathbb{I}) = 0. \tag{5.8}$$

Определение 3. *Уравнение* (5.8) *называется характеристическим уравнением или характеристическим многочленом.*

Вычисление определителя в характеристическом уравнении.

$$\square \quad \det\,(A - \lambda\mathbb{I}) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = $$
$$= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} =$$
$$= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} =$$
$$= \lambda^2 - S\lambda + \delta = 0. \quad \boxtimes \tag{5.9}$$

Таким образом, мы установили, что *числа* λ_1 *и* λ_2 *являются решениями уравнения* (5.8) *и только они.*

Определение 4. *Корни* λ_1 *и* λ_2 *характеристического многочлена* (5.8) *называются собственными значениями матрицы* A, *а ненулевые решения* R_1 *и* R_2 *уравнения*

$$(A - \lambda\mathbb{I})\, X = O$$

называются собственными векторами.

Поэтому, например,

$$AR_2 = \lambda_2 R_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -a_{11}\sin\alpha + a_{12}\cos\alpha = -\lambda_2 \sin\alpha, \\ -a_{12}\sin\alpha + a_{22}\cos\alpha = \lambda_2\cos\alpha, \end{array} \right\} \quad (5.10)$$

$$-a_{11}\sin\alpha\cos\alpha + a_{12}\cos^2\alpha =$$
$$= a_{12}\sin^2\alpha - a_{22}\sin\alpha\cos\alpha \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a_{12}\cos(2\alpha) = \frac{a_{11} - a_{22}}{2}\sin(2\alpha), \quad (5.11)$$

$$\cot 2\alpha = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}. \quad (5.12)$$

§ 6. Уничтожение линейных слагаемых $2b_1x + 2b_2y$

Из полученных ранее формул (4.4) вытекает, что при общем ортогональном преобразовании матрица–строка $B = (b_1, b_2)$ преобразуется по следующему закону:

$$B' = (X_0^T A + B)R. \quad (6.1)$$

Для уничтожения в уравнении квадрики (3.2) линейного слагаемого

$$2BX$$

необходимо и достаточно потребовать, чтобы $B' = O$. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$B' = O \Leftrightarrow (X_0^T A + B)R = O \Leftrightarrow X_0^T A + B = O \Leftrightarrow A^T X_0 = -B^T. \quad (6.2)$$

Поскольку $A^T = A$, то мы приходим к искомому уравнению

$$AX_0 = -B^T, \quad B \neq O. \quad (6.3)$$

Ясно, что эта квадратная неоднородная система линейных уравнений однозначно разрешима тогда и только тогда, когда $\delta = \det A \neq 0$.

Случай центральных квадрик. Рассмотрим сначала случай $\delta \neq 0$. В этом случае имеет место равенство

$$X_0 = -A^{-1}B^T,$$

из которого вытекает явный вид искомого преобразования

$$P = \left\| \begin{array}{c|c} R & X_0 \\ \hline O & 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} R & -A^{-1}B^T \\ \hline O & 1 \end{array} \right\|, \quad R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

В новых координатах $X^{'} = (x^{'}, y^{'})$ после этого преобразования уравнение квадрики примет следующий вид:

$$\lambda_1 x^{'2} + \lambda_2 y^{'2} + c^{'} = 0, \quad c^{'} = X_0^T A X_0 + 2BX_0 + c. \tag{6.4}$$

Матрица $D^{'}$ при этом имеет следующий вид:

$$D^{'} = \left(\begin{array}{cc|c} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & c^{'} \end{array} \right), \tag{6.5}$$

где выражение для $c^{'}$ можно упростить.

$\square$ $c^{'} = X_0^T A X_0 + 2BX_0 + c = -X_0^T B^T + 2BX_0 + c = BX_0 + c.$ $\boxtimes$

Кроме того, из выражения (6.5) имеют место следующие равенства:

$$\triangle = \det D^{'} = \lambda_1 \lambda_2 c^{'} = \delta c^{'} \Rightarrow c^{'} = \frac{\triangle}{\delta}. \tag{6.6}$$

Следовательно, уравнение (6.4) с учётом (6.6) можно переписать в следующем виде:

$$\lambda_1 x^{'2} + \lambda_2 y^{'2} + \frac{\triangle}{\delta} = 0. \tag{6.7}$$

Определение 5. *Алгебраическая линия второго порядка называется центральной, если* $\det A \neq 0$.

§ 7. Уравнения эллиптического типа

Рассмотрим случай $\delta = \det A = \lambda_1 \lambda_2 > 0$. В этом случае, очевидно, числа λ_1 и λ_2 одного знака.

