Московский Государственный Университет им. М.В.Ломоносова

Физический факультет

Типичные ошибки при решении задач математического анализа.
1 семестр

М.Г. Токмачев

Москва, 2011

Типичные ошибки при решении задач математического анализа. 1 семестр

М.Г. Токмачев

И заблуждение бывает полезно, пока мы молоды,
не следует лишь таскать его с собой до старости.
И.В.Гёте

Основная часть настоящего пособия написана студентами Физфака МГУ за несколько последних лет. Коллективными усилиями они выявили наиболее типичные ошибки при решении задач математического анализа. Только те просчеты, которые случались не менее трех раз, имеют честь быть представленными здесь. Как говорится, не ошибается тот, кто ничего не делает. Поэтому предшествующие поколения студентов своим нелегким трудом и связанным с ним неизбежными ошибками попытались облегчить жизнь своим последователям, дав им возможность учиться на чужих промахах. Автору пособия оставалось только составить рейтинг типичных ошибок, попытаться их систематизировать и отобрать наиболее поучительные.

Разбор каждой ошибки начинается с набора минимальных теоретических знаний о той области математического анализа, где она была совершена. Затем приводится описание самой ошибки, объяснение ее природы и вариант правильного решения злополучной задачи. Кроме того, читателю рекомендуется самостоятельно решить еще пару подобных задач уже самостоятельно и свериться с приводимым ответом. Если чувствуется необходимость получения дополнительной информации по рассматриваемому разделу математического анализа, то можно воспользоваться учебником Бутузова В.Ф. и др «Математический анализ в вопросах и задачах», Москва, 2008.

Резюмируя вышесказанное: все типовые ошибки выделены курсивом, поэтому НЕ ИСПОЛЬЗУЙТЕ в своей практической деятельности преобразования, умозаключения, определения и постулаты, отображенные *курсивом* в настоящем пособии. И все будет хорошо.

Вперед, коллеги!

Вещественные числа

Метод математической индукции

Немного теории.

Пусть требуется доказать истинность последовательности утверждений. Тогда одним из способов доказательства является метод математической индукции, суть которого заключается в следующем. Доказательство проводится в 3 шага. Вначале проверяют истинность первого утверждения. Этот шаг называется базой. На втором шаге предполагают истинность n-ого утверждения, где $n \in \mathbb{N}$. Третий шаг называется индукционным переходом (или шагом индукции). В процессе его требуется доказать истинность (n+1) утверждения, опираясь на истинность n-ого утверждения.

<u>**Типовая ошибка 1.**</u> Использование символа, уже присвоенного другой переменной или константе.

Следует отметить, что это лидер в хит-параде ошибок. Причина проста: хочется побыстрее решить задачу, и объяснимая поспешность сводит на нет все затраченные усилия. Статистика утверждает, что впоследствии многие студенты занимаются программированием или в качестве основной профессии, или используя это как прикладное средство. Замените знак равенства на знак присваивания, и Вы уже программист, а там за такую же ошибку будет карать бездушная «железяка», причем ничего не сообщая о характере ошибки. Преподаватель уже укажет на конкретную ошибку, но может поставить незачет, поэтому самый лучший метод - это изучить чужие просчеты и больше не повторять их.

Задача 1.1: доказать, что $\sum_{k=1}^{n} k \cdot C_n^k = n \cdot 2^{n-1}$

Если доказывать по индукции (в три шага – проверка базы, предположение, следствие), то база – очевидна:

<u>База:</u>

при $n = 1$ равенство превращается в тождество.

