Глава 2. Простейшие детерминированные модели

При изучении различных физических явлений и процессов математическими методами во многих случаях удается получить дифференциальное уравнение, решение которого характеризует исследуемый процесс. Как правило, это дифференциальные уравнения в частных производных, причем в большинстве случаев второго порядка. Такие уравнения подразделяются на три основные группы, описывающие качественно различные физические процессы. Уравнения гиперболического типа описывают колебательные процессы. Уравнения параболического типа описывают процессы переноса тепла и вещества. Уравнения эллиптического типа описывают стационарные процессы, которые не зависят от времени.

Дифференциальные уравнения выполняются внутри (или снаружи) области, в которой ищется решение. Для выделения решения, описывающего изучаемое явление или процесс, необходимо к уравнению добавить некоторые дополнительные условия.

1. Начальные и граничные условия. Условия сопряжения

Дифференциальные уравнения с обыкновенными, а тем более частными производными имеют бесконечное множество решений. Для однозначного определения процесса кроме уравнения необходимо задать еще некоторые дополнительные условия.

Определение. Математическая задача поставлена корректно (по Адамару), если:

1) решение задачи существует;

2) решение задачи единственно;

3) решение задачи устойчиво (то есть непрерывно зависит от входных данных).

Задавая дополнительные условия, нужно помнить, что эти условия должны обеспечивать существование решения (задача не должна быть переопределенной) и единственность решения (задача не должна быть недоопределенной). Желательно также, чтобы выполнялось и условие устойчивости решения (что бывает далеко не всегда).

Рассмотрим основные типы дополнительных условий.

1) **Начальные условия.** Определяют состояние системы в некоторый выделенный момент времени, который считается «начальным» (обычно берут t=0). В случае уравнений гиперболического типа, содержащих вторую производную по времени, нужно задать два начальных условия, которые накладываются на функцию решения и ее первую производную по времени.

Уравнения параболического типа содержат первую производную по времени, поэтому для него ставится одно начальное условие, накладываемое на решение. Решение уравнения эллиптического типа не зависит от времени, потому для него начальное условие не ставится.

2) **Граничные (краевые) условия.** Определяют состояние решения на границе области, в которой ищется решение. Рассмотрим линейные граничные условия. Если, например, изучается процесс колебания струны, то ее концы могут быть закреплены (условие Дирихле), быть свободными (условие Неймана) или быть упруго закрепленными (условие Робена). Граничные условия могут быть более сложными, например, содержать производные по времени. Нелинейные граничные условия оказываются еще более сложными.

Возможны предельные случаи граничных условий. Пусть точка (M,t), в которой ищется решение, расположена «далеко» от границы в том смысле, что возмущение, вышедшее из это точки, за промежуток времени $0<t<T$ в силу конечности скорости распространения возмущения не успевает дойти до границы, то есть в точке (M,t), где $0< t < T$, «граница не чувствуется».

В этом случае приходим к задаче во всем пространстве. Возможен также вариант, когда одни границы «чувствуются», а другие «не чувствуются», в частности, можно получить внешнюю краевую задачу. Во всех этих случаях для обеспечения единственности решения внешних краевых задач необходимо поставить дополнительные **условия на бесконечности**, что порой является весьма непростым делом.

Отметим, что задача в неограниченной области с условиями на бесконечности обычно **называется задачей Коши или начальной задачей**.

3) **Условия сопряжения**. Если коэффициенты уравнения кусочно-непрерывные функции (например, когда характеристики среды, заполняющей область D, в которой ищется решение, кусочно-непрерывны), то в точках разрыва (первого рода) коэффициентов ставятся условия сопряжения. Например, в задаче о распространении тепла в точке разрыва ставятся два условия сопряжения: непрерывность температуры и непрерывность потоков тепла, при условии отсутствия тепловых источников на границе (если на границе раздела сред есть источник тепла, то разность тепловых потоков равна мощности этого источника).

2. Физические задачи, приводящие к уравнениям гиперболического типа

1) Малые продольные колебания упругого стержня

Рассмотрим стержень, расположенный в положении равновесия вдоль оси Ox от точки x=0 до точки $x=l$.

Введем следующие обозначения.

1) Мы будем рассматривать продольные колебания, при которых все точки одного сечения испытывают одно и то же отклонение. В этом случае каждое сечение можно описывать одной координатой. Для описания процесса колебания стержня можно воспользоваться переменными Эйлера или переменными Лагранжа. В переменных Эйлера каждая физическая точка стержня в разные моменты времени характеризуется координатой $X(t)$. В переменных Лагранжа каждая физическая точка стержня в течение всего процесса характеризуется одной и той же геометрической координатой x, которую эта точка имела в положении равновесия.

Физическая точка, занимавшая в начальный момент (в состоянии равновесия) положение x, в любой последующий момент времени находится в точке с координатой $X(t)=x+u(x, t)$, где X – переменная Эйлера. Связь между переменными Лагранжа и Эйлера имеет вид: $x=X-U(X,t)$.

2) Мы будем предполагать, что в пределах сечения свойства стержня постоянны и обозначим линейную плотность стержня как $\rho(x)$.

3) Малыми мы будем называть такие продольные колебания стержня, при которых натяжения, возникающие в процессе колебаний, подчиняются закону Гука: $F(x,t) = k(x)\varepsilon(x,t)$, где $k(x)$ - коэффициент упругости, $\varepsilon(x,t)$ - относительное удлинение:

$$\varepsilon(x,t) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)'}{\Delta x},$$

F

$$(\Delta x)' = \{x + \Delta x + u(x + \Delta x, t)\} - \{x + u(x,t)\} - \Delta x = u(x + \Delta x, t) - u(x,t)$$ -

.

абсолютное удлинение, откуда относительное удлинение равно:

$$\varepsilon(x,t) = u_x(x,t).$$

4) Через $f(x,t)$ обозначим плотность продольной внешней силы , приложенной к стержню.

Будем применять следующее **правило знаков: силу, с которой часть стержня, расположенная правее выделенного сечения, действует на часть стержня, расположенную левее данного сечения, будем учитывать со знаком плюс, а силу, с которой часть стержня, расположенная левее выделенного сечения, действует на часть стержня, расположенную правее данного сечения, будем учитывать со знаком минус,** Для вывода уравнения о малых продольных колебаниях упругого стержня **воспользуемся теоремой об изменении количества движения**: изменение количества движения выделенного участка Δx стержня за время Δt равно импульсу действующих на него сил:

$$\int\limits_{x}^{x+\Delta x} \rho(\xi)\big(u_t(\xi,t+\Delta t)\big)-u_t(\xi,t)\big)d\xi =$$

$$= \int\limits_{t}^{t+\Delta t} \{k(x+\Delta x)u_x(x+\Delta x,\tau)-k(x)u_x(x,\tau)\}d\tau + \int\limits_{t}^{t+\Delta t} d\tau \int\limits_{x}^{x+\Delta x} f(\xi,\tau)d\xi$$

В дальнейшем будем предполагать, что все входящие в последнюю формулу функции обладают достаточной гладкостью: функция $u(x,t)$ дважды непрерывно дифференцируема по x и t, функция $k(x)$ непрерывно дифференцируема, а функции $\rho(x)$ и $f(x,t)$ непрерывны.

Воспользуемся формулой среднего значения:

$$\rho(\bar{x})\left(u_t\,(\bar{x},t+\Delta t)-u_t\,(\bar{x},t)\right)\Delta x =$$

$$=\left(k(x+\Delta x)u_x(x+\Delta x,\bar{t})-k(x)u_x(x,\bar{t})\right)\Delta t+f\left(\bar{\bar{x}},\bar{\bar{t}}\right)\Delta x\Delta t,$$

где $\bar{x},\ \bar{\bar{x}}\in[x,x+\Delta x],\ \ \bar{t},\ \bar{\bar{t}}\in[t,t+\Delta t].$

Поделив на $\Delta x\Delta t$ и переходя к пределу при $\Delta x\to 0,\ \Delta t\to 0,$ получим одномерное уравнение колебаний на конечном отрезке:

$$\rho(x)u_{tt}(x,t)=\left(k(x)u_x(x,t)\right)_x+f(x,t).$$

Если стержень однородный ($k(x)=k_0,\ \rho(x)=\rho_0$), то уравнение колебаний примет вид:

$$u_{tt}(x,t)=a^2u_{xx}(x,t)+F(x,t),$$

где

$$F(x,t)=\frac{1}{\rho_0}f(x,t),\quad a^2=\frac{k_0}{\rho_0}.$$

Построенное уравнение для малых продольных колебаний упругого стержня является уравнением гиперболического типа.

Поставим начально-краевую задачу, моделирующую процесс малых продольных колебаний упругого стержня.

$$\begin{cases} \rho(x)u_{tt}(x,t) = \left(k(x)u_x(x,t)\right)_x + f(x,t), \quad x \in (0,l), \quad t \in (0,\infty), \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0,l], \\ u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \in [0,l], \\ u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t \in [0,\infty). \end{cases}$$

Модель включает в себя уравнение колебаний, которое выполняется в области $x \in (0,l)$, $t \in (0,\infty)$, два начальных условия и два граничных условия первого рода (условия Дирихле) на левом и правом концах стержня.

Данная модель является детерминированной дифференциальной математической моделью.

Определение. Функция $u(x,t)$ называется классическим решением поставленной начально-краевой задачи, если она:

1) дважды непрерывно дифференцируема по x и по t в области $x \in (0,l)$, $t \in (0,\infty)$, непрерывна по x и непрерывно дифференцируема по t в области $x \in [0,l]$, $t \in [0,\infty)$,

2) удовлетворяет уравнению в классическом смысле (подстановка $u(x,t)$ в уравнение приводит его к тождеству),

3) непрерывно примыкает к начальным и граничным условиям.

Необходимым условием существование классического решения поставленной начально-краевой задачи является **условие согласования начальных и граничных условий:**

$$\varphi(0)=0, \quad \varphi(l)=0, \quad \psi(0)=0, \quad \psi(l)=0.$$

2) Различные виды граничных условий

Рассмотрим более подробно постановку различных типов линейных граничных условий на примере начально-краевой задачи, моделирующей процесс малых продольных колебаний упругого стержня длины l. Для определенности будем рассматривать левый конец стержня

$x = 0.$

а) Граничные условия первого рода – граничные условия Дирихле. С физической точки зрения левый конец стержня может находиться в различных условиях: он может быть жестко закреплен (стержень заделан в стену) или же двигаться по определенному закону (стержень жестко прикреплен к плите, совершающей заданное движение). Математически это условие записывается так

$$u(0,t) = \mu(t), t \in [0, \infty),$$

где $\mu(t)$ – заданная функция.

При $\mu = 0$ получается однородное условие Дирихле, а при $\mu \neq 0$ – неоднородное условие Дирихле.

б) Граничные условия второго рода – граничные условия Неймана. Если задан закон изменения силы $f(t)$, приложенной к левому концу $x = 0$ стержня и действующей в продольном направлении, то, используя закон Гука, граничный режим на этом конце можно записать следующим образом ($k(x)$ – коэффициент упругости стержня):

$$k(0)u_x(0,t) = f(t)$$

или

$$u_x(0,t) = \nu(t), \quad t \in [0,\infty),$$

где $\nu(t) = \frac{1}{k(0)} f(t)$ – заданная функция. При $\nu = 0$ получается однородное условие Неймана, а при $\nu \neq 0$ – неоднородное условие Неймана. Однородное условие Неймана означает, что левый конец стержня свободен, к нему не приложена сила (условие свободного конца).

в) Граничные условия третьего рода – граничные условия Робена. Предположим, что левый конец стержня закреплен упруго, например, с помощью пружины, коэффициент жесткости которой равен α . Согласно закону Гука, сила упругости, которая стремится вернуть левый конец стержня в положение равновесия, пропорциональна смещению $u(0,t)$.

Граничный режим можно записать следующим образом:

$$k(0)u_x(0,t) = \alpha u(0,t)$$

или

$$u_x(0,t) - hu(0,t) = 0, \quad t \in [0,\infty),$$

где $h = \alpha / k(0).$ Построенное граничное условие называется однородным граничным условием третьего рода, или однородным граничным условием Робена.

На левом конце стержня можно задать комбинацию упругого закрепления и смещения. Стержень с помощью пружин может быть прикреплен к плите, которая перемещается параллельно стержню по некоторому закону, определенному функцией $\nu(t)$. В этом случае получается граничное условие следующего вида

$$k(0)u_x(0,t)=\alpha(u(0,t)-\nu(t))$$

или

$$u_x(0,t)-hu(0,t)=\mu(t),\quad t\in[0,\infty),$$

где $\mu(t)=-h\nu(t),\quad h=\dfrac{\alpha}{k(0)}$. Построенное условие называется граничным неоднородным условием третьего рода или граничным неоднородным условием Робена.

г) Более сложные виды граничных условий. Физическая постановка задачи может приводить к более сложным граничным условиям, в частности, нелинейным.

а) Нелинейные граничные условия возникают, например, при упругом закреплении, не подчиняющемся закону Гука. Если натяжение на левом конце стержня является нелинейной функцией смещения $u(0,t)$, то граничное условие примет вид

$$u_x(0,t) = \frac{1}{k(0)} \mathbf{P}\left[u(0,t)\right],$$

где $\mathbf{P}\left[u(0,t)\right]$ определяет упругую силу, приложенную к левому концу стержня и действующую в продольном направлению. Например,

$$u_x(0,t) = \frac{1}{k(0)} u^2(0,t).$$

В граничное условие могут входить производные функции по времени. Например, если левый конец стержня испытывает сопротивление среды, пропорциональное скорости его движения, граничное условие записывается в виде

$$k(0)u_x(0,t)=\alpha u_t(0,t), \quad t\in[0,\infty).$$

где α - коэффициент сопротивления среды.

Граничные условия могут содержать производные порядков выше первого. Пусть упругий стержень расположен вертикально и верхний его конец закреплен неподвижно – заделан в потолок. К нижнему концу стержня прикреплен массивный абсолютно недеформируемый груз *M,* который находится на площадке и не растягивает и не сжимает стержень. В начальный момент времени $t=0$ площадку убирают. Предположим, что масса стержня m много меньше масс груза *M*. Будем пренебрегать действием силы тяжести на стержень.

Направим ось x вдоль стержня, так что верхний конец имеет абсциссу $x=0.$ Тогда на верхнем конце стержня граничным условием будет однородное условие Дирихле

$$u(0,t)=0, \quad t\in[0,\infty),$$

а граничное условие на нижнем конце имеет вид

$$mu_{tt}(l,t)=-k(l)u_x(l,t)+Mg,$$

где $S-$ площадь поперечного сечения стержня.

3) Малые поперечные колебания упругой струны

Пусть в состоянии равновесия струна длины l расположена вдоль оси x и занимает положение от точки $x=0$ до точки $x=l$. Рассматриваются малые поперечные колебания струны, причем перемещения струны расположены в одной плоскости. Процесс колебания струны можно описать с помощью функции $u(x,t)$, представляющей собой поперечное смещение точки струны с координатой x в момент времени t.

Струна рассматривается как гибкая нить, не оказывающая сопротивление изгибу, но оказывающая сопротивление растяжению.

Возникающие в рассматривающем случае в струне напряжения направлены по касательной к ее мгновенному профилю.

Так как рассматриваются малые колебания, то возникающие в струне напряжения определяются законом Гука.

В силу малости колебаний будем учитывать только члены первого порядка $(u_x^2(x,t) \ll 1)$.

Подсчитаем удлинение участка струны $(x, x+\Delta x)$ в момент времени t. Длина дуги этого участка равна

$$\Delta S = \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1+u_x^2(x,t)}\, dx \cong \Delta x.$$

Следовательно, в пределах принятой точности удлинения участка струны в процессе колебаний не происходит.

В силу закона Гука величина натяжения T в каждой точке не изменяется со временем.

Проекция натяжения на оси x и u при учете членов только первого порядка малости равны

$$T_x = T(x)\cos\alpha = \frac{T(x)}{\sqrt{1+u_x^2}} \cong T(x),$$

$$T_u = T(x)\sin\alpha \cong T(x)tg\alpha = T(x)u_x,$$

где α - угол между касательной к кривой $u(x,t)$ при фиксированном значении t и осью x.

,

Так как учитываются только поперечные колебания, то следует учитывать силы инерции и внешние силы, направленные лишь вдоль оси u. Поэтому сумма проекций сил, действующих на выделенный участок струны $(x, x+\Delta x)$ вдоль оси x, равна $T_x(x)-T_x(x+\Delta x)=0.$

Учитывая, что $T_x \cong T(x)$, получаем, что $T(x)=T(x+\Delta x).$

В силу произвольности точки x натяжение не зависит от x, то есть $T(x)=T_0.$

Как и в случае малых продольных колебаний упругого стержня, для вывода уравнения, описывающего малые поперечных колебания упругой струны, воспользуемся вторым законом Ньютона - законом изменения количества движения: изменение количества движения равно импульсу действующих на выделенный участок сил.

Обозначим через $\rho(x)$ линейную плотность струны, а через $f(x,t)$ плотность поперечной внешней силы, приложенной к струне.

Второй закон Ньютона для участка $(x, x+\Delta x)$ струны выглядит следующим образом:

$$\int_x^{x+\Delta x} \rho(\xi)\big(u_t(\xi, t+\Delta t) - u_t(\xi, t)\big)d\xi =$$

$$= \int_t^{t+\Delta t} T_0\big(u_x(x+\Delta x, \tau) - u_x(x,\tau)\big)d\tau + \int_x^{x+\Delta x} d\xi \int_t^{t+\Delta t} f(\xi,\tau)d\tau.$$

Предположим, что функция $u(x,t)$ дважды непрерывно дифференцируема, а функции $\rho(x)$, $f(x,t)$ непрерывны при $x \in (0,l), t \in (0,\infty)$.   .

Воспользовавшись формулой среднего значения, поделив результат на произведение $\Delta x \Delta t$ и переходя к пределу при $\Delta x \to 0, \Delta t \to 0,$ получим дифференциальное уравнение:

$$\rho(x)u_{tt}(x,t)=T_0u_{xx}(x,t)+f(x,t).$$

Если плотность струны постоянна $\rho(x)=\rho_0$, то уравнение принимает вид

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+F(x,t),$$

где $a^2=\dfrac{T_0}{\rho_0}, F=\dfrac{1}{\rho_0}f.$

Полученные уравнения описывают малые поперечные колебания упругой струны и являются простейшим примером уравнения колебаний.

Для получения детерминированной дифференциальной модели, описывающей малые поперечные колебания упругой струны, к полученному уравнению необходимо добавить начальные и граничные условия.

Начально-краевая дифференциальная детерминированная модель имеет вид

$$\begin{cases} \rho u_{tt} = T_0 u_{xx} + f\left(x,t\right), \;\; x \in \left(0,l\right), \;\; t \in (0,\infty), \\ u\left(x,0\right) = \varphi\left(x\right), \;\; x \in \left[0,l\right], \\ u_t\left(x,0\right) = \psi\left(x\right), \; x \in \left[0,l\right], \\ \alpha_1 u_x\left(0,t\right) + \beta_1 u\left(0,t\right) = \mu_1\left(t\right), \;\; t \in \left[0,\infty\right), \\ \alpha_2 u_x\left(l,t\right) + \beta_2 u\left(l,t\right) = \mu_2\left(t\right), \;\; t \in \left[0,\infty\right), \end{cases}$$

$$\left|\alpha_i\right| + \left|\beta_i\right| \neq 0, i = 1,2.$$

Последнее условие означает, что коэффициенты $\alpha_i, \beta_i\left(i = 1,2\right)$ не могут обращаться в ноль одновременно.

Начальные условия задают в начальный момент $t = 0$ профиль струны и скорость всех ее точек.

Граничные условия зависят от способов закрепления концов струны. Эти условия могут быть линейными и нелинейными, содержать производные по координате и по времени высших порядков. В линейном случае рассматривают граничные условия первого рода (условия Дирихле), условия второго рода (условия Неймана), условия третьего рода (условия Робена).