1. Вещественный эллипс. Пусть $c^{'}$ и $\lambda_{1,2}$ имеют разные знаки. Тогда уравнение (6.7) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{x^{'2}}{a^2} + \frac{y^{'2}}{b^2} = 1, \quad a^2 = -\frac{c^{'}}{\lambda_1} = -\frac{\triangle}{\delta\lambda_1} > 0, \quad b^2 = -\frac{c^{'}}{\lambda_2} = -\frac{\triangle}{\delta\lambda_2} > 0. \tag{7.1}$$

2. Мнимый эллипс. Пусть $c^{'}$ и $\lambda_{1,2}$ одного знака. Тогда уравнение (6.7) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{x^{'2}}{a^2} + \frac{y^{'2}}{b^2} = -1, \quad a^2 = \frac{c^{'}}{\lambda_1} = \frac{\triangle}{\delta\lambda_1} > 0, \quad b^2 = \frac{c^{'}}{\lambda_2} = \frac{\triangle}{\delta\lambda_2} > 0. \tag{7.2}$$

3. Пара мнимых прямых. Пусть $c^{'} = 0$ и уравнение (6.7) можно переписать в следующем виде:

$$a^2 x^{'2} + b^2 y^{'2} = 0, \quad a = \sqrt{|\lambda_1|}, \quad b = \sqrt{|\lambda_2|}. \tag{7.3}$$

§ 8. Уравнения гиперболического типа

Рассмотрим теперь случай $\delta = \det A = \lambda_1\lambda_2 < 0$. Это случай, когда числа λ_1 и λ_2 разных знаков.

4. Гипербола. Предположим, что $\triangle = c^{'}\delta \neq 0$. Тогда $c^{'} \neq 0$. Без ограничения общности можно считать, что знаки чисел $c^{'}$ и λ_1 разные, а знаки чисел $c^{'}$ и λ_2 одинаковые. Поэтому уравнение (6.7) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{x^{'2}}{a^2} - \frac{y^{'2}}{b^2} = 1, \quad a^2 = -\frac{c^{'}}{\lambda_1} = -\frac{\triangle}{\delta\lambda_1} > 0, \quad b^2 = \frac{c^{'}}{\lambda_2} = \frac{\triangle}{\delta\lambda_2} > 0. \tag{8.1}$$

5. Пара пересекающихся прямых. Предположим, что $\triangle = c^{'}\delta = 0 \Rightarrow c^{'} = 0$. Это вырожденный случай. Тогда уравнение (6.7) можно привести к следующему виду:

$$a^2 x^{'2} - b^2 y^{'2} = 0, \quad a^2 = |\lambda_1|, \quad b^2 = |\lambda_2|. \tag{8.2}$$

§ 9. Уравнения параболического типа

Рассмотрим теперь вырожденный случай $\delta = \det A = \lambda_1\lambda_2 = 0$. Поскольку мы рассматриваем алгебраические уравнения второго порядка, то это означает, что только одно из чисел λ_1 и λ_2 равно нулю. Пусть, например, $\lambda_1 = 0$. Тогда

$$S = \operatorname{tr} A = \lambda_2, \quad D^{'} = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & b_1^{'} \\ 0 & S & b_2^{'} \\ \hline b_1^{'} & b_2^{'} & c^{'} \end{array}\right), \quad \triangle = \det D^{'} = -\left(b_1^{'}\right)^2 S. \tag{9.1}$$

Поскольку рассматривается случай $\det A = 0$, то система уравнений $AX_0 = -B^T$ может либо быть несовместной, либо иметь бесконечное множество решений. Это случай *нецентральных кривых на плоскости*. Справедливо следующее важное утверждение:

Лемма 5. *Коэффициент $b_1^{'}$ выражается формулой*

$$b_1^{'} = \pm\sqrt{-\frac{\triangle}{S}} \tag{9.2}$$

и его абсолютная величина $|b_1^{'}|$ является инвариантом относительно сдвигов.

Доказательство.

Если мы используем только преобразование параллельного переноса системы координат, то при этом матрица $D^{'}$ после преобразования вида (формально при $\alpha = 0$)

$$P = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

преобразуется только к матрице аналогичного вида:

$$D^{''} = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & b_1^{''} \\ 0 & S & b_2^{''} \\ \hline b_1^{''} & b_2^{''} & c^{''} \end{array}\right).$$

При этом имеем

$$\triangle = \det D^{''} = -\left(b_1^{''}\right)^2 S, \quad \triangle = \det D^{'} = -\left(b_1^{'}\right)^2 S \Rightarrow |b_1^{''}| = |b_1^{'}|.$$

Лемма доказана.