Левая часть: $\sum_{k=1}^{1} k \cdot C_n^k = 1 \cdot C_n^1 = 1 \cdot n = 1$

Правая часть: $n \cdot 2^{n-1}\Big|_{n=1} = 1 \cdot 2^0 = 1$

Предположение и следствие нужно делать корректно. (см. ниже, где курсивом выделено некорректное утверждение)

<u>Предположение:</u>

<u>Неверно:</u> при $n = k$ *имеем* $\sum_{k=1}^{k} k \cdot C_k^k = k \cdot 2^{k-1}$ *(переменная суммирования и граница обозначаются одной и той же буквой k)*

<u>Верно:</u> при $n = m$ (т.к. переменная k уже занята) $\sum_{k=1}^{m} k \cdot C_m^k = m \cdot 2^{m-1}$

Шаг индукции:

Неверно: при $n = m+1$ *нужно доказать, что* $\sum_{k=1}^{m+1}(m+1)\cdot C_n^{m+1} = n\cdot 2^{n-1}$.

Здесь $m+1$ является постоянным числом, под знаком суммы ничего не зависит от k, поэтому сумма слева от знака равенства состоит из $m+1$ одинаковых членов.

Неверно (другой вариант неверного рассуждения):

$$\text{при } n = m+1 \quad \begin{aligned} &\sum_{k=1}^{m+1} k\cdot C_{m+1}^{k} = \sum_{k=1}^{m+1} k\cdot \frac{m!\cdot(m+1)}{k!\cdot(m-k)!\cdot(m+1-k)} = \\ &= \sum_{k=1}^{m+1} k\cdot \frac{m!}{k!\cdot(m-k)!}\cdot \sum_{k=1}^{m+1}\frac{m+1}{m+1-k} = \dots \end{aligned}$$

Здесь ошибка заключается в последнем равенстве, т.к. в общем случае сумма произведения не равна произведению сумм, например $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k\cdot k \neq \sum_{k=1}^{n} k\cdot \sum_{k=1}^{n} k = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$, или $5 = 1\cdot 1 + 2\cdot 2 \neq (1+2)\cdot(1+2) = 9$, а это значит, что последняя операция присваивания – некорректна.

Примечание: возможный вариант решения этой задачи приведен ниже.

Сначала заметим, что $\sum_{k=1}^{n} k\cdot C_n^k = \sum_{k=0}^{n} k\cdot C_n^k = \sum_{k=0}^{n} k\cdot C_n^{n-k}$ (1).

При этом мы воспользовались свойством биномиальных коэффициентов: $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Мы получили сумму, состоящую из конечного числа слагаемых, а значит, результат не изменится, если слагаемые суммировать в другом порядке – справа налево. Тогда $\sum_{k=0}^{n} k\cdot C_n^k = \sum_{k=0}^{n} k\cdot C_n^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (n-k)\cdot C_n^k$ (2)

Сложив приведенные выше равенства (1) и (2), получим

$$2\cdot\sum_{k=1}^{n} k\cdot C_n^k = \sum_{k=0}^{n} k\cdot C_n^k + \sum_{k=0}^{n}(n-k)\cdot C_n^k = \sum_{k=0}^{n}\left(k\cdot C_n^k + (n-k)\cdot C_n^k\right) = \sum_{k=0}^{n}(k+n-k)\cdot C_n^k =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} n\cdot C_n^k = n\cdot\sum_{k=0}^{n} C_n^k = n\cdot(1+1)^n = n\cdot 2^n$$

Поделив полученную цепочку равенств на 2, получим требуемое утверждение.

Предпоследнее равенство получено на основании известной биномиальной формулы: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\cdot a^k\cdot b^{n-k}$, в которую подставили $a = b = 1$

Ниже разбирается еще один пример (Задача 1.2) на типовое использование метода математической индукции.

Задача 1.2. Доказать, что для любого натурального n, большего 2, верно, что $n^{n+1} > \left(n+1\right)^n$**.**

<u>База</u>: проверим, что для n=3 утверждение верно: $3^4 = 81 > 4^3 = 64$

<u>Предположение</u>: пусть для n=k утверждение верно, т.е. $k^{k+1} > \left(k+1\right)^k$

<u>Следствие</u>: докажем, что для n=$k+1$ утверждение тоже верно, а именно, что $\left(k+1\right)^{k+2} > \left(k+2\right)^{k+1}$. Для этого перепишем искомое утверждение в следующем виде: $\left[\frac{k+1}{k+2}\right]^k > \frac{k+2}{\left(k+1\right)^2}$.