В общем случае для левого конца струны граничные условия имеют вид:

$$\alpha_1 u_x(0,t) + \beta_1 u(0,t) = \mu_1(t).$$

При $\alpha_1 = 0, \beta_1 \neq 0$ получается граничное условие Дирихле, при $\alpha_1 \neq 0, \beta_1 = 0$ - граничное условие Неймана, при $\alpha_1 \neq 0, \beta_1 \neq 0$ - граничное условие Робена.

В общем случае (при $\alpha_i \neq 0,\ \beta_i \neq 0,\ i = 1,2$) классическое решение определяется так:

Определение. Функция $u(x,t)$ называется классическим решением поставленной начально-краевой задачи, если она:

1) дважды непрерывно дифференцируема по x и по t в области $x \in (0,l)$, $t \in (0,\infty)$, один раз непрерывно дифференцируема по x и по t в области $x \in [0,l]$, $t \in [0,\infty)$,

2) удовлетворяет уравнению в классическом смысле (подстановка $u\,(x,t)$ в уравнение приводит к тождеству),

3) непрерывно примыкает к начальным и граничным условиям.

Необходимое условие существование классического решения – **условие согласования начальных и граничного условий:**

$$\alpha_1 \frac{\partial \varphi(0)}{\partial x} + \beta_1 \varphi(0) = \mu(0), \quad \alpha_2 \frac{\partial \varphi(l)}{\partial x} + \beta_2 \varphi(l) = \mu(0),$$

$$\alpha_1 \frac{\partial \psi(0)}{\partial x} + \beta_1 \psi(0) = \mu_t(0), \quad \alpha_2 \frac{\partial \psi(l)}{\partial x} + \beta_2 \psi(l) = \mu_t(0).$$

4) Малые поперечные колебания мембраны

Рассмотрим пример уравнения, описывающего процесс колебаний в случае двух пространственных переменных.

Мембраной называется натянутая плоская пленка, не сопротивляющаяся изгибу или сдвигу, но оказывающая сопротивление растяжению.

При определенных условиях плоскую пластину, у которой толщина много меньше поперечных размеров, можно рассматривать как мембрану.

Уравнение, описывающее малые поперечные колебания мембраны, получается аналогично тому, как было получено уравнение малых поперечных колебаний упругой струны.

Пусть в положении равновесия мембрана расположена в плоскости z=0 декартовой прямоугольной системы координат.

Введем следующие обозначения:

$u(x,y,t)-$ величина поперечного смещения точки $M(x,y)$ мембраны в момент времени t;

$\rho(x,y)-$ поверхностная плотность мембраны;

T_0- натяжение;

$f(x,y,t)-$ плотность импульса внешней поперечной силы, действующий на мембрану в точке $M(x,y)$ в момент *t*.

Будем рассматривать малые поперечные колебания мембраны, при которых смещение происходит перпендикулярно плоскости мембраны (x,y) и при которых можно пренебречь квадратами величин u_x, u_y.

Уравнение малых поперечных колебаний мембраны будет иметь следующий вид:

$$\rho(x,y)u_{tt} = T_0\left(u_{xx} + u_{yy}\right) + f(x,y,t),$$

где $f(x,y,t) -$ заданная функция.

Пусть в положении равновесия мембрана занимает область G плоскости (x,y), которая ограничена контуром Г.

Как и в одномерном случае, для корректной постановки задачи необходимо задать два начальных условия и граничные условия.

Если граница Г мембраны движется заданным образом в плоскости (x,y), то получаем граничное условие первого рода (граничное условие Дирихле):

$$u(x,y,t) = \mu(x,y,t),\ (x,y)\in\Gamma,\ t\in[0,\infty),$$

Условие закрепленной границы мембраны имеет вид

$$u(x,y,t)=0,\ \ (x,y)\in\Gamma,\ t\in[0,\infty).$$

Если к границе приложена заданная сила, то получаем граничное условие второго рода (граничное условие Неймана):

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x,y,t)=\mu(x,y,t),\ \ (x,y)\in\Gamma,\ t\in[0,\infty),$$

где $\frac{\partial}{\partial n}$ означает производную по нормали к контуру Г, лежащей в плоскости (x,y):

$\frac{\partial u}{\partial\ n}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta,$ $\cos\alpha,\cos\beta$ – направляющие косинусы нормали: $n=\{\cos\alpha,\cos\beta\}.$

При $\mu(x,y,t)=0$ получаем условие свободной границы:

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x,y,t)=0,\ \ (x,y)\in\Gamma,\ \ t[0,\infty).$$

Если граница мембраны закреплена упруго и при этом движется по заданному закону в плоскости (x, y), то граничным условием является граничное условие третьего рода (граничное условие Робена):

$$\alpha(x,y)\frac{\partial u}{\partial n}(x,y,t)+\beta(x,y)u(x,y,t)=\mu(x,y,t),\ \ (x,y)\in\Gamma,\ t\in[0,\infty),$$

где $\alpha(x,y)$, $\beta(x,y)$ – заданные на контуре Γ функции.

В зависимости от реальных физических задач граничные условия могут быть и более сложного вида, в частности, нелинейные и содержащие производные по координатам более высокого порядка, а также производные по времени.

Начально-краевая задача, описывающая процесс малых поперечных колебаний мембраны, ставится следующим образом:

$$\begin{cases} \rho u_{tt} = T_0\left(u_{xx} + u_{yy}\right) + f\left(x, y, t\right), \ \left(x, y\right) \in G, \ t \in \left[0, \infty\right), \\ u\left(x, y, 0\right) = \varphi\left(x, y\right), \ u_t\left(x, y, 0\right) = \psi\left(x, y\right), \ \left(x, y\right) \in \overline{G}, \\ \alpha\left(x, y\right)\dfrac{\partial u}{\partial n}\left(x, y, t\right) + \beta\left(x, y\right) u\left(x, y, t\right) = \mu\left(x, y, t\right), \ \left(x, y\right) \in \Gamma, \ t \in \left[0, \infty\right). \end{cases}$$

5) Уравнения Максвелла

Рассмотрим систему уравнений Максвелла в однородной изотропной среде. Будем использовать систему СИ, в которой уравнения Максвелла имеют вид:

$$\begin{cases} rot\mathbf{H} = \dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j} + \mathbf{j}^{(\text{ст})}, \\ rot\mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ div\mathbf{D} = \rho, \\ div\mathbf{B} = 0. \end{cases}$$

Здесь $\mathbf{j}$ – плотность тока проводимости, $\mathbf{j}^{(\text{ст})}$ -плотность сторонних токов, ρ - объемная плотность зарядов.

К восьми скалярным уравнениям добавим материальные уравнения

$$\mathbf{D} = \varepsilon_a \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H},$$

где $\varepsilon_a = \varepsilon_0 \varepsilon -$ абсолютная диэлектрическая проницаемость, $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} 10^{-9} \text{Ф}/\text{м}$ - электрическая постоянная, $\mu_a = \mu_0 \mu -$абсолютная магнитная проницаемость, $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}\ \text{Г}/\text{м} -$ магнитная постоянная.

Плотность тока проводимости $\mathbf{j}$ связана с вектором $\mathbf{E}$,уравнением, выражающим закон Ома в дифференциальной форме: $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E},$ где $\sigma -$ проводимость среды.

Поскольку по предположению среда является однородной и изотропной, то величины $\varepsilon_a, \mu_a, \sigma$ являются постоянными скалярными величинами.

Первое уравнение Максвелла $rot\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j} + \mathbf{j}^{(\text{ст})}$ является количественным выражением следующего положения: переменное во времени электрическое поле взывает такое же магнитное поле, как и ток проводимости с объемной плотностью $\mathbf{j}_c = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$, где $\mathbf{j}_c$ - плотность тока смещения.

Второе уравнение Максвелла $rot\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ является обобщенным выражением закона Фарадея в дифференциальной форме: изменение во времени магнитного поля в токе М приводит к появлению в той же точке электромагнитного поля, изменяющегося в пространстве.

Закон электромагнитной индукции Фарадея: при изменении магнитного поля, проходящего через замкнутый проводник, в последнем возникает э.д.с., пропорциональная скорости изменения потока. Всякое изменение магнитного поля вызывает появление вихревого электрического поля.

Третье уравнение Максвелла $div\mathbf{D} = \rho$ является следствием экспериментально установленного закона Кулона и показывает, что источником электрического поля являются электрические заряды. Это есть дифференциальная форма теоремы Гаусса.

Теорема Гаусса: поток вектора электрической индукции через замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов в объеме, ограниченном этой поверхностью.

Четвертое уравнение Максвелла $div\mathbf{B} = 0$ показывает, что магнитное поле имеет вихревой характер и силовые линии вектора магнитной индукции всегда замкнутые.

Подействуем на правую и левую части первого уравнения Максвелла оператором rot и учтем формулу

$$rot\ rot\mathbf{H} = grad\ div\mathbf{H} - \nabla^2\mathbf{H}.$$

В результате получим:

$$rot\ rot\mathbf{H} = \varepsilon_a \frac{\partial}{\partial t} rot\mathbf{E} + \sigma rot\mathbf{E} + rot\ \mathbf{j}^{(cm)} = grad\ div\mathbf{H} - \nabla^2\mathbf{H}.$$

Учитывая, что $rot\mathbf{E} = -\mu_a \dfrac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}$ и $div\mathbf{H} = 0$, получим векторное уравнение колебаний:

$$\varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2} + \sigma\mu_a \frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} = \nabla^2\mathbf{H} + rot\ \mathbf{j}^{(cm)}$$

В декартовой прямоугольной системе координат данное уравнение можно записать покомпонентно, причем для каждой компоненты $H_x,\ H_y,\ H_z$ получается скалярное волновое уравнение вида $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\Delta u + f\left(M, t\right),$ где

$\alpha = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_a},\quad a^2 = \dfrac{1}{\varepsilon_a\mu_a},\quad \alpha -$ коэффициент затухания, a - скорость электромагнитных волн.

6) **Телеграфные уравнения**

Рассмотрим прохождение тока по проводу с распределенными параметрами. Введем обозначения:

i – сила тока; v –напряжение; R – сопротивление, рассчитанное . на единицу длины; L – коэффициент самоиндукции, рассчитанный на единицу длины; C - коэффициент ёмкости, рассчитанный на единицу длины; G-коэффициент утечки, рассчитанный на единицу длины.

Применим закон Ома к участку провода длиной dx: падение напряжения на элементе провода длиной dx равняется сумме электродвижущих сил:

$$-v_x dx = iRdx + i_t Ldx.$$

Количество электричества, притекающего на элемент провода *dx* за время *dt*:

$$\left[i\left(x,t\right)-i\left(x+dx,t\right)\right]dt=-i_x dxdt$$

равно сумме количества электричества, необходимого для зарядки элемента *dx*, и количества, теряющегося вследствие несовершенства изоляции:

$$C\left[v\left(x,t+dt\right)-v\left(x,t\right)\right]dx+Gdxvdt=\left(Cv_t+Gv\right)dxdt,$$

причем величина потерь считается пропорциональной напряжению в рассматриваемой точке провода.

Из полученных формул следует **система телеграфных уравнений:**

$$\begin{cases} i_x+Cv_t+Gv=0, \\ v_x+Li_t+Ri=0. \end{cases}$$

Замечание. Полученные телеграфные уравнения являются приближенными в рамках теории электромагнитного поля, поскольку **они не учитывают электромагнитные колебания в среде окружающем провод.**

Получим из системы телеграфных уравнений одно уравнение относительно тока *i*, предполагая, что все введенные коэффициенты являются постоянными, то есть провод однородный.

Продифференцируем первое из телеграфных уравнений по *x* $i_{xx} + Cv_{tx} + Gv_x = 0,$

а второе уравнение умножим на С и продифференцируем по *t*: $Cv_{xt} + CLi_{tt} + Ri_t = 0.$

Вычитая из первого уравнения второе, получим

$$i_{xx} + Gv_x - CLi_{tt} - CRi_t = 0.$$

Подставив в полученное уравнение $v_x = -Li_t - Ri,$ получим уравнение для силы тока:

$$i_{xx} = CLi_{tt} + \left(CR + GL\right)i_t + GRi.$$

Аналогично получается уравнение для напряжения (дифференцируем второе уравнение по x. первое умножаем на L, дифференцируем по t и вычитаем из продифференцированного по x второго):

$$v_{xx} = CLv_{tt} + \left(CR + GL\right)v_t + GRv.$$

Уравнения для силы тока и напряжения носят название телеграфных уравнений.

Если можно пренебречь потерями через изоляцию $(G \cong 0)$ и если сопротивление очень мало $(R \cong 0),$ то мы приходим к уравнению колебаний:

$$i_{tt} = a^2 i_{xx}, \quad v_{tt} = a^2 v_{xx}, \quad a = \sqrt{\tfrac{1}{LC}}.$$

Рассмотрим начально-краевые задачи для определения силы и напряжения переменного тока, идущего вдоль тонкого однородного провода с непрерывно распределенными по длине параметрами. Поскольку провод является однородным, то значения параметров *R, C, L, G* не зависят от того, в какой точке мы эти параметры рассматриваем. Предполагаем, что задан начальный ток $i(x,0)=\varphi(x)$ и начальное напряжение $v(x,0)=F(x)$. Рассмотрим различные виды граничных условий.

а) Левый конец провода заземлен, а к правому приложена э.д.с. $E(t)$:

$$\begin{cases} v_{xx}=CLv_{tt}+(CR+GL)v_t+GRv, \quad x\in(0,l), \quad t\in(0,\infty), \\ v(x,0)=f(x), \quad v_t(x,0)=\dfrac{-Gf(x)-\varphi'(x)}{C}, \quad x\in(0,l), \\ v(0,t)=0, \quad v(l,t)=E(t), \quad t\in(0,\infty). \end{cases}$$

Замечание. Для получения второго начального условия для функции $v(x,t)$ необходимо воспользоваться вторым уравнением системы телеграфных уравнений, записав

$$v_t(x,0)=\frac{-i_x(x,0)-Gv(x,0)}{C},$$

а также начальными условиями

$$i(x,0)=\varphi(x),\ \ v(x,0)=f(x).$$

При этом, чтобы воспользоваться вторым телеграфным уравнением в точке $t=0$ нужно предположить, что это уравнение выполняется при $t=0$. Но в определении классического решения требуется, чтобы уравнение выполнялось только на открытой полупрямой: $t\in(0,\infty)$.

Поэтому мы расширяем понятие рещения, считая, что уравнения выполняются при $t\in[0,\infty)$.

b) Поставить начально-краевую задачу об электрических колебаниях в проводе с пренебрежимо малыми сопротивлением и утечкой, если концы провода заземлены: левый через сосредоточенное сопротивление R_0 , а правый через сосредоточенную ёмкость C_0.

Начально - краевая задача для системы телеграфных уравнений при $R \cong 0, \;\; G \cong 0$ имеет следующий вид:

$$\begin{cases} v_x + Li_t = 0, \;\; i_x + Cv_t = 0, \;\; x \in (0,l), \;\; t \in (0,\infty), \\ v(x,0) = f(x), \;\; i(x,0) = \varphi(x), \;\; x \in (0,l), \\ -v(0,t) = R_0 i(0,t), \;\; C_0 v_t(l,t) = i(l,t), \;\; t \in (0,\infty). \end{cases}$$

Замечание. Граничные условия получаются из соотношения

$$\Delta v = R_0 i + L_0 \frac{di}{dt} + \frac{1}{C_0} \int i dt.$$

С помощью данного соотношения определяется падение напряжения при переходе через последовательно включенные сосредоточенные сопротивление R_0, самоиндукцию L_0 и ёмкость C_0. Например, для конца $x=0$ провода имеем $0-v(0,t)=R_0 i(0,t), t\in(0,\infty)$, где $0-v(0,t)$ означает разность потенциалов земли (принимается равным нулю) и конца провода.

Для напряжения начально-краевая задача имеет вид:

$$\begin{cases} v_{tt}=a^2 v_{xx},\ \ x\in(0,l),\ \ t\in(0,\infty),\ \ a^2=\dfrac{1}{CL}, \\ v(x,0)=f(x),\ \ v_t(x,0)=-\dfrac{1}{C}\varphi'(x),\ \ x\in(0,l), \\ R_0 v_x(0,t)=L v_t(0,t),\ \ LC_0 v_{tt}(l,t)=-v_x(l,t),\ \ t\in(0,\infty). \end{cases}$$

Для тока начально-краевая задача имеет вид:

$$
\begin{cases}
i_{tt} = a^2 i_{xx}, \quad x \in (0, l), \quad t \in (0, \infty), \quad a^2 = \dfrac{1}{CL}, \\
i(x,0) = \varphi(x), \quad i_t(x,0) = -\dfrac{1}{L} f'(x), \quad x \in (0, l), \\
i_x(0,t) = CR_0 i_t(0,t), \quad C_0 i_x(l,t) + Ci(l,t) = 0, \quad t \in (0, \infty).
\end{cases}
$$

c) Граничные условия: левый конец провода заземлен через сосредоточенную самоиндукцию $L_0^{(1)}$, а к правому концу приложена электродвижущая сила $E(t)$ через сосредоточенную самоиндукцию $L_0^{(2)}$. Сопротивление и утечка проводов являются пренебрежимо малыми.

Начально-краевая задача для системы телеграфных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} v_x + L i_t = 0, \;\; i_x + C v_t = 0, \;\; x \in (0, l), \;\; t \in (0, \infty), \\ v(x,0) = f(x), \;\; i(x,0) = \varphi(x), \;\; x \in (0, l), \\ -v(0,t) = L_0^{(1)} i_t(0,t), \;\; v(l,t) - E(t) = L_0^{(2)} i_t(l,t), \;\; t \in (0, \infty). \end{cases}$$

Для напряжения начально-краевая задача имеет вид:

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx}, \quad x \in (0,l), \quad t \in (0,\infty), \quad a^2 = \dfrac{1}{CL}, \\ v(x,0) = f(x), \quad v_t(x,0) = -\dfrac{1}{C}\varphi'(x), \quad x \in (0,l), \\ L_0^{(1)} v_x(0,t) - Lv(0,t) = 0, \quad L_0^{(2)} v_x(l,t) + Lv(l,t) = LE(t), \quad t \in (0,\infty). \end{cases}$$

Для тока начально-краевая задача имеет вид:

$$\begin{cases} i_{tt} = a^2 i_{xx}, \quad x \in (0,l), \quad t \in (0,\infty), \quad a^2 = \dfrac{1}{CL}, \\ i(x,0) = \varphi(x), \quad i_t(x,0) = -\dfrac{1}{L} f'(x), \quad x \in (0,l), \\ CL_0^{(1)} i_{tt}(0,t) = i_x(0,t), \quad CL_0^{(2)} i_{tt}(l,t) + i_x(l,t) = -CE'(t), \quad t \in (0,\infty). \end{cases}$$

Для напряжения начально-краевая задача имеет вид:

$$\begin{cases} v_{xx} = CLv_{tt} + \left(CR + GL\right)v_t + GRv, \quad x \in \left(0, l\right), \quad t \in \left(0, \infty\right), \\ v\left(x, 0\right) = f\left(x\right), \quad v_t\left(x, 0\right) = -\dfrac{-Gf\left(x\right) - \varphi'\left(x\right)}{C}, \quad x \in \left(0, l\right), \\ v_x\left(0, t\right) - \dfrac{L}{R_0^{(1)}} v_t\left(0, t\right) - \dfrac{R}{R_0^{(1)}} v\left(0, t\right) = 0, \\ v_x\left(l, t\right) + \dfrac{L}{R_0^{(2)}} v_t\left(L, t\right) + \dfrac{R}{R_0^{(2)}} v\left(L, t\right) = 0, \quad t \in \left(0, \infty\right). \end{cases}$$

d) Граничные условия: оба конца провода заземлены через сосредоточенные сопротивления. Сопротивление и утечка провода не являются пренебрежимо малыми.