6. Параболический тип. Предположим, что $\triangle \neq 0$. Поэтому согласно лемме 5 какие бы мы в дальнейшем не делали бы параллельный перенос системы координат (сдвиг) коэффициент $b_1^{'} \neq 0$ преобразуется в коэффициент $b_1^{''} = \pm b_1^{'} \neq 0$. Пусть мы сделали уже поворот на найденный угол α и уничтожили слагаемое $2a_{12}xy$. В однородных координатах чистый поворот имеет следующий вид:

$$D^{'} = P_1^T D P_1, \quad P_1 = \left\| \begin{array}{c|c} R & O \\ \hline O & 1 \end{array} \right\|, \quad R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

При этом в однородных координатах мы пришли к матрице

$$D^{'} = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & b_1^{'} \\ 0 & S & b_2^{'} \\ \hline b_1^{'} & b_2^{'} & c^{'} \end{array}\right), \quad A^{'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}, \quad B^{'} = (b_1^{'}, b_2^{'}), \quad b_1^{'} \neq 0.$$

Тогда уравнение для центра примет следующий вид:

$$A^{'} X_0 = -B^{'T} = -\begin{pmatrix} b_1^{'} \\ b_2^{'} \end{pmatrix},$$

где

$$\operatorname{rang} A^{'} = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} < \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -b_1^{'} \\ 0 & S & -b_2^{'} \end{pmatrix}, \quad \text{если} \quad b_1^{'} \neq 0.$$

Итак, *уравнение цента не имеет решений*. После поворота R (пока без сдвига) уравнение квадрики примет следующий вид:

$$Sy^{'2} + 2b_1^{'}x^{'} + 2b_2^{'}y^{'} + c = 0, \quad b_1^{'} \neq 0. \tag{9.3}$$

Это уравнение после выделения полного квадрата примет следующий вид:

$$S\left(y^{'} + \frac{b_2^{'}}{S}\right)^2 + 2b_1^{'}\left(x^{'} + \frac{c}{2b_1^{'}} - \frac{b_2^{'2}}{2b_1^{'}S}\right) = 0.$$

Вводя новые переменные

$$\begin{cases} x^{''} = \pm\left(x^{'} + \dfrac{c}{2b_1^{'}} - \dfrac{b_2^{'2}}{2b_1^{'}S}\right), \\ y^{''} = y^{'} + \dfrac{b_2^{'}}{S}, \end{cases} \tag{9.4}$$

получим уравнение

$$Sy^{''2} + 2b_1^{'}x^{''} = 0, \tag{9.5}$$

а затем выбираем знак $\pm$ так, чтобы получилось каноническое уравнение параболы

$$y^{''2} = 2px^{''}, \quad p = \left|\frac{b_1^{'}}{S}\right|. \tag{9.6}$$

Замечание 3. Заметим, что после преобразования (9.4) матрица квадрики в системе координат $Ox^{''}y^{''}$ примет следующий вид:

$$D^{''} = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & b_1^{'} \\ 0 & S & 0 \\ \hline b_1^{'} & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Вырожденный параболический тип. Пусть $\triangle = \det D = 0$. Следовательно, система уравнений центра

$$AX_0 = -B^T \tag{9.7}$$

имеет бесконечно много решений. Выберем какое–либо из них X_0. Поэтому после поворота и сдвига, определяемого матрицей

$$P = \left\| \begin{array}{c|c} R & X_0 \\ \hline O & 1 \end{array} \right\|, \quad R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad D^{'} = P^T D P.$$

получим уравнение кривой второго порядка следующего вида:

$$Sy^{'2} + c^{'} = 0, \tag{9.8}$$

с матрицей D' в однородных координатах следующего вида:

$$D^{'} = P^T D P = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 \\ \hline 0 & 0 & c^{'} \end{array}\right). \tag{9.9}$$

Отметим, что

$$c' = X_0^T A X_0 + 2BX_0 + c. \tag{9.10}$$

Отсюда с учётом уравнения (9.7) получим равенство

$$c' = -X_0^T B^T + 2BX_0 + c = BX_0 + c, \tag{9.11}$$

где $X_0^T B^T = (BX_0)^T = BX_0$, поскольку произведение BX_0 — число. Из вида выражения (9.11) может сложиться впечатление, что c' зависит от выбора X_0. Однако, это не так. Пусть X_1 — другое решение уравнения (9.7):

$$AX_1 = -B^T \Rightarrow c'' = BX_1 + c. \tag{9.12}$$

Из уравнений (9.7) и (9.11) вытекают соотношения:

$$X_1^T A X_0 = -X_1^T B^T \Leftrightarrow X_1^T A^T X_0 = -X_1^T B^T \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -BX_0 = -X_1^T B^T = -BX_1 \Leftrightarrow BX_0 = BX_1 \Rightarrow c'' = c'. \tag{9.13}$$

7. Вырожденный тип. Две параллельные прямые. Числа S и $c^{'}$ имеют разные знаки, тогда уравнение (9.8) примет следующий вид:

$$y^{'2} - a^2 = 0, \quad a^2 = \left|\frac{c^{'}}{S}\right|. \tag{9.14}$$

8. Вырожденный тип. Две мнимые параллельные прямые. Числа S и $c^{'}$ имеют одинаковые знаки, тогда уравнение (9.8) примет следующий вид:

$$y^{'2} + a^2 = 0, \quad a^2 = \frac{c^{'}}{S}. \tag{9.15}$$

9. Вырожденный тип. Две совпадающие прямые. Если $c^{'} = 0$, тогда уравнение (9.8) примет следующий вид:

$$y^{'2} = 0. \tag{9.16}$$