Заметим, что т.к. $\frac{1}{k+2} < \frac{1}{k+1}$ для любого натурального k, то $\frac{k+1}{k+2} = 1 - \frac{1}{k+2} > 1 - \frac{1}{k+1} = \frac{k}{k+1}$. А значит верно, что $\left[\frac{k+1}{k+2}\right]^k > \left[\frac{k}{k+1}\right]^k$. Кроме того, поделив неравенство из Предположения на $k \cdot \left(k+1\right)^k$, получим: $\left[\frac{k}{k+1}\right]^k > \frac{1}{k}$. Заметим также, что $1 > \frac{k^2+2k}{k^2+2k+1} = \frac{k\left(k+2\right)}{\left(k+1\right)^2}$. Откуда следует (после деления на k): $\frac{1}{k} > \frac{k+2}{\left(k+1\right)^2}$.

Резюмируя вышесказанное, можно выписать следующую цепочку неравенств:

$\left[\frac{k+1}{k+2}\right]^k > \left[\frac{k}{k+1}\right]^k > \frac{1}{k} > \frac{k+2}{\left(k+1\right)^2}$. Таким образом, искомое утверждение доказано.

Задачи 1.3 – 1.4 предлагаются для самостоятельного решения.

Задача 1.3. Найти ошибку в следующем доказательстве утверждения: все существующие в природе люди обладают ростом выше 1 м 80 см.

Доказательство: (База) Я сам – выше 1 м 80 см. (Предположение) Пусть для множества, содержащего k человек, верно, что они все выше 1 м 80 см. (Следствие) Докажем, что множество из (k+1) человека тоже не содержит людей маленького роста (т.е. меньше 180 см). Для этого из выбранного множества, содержащего (k+1) человека, удалим одного человека. Множество из оставшихся k человек не содержит людей маленького роста по Предположению. Далее, вернем в рассмотрение исключенного человека, и исключим из рассмотрения другого, т.е. рассмотрим снова множество из k человек, являющееся подмножеством исходного множества. По Предположению оно *также не содержит людей маленького роста. Таким образом, в рассматриваемом множестве, содержащем (k+1) человека, нет людей маленького роста. В силу произвольности выбранного множества из (k+1) человека любое множество людей не содержит ни одного человека маленького роста, что означает, что людей маленького роста в природе не существует.* ☺

Задача 1.4. Доказать, что среднее геометрическое *n* неотрицательных чисел не превосходит их среднего арифметического, т.е. $\sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n} \le \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$.

Предел последовательности

Немного теории

Начнем с определений. Последовательностью называется соответствие между множеством натуральных чисел и неким множеством *X*.

Число *b* называется пределом последовательности, если для любого положительного числа ε найдется такой номер *N*, что для любого члена последовательности с номером, большим чем *N*, будет верно неравенство $|x_n - b| < \varepsilon$.

Последовательность называется сходящейся, если она имеет предел. Последовательность является расходящейся, если она не имеет предела. Последовательность называется бесконечно большой (б.б. последовательность), если $\forall A \in \mathbb{R}\ \exists B \in \mathbb{R}:\ \forall n > B \Rightarrow |x_n| > A$.

<u>Примечание:</u> расходящаяся последовательность – эта последовательность, не имеющая предела, а не бесконечно большая последовательность. Таким образом, любая б.б. последовательность является расходящейся. Обратное – неверно.

Функцией называется закон, согласно которому каждому элементу множества *X* ставится в соответствие единственный элемент множества *Y* (указанные множества называются множеством определения функции и множеством значений функции, соответственно).

Число *b* называется пределом функции $f(x)$ в точке $x = a$, если точка *a* является предельной точкой области определения функции, и для любой сходящейся к *a* последовательности значений аргумента *x*, такой, что $x_n \ne a$, соответствующая последовательность значений функции $f(x_n)$ сходится к *b*.