Начально-краевая задача для системы телеграфных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} v_x + Li_t + Ri = 0, \quad i_x + Cv_t + Gv = 0, \quad x \in (0,l), \quad t \in (0,\infty), \\ -v(x,0) = f(x), \quad i(x,0) = \varphi(x), \quad x \in (0,l), \\ -v(0,t) = R_0^{(1)} i(0,t), \quad v(l,t) = R_0^{(2)} i(l,t), \quad t \in (0,\infty). \end{cases}$$

Для тока начально-краевая задача имеет вид:

$$\begin{cases} i_{xx} = CLi_{tt} + \left(CR + GL\right)i_t + GRi, \quad x \in \left(0, l\right), \quad t \in \left(0, \infty\right), \\ i\left(x, 0\right) = \varphi\left(x\right), \quad i_t\left(x, 0\right) = \dfrac{-R\varphi\left(x\right) - f'\left(x\right)}{L}, \quad x \in \left(0, l\right), \\ i_x\left(0, t\right) - CR_0^{(1)} i_t\left(0, t\right) - GR_0^{(1)} i\left(0, t\right) = 0, \\ i_x\left(l, t\right) + CR_0^{(2)} i_t\left(l, t\right) + GR_0^{(2)} i\left(\mathrm{l}, t\right) = 0, \quad t \in \left(0, \infty\right). \end{cases}$$

7) Уравнения малых акустических колебаний в сплошной среде

Во многих задачах газодинамики газ можно рассматривать как сплошную среду. При этом, говоря о бесконечно малом объеме, **предполагается, что объем мал по сравнению с характерными размерами системы, но содержит очень большое число молекул.** Когда говорят о движении частицы газа, то имеют в виду не движение отдельной молекулы газа, а смещение элемента объема, содержащего много молекул, но который в газодинамике рассматривается как точка.

Пусть газ движется о скоростью $\mathbf{V}(M,t)=\mathbf{V}(x,y,z,t)$, проекции которой на оси координат обозначим $v_x, v_y, v_{z.}$ Отметим, что $\mathbf{V}(M,t)$ есть скорость газа в данной точке M пространства и времени $\boldsymbol{t}$.

Таким образом скорость $\mathbf{v}(M,t)$ относится к определенным точкам пространства, а не к определенным частицам газа, перемещающемся в пространстве.

Вводим: $\rho(M,t)$ плотность газа, $p(M,t)$ - давление, $F(M,t)$ - плотность внешних действующих сил, рассчитанных на единицу массы.

Введенные нами координаты называются координатами Эйлера.

Уравнение движения газа. Выделим элементарный объем газа ΔV с границей ΔS.

Используя формулы Остроградского, равнодействующую сил давления приложенных к поверхности ΔS можно записать следующим образом:

$$-\int_{\Delta S} p\mathbf{n}d\sigma = -\int_{\Delta V} grad\ p\ dV,$$

где $\mathbf{n}$ - единичный вектор внешней нормали к поверхности ΔV.

Замечание. Формулы Остроградского имеют следующий вид:

$$\int_{\Delta S} p\cos(n,x)\,d\sigma = \int_{\Delta V} \frac{\partial p}{\partial x} dV,$$

$$\int_{\Delta S} p\cos(n,y)\,d\sigma = \int_{\Delta V} \frac{\partial p}{\partial y} dV,$$

$$\int_{\Delta S} p\cos(n,z)\,d\sigma = \int_{\Delta V} \frac{\partial p}{\partial z} dV.$$

Поскольку $p\mathbf{n} = p\cos(n,x)\mathbf{i} + p\cos(n,y)\mathbf{j} + p\cos(n,z)\mathbf{k}$, где $\mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k} -$ единичные векторы ортонормированного базиса, то, умножая первую формулу на вектор **i,** вторую на вектор **j**, а третью на вектор **k** и складывая, получим формулу

$$-\int_{\Delta S} p\mathbf{n}\,d\sigma = -\int_{\Delta V} grad\ p\ dV.$$

Уравнение движения для объема газа ΔV :

$$\int\limits_{\Delta V} \rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} dV = -\int\limits_{\Delta V} grad\ p\ dV + \int\limits_{\Delta V} \rho \mathbf{F} dV.$$

При вычислении ускорения $\dfrac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}$ некоторой частицы газа **нужно учесть перемещение самой этой частицы.** Траектории отдельных частиц определяются уравнениями

$$\frac{\partial x}{\partial t} = v_x, \frac{\partial y}{\partial t} = v_y, \frac{\partial z}{\partial t} = v_z,$$

откуда

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z}\frac{dz}{dt} =$$

$$= \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} v_x + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} v_y + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} v_z = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \left(\mathbf{V}\nabla\right)\mathbf{V}.$$

Оператор $\mathbf{V}\nabla$ определяется следующим образом

$$\mathbf{V}\nabla = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Предполагая, что функции, входящие в интегральную формулу, являются достаточно гладкими, применяя формулу среднего значения и переходя к пределу, стягивая объем в точку, получим **уравнение движения газа форме Эйлера**

$$\mathbf{V}_t + \left(\mathbf{V}\nabla\right)\mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} grad\ p + \mathbf{F}.$$

Уравнение непрерывности. Выражает закон сохранения вещества. Если в выделенном объеме ΔV отсутствуют источники и стоки, то изменение в единицу времени количества газа, заключенного внутри выделенного объема, равно потоку газа через границу:

$$\frac{d}{dt}\int_{\Delta V}\rho dV = -\int_{\Delta S}\rho\mathbf{Vn}d\sigma.$$

Преобразуя правую часть по формуле Остроградского – Гаусса

$$\int_{\Delta S}\rho\mathbf{Vn}d\sigma = \int_{\Delta V} div\left(\rho\mathbf{V}\right)dV,$$

получим

$$\int_{\Delta V}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + div\left(\rho\mathbf{V}\right)\right)dV = 0.$$

Применяя формулу среднего значения и переходя к пределу, получим уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\left(\rho \mathbf{V}\right) = 0.$$

Термодинамическое уравнение состояния. В наиболее общем виде имеет вид $p = C\left(\rho\right)$, где $C\left(\rho\right)$ - заданная функция.

В результате получается замкнутая система из пяти скалярных уравнений относительно пяти неизвестных функций $v_x, v_y, v_z, p, \rho -$ **система уравнений газовой динамики**

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t} + \left(\mathbf{V}\nabla\right)\mathbf{V} = \mathbf{F} - \dfrac{1}{\rho} grad\ p, \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + div\left(\rho \mathbf{V}\right) = 0, \\ p = C\left(\rho\right). \end{cases}$$

Колебательные движения газа с малыми амплитудами называются **звуковыми волнами**. В каждой точке звуковой волны происходит попеременное сжатие и разрежение газа.

В силу малости колебаний в звуковой волне скорость $\mathbf{v}$ ней мала, так что в первом уравнении системы можно пренебречь членами второго порядка вида $v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}$ и т.д. Относительные изменения плотности и давления газа также малы. Положим:

$$p(M,t) = p_0(M) + \overline{p}, \rho(M,t) = \rho_0 + \overline{\rho}, \overline{p} \ll p_0, \overline{\rho} \ll \rho_0.$$

Здесь $p_0(M), \rho_0(M)$ - равновесные значения давления и плотности газа, а величины

$\overline{p}(M,t), \overline{\rho}(M,t)$ - их изменения в звуковой волне.

Величина $\overline{p}(M,t)$ называется **звуковым давлением**.

Линеаризованная система уравнений. Пренебрегая в системе уравнений газодинамики членами второго порядка, получим линеаризованную систему уравнений газодинамики.

Функцию $C(\rho)$ разложим в ряд по степеням ρ и учтем члены первого порядка:

$p_0 + \overline{p} = C(\rho_0) + C'(\rho_0)\overline{\rho}$. Так как $p_0 = C(\rho_0)$, то $\overline{p} = C'(\rho)\overline{\rho}$.

Замкнутая система малых акустических колебаний в сплошной среде имеет вид:

$$\begin{cases} \rho_0 \dfrac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -grad\ \overline{p} + \rho_0 \mathbf{F}, \\ \dfrac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + div\left(\rho_0 \mathbf{V}\right) = 0, \\ \overline{p} = C'(\rho)\overline{\rho}. \end{cases}$$

Уравнение второго порядка относительно функции $\bar{\rho}$. Продифференцируем второе уравнение системы по t: $\bar{\rho}_{tt} + div(\rho_0 \mathbf{V}_t) = 0$ и подействуем оператором div на первое уравнение системы: $div(\rho_0 \mathbf{V_t}) = -div\ grad\ \bar{p} + div(\rho_0 \mathbf{F})$.

Из третьего уравнения системы в линейном приближении получим:

$$grad\ \bar{p} = C'(\rho_0)\, grad\ \bar{\rho}.$$

Обозначим $k(M) = C'(\rho_0),\ f(M,t) = -div(\rho_0 \mathbf{F})$. Тогда из трех последних уравнений получаем уравнение второго порядка относительно функции $\bar{\rho}(M,t)$:

$$\bar{\rho}_{tt} = div\left(k(M)\, grad\, \bar{\rho}\right) + f(M,t).$$

Это уравнение является уравнением колебаний в трехмерном случае. Оно часто называется **уравнением акустики.**

В случае адиабатического процесса уравнение газового состояния имеет вид: $p = p_0\left(\dfrac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma}$, где постоянная γ - показатель адиабаты, $\gamma = \dfrac{c_p}{c_V}$, c_p - теплоемкость при постоянном давлении, c_V - теплоемкость при постоянном объёме.

Линейное приближение:

$$p = p_0 + \bar{p} = p_0\left(\frac{\rho_0 + \bar{\rho}}{\rho_0}\right)^{\gamma} \cong p_0\left(1 + \gamma\frac{\bar{\rho}}{\rho_0}\right),$$

откуда $\bar{p} = \gamma\dfrac{p_0}{\rho_0}\rho$ и $k(M) = \gamma\dfrac{p_0(M)}{\rho_0(M)}$.

8) Динамика несжимаемой жидкости

Полученная система уравнений газодинамики описывает не только динамику газа, но и движение жидкости, то есть является и **системой уравнений гидродинамики**. Будем рассматривать **идеальную жидкость, то есть жидкость, в которой отсутствуют силы внутренней вязкости**.

В случае однородной среды уравнения несжимаемой жидкости имеют вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \left(\mathbf{V}\nabla\right)\mathbf{V} = \mathbf{F} - \dfrac{1}{\rho_0}\nabla p, \\ div\left(\mathbf{V}\right) = 0. \end{cases}$$

Последнее уравнение есть **условие несжимаемости, то есть условие сохранение объема жидкости.**

Пусть внешняя сила потенциальная

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla U,$$

где $U(x, y, z, t)$ - некоторая скалярная функция, и рассматривается потенциальное движение жидкости, для которого вектор скорости $\mathbf{V}$ может быть также представлен в виде градиента по пространственным переменным некоторой скалярной функции $\Phi(x, y, z, t)$, называемая потенциалом скоростей,

$$\mathbf{V} = \nabla\Phi.$$

Первое уравнение системы приобретает вид

$$\nabla\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0}\nabla p + (\nabla\Phi\nabla)\nabla\Phi + \frac{1}{\rho_0}\nabla U = 0.$$

С помощью очевидного равенства $\left(\nabla\Phi\nabla\right)\nabla\Phi=\nabla\left(\frac{1}{2}\left|\nabla\Phi\right|^{2}\right),$

последнее уравнение можно переписать в виде $\nabla\left\{\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{1}{2}\left|\nabla\Phi\right|^{2}+\frac{1}{\rho_0}U+\frac{1}{\rho_0}p\right\}=0,$

откуда получается **интеграл Бернулли-Коши** $\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{1}{2}\left|\nabla\Phi\right|^{2}+\frac{1}{\rho_0}U+\frac{1}{\rho_0}p=C(t).$

С помощью интеграла Бернулли-Коши давление $p(x,y,z,t)$ определяется через потенциал скоростей $\Phi(x,y,z,t)$ с точностью до произвольной функции $C(t)$ одной и той же для всего объема жидкости.

Для потенциала Φ из второго уравнения системы получаем **уравнение Лапласа**:

$$div\left(\mathbf{V}\right)=div\left(\nabla\Phi\right)=0 \quad\Rightarrow\quad \Delta\Phi=0.$$

Интеграл Бернулли-Коши и уравнение Лапласа описывают **данный класс** потенциальных движений идеальной несжимаемой жидкости.

Для однозначного определения потенциала скоростей уравнение Бернулли-Коши нужно дополнить начальными и граничными условиями. Если стенка S твердая, то естественное граничное условие равенства нулю нормальной составляющей скорости приводит к однородному граничному условию второго рода (условию Неймана):

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right|_S = 0, \qquad t \in [0, \infty),$$

где $\mathbf{n}$ - вектор нормали к поверхности S.

На свободной поверхности жидкости граничное условие становится гораздо более сложным.

Пусть в равновесном состоянии свободная поверхность жидкости совпадает с плоскостью декартовой прямоугольной системы координат (x, y, z). Тогда в процессе движения свободная поверхность жидкости будет описываться неизвестной функцией $z = \eta(x, y, t)$. Граничные условия на этой поверхности должны устанавливать связь между функциями $\eta(x, y, t)$ и $\Phi(x, y, t)\Big|_{z=\eta(x,y,t)}$. Так как на свободной поверхности функция $\varsigma(x, y, z, t) = \eta(x, y, t) - z = 0$, то будет равно нулю и ее полная производная по времени

$$\frac{d\varsigma}{dt} = \frac{\partial \varsigma}{\partial t} + \frac{\partial \varsigma}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \varsigma}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \varsigma}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0.$$

Поскольку $\mathbf{V} = \left\{\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t}\right\}$ и $\frac{\partial \varsigma}{\partial t} = \frac{\partial \eta}{\partial t}$, то последнее уравнение принимает вид:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \mathbf{V}\nabla\varsigma = 0.$$

Учитывая, что $\mathbf{V} = \nabla\Phi$, **первое (кинематическое) условие на свободной поверхности** принимает вид

$$\left\{ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \Phi_x \eta_x + \Phi_y \eta_y - \Phi_z \right\}\Bigg|_{z=\eta(x,y,t)} = 0, \quad t \in [0,\infty).$$

Второе (динамическое) условие получим из интеграла Бернулли-Коши. Будем рассматривать случай, когда внешней силой является сила тяжести. Тогда потенциал внешней силы имеет вид

$U = gz,$ где g – ускорение силы тяжести. Условие равенства давления жидкости на свободной поверхности заданному внешнему давлению (например, атмосферному) $p_0\left(x, y, z, t\right)\Big|_{z=\eta(x,y,t)}$,

используя интеграл Бернулли-Коши, можно записать в виде

$$\left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left|\nabla \Phi\right|^2 + \frac{g}{\rho_0}\eta\left(x, y, t\right) \right\}\Bigg|_{z=\eta(x,y,t)} = -\frac{1}{\rho_0} p_0\left(x, y, z, t\right)\Big|_{z=\eta(x,y,t)}$$

Заметим, что полученное условие оказывается нелинейным, что сильно усложняет решение соответствующих задач.

Кроме граничных условий должны быть поставлены начальные условия:

$$\Phi\left(x, y, z, t\right)\Big|_{t=0} = \Phi_0\left(x, y, z\right),$$
$$\eta\left(x, y, t\right)\Big|_{t=0} = \eta_0\left(x, y\right).$$

9) Малые продольные колебания газа в трубке

Пусть заключенный в цилиндрической трубке идеальный газ совершает малые продольные колебания. **Сделаем следующие предположения:** 1) поперечные сечения, состоящие из частиц газа, не деформируются; 2) все частицы газа двигаются параллельно оси цилиндра.

При описании процесса колебаний газа **будем использовать переменные Лагранжа.**

Введем следующие обозначения:

$\rho(x,t)-$ плотность газа, $p(x,t)-$ давление газа, $\phi(x,t)-$ потенциал скоростей газа, $\mathrm{v}(x,t)-$ скорость газа, $u(x,t)-$ продольное отклонение частиц газа, S – площадь сечения трубки.

Пусть p_0 и ρ_0 - давление и плотность в невозмущенном состоянии, а $\tilde{p}(x,t)$ и $\tilde{\rho}(x,t)$ - возмущения давления и плотности: $\tilde{p}(x,t) = p(x,t) - p_0$, $\tilde{\rho}(x,t) = \rho(x,t) - \rho_0$.

Для описания процесса колебания газа в трубке можно воспользоваться переменными Эйлера, или переменными Лагранжа. Напомним, что в переменных Эйлера каждая физическая точка в разные моменты времени характеризуется координатой $x(t)$. В переменных Лагранжа каждая физическая точка в течение всего процесса характеризуется одной и той же геометрической координатой x, которую эта точка имела в положении равновесия.

Физическая точка, занимавшая в начальный момент (в состоянии равновесия) положение x, в любой последующий момент времени находится в точке с координатой $X=x+u(x, t)$, где X – переменная Эйлера. Связь между переменными Лагранжа и Эйлера имеет вид: $x=X+U(X,t)$.

В предыдущих разделах мы получили систему уравнений газовой динамики в форме Эйлера. Получим теперь систему уравнений газовой динамики (уравнение движения газа, уравнение непрерывности, термодинамическое уравнение состояния) в форме Лагранжа.

Уравнение движения газа в форме Лагранжа

Для получения уравнения движения газа используем закон об изменении количества движения. Направим ось Ох вдоль оси трубки. Силой давления p называется проекция на ось Ох силы $\mathbf{p}$, с которой часть газа, лежащая правее выделенного сечения, действует на часть газа, лежащую левее выделенного сечения. Выделим участок трубки, расположенный между сечениями x и $x+\Delta x$. Изменение количества движения выделенного участка равно импульсу действующей силы (S – площадь сечения трубки):

$$S\int_{x}^{x+\Delta x}\left\{\rho(\xi,t+\Delta t)u_t(\xi,t+\Delta t)-\rho(\xi,t)u_t(\xi,t)\right\}d\xi =$$

$$=-S\int_{t}^{t+\Delta t}\left\{p(x+\Delta x,\tau)-p(x,\tau)\right\}d\tau.$$

Предполагая, что входящие в предыдущую формулу функции обладают достаточной гладкостью, применим формулу среднего значения:

$$S\left\{\rho\left(\bar{x},t+\Delta t\right)u_t\left(\bar{x},t+\Delta t\right)-\rho\left(\bar{x},t\right)u_t\left(\bar{x},t\right)\right\}\Delta x=-S\left\{p\left(x+\Delta x,\bar{t}\right)-p\left(x,\bar{t}\right)\right\}\Delta t,$$

где $\bar{x}\in\left[x,x+\Delta x\right],\ \ \bar{t}\in\left[t,t+\Delta t\right].$

азделим в последней формуле обе части на произведение $\Delta x\Delta t$ и перейдем к пределу при $\Delta x\to 0,\ \ \Delta t\to 0.$ В результате получим **уравнение движения газа в форме Лагранжа**:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\left(x,t\right)\frac{\partial u\left(x,t\right)}{\partial t}\right)=-\frac{\partial p\left(x,t\right)}{\partial x}.$$

Уравнение непрерывности в форме Лагранжа

Выделим участок трубки между сечениями x и $x+\Delta x$. Масса газа M, заключенная между выделенными сечениями, не изменяется с течением времени. В положении равновесия $M=S\Delta x\rho_0$. Рассмотрим момент времени t. Левое сечение займет положение $x+u(x,t)$, а правое $x+\Delta x+u(x+\Delta x,t)$. Если x - переменная Лагранжа, а $\xi=x+u(x,t)$ - переменная Эйлера, то интегрируя по $d\xi$ и применяя формулу среднего значения. получим

$$M=S\int\limits_{x+u(x,t)}^{x+\Delta x+u(x+\Delta x,t)}\rho(x,t)\,d\xi=S\int\limits_{x+u(x,t)}^{x+\Delta x+u(x+\Delta x,t)}\rho(\xi-u(x,t))\,d\xi=$$

$$=S\rho\left(\bar{\xi}-u(\bar{x},t),t\right)\Delta x\left(1+\frac{u(x+\Delta x,t)-u(x,t)}{\Delta x}\right),$$

где

$$\bar{\xi} \in \left(x+u(x,t), x+\Delta x+u(x+\Delta x,t)\right), \quad \bar{x} = \bar{\xi} - u(\bar{x},t) \in (x, x+\Delta x).$$

Таким образом, получаем

$$S\Delta x\rho_0 = S\rho(\bar{x},t)\Delta x\left(1+\frac{u(x+\Delta x,t)-u(x,t)}{\Delta x}\right).$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим **уравнение непрерывности в форме Лагранжа**

$$\rho_0 = \rho(x,t)\left(1+u_x(x,t)\right).$$

Термодинамическое уравнение состояния

К полученным уравнениям необходимо добавить термодинамическое уравнение состояния (уравнение газового состояния). Будем предполагать, что процесс колебания газа в трубке происходит без теплообмена с внешней средой, то есть является адиабатическим. Уравнение адиабаты имеет вид: $p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma}$, где $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ - показатель адиабаты.

Полная система уравнений газовой динамики в форме Лагранжа имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \left(\rho(x,t) u_t(x,t) \right)_t = -p_x(x,t), \\ \rho_0 = \rho(x,t)\left(1 + u_x(x,t)\right), \\ p(x,t) = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma}, \gamma = \frac{C_p}{C_v}. \end{cases}$$

Полученная система уравнений газовой динамики в форме Лагранжа **является нелинейной системой.** В предположении малости колебаний **проведем ее линеаризацию** (отбрасываемые члены отмечены красным цветом).

а) $\rho(x,t) = \rho_0 + \tilde{\rho}(x,t) \Rightarrow \rho_0 = \left(\rho_0 + \tilde{\rho}(x,t)\right)\left(1 + u_x(x,t)\right) = \rho_0 + \tilde{\rho} + \rho_0 u_x + \tilde{\rho} u_x \Rightarrow$

$$\tilde{\rho}(x,t) + \rho_0 u_x(x,t) = 0.$$

б) $p(x,t) = p_0 + \tilde{p}(x,t), \;\; p_x(x,t) = \tilde{p}_x(x,t), \;\; \rho(x,t) = \rho_0 + \rho(x,t), \;\; \rho_t(x,t) = \rho_t(x,t) \Rightarrow$

$$\rho_t u_t + \rho u_{tt} = -p_x \Rightarrow \tilde{\rho}_t u_t + \rho_0 u_{tt} + \tilde{\rho} u_{tt} = -\tilde{p}_x \Rightarrow$$

$$\rho_0 u_{tt}(x,t) = -\tilde{p}_x(x,t).$$

в) $$\frac{\rho(x,t)}{\rho_0}=\frac{\rho_0+\tilde{\rho}(x.t)}{\rho_0}=1+\frac{\tilde{\rho}(x,t)}{\rho_0}\Rightarrow\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma}=\left(1+\frac{\tilde{\rho}}{\rho_0}\right)^{\gamma}\cong 1+\gamma\frac{\tilde{\rho}}{\rho_0}\Rightarrow$$

$$p=p_0+\tilde{p}=p_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma}\cong p_0\left(1+\gamma\frac{\tilde{\rho}}{\rho_0}\right)=p_0+\gamma p_0\frac{\tilde{\rho}}{\rho_0}\Rightarrow\tilde{p}(x,t)=\gamma p_0\frac{\tilde{\rho}(x,t)}{\rho_0}.$$

Полагая $a^2=\gamma\frac{p_0}{\rho_0}$, получим $\tilde{p}(x,t)=a^2\tilde{\rho}(x,t)$. **Линеаризованная система:**

$$\begin{cases}\tilde{\rho}(x,t)+\rho_0 u_x(x,t)=0,\\ \rho_0 u_{tt}(x,t)=-\tilde{p}_x(x,t),\\ \tilde{p}(x,t)=a^2\tilde{\rho}(x,t),\quad a^2=\gamma\frac{p_0}{\rho_{0.}}\end{cases}$$

Уравнения для функций $\rho,\ p,\ \phi,\ \mathrm{v},\ u.$

Из линеаризованной системы уравнений газовой динамики можно получить уравнения для функций $\rho,\ p,\ \phi,\ \mathrm{v},\ u.$ Покажем, что все они имеют вид $\mathrm{w}_{tt} = a^2 \mathrm{w}_{xx}.$

а) уравнение для плотности газа:

$$\tilde{\rho}_{tt} = -\rho_0 u_{xtt},\ \ \rho_0 u_{ttx} = -\tilde{p}_{xx} \Rightarrow \tilde{\rho}_{tt} = \tilde{p}_{xx},\ \ \tilde{p}_{xx} = a^2 \tilde{\rho}_{xx} \Rightarrow$$

$$\tilde{\rho}_{tt} = a^2 \tilde{\rho}_{xx},\ \ x \in (0, l),\ \ t \in (0, \infty)$$

$$\tilde{\rho}_{tt} = \rho_{tt},\ \ \tilde{\rho}_{xx} = \rho_{xx} \Rightarrow$$

$$\rho_{tt} = a^2 \rho_{xx},\ \ x \in (0, l),\ \ t \in (0, \infty)$$

б) уравнение для давления газа:

$$\tilde{\rho}_{tt} = a^2 \tilde{\rho}_{xx},\ \tilde{p}\left(x,t\right) = a^2 \tilde{\rho}\left(x,t\right) \Rightarrow \tilde{p}_{xx} = \tilde{\rho}_{tt} = \frac{1}{a^2}\tilde{p}_{tt} \Rightarrow$$

$$\tilde{p}_{tt} = a^2 \tilde{p}_{xx},\quad x \in \left(0,l\right),\quad t \in \left(0,\infty\right),$$

$$p_{tt} = a^2 p_{xx},\quad x \in \left(0,l\right),\quad t \in \left(0,\infty\right).$$

в) уравнение для смещения частиц газа:

$$\tilde{\rho} + \rho_0 u_x = 0 \Rightarrow \tilde{\rho}_x = -\rho_0 u_{xx},\quad \rho_0 u_{tt} = -\tilde{p}_x = -a^2 \tilde{\rho}_x \Rightarrow -\frac{\rho_0}{a^2} u_{tt} = -\rho_0 u_{xx} \Rightarrow$$

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},\quad x \in \left(0,l\right),\quad t \in \left(0,\infty\right).$$

г) уравнение для скорости газа:

$$\mathrm{v}=u_t, \quad u_{tt}=a^2u_{xx}\Rightarrow$$

$$\mathrm{v}_{tt}=a^2\mathrm{v}_{xx}, \quad x\in(0,l), \quad t\in(0,\infty).$$

д) уравнение для потенциала скоростей:

$$\mathrm{v}=\phi_x, \quad \mathrm{v}_{tt}=a^2\mathrm{v}_{xx}\Rightarrow\phi_{ttx}=a^2\phi_{xxx}\Rightarrow\left(\phi_{tt}-a^2\phi_{xx}\right)_x=0.$$

Так как $\phi(x,t)$ определяется с точностью до произвольной функции от t, то:

$$\phi_{tt}-a^2\phi_{xx}=0\Rightarrow$$

$$\phi_{tt}=a^2\phi_{xx}, \quad x\in(0,l), \quad t\in(0,\infty).$$

Граничные условия

Рассмотрим различные типы граничных условий на левом и правом концах трубки.

а) закрытые концы:

$$\alpha)\ u(0,t)=0,\ \ u(l,t)=0,\ \ t\in[0,\infty).$$

$$\beta)\ u_t(0,t)=0,\ \ u_t(l,t)=0\Rightarrow \mathrm{v}(0,t)=0,\ \ \mathrm{v}(l,t)=0,\ \ t\in[0,\infty).$$

$$\gamma)\ u_{tt}(0,t)=0,\ \ u_{tt}(l,t)=0,\ \ \tilde{p}_x(x,t)=-\rho_0 u_{tt}(x,t)\Rightarrow \tilde{p}_x(0,t)=-\rho_0 u_{tt}(0,t),$$

$$\tilde{p}_x(l,t)=-\rho_0 u_{tt}(l,t),\ \ \tilde{p}_x=p_x\Rightarrow\ p_x(0,t)=0,\ p_x(l,t)=0,\ \ t\in[0,\infty).$$

$$\delta)\ \phi_x=\mathrm{v}\Rightarrow \phi_x(0,t)=0,\ \ \phi_x(l,t)=0,\ \ t\in[0,\infty).$$

$$\varepsilon)\ \tilde{p}=a^2\tilde{\rho}\Rightarrow \rho_x=\tilde{\rho}_x=\frac{1}{a^2}\tilde{p}_x\Rightarrow \rho_x(0,t)=0,\ \ \rho_x(l,t)=0,\ \ t\in[0,\infty).$$

б) открытые концы:

На концах трубки нет возмущения давления:

$$\alpha)\ \ p(0,t)=p_0,\ \ p(l,t)=p_0,\ \ t\in[0,\infty);\ \ \tilde{p}(0,t)=0,\ \ \tilde{p}(l,t)=0,\ \ t\in[0,\infty);$$

$$\beta)\ \tilde{p}=a^2\tilde{\rho}\Rightarrow\tilde{\rho}=\frac{1}{a^2}\tilde{p}\Rightarrow\tilde{\rho}(0,t)=0,\ \ \tilde{\rho}(l,t)=0,\ t\in[0,\infty);$$

$$\gamma)\ \ \tilde{\rho}+\rho_0u_x=0\Rightarrow u_x=-\frac{1}{\rho_0}\tilde{\rho}\Rightarrow u_x(0,t)=0,\ \ u_x(l,t)=0,\ \ t\in[0,\infty);$$

$$\delta)\ \ \mathrm{v}=u_t\Rightarrow\mathrm{v}_x=u_{tx}\Rightarrow\mathrm{v}_x(0,t)=0,\ \ \mathrm{v}_x(l,t)=0,\ \ t\in[0,\infty);$$

$$\varepsilon)\ \ \mathrm{v}=u_t=\phi_x,\ \ \rho_0u_{tt}+\tilde{p}_x=0\Rightarrow\rho_0\phi_{xt}+\tilde{p}_x=0\Rightarrow(\rho_0\phi_t+\tilde{p})_x=0\Rightarrow\rho_0\phi_t+\tilde{p}=f(t).$$

Так как $f(t)$ определяется с точностью до произвольной функции от t, то получаем:

$$\rho_0\phi_t = -\tilde{p};\ \tilde{p}(0,t) = 0 \Rightarrow \varphi_t(0,t) = 0 \Rightarrow \varphi(0,t) = A;\quad \varphi_t(l,t) = 0 \Rightarrow \varphi(l,t) = B.$$

Учитывая специфику ϕ, можно положить:

$$A = 0, B = 0 \Rightarrow \quad \phi(0,t) = 0,\quad \phi(l,t) = 0,\quad t \in [0,\infty).$$

в) концы трубки закрыты поршнями:

α) Рассмотрим левый конец трубки. Пусть при $x = 0$ в трубку вставлен газонепроницаемый поршенёк с пренебрежимо малой массой, насаженный на пружинку с коэффициентом жесткости ν и скользящим внутри трубки без трения. Пружинка будет действовать на поршенёк с добавочной силой упругости, равной $-\nu u(0,t)$ при отклонении поршенька, равном u. Речь идет о добавочной силе упругости, так как в положении равновесия на поршенёк уже действует сила упругости, уравновешивающая невозмущенное давление p_0.

Рассмотрим участок трубки длиной Δx, расположенный между сечениями $x = 0$ и $x = \Delta x$.

В сечении $x = 0$ действует сила упругости $-\nu u\left(0,t\right)+p_0 S$, а в сечении $x = \Delta x$ сила упругости $-p\left(\Delta x,t\right)S$.

Запишем закон изменения количества движения выделенного участка трубки по действием сил упругости:

$$s\int_0^{\Delta x}\left\{\rho\left(\xi,t+\Delta t\right)u_t\left(\xi,t+\Delta t\right)-\rho\left(\xi,t\right)u_t\left(\xi,t\right)\right\}d\xi =$$

$$=\int_t^{t+\Delta t}\left\{-\nu u\left(0,\tau\right)+p_0 S-p\left(\Delta x,\tau\right)S\right\}d\tau.$$

Применим к последней формуле формулу среднего значения:

$$S\left\{\rho\left(\bar{x},t+\Delta t\right)u_t\left(\bar{x},t+\Delta t\right)-\rho\left(\bar{x},t\right)u_t\left(\bar{x},t\right)\right\}\Delta x=$$

$$=\left\{-\nu u\left(0,\bar{t}\right)+p_0S-p\left(\Delta x,\bar{t}\right)S\right\}\Delta t.$$

Поделим обе части последнего равенства на Δt и перейдем к пределу при $\Delta t\to 0$:

$$S\left(\rho\left(\bar{x},t\right)u_t\left(\bar{x},t\right)\right)_t\Delta x=-\nu u\left(0,t\right)+p_0S-\left(p_0+\tilde{p}\left(\Delta x,t\right)\right)S.$$

Перейдем к пределу при $\Delta x\to 0$:

$$0=-\nu u\left(0,t\right)+p_0S-p_0S-\tilde{p}\left(\Delta x,t\right)S\Rightarrow\tilde{p}\left(0,t\right)+\frac{\nu}{S}u\left(0,t\right)=0\Rightarrow$$

$$\tilde{p}\left(0,t\right)=-a^2\rho_0u_x\left(0,t\right)\Rightarrow a^2=\gamma\frac{p_0}{\rho_0}\Rightarrow-\gamma p_0u_x\left(0,t\right)+\frac{\nu}{S}u\left(0,t\right)=0.$$

Положив $h=\dfrac{\nu}{S\gamma p_0}$, получим однородное граничное условие третьего рода - условие Робена:

$$u_x(0,t)-hu(0,t)=0,\quad t\in[0,\infty).$$

На правом конце аналогично получается однородное условие Робена:

$$u_x(l,t)+hu(l,t)=0, t\in[0,\infty).$$

$\beta)$ Так как $\mathrm{v}=u_t$, то из полученных в пункте $\alpha)$ формул сразу следуют условия:

$$\mathrm{v}_x(0,t)-h\mathrm{v}(0,t)=0,\quad t\in[0,\infty),$$

$$\mathrm{v}_x(l,t)+h\mathrm{v}(l,t)=0,\quad t\in[0,\infty),\quad h=\frac{\nu}{S\gamma p_0}.$$

γ) Имеем цепочку формул:

$$u_x - hu = 0 \Rightarrow u_{xtt} - hu_{tt} = 0; \quad \tilde{\rho} + \rho_0 u_x = 0 \Rightarrow u_{xtt} = -\frac{1}{\rho_0}\tilde{\rho}_{tt}; \quad \rho_0 u_{tt} = -p_x \Rightarrow u_{tt} = -\frac{1}{\rho_0}\tilde{\rho}_{tt} \Rightarrow$$

$$\tilde{\rho}_{tt} - h\tilde{p}_{xx} = 0; \quad \tilde{p} = a^2\tilde{\rho} \Rightarrow \tilde{\rho}_{tt} - a^2 h\tilde{\rho}_{xx} = 0; \quad \bar{h} = a^2 h = \gamma\frac{p_0}{\rho_0}\frac{\nu}{S\gamma p_0} = \frac{\nu}{S\rho_0}; \quad \tilde{\rho}_{tt} = \rho_{tt}, \quad \tilde{\rho}_{xx} = \rho_{xx} \Rightarrow$$

$$\rho_{tt} - \bar{h}\rho_{xx} = 0, \quad x = 0, \quad t \in [0, \infty),$$

$$\rho_{tt} + \bar{h}\rho_{xx} = 0, \quad x = l, \quad t \in [0, \infty), \quad \bar{h} = \frac{\nu}{S\rho_0}.$$

δ) Так как $\rho_{tt} - \bar{h}\rho_{xx} = 0,\ p = a^2\rho \Rightarrow$

$$p_{tt} - \bar{h} p_{xx} = 0, \quad x = 0, \quad t \in \left[0, \infty\right),$$

$$p_{tt} + \bar{h} p_{xx} = 0, \quad x = l, \quad t \in \left[0, \infty\right), \quad \bar{h} = \frac{\nu}{S\rho_0}.$$

$\varepsilon)$ Так как $\rho_0\phi_t = -\tilde{p},\ p_{tt} - \bar{h}p_{xx} = 0 \Rightarrow \left(\phi_{tt} - \bar{h}\phi_{xx}\right)_t = 0,$ то, учитывая свойства потенциальной функции ϕ, получим граничные условия:

$$\phi_{tt} - \bar{h}\phi_{xx} = 0, \quad x = 0, \quad t \in [0, \infty),$$

$$\phi_{tt} + \bar{h}\phi_{xx} = 0, \quad x = l, \quad t \in [0, \infty), \quad \bar{h} = \frac{\nu}{S\rho_0}.$$

3. Физические задачи приводящие к уравнениям параболического типа

1) Уравнение теплопроводности

Получим уравнение теплопроводности, описывающее процесс распространения тепла. Это уравнение относится к уравнениям параболического типа.

Введем следующие обозначения:

1) $u(M,t)$ – температура тела D в момент времени t, макроскопическая характеристика теплофизических свойств тела;

2) $\rho(M)$ - плотность тела;

3) $C(M)$ – удельная теплоемкость;

4) $K(M)$ – коэффициент теплопроводности;

5) $f(M,t)$ – объемная плотность источников (стоков) тепла.

Для вывода уравнения воспользуемся законом Фурье:

Если температура тела неравномерна, то в нем возникают тепловые потоки, направленные из мест с более высокой температурой в места с более низкой температурой.

Количество тепла, протекающее через площадку $d\sigma$ за промежуток времени dt, равно

$$dQ = -k(M)\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma dt,$$

где $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ - производная по нормали к площадке.

Рассмотрим тело D, ограниченное поверхностью S: $\bar{D} = D \bigcup S$. Обозначим через $\vec{n}$ внешнюю нормаль к поверхности S.

Для вывода уравнения теплопроводности воспользуемся **методом баланса (законом сохранения тепла).** Выделим внутри тела D элементарный объем ΔV с граничной поверхностью ΔS и запишем для него уравнение баланса тепла.

1) Количество тепла, которое необходимо сообщить объему ΔV в течение промежутка времени Δt для повышения его температур на величину $\Delta u = u(M, t + \Delta t) - u(M, t)$,

равно:

$$\Delta Q_1 = \iiint\limits_{\Delta V} C(M)\rho(M)\big(u(M, t + \Delta t) - u(M, t)\big)dV_M$$

Это количество тепла поступает в объем ΔV за счет теплообмена через поверхность ΔS с телом D, а также за счет действия источников (стоков) тепла, расположенных внутри объема ΔV.

2) Для учета теплообмена объема ΔV с телом D используем закон Фурье:

$$\Delta Q_2 = \int\limits_{t}^{t+\Delta t} d\tau \iint\limits_{\Delta S} k(P) \frac{\partial u}{\partial n}(P,\tau)\, d\sigma_P d\tau$$

Для преобразования поверхностного интеграла в объемный воспользуемся теоремой Остроградского – Гаусса:

Если вектор-функция $\vec{A}(M)$ непрерывно дифференцируема в области D и непрерывна в области $\bar{D}$: $\vec{A} \in C^{(1)}(D) \cap C(\bar{D})$, то

$$\iint\limits_{S} \vec{A} d\vec{\sigma} = \iiint\limits_{D} div\vec{A} dV,$$

где $d\vec{\sigma} = \vec{n} d\sigma$, $\vec{n}$ - внешняя нормаль к поверхности S, $\vec{A} d\vec{\sigma}$ поток вектора $\vec{A}$ через площадку $d\sigma$ $\quad div\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$ - дивергенция вектора $\vec{A}$.