<u>Теорема:</u> Пусть $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой окрестности точки a, кроме, быть может, самой точки a, и $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\exists \lim\limits_{x\to a} g(x)$, тогда $\exists \lim\limits_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big)$, $\exists \lim\limits_{x\to a}\big(f(x)-g(x)\big)$, $\exists \lim\limits_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big)$, и если $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$, то $\exists \lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)$.

<u>Типовая ошибка 2.</u> Некорректное использование теорем о пределе суммы, произведения и частного. Не следует забывать, что теорема верна, только если верны ВСЕ условия теоремы без единого исключения.

Эту ошибку делал каждый второй. Ваше дело решать, в какой половине Вы хотите оказаться при сдаче зачета.

Задача 2.1: найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+...+n}{n^2}$

<u>Неверно:</u> согласно теореме, предел суммы есть сумма пределов, поэтому
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+...+n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}+...+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}=0+0+...+0=0$$

<u>Верно:</u> указанная выше теорема верна лишь для двух слагаемых (в общем случае ее можно обобщить на конечное количество слагаемых), поэтому предел надо считать по-другому, например, используя формулу суммы арифметической прогрессии:
$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+...+n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot(n+1)/2}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2\cdot n^2}$$

Здесь уже теорема о пределе суммы применима, так как слагаемых всего два. Поэтому смело переходим к сумме пределов:
$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2\cdot n^2}+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2\cdot n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\cdot n}=\frac{1}{2}+0=\frac{1}{2}$$

Задача 2.2: известно, что $\{x_n\}$ - сходящаяся последовательность, а $\{y_n\}$ - расходящаяся последовательность. Что можно сказать о сходимости последовательностей $\{x_n\pm y_n\}$, $\{x_n\cdot y_n\}$, $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$?

<u>Неверно:</u> согласно теореме о пределе суммы, произведения и частного рассматриваемые комбинации сходящейся и расходящейся последовательностей будут расходящимися последовательностями.

<u>Верно:</u> расходящимися являются лишь $\{x_n\pm y_n\}$, а про сходимость остальных последовательностей ничего сказать нельзя.

Например, допустим, что последовательность $\{z_n\} = \{x_n + y_n\}$ - сходится, тогда по теореме о разности сходящихся последовательностей последовательность $\{y_n\} = \{z_n - x_n\}$ тоже сходится, что противоречит условию задачи. Следовательно, последовательность $\{x_n + y_n\}$ расходится. Аналогично доказывается утверждение и для разности последовательностей.

Ниже приведены примеры, показывающие, что о сходимости последовательностей $\{x_n \cdot y_n\}$, $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ ничего сказать нельзя:

А) Если $x_n = 0$, $y_n = n$, то $\{x_n\}$ - сходится, а $\{y_n\}$ - расходится, при этом $\{x_n \cdot y_n\} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ и $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, т.е. произведение и частное рассматриваемых последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ являются сходящимися последовательностями;

Б) Если $x_n = 1$, $y_n = (-1)^n$, то $\{x_n\}$ - сходится, а $\{y_n\}$ - расходится, при этом $x_n \cdot y_n = \frac{x_n}{y_n} = (-1)^n$, т.е. произведение и частное рассматриваемых последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ являются расходящимися последовательностями.

Задача 2.3: известно, что $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ - расходящиеся последовательности. Что можно сказать о сходимости последовательностей $\{x_n \pm y_n\}$, $\{x_n \cdot y_n\}$, $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$?

Неверно: *согласно теореме о пределе суммы, произведения и частного рассматриваемые комбинации расходящихся последовательностей дадут расходящиеся последовательности.*

Верно: нельзя сделать однозначный вывод о сходимости (или расходимости) любой из рассматриваемых комбинаций исходных последовательностей.