Положив в формуле Остроградского-Гаусса $\vec{A} = k(M)\,gradu(M,t)$, где $gradu = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$, получим

$$\iint\limits_{\Delta S} k(P)\frac{\partial u}{\partial n}(P,t)\,d\sigma_P = \iiint\limits_{\Delta V} div\big(k(M)\,gradu(M,t)\big)dV_M$$

и окончательно:

$$\Delta Q_2 = \int\limits_{t}^{t+\Delta t} d\tau \iiint\limits_{\Delta V} div\big(k(M)\,gradu(M,t)\big)dV_M$$

Для справедливости применимости формулы Остроградского – Гаусса необходимо предположить, что **по переменной *M***

$$u \in C^{(2)}(D) \bigcap C^{(1)}(\bar{D}), k \in C^{(1)}(D) \bigcap C(\bar{D}).$$

3) Внутри объема ΔV за промежуток времени Δt может выделяться или поглощаться количество ΔQ_3, например, за счет прохождения тока, или вследствие химических реакций:

$$\Delta Q_3 = \int_t^{t+\Delta t} d\tau \iiint_{\Delta V} f(M,t) dV_M .$$

Уравнение баланса тепла:

$$\Delta Q_1 = \Delta Q_2 + \Delta Q_3.$$

В левой части формулы изменение количества тепла в объеме D за время Δt , а в правой части – причины, вызывающие это изменение.

Для получения дифференциального уравнения предположим, что функция $u(M,t)$ удовлетворяет условиям $u(M,t) \in C_{M,t}^{(2,1)}(Q_\infty) \cap C_{M,t}^{(1,0)}(\bar{Q}_\infty)$, где отрытый ($n$+1) - мерный цилиндр имеет вид $Q_\infty = D \times (0,\infty)$, а замкнутый – вид $\bar{Q}_\infty = \bar{D} \times [0,\infty)$.

Применяя формулу среднего значения и переходя к пределу при $\Delta V \to M,\ \Delta t \to 0$, получим уравнение теплопроводности:

$$C(M)\rho(M)u_t(M,t) = div\big(k(M)\,grad\,u(M,t)\big) + f(M,t).$$

Для вывода граничных условий нужно воспользоваться законом Ньютона:

Количество тепла Q, протекающее в единицу времени через площадку σ поверхности тела в окружающую среду, равно $Q = \sigma h(u - u_0)$, где $u_0(M,t)$ - температура окружающей среды, $u(P,t)$ -температура поверхности тела, h (P) - коэффициент теплообмена.

Поскольку тепловой поток на поверхности S равен $k(P)\dfrac{\partial u}{\partial n}$, где $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ - производная по внешней нормали, то граничное условие можно записать в виде

$$\alpha(P)\frac{\partial u}{\partial n}(P,t) + \beta(P)u(P,t) = \mu(P,t), \quad P \in S.$$

Начально-краевая задача для уравнения теплопроводности имеет следующий вид:

$$\begin{cases} C(M)\rho(M)u_t(M,t) = div\big(k(M)grad\ u(M,t)\big) + f(M,t),\ (M,t)\in Q_\infty, \\ u(M,0) = \varphi(M),\ M\in\bar{D}, \\ \alpha(P)\dfrac{\partial u}{\partial n}(P,t) + \beta(P)u(P,t) = \mu(P,t),\ P\in S,\ t\in[0,\infty). \end{cases}$$

Здесь

$$Q_\infty = D\times(0,\infty) \equiv \{(M,t): M\in D,\ t\in(0,\infty)\},\quad \bar{Q}_\infty = \bar{D}\times[0,\infty),$$

$\dfrac{\partial u}{\partial n}$ - производная по внешней нормали, коэффициенты удовлетворяют следующим условиям:

$$C(M)>0,\ \rho(M)>0,\ k(M)>0, M\in D,\ \ \alpha(P)>0,\ \beta(P)>0,\ \alpha(P)+\beta(P)>0, P\in S.$$

)

Определение. Функция $u(M,t)$ называется классическим решением поставленной начально-краевой задачи, если она:

1) принадлежит следующему классу $u(M,t) \in C_{M,t}^{(2,1)}(Q_\infty) \bigcap C_{M,t}^{(1,0)}(\bar{Q}_\infty)$;

2) удовлетворяет уравнению в классическом смысле (подстановка $u(M,t)$ в уравнение приводит к тождеству),

3) непрерывно примыкает к начальному и граничному условиям.

Необходимое условие существование классического решения – **условие согласования начального и граничного условий:**

$$\alpha(P)\frac{\partial\varphi(P)}{\partial n} + \beta(P)\varphi(P) = \mu(P,0), \quad P \in S.$$

В одномерном случае уравнение теплопроводности имеет следующий вид:

$$C(x)\rho(x)u_t(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right) + f(x,t).$$

В случае постоянных коэффициентов $C(x) = C_0,\ \rho(x) = \rho_0,\ k(x) = k_0$ одномерное уравнение теплопроводности можно записать в виде

$$u_t = a^2 u_{xx} + F(x,t), \quad a^2 = \frac{k_0}{C_0\rho_0}, \quad F(x,t) = \frac{1}{C_0\rho_0} f(x,t).$$

2) Температурные волны

С исследования процессов распространения тепла связано зарождение математической физики, понимаемой как науки о построении и изучении математических моделей физических явлений и процессов. В 1811 году Парижская академия наук объявила конкурс на тему создания математической теории законов распространения тепла. Победителем этого конкурса стал Фурье Жан Батист Жозеф (1768-1830 гг.). Им были написаны знаменитые мемуары по теории тепла в 1807 г., в 1811 г. и в 1822 году - мемуар «Аналитическая теория тепла».

Одним из первых примеров приложения математической теории теплопроводности, развитой Фурье, к изучению явлений природы является задача о распространении температурных волн в почве.

Температура на поверхности земли носит ярко выраженную суточную и годовую периодичность. Будем рассматривать почву как однородное полупространство $0 \le x \le \infty$.

Рассмотрим процесс распространения периодических колебаний в почве. **Заметим, что эта задача является характерной задачей без начальных условий, поскольку при многократном повторении температурного хода на поверхности почвы влияние начальной температуры будет меньше, чем влияние других факторов, которыми мы пренебрегаем (например, неоднородностью почвы).**

Заметим также, что поскольку область, в которой ищется решение, является неограниченной, то **для обеспечения единственности решения данной задачи необходимо поставить условие ограниченности решения.**

Постановка задачи имеет следующий вид. Найти ограниченное решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in (0, \infty), \quad t \in (0, \infty),$$

удовлетворяющее граничному условию

$$u(0, t) = A\cos \omega t, \quad t \in [0, \infty)$$

и условию

$$|u(x, t)| \le M, \quad x \in [0, \infty), \quad t \in [0, \infty).$$

Запишем граничное условие в виде: $u(0,t) = Ae^{i\omega t}$. Из линейности уравнения теплопроводности следует, что действительная часть его комплексного решения удовлетворяет условию вида $u(0,t) = A\cos \omega t$, а мнимая – условию вида $u(0,t) = A\sin \omega t.$

Будем искать решение в виде

$$u(x,t) = Ae^{\alpha x+\beta t},$$

где $\alpha,\ \beta$ – не определенные пока постоянные. Подставляя данную формулу в уравнение теплопроводности и граничные условия, получим

$$\alpha^2 = \frac{1}{a^2}\beta,\quad \beta = i\omega.$$

Отсюда

$$\alpha = \pm\sqrt{\frac{\beta}{a^2}} = \pm\sqrt{\frac{\omega}{a^2}}\sqrt{i} = \pm\sqrt{\frac{\omega}{a^2}}\frac{(1+i)}{\sqrt{2}} = \pm\left[\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} + i\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}\right],$$

$$u(x,t) = A\exp\left[\pm\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}\,x + i\left(\pm\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}\,x + \omega t\right)\right].$$

Действительная часть этого решения

$$u(x,t) = A\exp\left(\pm\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x\right)\cos\left(\pm\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x + \omega t\right)$$

удовлетворяет уравнению теплопроводности и соответствующему граничному условию. Так как условию задачи удовлетворяет ограниченное решение, то окончательное решение уравнения, моделирующего температурные волны будет иметь

$$u(x,t) = A\exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x\right)\cos\left(\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x - \omega t\right).$$

Анализ полученного решения. На основании полученного решения можно дать следующую характеристику процесса распространения температурной волны в почве**. Если температура поверхности длительное время периодически меняется, то в почве также устанавливаются колебания температуры с тем же периодом.** При этом имеют место следующие утверждения.

1. Первый закон Фурье. Амплитуда колебаний экспоненциально убывает с глубиной:

$$A(x) = A\exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x\right),$$

то есть если глубины растут в арифметической прогрессии, то амплитуды убывают в геометрической прогрессии

2. Второй закон Фурье. Температурные колебания в почве происходят со сдвигом фазы. Время δ отставания максимумов (минимумов) температуры в почве от соответствующих моментов на поверхности пропорционально глубине:

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{2\omega a^2}}x.$$

3. Третий закон Фурье. Глубина проникновения тепла в почву зависит от периода колебаний температуры на поверхности. Относительное изменение температурной амплитуды равно

$$\frac{A(x)}{A} = \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x\right).$$

Эта формула показывает, что чем меньше период, тем меньше глубина проникновения температуры. Для температурных колебаний с периодами T_1, T_2 глубины x_1, x_2, на которых происходит одинаковое относительное изменение температуры, связаны соотношением

$$x_2 = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}x_1.$$

Рассмотрим в качестве примера результаты наблюдений за годовыми температурными колебаниями (станция Гош в Приамурье).

Глубина (м)	1	2	3	4
Амплитуды (град С)	11,5	6,8	4,2	2,6

Эти данные показывают, что амплитуда годовых колебаний на глубине 4 м уменьшается до 13.3% от своего значения на поверхности, равного $19,5^\circ$. На основании этих данных можно определить **коэффициент температуропроводности** почвы a^2. Используя формулы

$$\ln\frac{A(x)}{A} = -\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}\,x, \qquad a^2 = \frac{\omega\, x^2}{2\ln^2\left(A(x)/A\right)},$$

находим, что коэффициент температуропроводности почвы равен $a^2 \approx 4\cdot 10^{-2}\,\text{см}^2/c$.

Время запаздывания максимальной температуры на глубине 4 м достигает 4 месяцев.

Замечание. Рассмотренная теория относится к распространению тепла в сухой почве или горных породах. Наличие влаги усложняет температурные явления в почве, и при замерзании происходит выделение скрытой теплоты, не учитываемой данной моделью.

3) Уравнение диффузии

Если среда неравномерно заполнена газом, то происходит его диффузия из мест с более высокой концентрацией в места с меньшей концентрацией. Это же явление наблюдается и в растворах, если концентрация растворенного вещества в объеме непостоянна.

Рассмотрим процесс диффузии в полой трубке или в трубке, заполненной пористой средой.

Предположим, что: 1) в любой момент времени концентрация газа (раствора) по сечению трубки одинакова (в этом случае процесс диффузии может быть описан функцией $u(x,t)$, представляющей собой **концентрацию** в сечении x в момент времени t); 2) в трубке нет источников вещества; 3) диффузия через стенки трубки отсутствует.

Введем обозначения:

D – коэффициент диффузии; S – площадь сечения трубки; W $(x,\ t)$ – плотность диффузионного потока, равная массе газа, протекающего за единицу времени через единицу площади; $u(x,\ t)$ – концентрация газа (раствора); $c(x)$ – **коэффициент пористости**, равный отношению объема пор к полному объему V, равному в нашем случае $dV=Sdx$.

Закон Нернста. Масса газа, протекающего через сечение x за промежуток времени $(t, t+\Delta t)$, равна

$$dQ = -D\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)Sdt = WSdt, \quad W = -D\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Количество газа Q в объеме V равно $Q=uV$.

Изменение массы газа ΔQ на участке трубки $(x,\ x+\Delta x)$ при изменении концентрации на Δu равно

$$\Delta Q = \int_{x}^{x+\Delta x} c(x)\,\Delta u\ S\ dx.$$

Уравнение баланса массы газа на участке $(x,\ x+\Delta x)$ за промежуток времени $(t,\ t+\Delta t)$ имеет вид:

$$S\int_{t}^{t+\Delta t}\left[D(x+\Delta x)\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x,\tau)-D(x)\frac{\partial u}{\partial x}(x,\tau)\right]d\tau =$$

$$= S\int_{x}^{x+\Delta x} c(\xi)\left[u(\xi,t+\Delta t)-u(\xi,t)\right]d\xi.$$

Применяя формулу среднего значения в предположении необходимой гладкости входящих функций и переходя к пределу при $\Delta x \to 0,\ \ \Delta t \to 0,$ получим **уравнение диффузии**:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(D(x)\frac{\partial u}{\partial x} \right) = c(x)\frac{\partial u}{\partial t}.$$

Если коэффициент диффузии постоянен, то уравнение диффузии имеет вид:

$$u_t = a^2 u_{xx},\quad a^2 = \frac{D}{c}.$$

Если коэффициент пористости равен 1, а коэффициент диффузии постоянен, то -

$$u_t = Du_{xx}.$$

4) Температура тонкой проволоки, нагреваемой электрическим током

Рассмотрим тонкую проволоку, нагреваемую постоянным электрическим током. Предположим, что на поверхности проволоки происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона с окружающим воздухом, имеющим известную температуру. Предположим также, что концы проволоки зажаты в массивные клеммы с заданной теплоемкостью и очень большой теплопроводностью.

Обозначения: 1) $a^2 -$ коэффициент температуропроводности; 2) $k -$ коэффициент теплопроводности; 3) $\rho -$ плотность; 4) S – площадь поперечного сечения; 5) c – удельная теплоемкость; 6) $\alpha -$ коэффициент теплообмена между поверхностью стержня и окружающей средой; 7) p – периметр поперечного сечения стержня; 8) $c_1,\ c_2 -$ теплоемкость клемм.

Для получения дифференциального уравнения рассмотрим уравнение баланса тепла для элемента $(x,\ x+\Delta x)$ провода.

Приращение тепла за единицу времени равно

$$\Delta Q_1 = c\rho\Delta x \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Это приращение тепла складывается из следующих составляющих.

а) Количество тепла, поступившего в выделенный элемент за единицу времени через сечения x и $x+\Delta x$:

$$\Delta Q_2 = -Sk\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_x + Sk\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x}.$$

Выбор знаков в правой части формулы определяется следующим образом.

Будем считать, что $x+\Delta x > x$ (это, очевидно, не нарушает общности рассуждений). Если на торце x выделенного элемента будет $\frac{\partial u}{\partial x} > 0,$ то в точках, лежащих правее торца (то есть внутри элемента), температура будет выше, чем в точках, лежащих левее торца (то есть вне элемента), тепло будет вытекать из элемента и, следовательно, первый член в правой части последней формулы нужно брать со знаком минус. Если же $\frac{\partial u}{\partial x} < 0,$ то температура левее торца больше, чем температура правее торца, поэтому тепло будет втекать в стержень, первый член суммы в правой части формулы должен быть положительным и, следовательно, передним снова должен стоять знак минус. Аналогично проверяется знак при втором члене в правой части формулы.

б) Поток тепла через боковую поверхность провода, вследствие несовершенства теплоизоляции, равен:

$$\Delta Q_3 = -\alpha p \Delta x \left(u - u_0\right).$$

Выбор знака в правой части очевиден, так как при $u > u_0$ тепло вытекает из провода, а при $u < u_0 -$ втекает в провод.

в) Количество тепла, выделяемое на данном участке вследствие прохождения тока, определяется законом Джоуля- Ленца, согласно которому, количества тепла, выделяющегося в единицу времени в выделенном элементе проводника при прохождении через него электрического тока, пропорционально квадрату силы тока и сопротивлению проводника:

$$\Delta Q_4 = \beta I^2 R \Delta x,$$

где $\beta -$ коэффициент пропорциональности.

Уравнение баланса тепла имеет следующий вид:

$$\Delta Q_1 = \Delta Q_2 + \Delta Q_3 + \Delta Q_4.$$

Подставляя соответствующие выражения, деля на Δx и переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим окончательное уравнение:

$$u_t = \frac{k}{c\rho} u_{xx} - \frac{\alpha p}{c\rho S}\left(u - u_0\right) + \frac{\beta I^2 R}{c\rho S}.$$

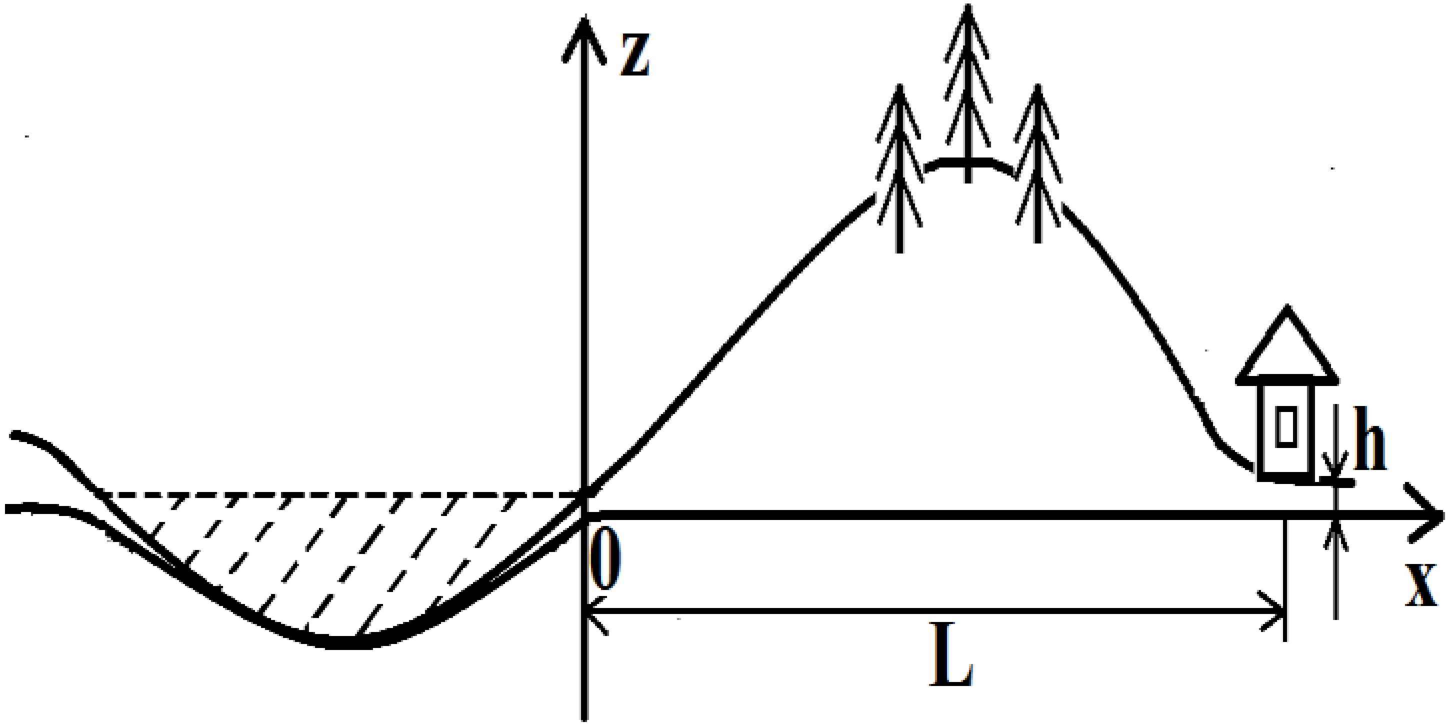
Для получения полной детерминированной дифференциальной модели необходимо к полученному уравнению добавить одно начальное и два граничных условия (на левом и правом концах провода).

Начально-краевая задача, моделирующая процесс распространения тепла в проволоке, имеет следующий вид:

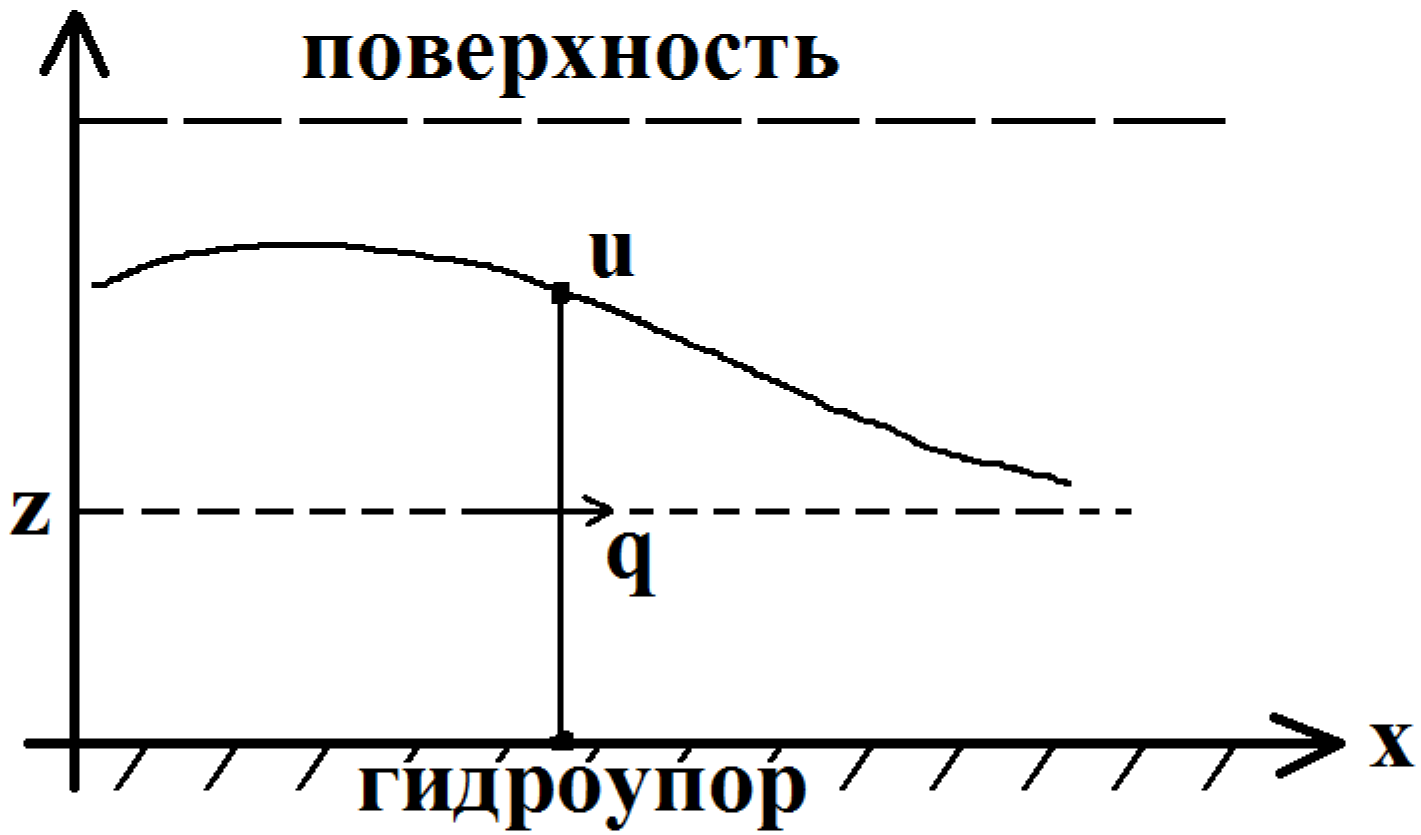
$$
\begin{cases}
u_t = \dfrac{k}{c\rho} u_{xx} - \dfrac{\alpha p}{c\rho S}\left(u - u_0\right) + \dfrac{\beta I^2 R}{c\rho S}, \quad x \in (0, l), \quad t \in (0, \infty), \\
c_1 u_t(0, t) = -kSu_x(0, t), \quad c_2 u_t(l, t) = kSu_x(l, t), \quad t \in (0, \infty), \\
u(x, 0) = f(x), \quad x \in (0, l).
\end{cases}
$$

5) Уравнение Буссинеска. Задача о наводнении

Предположим, что рядом с населенным пунктом расположен водоем, под которыми находится гидроупорный слой (глина). Введем декартову систему координат (x,z), ось x которой направим вдоль поверхности водоема, а ось z перпендикулярно этой поверхности. Предположим, что населенный пункт находится в области $x>0$, в которой уровень грунтовой воды над гидроупором описывается функцией $u(x,t)$. Водоем занимает область $x<0$. Пусть к моменту $t=0$ вода в водоеме поднялась до отметки $z=0$ и продолжает пребывать по закону $u(0,t)=kt$. Вопрос: насколько быстро вода дойдет до населенного пункта, имеющего координату $x=L$, если населенный пункт расположен над гидроупором на высоте h?



z
h
0
x
L


поверхность
u
z
q
x
гидроупор

Получим уравнение, описывающее изменение уровня грунтовых вод $u(x,t)$ над гидроупором.

Плотность q горизонтального потока воды равна

$$q = -D\frac{\partial P}{\partial x} \quad ,$$

где P – давление, а D – коэффициент проводимости среды.

Давление на высоте z, где $0<z<u$ равно

$$P(z) = \rho g(u-z),$$

где ρ - плотность воды.

Следовательно, плотность горизонтального потока воды q равна

$$q = -D\rho g \frac{\partial u}{\partial x}$$

и **не зависит от z.** Коэффициент D определяется свойствами грунта.

Полный поток, идущий через сечение, будет равен

$$Q = -D\rho g u \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Интегральное уравнение баланса воды в слое, заключенном между сечениями x и $x + \Delta x$, за промежуток времени от момента t до $t + \Delta t$, будет иметь следующий вид:

$$\int_{x}^{x+\Delta x} \varepsilon\left(u\left(\xi,t+\Delta t\right)-u\left(\xi,t\right)\right)d\xi =$$

$$= \int_{t}^{t+\Delta t} D\rho g\left(u\left(x+\Delta x,\tau\right)\frac{\partial u\left(x+\Delta x,\tau\right)}{\partial x}-u\left(x,\tau\right)\frac{\partial u\left(x,\tau\right)}{\partial x}\right)d\tau,$$

где ε - коэффициент пористости (порозность) среды. Из уравнения при $\Delta x \to 0$, $\Delta t \to 0$ получаем уравнение Буссинеска:

$$u_t = \frac{D\rho g}{\varepsilon}\left(uu_x\right)_x .$$

Уравнение Буссинеска описывает высоту уровня грунтовых вод над гидроупором.

Сделаем замену переменных:

$$t = \frac{\varepsilon}{D\rho g}\tau \qquad \text{и} \qquad K = \frac{k\varepsilon}{D\rho g}.$$

В новых переменных задача имеет следующий вид:

$$\begin{cases} u_\tau = \left(u u_x\right)_x, & x > 0, \quad \tau > 0, \\ u\left(x, 0\right) = 0, & x \geq 0, \\ u\left(0, \tau\right) = K\tau, & \tau \geq 0. \end{cases}$$

Одним из эффективных способов исследования нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных является метод построения частных решений этих уравнений, называемых автомодельными решениями.

Автомодельными решениями нелинейного уравнения в частных производных мы будем называть такие его частные решения специального вида, которые могут быть получены путем интегрирования некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений, аргументы искомых функций которых представляют собой комбинацию независимых переменных x и t.

Одно нелинейное уравнение может обладать целым рядом автомодельных решений, отражающих различные свойства его решения.

Построим автомодельное решение рассматриваемой задачи в виде бегущей волны:

$$\begin{cases} u = f\left(\nu\tau - x\right), & \nu\tau - x > 0, \\ u = 0, & \nu\tau - x \le 0, \end{cases}$$

где ν - постоянная скорость, которую нужно определить.

Подставив данное выражение в первое уравнение системы, получим обыкновенное дифференциальное уравнение для определения функции $f\left(\alpha\right), \quad \alpha = \nu\tau - x:$

$$\nu f' = (ff')'.$$

Интегрируем полученное уравнение от 0 до $\alpha > 0$:

$$\nu f = ff',$$

откуда

$$f' = \nu.$$

Вид функции f находим из граничного условия:

$$u(0,\tau) = K\tau = f(\nu\tau - 0).$$

Отсюда

$$f(\alpha) = \frac{K\alpha}{\nu}.$$

Поскольку $f' = \nu$, то $\frac{K}{\nu} = \nu$ и $\nu = \sqrt{K}$, а $f(\alpha) = \alpha\sqrt{K}.$

Решение поставленной задачи имеет вид:

$$\begin{cases} u(x,\tau) = K\tau - \sqrt{K}x, & x < \sqrt{K}\tau, \\ u(x,\tau) = 0, & x \geq \sqrt{K}\tau. \end{cases}$$

Наводнение дойдет до населенного пункта в момент τ, который определяется равенством

$$h = K\tau - \sqrt{K}L.$$

6) Параболическое приближение

Уравнениями параболического типа описываются процессы, связанные с распространением тепла. К ним также приводит рассмотрение процессов диффузии. Однако в ряде случаев и процессы распространения электромагнитных волн могут описываться уравнениями параболического типа. В этом случае говорят, что процессы распространения электромагнитных волн **рассматриваются в параболическом приближении**.

При рассмотрении задач для уравнений гиперболического типа мы выяснили, что в декартовой прямоугольной системе координат компоненты полей **H** и **E** удовлетворяют уравнению колебаний

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f\left(M, t\right),$$

где $\quad a^2 = \dfrac{1}{\varepsilon_a \mu_a}, \quad \alpha = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_a}.$

Если предположить гармоническую зависимость от времени (установившиеся колебания), когда $u(M,t) = v(M)e^{-i\omega t}$, то получается, что

$$\frac{\partial u}{\partial t} \sim \omega u, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \sim \omega^2 u.$$

Если $\omega \ll \alpha$, то есть $\varepsilon_a \omega \ll \sigma$, что означает, что токи смещения пренебрежимо малы по сравнению с токами проводимости, то, пренебрегая второй производной по времени, то есть токами смещения, мы приходим к уравнению параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{a^2}{\alpha} \Delta u + \frac{1}{\alpha} f(M,t).$$

4. Стационарные процессы

Стационарные процессы описываются уравнениями **эллиптического типа**, в которые не входит время. Поэтому для них ставятся не начально-краевые, а краевые задачи.

1) Стационарное распределение тепла

Если в некоторой системе плотность источников (стоков) тепла не зависит от времени и граничные условия также не зависят от времени, то с течением времени в такой системе установится некоторое постоянное распределение тепла, то есть система будет выходить на стационарный режим. Распределение температуры в такой системе будет описываться уравнениями эллиптического типа, которое можно получить из уравнения теплопроводности параболического типа, учитывая, что

$$u(M,t)=u(M), \quad \frac{\partial u}{\partial t}=0, \quad f(M,t)=f(M).$$

Стационарное уравнение теплопроводности примет вид

$$div\left(k(M)\,grad\;u(M)\right)=-f(M).$$

Граничные условия ставятся так же, как и для уравнения теплопроводности.

В случае постоянного коэффициента $k(M)=k_0$ неоднородное стационарное уравнение теплопроводности переходит в уравнение Пуассона

$$\Delta u(M)=F(M),\quad F(M)=\frac{1}{k_0}f(M),$$

а однородное стационарное уравнение теплопроводности переходит в уравнение Лапласа

$$\Delta u(M)=0.$$

2) Задачи электростатики

В электростатическом случае из уравнений Максвелла получаем:

$$rot\ \vec{E}(M)=0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E}(M)=-grad\ u(M).$$

Здесь введена скалярная функция *u(M)* таким образом, что уравнение $rot\ \vec{E}(M)=0$ выполняется автоматически. Если теперь воспользоваться дивергентным уравнением

$$div\left(\varepsilon(M)\vec{E}(M)\right)=\rho(M),$$

то приходим к уравнению электростатики

$$div\left(\varepsilon(M)grad\ u(M)\right)=-\rho(M).$$

В случае постоянного коэффициента $\varepsilon(M)=\varepsilon_0$ мы снова получаем уравнение Пуассона

$$\Delta u(M) = -f(M),\ \ f(M) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(M)$$

и уравнение Лапласа

$$\Delta u(M) = 0.$$

3) Установившиеся колебания

Если на систему, обладающую затуханием, действует периодическая вынуждающая сила с частотой ω, то с течением времени в системе устанавливаются колебания с частотой вынуждающей силы ω.

Уравнение колебаний для диссипативной среды имеет вид:

$$u_{tt} + \alpha u_t = a^2 \Delta u + F(M,t),$$

где

$$F(M,t) = F(M)e^{-i\omega t}, u(M,t) = U(M)e^{-i\omega t}.$$

Отсюда получаем $\left(-\omega^2 - i\alpha\omega\right)U(M) = a^2 \Delta U + F(M)$

и, вводя обозначение $k^2 = \dfrac{\omega^2 + i\alpha\omega}{a^2}$, приходим к **уравнению Гельмгольца**

$$\Delta U + k^2 U = f(M).$$

4) Установившиеся электромагнитные колебания

Получим теперь уравнение, описывающее установившиеся электромагнитные колебания. Уравнение получим для изотропной и однородной среды, свободной от сторонних токов и зарядов. Таким образом, имеем $\varepsilon_a = const, \ \ \mu_a = const, \ \ \rho = 0, \ \ \mathbf{j}^{(\text{ст})} = 0$ и система уравнений Максвелла примет вид:

$$\begin{cases} rot\mathbf{H} = \varepsilon_a \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \sigma \mathbf{E}, \\ rot\mathbf{E} = -\mu_a \dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \\ div\mathbf{E} = 0, \\ div\mathbf{B} = 0. \end{cases}$$

Предположим, что функции $\mathbf{E}(M,t)$, $\mathbf{H}(M,t)$ зависят от времени по гармоническому закону:

$$\mathbf{E}(M,t)=\mathbf{E_0}(M)e^{-i\omega t},\mathbf{H}(M,t)=\mathbf{H_0}(M)e^{-i\omega t}.$$

Система уравнений Максвелла примет следующий вид;

$$\begin{cases} rot\mathbf{H_0}=-i\omega\varepsilon_a\mathbf{E_0}-i\omega\sigma\mathbf{E_0}=-i\omega\left(\varepsilon_a+i\frac{\sigma}{\omega}\right)\mathbf{E_0}=-i\omega\tilde{\varepsilon}_a\mathbf{E_0}, \\ rot\mathbf{E_0}=i\omega\mu_a\mathbf{H_0}, \\ div\mathbf{E_0}=0, \\ div\mathbf{H_0}=0. \end{cases}$$

где $\tilde{\varepsilon}_a=\varepsilon_a+i\frac{\sigma}{\omega}$ — комплексная абсолютная диэлектрическая проницаемость.

Подействуем на первое уравнение системы оператором rot:

$$rot\ rot\mathbf{H_0} = grad\ div\mathbf{H_0} - \nabla^2\mathbf{H_0} = -i\omega\tilde{\varepsilon}_a rot\mathbf{E_0} = \omega^2\tilde{\varepsilon}_a\mu_a\mathbf{H_0}.$$

Обозначая $k^2 = \omega^2\tilde{\varepsilon}_a\mu_a$, получим однородное векторное уравнение Гельмгольца:

$$\nabla^2\mathbf{H_0} + k^2\mathbf{H_0} = 0.$$

Аналогичным образом получается векторное уравнение Гельмгольца для функции $\mathbf{E_0}\left(M\right)$:

$$\nabla^2\mathbf{E_0} + k^2\mathbf{E_0} = 0.$$

5) Постановка краевой задачи

Отличие в постановке краевых задач для уравнений эллиптического типа, описывающих стационарные процессы, от начально-краевых задач для уравнений гиперболического и параболического типов заключается в отсутствии начальных условий. Краевая задача в области $\bar{D} = D \bigcup S$ имеет следующий вид:

$$\begin{cases} div\left(k\left(M\right)grad\ u\right) = -f\left(M\right), \quad M \in D, \\ \alpha\left(P\right)\dfrac{\partial u\left(P\right)}{\partial n} + \beta\left(P\right)u\left(P\right) = \mu\left(P\right), \quad P \in S. \end{cases}$$

Если D – внешняя область, то для того, чтобы решение было единственным, необходимо добавить условия на бесконечности. В частности, если задача ставится во всем пространстве $\mathbb{R}^3$, то ставятся только условия на бесконечности.

Определение. Функция $u(M)$ называется классическим решением поставленной краевой задачи, если она обладает следующими свойствами:

1) дважды непрерывно дифференцируема в области D и один раз непрерывно дифференцируема в области $\bar{D}$: $u(M) \in C^{(2)}(D) \cap C^{(1)}(\bar{D})$;

2) удовлетворяет в области D уравнению в классическом смысле;

3) непрерывно примыкает к граничному условию.

6) Постановка условий на бесконечности

В случае решения внешних краевых задач для уравнений эллиптического типа достаточно сложной проблемой является постановка граничных условий на бесконечности, которые обеспечивают единственность решения краевой задачи.

В случае внешних краевых задач для уравнения Лапласа эта проблема решается достаточно просто: решение должно быть регулярным на бесконечности.

Функция трех переменных $u(x, y, z)$ называется **регулярной на бесконечности**, если при достаточно большом $r \geq R$ имеют место оценки:

$$|u| \leq \frac{A}{r}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \leq \frac{A}{r^2}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \leq \frac{A}{r^2}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial z}\right| \leq \frac{A}{r^2}.$$

Функция $u(x, y)$ называется **гармонической в области *D***, если она дважды непрерывно дифференцируема в этой области и удовлетворяет в D уравнению Лапласа: $u \in C^{(2)}(D)$, $\Delta u(M) = 0, M \in D$.

Если в трехмерном случае функция является гармонической во внешней по отношению к замкнутой поверхности S области D_e и равномерно сходится к нулю на бесконечности, то она регулярна на бесконечности. Таким образом для уравнения Лапласа внешняя краевая задача в области $\bar{D}_e = D \cup S$ ставится следующим образом:

$$\begin{cases} \Delta u(M) = 0, \quad M(x, y, z) \in D_e, \\ u(M) = 0, \quad M(x, y, z) \in S, \\ u(M) \ \text{равномерно сходится к нулю на бесконечности.} \end{cases}$$

Функция двух переменных $u(x, y)$ называется **регулярной на бесконечности** если она имеет конечный предел на бесконечности.

Поэтому в двумерном случае для обеспечения единственности решения внешней краевой задачи для уравнения Лапласа достаточно потребовать ограниченности решения во внешней области.

Более сложным является вопрос о выделении единственного решения уравнения Гельмгольца с вещественным коэффициентом $k^2 > 0$:

$$\Delta u + k^2 u = 0$$

во внешней области в трехмерном случае.

Рассмотрим частный случай сферически симметричных решений $u = u(r)$ однородного уравнения Гельмгольца.

Уравнение Гельмгольца в этом случае будет иметь вид:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+k^2u=0.$$

Положим $v=ru.$ Тогда для функции $v(r)$ получаем уравнение:

$$v''(r)+k^2v(r)=0,$$

общее решение которого имеет следующий вид

$$v(r)=C_1e^{ikr}+C_2e^{-ikr},$$

и для функции $u(r)$ окончательно получаем:

$$u(r)=C_1\frac{e^{ikr}}{r}+C_2\frac{e^{-ikr}}{r}.$$

Для единственности решения задачи нам необходимо выделить одно решение, имеющее физический смысл. Сложность заключается в том, что в случае вещественного коэффициента $k^2 > 0$ частные решения одинаково ведут себя на бесконечности:

$$\frac{e^{ikr}}{r} = \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{r}\right), \quad \frac{e^{-ikr}}{r} = \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{r}\right).$$

Поэтому требование равномерного стремления решения к нулю на бесконечности, обеспечивающее единственность решения в случае уравнения Лапласа в трехмерном случае, в случае уравнения Гельмгольца с коэффициентом $k^2 > 0$ уже недостаточно для единственности решения внешней краевой задачи. Необходимо более тонкое условие, учитывающее фазовые различия двух решений.