Примеры:

Если $x_n = (-1)^n$, $y_n = -(-1)^n$, то $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ - расходятся, а $\{x_n + y_n\}$ - сходится: при этом $x_n + y_n = 0 \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

Если $x_n = (-1)^n$, $y_n = (-1)^n$, то $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ - расходятся, а $\{x_n - y_n\}$, $\{x_n \cdot y_n\}$, $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ - сходятся: $x_n - y_n = 0 \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, $x_n \cdot y_n = \dfrac{x_n}{y_n} = 1 \underset{n\to+\infty}{\to} 1$.

Если $x_n = n^2$, $y_n = n$, то $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ - расходятся, и при этом $\{x_n \pm y_n\}$, $\{x_n \cdot y_n\}$ и $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ - также расходятся: $\{x_n \pm y_n\} = \left(n^2 \pm n\right) \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$, $\{x_n \cdot y_n\} = n^3 \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$, $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\} = n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$.

Непрерывные и дифференцируемые функции

Немного теории

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если она определена в некоторой окрестности точки x_0 и при этом предел функции в точке равен значению функции в этой точке, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Приращением функции в точке x_0 называется следующая функция аргумента Δx:
$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, если он существует. Производная обозначается одним из следующих способов y'; y_x; $\dfrac{dy}{dx}$; $\dot{y}$.

__**Повторение типовой ошибки 1.**__

Эта ошибка была подробно рассмотрена в разделе «Вещественные числа». Однако такой тип ошибок возможен и в других разделах, в частности, при изучении функций. Наиболее последовательные и упрямые студенты повторяли ее несколько раз за семестр, доказательство чему – приведенная ниже задача, нумерация которой соответствует номеру типовой ошибки 1.

Задача 1.5. Разложить по формуле Маклорена $\sin x$ до (2*n*+1)-ого члена.

__Неверно:__ как известно, любую непрерывную функцию можно разложить в сходящийся ряд Тейлора в окрестности точки x_0, т.е. $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\left[x - x_0\right]^k + o\left(\left(x - x_0\right)^k\right)$. *Такое разложение в окрестности точки $x_0=0$*

называется разложением Маклорена. Таким образом, вычисляя производные синуса в нуле, получаем следующее разложение: $\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{[2k+1]!} \cdot x^{2k+1} + o\left(x^{2k+1}\right)$.

Пояснение: Если раскрыть знак суммы, то написанное выше разложение будет выглядеть так: $\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2k+1}\right)$. Из последнего равенства видно, что индекс k – «самозванец», т.к. он был введен в формулу как переменная суммирования. Индекс n был задан в условии.

Верно: $\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{[2k+1]!} \cdot x^{2k+1} + o\left(x^{2n+1}\right)$

Комментарий: следует отметить, что в ряд Тейлора можно раскладывать не любые, а лишь достаточно гладкие функции, в частности функцию $y=|x|$ в окрестности точки $x_0=0$ нельзя разложить в ряд Тейлора, т.к. у нее в этой точке не существует даже первая производная.

Типовая ошибка 3. Ошибочное вычисление пределов функций с помощью формул асимптотических разложений.

Как порой хочется применить правило Лопиталя или другой удобный приём, придуманный великими математиками прошлого и облегчающий жизнь студента. Однако какой-нибудь недружественный аргумент или член ехидно дожидается стандартной ошибки, бесконечно много раз совершаемой при обращении с «бесконечно малыми». «Зри в корень», - © Козьма Прутков.

Задача 3.1: найти предел $\lim_{x\to\pi} \frac{\sin(9\cdot x)}{\sin(10\cdot x)}$

Неверно: *т.к. этот предел представляет собой неопределенность типа «0/0», т.е. и в числителе, и в знаменателе стоят бесконечно малые функции при* $x \to \pi$*, то для вычисления предела используем асимптотическое разложение синуса, а также свойства символа “о-малое”:* $\lim_{x\to\pi} \frac{\sin(9\cdot x)}{\sin(10\cdot x)} = \lim_{x\to\pi} \frac{9\cdot x + o(9\cdot x)}{10\cdot x + o(10\cdot x)} = \lim_{x\to\pi} \frac{9 + o(x)/x}{10 + o(x)/x} = \frac{9}{10}$

Верно: написанные выше асимптотические разложения функций $\sin 9x$ и $\sin 10x$ есть разложения по формуле Маклорена с остаточным членом в форме Пеано. Они верны лишь при $x \to 0$. Поэтому, чтобы ими воспользоваться, нужно перейти к аргументу, стремящемуся к нулю, положив $x = \pi - y$, и воспользоваться формулами приведения:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(9\cdot x)}{\sin(10\cdot x)}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin(9\cdot(\pi-y))}{\sin(10\cdot(\pi-y))}\bigg|_{y=\pi-x}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin(\pi-9\cdot y)}{\sin(-10\cdot y)}=$$

$$=-\lim_{y\to 0}\frac{\sin(9\cdot y)}{\sin(10\cdot y)}=-\lim_{y\to 0}\frac{9\cdot y+o(9\cdot y)}{10\cdot y+o(10\cdot y)}=-\lim_{y\to 0}\frac{9+o(y)/y}{10+o(y)/y}=-\frac{9}{10}$$

<u>Типовая ошибка 4.</u> Ошибки, связанные с неправильным восприятием определений.

Математика – точная и строгая наука. Если в определении есть какая-нибудь “закорючка”, то она там не для украшения текста, а обязательно несет в себе конкретный сухой и однозначный смысл, без которого определение становится двусмысленным, а то и вовсе “недоразвитым”. Сочувствую, сам страдал от сухости определений, но единственный путь к успеху – это понять точный математический смысл всех составляющих определения. Канадский хоккейный принцип: «Вбросил шайбу в зону, а дальше разберемся», - здесь не работает.

4.1. <u>Определение ограниченной функции</u>

<u>*Неверно:*</u> *Функция f(x) называется ограниченной на множестве X, если найдется такое число A, что* $\forall x \in X:\ f(x) \le A$.

<u>Контрпример:</u> $f(x)=-x^2,\ x\in\mathbb{R}$.

<u>Комментарий:</u> следует отметить, что написанное выше определение задает функции, ограниченные сверху на множестве *X*. Функция называется ограниченной на множестве, если она ограниченна и сверху и снизу!

<u>Верно:</u> функция *f(x)* называется ограниченной на множестве X, если найдется такое число *A>0*, что $\forall x \in X:\ |f(x)| \le A$.

4.2. <u>Определение неограниченной функции</u>

<u>*Неверно:*</u> *Функция f(x) называется неограниченной, если для любых чисел M и m* $\exists x_1, x_2 \in D(f)$*:* $f(x_1)<M$ *и* $f(x_2)>m$*, где M и m – верхняя и нижняя грани соответственно.*

<u>Пояснение:</u> по определению верхняя грань функции на множестве X есть такое число *M*, что $\forall x \in X:\ f(x) \le M$.

<u>Верно:</u> Функция f(x) называется неограниченной на множестве X, если для любого числа M $\exists x \in X:\ |f(x)| > M$.

4.3. Определение дифференцируемости функции

Неверно: Функция f(x) дифференцируема на множестве X, если $\forall x \in D(f)$ *приращение функции можно представить в виде* $\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$*, где A = const, не зависящая от x, а* α *- бесконечно малая функция.*

Пояснение: подобные определения характерны для описания производной функции в точке, а в данном определении для разных точек *A* будет различна, так что *A=A(x₀)*.

Верно для внутренней точки x_0 области определения функции *f(x)*: функция *f(x)* дифференцируема во внутренней точке $x_0 \in D(f)$, если $\forall x \in D(f)$ приращение функции $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ можно представить через приращение аргумента $\Delta x = x - x_0$ в виде $\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$, где A = const, не зависящая от Δx, а α - бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$.

Верно для открытого множества (т.е. множества, у которого все точки являются внутренними): функция *f(x)* дифференцируема на открытом множестве *X*, если она дифференцируема в каждой точке множества *X*.