Это условие было предложено немецким физиком **Арнольдом Зоммерфельдом.**

Прежде всего заметим, что физический смысл имеют выражения

$$u^{+}\left(r,t\right)=\frac{e^{ikr}}{r}e^{-i\omega t},\quad u^{-}\left(r,t\right)=\frac{e^{-ikr}}{r}e^{-i\omega t},$$

представляющие собой сходящиеся и расходящиеся сферические волны при данном выборе временной зависимости: $e^{-i\omega t}$.

При выделении физически обоснованной волны необходимо отбросить волну, приходящую из бесконечности (волну u^{-}).

Для простоты будем считать, что точечный источник находится в начале декартовой прямоугольной системы координат.

Введем обозначение $v^{\pm}(r)=\dfrac{e^{\pm ikr}}{r}.$ Тогда получаем:

$$\frac{dv^{\pm}}{dr}=\pm ik\,\frac{e^{\pm ik\,r}}{r}-\frac{e^{\pm ik\,r}}{r^2}=\pm ikv^{\pm}+\overset{=}{o}\left(\frac{1}{r}\right).$$

Расходящейся сферической волне соответствует $v^{+}(M)$, а сходящейся - $v^{-}(M)$.

Следовательно, расходящаяся сферическая волна должна удовлетворять соотношению (при временной зависимости $e^{-i\omega t}$):

$$\frac{\partial u}{\partial r}-iku=\overset{=}{o}\left(\frac{1}{r}\right),\quad u=v^{+}(M)e^{-i\omega t},$$

а сходящаяся - соотношению

$$\frac{\partial u}{\partial r}+iku=\overset{=}{o}\left(\frac{1}{r}\right),\quad u=v^{-}(M)e^{-i\omega t}.$$

Таким образом, предложенные Зоммерфельдом условия излучения в трехмерном случае имеют следующий вид;

$$u(M) = \underline{\underline{O}}\left(1/r\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} - iku = \overset{=}{o}\left(\frac{1}{r}\right).$$

Для двумерных задач условия излучения Зоммерфельда записываются следующим образом:

$$u(M) = \underline{\underline{O}}\left(1/\sqrt{r}\right),$$

$$\lim_{r\to\infty}\sqrt{r}\left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku\right) = 0.$$

В трехмерном случае постановка внешней краевой задачи для уравнения Гельмгольца с вещественным коэффициентом $k^2 > 0$ во внешней области $\bar{D}_e = D_e \cup S$ имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0, \quad M(x, y, z) \in D_e, \\ u(M) = g(M), \quad M \in S, \\ u(M) = O\left(\dfrac{1}{r}\right), \\ \dfrac{\partial u}{\partial r} - iku = o\left(\dfrac{1}{r}\right). \end{cases}$$

Советский математик И.Н. Векуа показал, что первое условие излучения является следствием второго условия.

7) Математическое моделирование волноведущих систем

Излучатели конечных размеров, расположенные в свободном пространстве, возбуждают электромагнитное поле, распространяющееся по всем направлениям. Однако энергию электромагнитного поля часто необходимо передавать от излучателя (возбудителя) к нагрузке так, чтобы она не рассеивалась в пространстве, а по возможности целиком поступала в нагрузку, для чего она должна быть локализована в части пространства – определенном канале. В качестве таких каналов используются **волноведущие (направляющие) системы**. Основой любой волноведущей системы являются **волноводы.**

Волновод – это специальное устройство или канал в неоднородной среде, в котором могут распространяться волны различной природы: акустические (в акустических волноводах), электромагнитные (в радиоволноводах, световодах), сейсмические и другие.

Одним из первых исследователей волноведущих систем был лорд Дж. У. Рэлей, который изучал акустические волны в органных трубах. Эти исследования были выполнены в конце XIX века на чисто физическом уровне строгости.

Начало строгой математической теории волноведущих систем было положено в 1947-1948 гг. классическими работами А.Н.Тихонова и А.А.Самарского:

О возбуждении радиоволноводов //Журнал технической физики. 1947. Т. 27, вып. 11, 12. С. 1283-1296, 1431-1440.

Для уравнения Гельмгольца в цилиндрической области впервые построена функция Грина и выделена ее особенность, что потребовало доказательства полноты системы собственных функций регулярного волновода.

Рассмотрим полый волновод произвольного сечения, представляющий собой цилиндрическую трубу, неограниченно простирающуюся вдоль оси Z.

Введем следующие обозначения: Σ - боковая поверхность волновода; S – поперечное сечение волновода; C – контур, ограничивающий это сечение.

Сделаем следующие предположения:

а) стенки волновода являются идеально проводящими;

б) заполняющая волновод среда является однородной и характеризуется следующими значениями параметров: $\varepsilon = 1, \;\; \mu = 1, \;\; \sigma = 0$;

в) внутри волновода отсутствуют источники поля;

г) поля зависят от времени по гармоническому закону $e^{-i\omega t}$.

Уравнения Максвелла, описывающие поле внутри волновода, имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\mathbf{H} = -ik\mathbf{E}, \\ \mathrm{rot}\mathbf{E} = ik\mathbf{H}, \\ \mathrm{div}\mathbf{H} = 0, \\ \mathrm{div}\mathbf{E} = 0, \end{cases}$$

где $k = \dfrac{\omega}{c}$ волновое число.

Поскольку стенки волновода являются идеально проводящими, тангенциальная компонента электрического вектора равна нулю:

$$E_t\big|_C = 0.$$

Покажем, что **внутри волновода могут распространяться бегущие электромагнитные волны.**

Будем искать решение в виде

$$\mathbf{E} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{\Pi} + k^2\mathbf{\Pi},$$
$$\mathbf{H} = -ik\operatorname{rot}\mathbf{\Pi},$$

где **П** – поляризационный потенциал.

а) Рассмотрим случай, когда вектор П имеет всего одну компоненту, направленную вдоль оси Z $(H_z = 0)$.

В этом случае система уравнений Максвелла приводит к уравнению Гельмгольца для поляризационного потенциала:

$$\Delta\Pi + k^2\Pi = 0, \quad (\mathbf{\Pi} = \Pi\mathbf{k}).$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{\Pi} = \left(\frac{\partial \Pi_z}{\partial y} - \frac{\partial \Pi_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial \Pi_x}{\partial z} - \frac{\partial \Pi_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial \Pi_y}{\partial x} - \frac{\partial \Pi_x}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{\Pi} = \{0, 0, \Pi_z\} \;\Rightarrow\; \mathrm{rot}\mathbf{\Pi} = \frac{\partial \Pi_z}{\partial y}\mathbf{i} - \frac{\partial \Pi_z}{\partial x}\mathbf{j}\;;\; \mathbf{H} = -\mathrm{i}k\;\mathrm{rot}\mathbf{\Pi} \;\Rightarrow\; \mathrm{H}_z = 0$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{H} = -\mathrm{i}k\,\mathrm{rot}\;\mathrm{rot}\mathbf{\Pi} = -\mathrm{i}k\left(\mathrm{grad}\;\mathrm{div}\mathbf{\Pi} - \nabla^2\mathbf{\Pi}\right) = -\mathrm{i}k\mathbf{E} = -\mathrm{i}k(\mathbf{E} - k^2\mathbf{\Pi} - \nabla^2\mathbf{\Pi}) \;\Rightarrow$$

$$\nabla^2\mathbf{\Pi} + k^2\mathbf{\Pi} = 0, \mathbf{\Pi} = \Pi\mathbf{k} \;\Rightarrow\; \Delta\Pi + k^2\Pi = 0$$

Граничное условие идеально проводящей стенки приводит к следующему граничному условию:

$$\Pi\big|_{\Sigma} = 0.$$

Записав трехмерный оператор Лапласа следующим образом

$$\Delta u = \Delta_2 u + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad \Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

будем искать решение в виде

$$\Pi(M, z) = \psi(M) f(z),$$

где M – точка, лежащая в поперечном сечении. Нас будет интересовать нетривиальное решение задачи.

Будем решать задачу методом разделения переменных (методом Фурье). Подставляя решение вида $\Pi(M,z)=\psi(M)f(z)$ в уравнение, получим:

$$f(z)\Delta_2\psi(M)+\psi(M)f''(z)+k^2\psi(M)f(z)=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\Delta_2\psi(M)}{\psi(M)}=-\frac{f''(z)}{f(z)}-k^2.$$

В левой части последнего равенства стоит функция, зависящая от *M*, а в правой части – функция, зависящая от z, причем равенство должно выполняться при любых допустимых значениях *M* и z, что возможно только в том случае, когда левая и правая стороны равенства сохраняют постоянное значение, то есть

$$\frac{\Delta_2\psi(M)}{\psi(M)}=-\frac{f''(z)}{f(z)}-k^2=-\lambda,\qquad \lambda=\text{const}.$$

Таким образом, для функции $\psi(z)$ мы получаем следующую **задачу на собственные значения (задачу Штурма-Лиувилля)**: найти те значения параметра λ, при которых краевая задача

$$\begin{cases} \Delta_2\psi + \lambda\psi = 0, M \in S, \\ \psi(M) = 0, M \in C. \end{cases}$$

имеет нетривиальные решения, и сами эти решения. При этом **значения параметра λ носят название собственных значений, а нетривиальные решения называются собственными функциями.**

Из общей теории следует, что рассматриваемая задача на собственные значения имеет счетное множество вещественных собственных значений $\{\lambda_n\}$ и соответствующую им систему собственных функций $\{\psi_n(M)\}$.

Для функции $f(z)$ получаем уравнение

$$f_n''(z)+\left(k^2-\lambda_n\right)f_n(z)=0,$$

общее решение которого имеет следующий вид:

$$f_n(z)=A_n e^{i\gamma_n z}+B_n e^{-i\gamma_n z}.$$

Постоянная $\gamma_n=\sqrt{k^2-\lambda_n}$ называется **постоянной распространения.**

Если временная зависимость выбирается в виде $e^{-i\omega t}$, то первый член в правой части формулы для $f_n(z)$ соответствует правой собственной волне (правой моде), а второй член соответствует левой собственной волне (левой моде). Таким образом поле внутри волновода представляет собой суперпозицию правых и левых мод.

Рассмотрим правую собственную волну (моду)

$$f_n(z) = A_n e^{i\gamma_n z},$$

тогда получим решение в виде:

$$\Pi_n(M, z) = A_n \psi_n(M) e^{i\gamma_n z},$$

где постоянная A_n определяется из условия возбуждения полей.

Подставляя полученное выражение в формулы, связывающие векторы **E, H, П** и восстанавливая временной множитель $e^{-i\omega t}$, найдем составляющие поля n-й правой моды в виде

$$F_n(M) e^{i(\gamma_n z - \omega t)},$$

где F_n – функция, выражающаяся через собственную функцию $\psi_n(M)$ или ее производные.

Заметим, что собственные функции $\psi_n(M)$ носят название **функций сечения**.

Поле в волноводе в общем случае является суперпозицией правых и левых собственных волн (мод).

Если $k^2 > \lambda_n$, то γ_n вещественно и мы получаем **бегущую волну**, распространяющуюся вдоль оси Z с фазовой скоростью

$$v = \frac{\omega}{\sqrt{k^2 - \lambda_n}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\lambda_n}{k^2}}} > c.$$

Групповая скорость волны равна

$$u = \frac{c^2}{v} = c\sqrt{1 - \frac{\lambda_n}{k^2}} < c,$$

то есть в пустом волноводе имеет место дисперсия.

Если $k^2 < \lambda_n$, то $\gamma_n = i\chi_n \quad (\chi_n > 0)$ и вместо распространяющейся волны получаем затухающую волну

$$F_n(M)e^{-i\omega t - \chi_n z},$$

распространяющуюся вдоль оси Z в положительном направлении.

Так как собственные числа λ_n, представляющие собой собственные частоты мембраны *S*, неограниченно возрастают с увеличением номера n, то какова бы ни была частота ω, начиная с некоторого номера $n=N$, будем иметь $k^2 < \lambda_n$.

Следовательно, в волноводе может распространяться лишь конечное число бегущих волн. Если $k^2 < \lambda_1$, то волноводе не может существовать ни одной бегущей волны («запертый волновод»). Частота, начиная с которой в волноводе начинает распространяться некоторая бегущая мода, называется **частотой отсечки данной моды**.

Для того, чтобы в волноводе заданной формы и размеров могла распространяться хотя бы одна бегущая волна, должно, очевидно, выполняться условие

$$\lambda_1 < k^2, \qquad \text{или} \qquad \Lambda < \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda_1}},$$

где Λ – длина волны, распространяющейся в волноводе.

Рассмотрим прямоугольный волновод, поперечное сечение *S* которого представляет собой прямоугольник со сторонами *a* и *b*.

Найдем для него функции сечения, которые являются решением задачи на собственные значения:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \lambda\psi = 0, \;\; x \in (0,a), \;\; y \in (0,b), \\ u(x,0) = u(x,b) = 0, \;\; x \in [0,a], \\ u(0,y) = u(a,y) = 0, \;\; y \in [0,b]. \end{cases}$$

Данную задачу также будем решать методом разделения переменных:

$$\psi(x,y)=X(x)Y(y) \;\Rightarrow\; \frac{X''(x)}{X(x)}+\frac{Y''(y)}{Y(y)}+\lambda=0 \;\Rightarrow\; \frac{X''(x)}{X(x)}=-\frac{Y''(y)}{Y(y)}-\lambda=-\mu \Rightarrow$$

$$X''(x)+\mu X(x)=0,\quad X(0)=X(a)=0,$$

$$Y''(y)+(\lambda-\mu)Y(y)=0,\quad Y(0)=Y(b)=0.$$

Решение задачи для нахождения функции $X(x)$ имеет вид:

$$X(x)=A\cos\sqrt{\mu}x+B\sin\sqrt{\mu}x \Rightarrow X(0)=A=0 \Rightarrow X(a)=B\sin\sqrt{\mu}a=0 \Rightarrow$$

$$\sqrt{\mu}a=\pi m, m=1,2,\ldots \Rightarrow \mu=\mu_m=\left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 \Rightarrow X(x)=X_m(x)=B_m\sin\frac{\pi m x}{a}, m=1,2,\ldots$$

Заметим, что собственные функции, как решения однородного уравнения, удовлетворяющие однородным граничным условиям, определяются с точностью до произвольного множителя. Поэтому положим $B_m = 1, \; m = 1, 2, ...$

Аналогично решается задача для функции $Y(y)$:

$$Y(y) = A\cos\sqrt{\lambda-\mu_m} + B\sin\sqrt{\lambda-\mu_m} \Rightarrow \lambda - \mu_m = \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\lambda = \lambda_{m,n} = \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2, \; m, n = 1, 2, ...; \; Y(y) = Y_n(y) = \sin\frac{\pi n y}{b}, \; n = 1, 2, ...$$

Таким образом функции сечения для волновода прямоугольного сечения имеют вид:

$$\psi_{m,n}(x, y) = \sin\frac{\pi m x}{a}\sin\frac{\pi n y}{b}, \quad \lambda_{m,n} = \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2, \quad m, n = 1, 2, ...$$

В волноводе прямоугольного сечения бегущая волна может существовать лишь при условии

$$k > \sqrt{\lambda_{1,1}} \quad \Rightarrow \quad k > \pi\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$$

или

$$\Lambda < \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda_{1,1}}} \quad \Rightarrow \quad \Lambda < \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}}.$$

Рассмотренные здесь собственные волны (моды), удовлетворяющие условию $H_z = 0$, называются электрическими волнами, или поперечно-магнитными волнами (волнами типа TM).

Рассмотрим теперь решения уравнений Максвелла с равной нулю Z- составляющей электрического поля $(E_z = 0)$.

Введем вектор $\hat{\mathbf{\Pi}} = \hat{\mathit{\Pi}}\mathbf{i_z}$ и положим

$$\hat{\mathbf{E}} = ik\,\mathrm{rot}\,\hat{\mathbf{\Pi}}, \quad \hat{\mathbf{H}} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\hat{\mathbf{\Pi}} + \mathrm{k}^2\,\hat{\mathbf{\Pi}}, \quad \left(\hat{E}_z = 0\right).$$

Тогда функция $\hat{\mathit{\Pi}}$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta\hat{\mathit{\Pi}} + k^2\hat{\mathit{\Pi}} = 0$$

и граничному условию Неймана на поверхности Σ

$$\frac{\partial\hat{\mathit{\Pi}}}{\partial n} = 0.$$

Повторяя рассуждения пункта а), найдем решение этой задачи

$$\hat{\Pi}_n = A_n \hat{\psi}_n \left(M \right) e^{i\hat{\gamma}_n z} \qquad \left(\hat{\gamma}_n = \sqrt{k^2 - \hat{\lambda}_n} \right),$$

которым соответствуют решения уравнения Максвелла вида:

$$\hat{F}_n \left(M \right) e^{i\left(\hat{\gamma}_n z - \omega t \right)}.$$

Здесь $\hat{\psi}_n \left(M \right)$ функции сечения и соответствующие собственные значения задачи

Штурма-Лиувилля

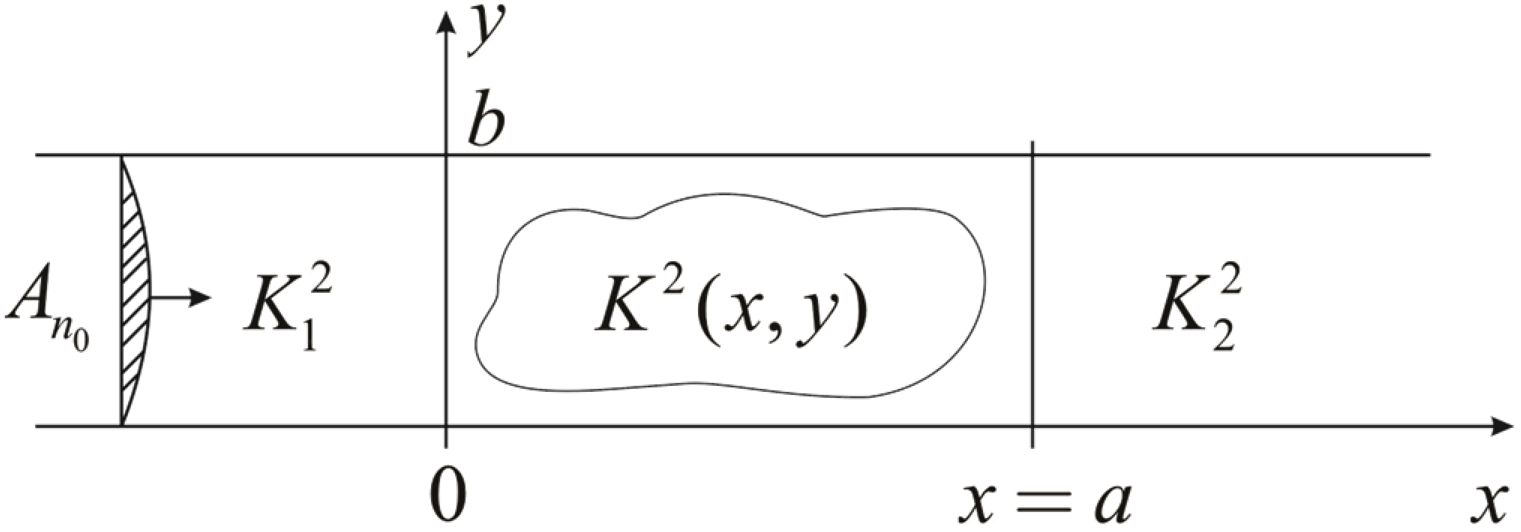
$$\begin{cases} \Delta_2 \hat{\psi}_n + \hat{\lambda}_n \hat{\psi}_n = 0 & M \in S, \\ \dfrac{\partial \hat{\psi}_n}{\partial n} = 0 & M \in C. \end{cases}$$

Волны такого типа называются **магнитными или поперечно электрическими волнами (ТЕ-волнами).**

Можно показать, что любое поле в волноводе представимо в виде суммы полей ТЕ и ТМ типа.