4.4. Определение бесконечно малой (б.м.) последовательности

Неверно: последовательность $\{x_n\}$ *- б.м., если* $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n \in \mathbb{N} : \forall k \in \mathbb{N} \ \ |x_n - x_k| < \varepsilon$.

Контрпример: если $x_n = 1$, то разность двух любых членов последовательности равна нулю. При этом последовательность не является б.м.

Верно: последовательность $\{x_n\}$ - б.м., если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

4.5. Определение возрастания функции в точке

Неверно: функция $f(x)$ *возрастает в точке x₀, если* $\exists \delta > 0 : \ \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow f(x) > f(x_0)$

Контрпример: $y = x^2, x \in [-1, 1], x_0 = 0$ - удовлетворяет написанному условию, однако не является возрастающей в точке $x_0 = 0$.

Верно: функция $f(x)$ возрастает в точке x₀, если $\exists \delta > 0 : \ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow \begin{cases} f(x) > f(x_0), \text{при } x > x_0 \\ f(x) < f(x_0), \text{при } x < x_0 \end{cases}$

4.6. Необходимое условие экстремума

Неверно: если функция $f(x)$ *имеет экстремум в точке* x_0*, то* $\dfrac{df}{dx}(x_0)=0$

Контрпример: $y=|x|,\ x\in[-1,1],\ x_0=0$; x_0 является точкой минимума, но $\dfrac{dy}{dx}$ в точке $x_0=0$ не существует.

Неверно: функция $f(x)$ *имеет экстремум в точке* x_0*, если* $\dfrac{df}{dx}(x_0)=0$ *или производной функции* $f(x)$ *в точке* x_0 *не существует.*

Контрпример: $y=x^3,\ x\in[-1,1],\ x_0=0$ - при этом x_0 не является точкой экстремума.

Верно: если в точке x_0 функция $f(x)$ имеет экстремум, то $\dfrac{df}{dx}(x_0)=0$ либо производная функции $f(x)$ в точке x_0 не существует.

4.7. Формулировка теоремы Коши

Неверно: если функции $f(x)$ *и* $g(x)$ *дифференцируемы на* $[a,b]$ *и* $g'(x)$ *отлична от 0, то* $\exists\xi\in(a,b)$: $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

Комментарий: функция отлична от 0, если она не равна нулю хотя бы в одной точке своей области определения.

Верно: если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a,b]$, дифференцируемы на (a,b) и $g'(x)\neq 0\ \forall x\in(a,b)$, то $\exists\xi\in(a,b)$: $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

Дифференциалы

Немного теории

Дифференциалом или первым дифференциалом независимой переменной x в точке x_0 называется приращение этой переменной, т.е. $dx=\Delta x=x-x_0$. Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Дифференциалом функции $y=f(x)$ в точке x_0 называется линейная часть приращения функции в этой точке, т.е. $dy\big|_{x=x_0}=f'(x_0)\cdot dx$.

Пусть $f'(x)$ существует в окрестности точки x_0 и дифференцируема в точке x_0. Второй дифференциал d^2y функции $y=f(x)$ определяется как дифференциал первого дифференциала, т.е. $d\left(dy\right)$, при этом второй дифференциал независимой переменной по определению тождественно равен нулю, а при вычислении дифференциала от $f'(x)$ приращение Δx независимой переменной x берется таким же, как и в выражении для dy, т.е. $\Delta x = dx$. Таким образом,

$$d^2 y = d\left(dy\right) = d\left(f'(x)\cdot dx\right)\Big|_{x=x_0} = d\left(f'(x)\right)\Big|_{x=x_0}\cdot dx = \frac{df'}{dx}\left(x_0\right)\cdot\left(dx\right)^2 = \frac{d^2 f}{dx^2}\left(x_0\right)\cdot dx^2 .$$

Дифференциал n-ого порядка определяется по формуле $d^n y = d\left(d^{n-1}y\right)$.

Типовая ошибка 5. Неряшливая запись порядка дифференциалов. Будьте, пожалуйста, внимательны. В частности, не путайте квадрат первого дифференциала со вторым дифференциалом.