Следовательно, любое поле в регулярном волноводе можно определить, если известны две скалярные функции $\mathit{\Pi}(M,z)$ и $\hat{\mathit{\Pi}}(M,z)$, являющиеся z-компонентами поляризационных потенциалов $\mathbf{\Pi}$ и $\hat{\mathbf{\Pi}}$ соответственно.

Парциальные условия излучения



Рассмотрим плоский волновод с локальной нерегулярностью.

При $x \le 0$ и $x \ge a$ волновод регулярный: его заполнение однородно и геометрия сечения постоянна.

Нормальные волны (моды) – частные решения вида

$$u(x,y) = e^{i\gamma x}\psi(y), \tag{30}$$

где γ – постоянная распространения, $\psi(y)$ - функция сечения.

Поле $u(x,y)$ в волноводе удовлетворяет уравнению Гельмгольца:

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad (x,y) \in V \equiv \mathbb{R}^1 \times (0,b), \tag{31}$$

где $k^2(x,y) = \bar{k}^2(x,y) + i\bar{\bar{k}}^2(x,y),$

$$k^2(x,y) = \begin{cases} k_1^2 = const, & x < 0, \\ k^2(x,y), & 0 < x < a, \\ k_2^2 = const, & x > a. \end{cases} \tag{32}$$

Электродинамический случай: $k^2(x,y) = k_0^2 \varepsilon(x,y)$, где

$k_0 = \dfrac{\omega}{c}$ - волновое число, $\varepsilon(x,y)$ - диэлектрическая проницаемость.

$$u(x,0)=0,\ \ u(x,b)=0,\ \ x\in\mathbb{R}^1 -$$

- граничные условия (например, идеально проводящие стенки).

Для функций сечения получаем задачу Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} \psi''(y)+\lambda\psi(y)=0, \quad 0<y<b, \\ \qquad \psi(0)=0, \quad \psi(b)=0, \end{cases}$$

где $\lambda = k^2-\gamma^2.$

$$\psi_n(y)=\sqrt{\frac{2}{b}}\sin\frac{\pi n y}{b}, \qquad \lambda_n=\left(\frac{\pi n}{b}\right)^2, \ (n=1,2,\ldots)$$

Существует счетное множество нормальных волн (мод) вида:

$$u_n(x,y)=e^{i\gamma_n x}\psi_n(y), \qquad \gamma_n=\sqrt{k^2-\lambda_n}, \ (n=1,2,\ldots)$$

при $(x\le 0,\ x\ge a).$

Пусть на неоднородность падает слева нормальная волна индекса n_0 с амплитудой A_{n_0}. В сечении $x = 0$ парциальные условия излучения при временной зависимости $e^{-i\omega t}$ имеют вид:

$$\int_0^b \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + i\gamma_n^{(1)} u \right\}_{x=0} \cdot \psi_n(y)dy = 2i\gamma_{n_0}^{(1)} A_{n_0} \cdot \delta_{n,n_0}, \quad (n = 1, 2, ...)$$

Аналогично ставятся условия в сечении $x = a$. Парциальные условия излучения являются нелокальными условиями.

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(x)\psi_n(y),$$

$$\mathrm{Z}_n(x) = \int_0^b u(x, y)\psi_n(y)dy \qquad (n = 1, 2, ...)$$

Парциальные условия излучения накладываются на коэффициенты Фурье разложения функции $u\left(x,y\right)$ по функциям сечения $\psi_n(y)$:

$$Z_n{}'(0)+i\gamma_n^{(1)}Z_n(0)=2i\gamma_{n_0}^{(1)}A_{n_0}\delta_{n,n_0}$$

Краевая задача имеет вид:

$$\begin{cases} \Delta u+k^2(x,y)u=0, \quad (x,y)\in D, \\ u(x,0)=0,\ u(x,b)=0, \quad 0\le x\le a, \\ \int\limits_0^b \left\{\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\gamma_n^{(1)}u\right\}_{x=0}\psi_n(y)dy=2i\gamma_{n_0}^{(1)}A_{n_0}\delta_{n,n_0} \ \ (n=1,2,\dots), \\ \int\limits_0^b \left\{\dfrac{\partial u}{\partial x}-i\gamma_n^{(2)}u\right\}_{x=a}\psi_n(y)dy=0 \ \ (n=1,2,\dots), \end{cases}$$

где $\gamma_n^{(l)}=\sqrt{k_l^2-\lambda_n}$ $(n=1,2,\dots;l=1,2),$ $\bar{D}\equiv\left\{0\le x\le a,0\le y\le b\right\}.$

$$u_n(x,y)=\vec{A}_n e^{i\gamma_n^{(1)}x}\psi_n(y)+\overleftarrow{B}_n e^{-i\gamma_n^{(1)}x}\psi_n(y)$$

$$\int_0^b \left\{\frac{\partial u}{\partial x}+i\gamma_n^{(1)}u\right\}\Big|_{x=0}\psi_n(y)\,dy=\left(i\vec{A}_n\gamma_n^{(1)}+i\vec{A}_n\gamma_n^{(1)}\right)\int_0^b \psi_n^2(y)dy+$$

$$+\left(-i\overleftarrow{B}_n\gamma_n^{(1)}+i\overleftarrow{B}_n\gamma_n^{(1)}\right)\int_0^b \psi_n^2(y)dy=2i\gamma_n^{(1)}\vec{A}_n=2i\gamma_{n_0}^{(1)}\vec{A}_{n_0}\Rightarrow$$

$$\vec{A}_n=0,\quad n\neq n_0,\quad \vec{A}_{n_0}\neq 0,\quad \overleftarrow{B}_n\neq 0,\quad n=1,2,\ldots$$

$$\int_0^b \psi_n^2(y)\,dy=\frac{2}{b}\int_0^b \sin^2\frac{\pi ny}{b}\,dy=\frac{2}{b}\frac{1}{2}\int_0^b\left(1-\cos\frac{2\pi ny}{b}\right)dy=\frac{1}{b}\int_0^b dy=1$$

$$u_n\left(x,y\right)=\vec{C}_n e^{i\gamma_n^{(2)}x}\psi_n\left(y\right)+\overleftarrow{D}_n e^{-i\gamma_n^{(2)}x}\psi_n\left(y\right)$$

$$\int_0^b\left\{\frac{\partial u}{\partial x}-i\gamma_n^{(2)}u\right\}\Big|_{x=a}\psi_n\left(y\right)dy=\left(i\vec{C}_n\gamma_n^{(2)}-i\vec{C}_n\gamma_n^{(2)}\right)e^{i\gamma_n a}\int_0^b\psi_n^2\left(y\right)dy+$$

$$+\left(-i\overleftarrow{D}_n\gamma_n^{(2)}-i\overleftarrow{D}_n\gamma_n^{(2)}\right)e^{-i\gamma_n a}\int_0^b\psi_n^2\left(y\right)dy=-2i\gamma_n^{(2)}\overleftarrow{D}_n=0\quad\Rightarrow$$

$$\vec{C}_n\neq 0,\quad \overleftarrow{D}_n=0,\quad n=1,2,...$$

$$\int_0^b\psi_n^2\left(y\right)dy=\frac{2}{b}\int_0^b\sin^2\frac{\pi ny}{b}dy=\frac{2}{b}\frac{1}{2}\int_0^b\left(1-\cos\frac{2\pi ny}{b}\right)dy=\frac{1}{b}\int_0^b dy=1$$

8) Прямые и обратные задачи электростатики

Как мы уже отмечали, в задачах электростатики решение уравнения Максвелла сводится к отысканию одной скалярной функции - потенциала φ, связанного с напряженностью поля соотношением

$$\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\varphi.$$

Используя уравнение Максвелла

$$\mathrm{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho,$$

получим

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho.$$

Таким образом, потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона в тех точках пространства, где находятся электрические заряды, и уравнению Лапласа, в тех точках, где зарядов нет.

Основная задача электростатики: отыскание поля, создаваемого системой зарядов на заданных проводниках. Возможны две постановки задачи: прямая и обратная.

1) Прямая задача электростатики. Задаются потенциалы проводников и требуется определить поле вне проводников и плотность зарядов на проводниках.

Математическая формулировка задачи состоит в следующем. Требуется найти функцию φ, удовлетворяющую уравнению Лапласа $\Delta\varphi = 0$ всюду вне заданной системы проводников, обращающуюся в нуль на бесконечности, и принимающую заданные значения φ_i на поверхностях проводников S_i : $\varphi\big|_{S_i} = \varphi_i$, $\varphi_i = \mathrm{const}$.

Таким образом, в случае решения прямой задачи электростатики мы приходим к решению первой краевой задачи для уравнения Лапласа. Единственность ее решения следует из общей теории.

2) Обратная задача электростатики. На проводниках задаются полные заряды. Требуется определить потенциалы проводников, распределение зарядов на их поверхности и поле вне проводников.

Решение обратной задачи сводится к отысканию функции φ, удовлетворяющей уравнению Лапласа $\Delta\varphi = 0$ вне заданной системы проводников, обращающейся в нуль на бесконечности, принимающей на поверхностях проводников некоторое постоянное значение $\varphi|_{S_i} = \text{const}$ и удовлетворяющей интегральному соотношению на поверхностях проводников

$\oint\limits_{S_i} \frac{\partial\varphi}{\partial n} d\sigma = -4\pi e_i$, где e_i – полный заряд на i- м проводнике.

3) Применение метода конформного преобразования в задачах электростатики

Для решения двумерных задач электростатики часто используются методы теории функций комплексной переменной.

Задача. Найти электрическое поле нескольких заряженных проводников, потенциалы которых равны $u_1, u_2, \ldots$

Математическая постановка задачи имеет следующий вид:

$$\Delta u = 0, \qquad u\big|_{S_i} = u_i,$$

где через S_i где обозначена поверхность проводника с номером *i*.

Если поле можно считать плоским, неменяющимся, например, вдоль оси Z, то постановка задачи принимает следующий вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \qquad u\big|_{C_i}=u_i,$$

где C_i – контур, ограничивающий область S_i.

Напомним некоторые факты из теории функций комплексной переменной.

Теорема. Если функция $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ дифференцируема в точке $z_0=x_0+iy_0$, то в точке (x_0,y_0) существуют частные производные функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$ по переменным x и y, причем имеет место соотношение – условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x}=\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y}=-\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}.$$

Если функция $f(z)$ дифференцируема во всех точках некоторой области G, а ее производная непрерывна в этой области, то функция $f(z)$ называется *аналитической функцией* в области G.

Отображение окрестности точки z_0 на окрестность точки w_0, осуществляемое аналитической функцией $w = f(z)$ и обладающее в точке z_0 свойством сохранения углов и постоянством растяжений, называется *конформным отображением*.

Теорема (взаимно-однозначное соответствие). Пусть функция $f(z)$ является однозначной аналитической функцией в области G, осуществляющей взаимно-однозначное отображение области G на область $\mathbf{G}$ комплексной плоскости w. Тогда это отображение является конформным.

Функция $u(x, y)$ называется *гармонической* в области D, если она дважды непрерывно дифференцируема в области D, удовлетворяет в ней уравнению Лапласа: $\Delta u = 0$.

Действительная и мнимая части аналитической функции являются гармоническими функциями, связанными между собой условиями Коши-Римана.

Необходимыми и достаточными условиями аналитичности функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ в области *G* является требование, чтобы функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ были гармоническими и удовлетворяли условиям Коши – Римана в соответствующей области плоскости x, y.

Для решения поставленной задачи будем искать потенциал $u(x, y)$ как мнимую часть некоторой аналитической функции

$$f(z) = v(x, y) + iu(x, y), \qquad (z = x + iy),$$

причем в силу условий Коши - Римана

$$v_x = u_y, \quad v_y = -u_x$$

и

$$v_x v_y + u_x u_y = 0.$$

Из граничного условия $u\big|_{C_i} = u_i$ следует, что функция $f(z)$ имеет постоянную мнимую часть на контурах C_i, ограничивающих наши проводники.

Из условий Коши-Римана вытекает, что уравнение

$$v(x, y) = \text{const}$$

представляет собой уравнение семейства силовых линий.

В самом деле, уравнение семейства силовых линий имеет вид

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y}.$$

Используя условия Коши-Римана, получим:

$$u_y dx - u_x dy = v_x dx + v_y dy = dv = 0 \quad \Rightarrow \quad v(x,y) = \text{const}.$$

Отметим, что уравнение

$$u(x,y) = \text{const}$$

определяет семейство эквипотенциальных линий.

Следовательно, для решения поставленной задачи достаточно построить конформное преобразование $w = f(z)$, которое переводит плоскость комплексного переменного $z = x + iy$ в плоскость $w = v + iu$, при котором границы проводников переходят в прямые $u = \text{const}$ или $\operatorname{Im} w = \text{const}$.

Если такая функция $w = f(z)$ найдена, то искомый потенциал находится по формуле

$$u = u(x,y) = \operatorname{Im} f(z).$$

Зная потенциал, можно вычислить электрическое поле:

$$E_x = -\frac{\partial u}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

и плотность поверхностных зарядов на единицу длины по оси z:

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}\sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2},$$

Которая в силу условий Коши-Римана равна

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}\left| f'(z) \right|.$$

5. Построение математических моделей на основе вариационных принципов

1) Вариационное исчисление

Функционалами называются переменные величины, значения которых определяются выбором одной или нескольких функций.

Например, функционалом является длина l дуги плоской или пространственной кривой, соединяющей две заданные точки $A(x_0, y_0)$ и $B(x_1, y_1)$.

Если задано уравнение кривой $y = y(x)$, то функционал будет иметь вид:

$$l\left[y(x)\right] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+(y')^2}\,dx.$$

Вариационное исчисление изучает методы, позволяющие находить максимальные и минимальные значения функционалов. Задачи, в которых требуется исследовать функционал на максимум или минимум, называются вариационными задачами.

Многие законы механики и физики сводятся к утверждениям, что некоторый функционал в рассматриваемом процессе должен достигать минимума или максимума. В такой формулировке эти законы носят название **вариационных принципов механики или физики.**

Многие дифференциальные детерминированные модели строятся исходя из того положения, что математические задачи, описывающие соответствующие физические процессы, при определенных условиях могут иметь две эквивалентные формулировки: в виде краевой задачи или в виде вариационной задачи.

Например, вариационная задача на нахождение минимума функционала

$$J\left[y(x)\right]=\int_{x_0}^{x_1} F\left(x, y(x), y'(x)\right)dx$$

на классе допустимых кривых с закрепленными концами: $y(x_0)=y_0, y(x_1)=y_1$ при определенных условиях эквивалентна следующей краевой задаче:

$$\begin{cases} F_x-\dfrac{d}{dx}F_{y'}=0, \quad x\in(x_0,x_1), \\ y(x_0)=y_0, \quad y(x_1)=y_1. \end{cases}$$

Уравнение $F_y-\dfrac{d}{dx}\left(F_{y'}\right)=0$ называется **уравнением Эйлера-Остроградского** и является **необходимым условием экстремума функционала** $J\left[y(x)\right]$.

2) Вариационный принцип

Мы получили дифференциальное уравнение, описывающее малые продольные колебания упругого стержня, используя теорему об изменении количества движения, то есть используя второй закон Ньютона в интегральной форме. Приведем теперь вывод того же уравнения, используя вариационный принцип.

Вариационный принцип. Если материальная система, находящаяся в поле внешних сил, характеризуется для любого момента времени t кинетической энергией $T(t)$ и потенциальной энергией $U(t)$, то переход её из состояния в момент времени t_1 в новое состояние в момент времени t_2 происходит так, что функционал

$$\Phi = \int_{t_1}^{t_2} \left(T(t) - U(t)\right) dt$$

имеет экстремальное значение.

Так как рассматривается случай малых колебаний, то при подсчете кинетической и потенциальной энергии членами высшего порядка малости можно пренебречь.

Кинетическая энергия ΔT малого участка стержня Δx равна (считаем, что в пределах малого участка все параметры сохраняют постоянное значение)

$$\Delta T = \frac{1}{2}\rho(x)\Delta x u_t^2(x,t).$$

Следовательно, кинетическая энергия всего стержня равна

$$T(t) = \frac{1}{2}\int_0^l \rho(x) u_t^2(x,t) dx.$$

Потенциальная энергия системы «стержень в поле внешних сил» U складывается из потенциальной энергии упругой деформации $U_{\text{у.д.}}$ и из работы A внешней силы:

$$U = U_{\text{у.д.}} - A.$$

Работа ΔA внешней силы, затраченная на перемещение малого элемента $\triangle x$ из состояния равновесия в состояние $u(x,t)$, равна

$$\triangle A = f(x,t) \triangle x\, u,$$

где $f(x,t)$ – плотность распределения внешней силы в момент времени t.

Полная работа A внешней силы записывается следующим образом:

$$A(t) = \int\limits_0^l f(x,t)\, u(x,t)\, dx.$$

Подсчитаем энергию упругой деформации. Выделим малый участок стержня длиной $\triangle x$, считая, что в пределах данного участка коэффициент упругости является постоянным $k(x) = k_0$. На участок $\triangle x$ со стороны соседнего элемента действует сила упругого напряжения F , равная $F = \varepsilon k_0$, где ε – относительное удлинение элемента $\triangle x$. При перемещении элемента $\triangle x$ на расстояние δ будет совершена работа

$$\triangle U_{\text{у.д.}} = k_0 \varepsilon \delta.$$

С перемещением на расстояние δ связано изменение относительного удлинения ε на величину $\triangle \varepsilon$, причем

$$\triangle \varepsilon = \frac{\delta}{\triangle x}.$$

Следовательно, $\delta = \vartriangle \varepsilon \vartriangle x$ и

$$\vartriangle U_{\text{у.д.}} = k_0 \vartriangle x \varepsilon \vartriangle \varepsilon.$$

Проинтегрировав последнее равенство от 0 до ε, получаем выражение для энергии упругой деформации, которой обладает выделенный элемент:

$$dU_{\text{у.д.}} = \int\limits_0^{\varepsilon} k_0 \vartriangle x \varepsilon d\varepsilon = \frac{1}{2} k_0 \varepsilon^2 \vartriangle x.$$

Рассмотрим теперь неоднородный стержень с коэффициентом упругости $k(x)$ и применим последнюю формулу для бесконечно малого элемента dx, учитывая, что $\varepsilon = u_x(x,t)$:

$$dU_{\text{у.д.}} = \frac{1}{2} k(x) u_x^2(x,t) dx.$$

Составим функционал

$$\Phi[u]=\int_{t_1}^{t_2}\int_0^l\left(\frac{1}{2}\rho(x)u_t^2-\frac{1}{2}k(x)u_x^2+f(x,t)u\right)dxdt.$$

Выпишем для данного функционала уравнение Эйлера-Остроградского, которое является необходимым условием экстремума функционала

$$\left(F_{u_t}\right)_t+\left(F_{u_x}\right)_x-F_u=0,$$

где

$$F=F(u,u_t,u_x)=\frac{1}{2}\rho u_t^2-\frac{1}{2}ku_x^2+fu.$$

Вычисляя входящие в формулу производные, получим уравнение Эйлера-Остроградского для функционала $\Phi[u]$, описывающее малые продольные колебания упругого стержня:

$$\rho u_{tt}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+f(x,t).$$

Выражение в левой части последнего уравнения описывает силы инерции, первое слагаемое в правой части-упругое взаимодействие, а второй член в правой части-действие внешней силы.

Если стержень однородный и его линейная плотность и коэффициент упругости постоянны: $\rho(x)=\rho_0, k(x)=k_0$, то уравнение, описывающее малые продольные колебания стержня, имеет вид

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+\overline{f},$$

где

$$a^2=\frac{k_0}{\rho_0},\quad \overline{f}=\frac{1}{\rho_0}f.$$