Задача 5.1: вычислить интеграл $\int 2x\cdot dx$

Не совсем верно: $\int 2x\cdot dx = \int dx^2 = x^2 + const$

Пояснение: интеграл вычислен верно, однако запись решения может быть понята неоднозначно как самим автором в сложных расчетах, так и другими людьми, поэтому желательно различать следующие дифференциалы:

$dx^2 = \left(dx\right)^2$ - квадрат первого дифференциала переменной x;

$d\left(x^2\right)$ - первый дифференциал функции $y = x^2$;

d^2x - второй дифференциал переменной x. Если переменная x - независима, то он равен нулю.

В самом обозначении интеграла подынтегральная функция всегда должна умножаться обязательно на первый дифференциал переменной или функции.

Верно: $\int 2x\cdot dx = \int d\left(x^2\right) = x^2 + const$

Задача 5.2: требуется вычислить первый дифференциал сложной функции $y = f\left(x\right)$**, где** $x = g\left(t\right)$

Неверно: $dy = f_x\cdot dx\cdot x_t\cdot dt$, *т.к. слева стоит первый дифференциал, а справа – произведение первых дифференциалов, т.е. аналог второго дифференциала.*

Верно: $dy = f_x\cdot dx = f_x\cdot x_t\cdot dt$

Комментарий: При вычислении дифференциалов от функций следует помнить, что результатом должна являться линейная комбинация дифференциалов аргумента такого же порядка. Например, второй и третий дифференциалы рассматриваемой функции будут равны:

$$d^2y = d\left(f_x \cdot dx\right) = f_{xx} \cdot dx^2 + f_x \cdot d^2x$$

$$d^3y = d\left(f_{xx} \cdot dx^2 + f_x \cdot d^2x\right) = f_{xxx} \cdot dx^3 + f_{xx} \cdot d\left(dx^2\right) + f_{xx} \cdot dx \cdot d^2x + f_x \cdot d^3x =$$
$$= f_{xxx} \cdot dx^3 + 3f_{xx} \cdot dx \cdot d^2x + f_x \cdot d^3x$$

Интегралы

Метод замены переменной (МЗП)

Немного теории

МЗП в неопределенном интеграле можно выразить следующей формулой $\int f\left(x\right)dx\Big|_{x=x(t)} = \int f\left(x\left(t\right)\right) \cdot \dfrac{dx}{dt} \cdot dt = \int f\left(x\left(t\right)\right) \cdot x_t \cdot dt$.

МЗП в определенном интеграле отражает следующая теорема:

<u>Теорема:</u> Пусть $f\left(x\right)$ определена и непрерывна на $\left[a,b\right]$ и пусть функция $x = g\left(t\right)$ определена и непрерывна вместе со своей производной на $\left[\alpha,\beta\right]$, где $g\left(\alpha\right) = a$, $g\left(\beta\right) = b$ и $a \le g\left(t\right) \le b$. Тогда справедлива формула $\int\limits_a^b f\left(x\right)dx = \int\limits_\alpha^\beta f\left(g\left(t\right)\right)g'\left(t\right)dt$

<u>**Типовая ошибка 6.**</u> Жонглирование аргументами при проведении замены переменных в интеграле. Универсальная фраза «От перемены мест слагаемых сумма не меняется» работает не везде.

Задача 6.1: требуется вычислить интеграл $I = \int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} x \cdot \cos x \cdot dx$.

<u>*Неверно:*</u> $I = \int\limits_{\arcsin(\pi/6)}^{\arcsin(\pi/2)} x \cdot d\left(\sin x\right) = x \cdot \sin x\Big|_{0.5}^{1} - \int\limits_{0.5}^{1} \sin x \cdot dx = \left(x \cdot \sin x + \cos x\right)\Big|_{0.5}^{1} = \ldots$

<u>Пояснение:</u> ошибка в том, что замены переменной не было, поэтому пределы интегрирования были изменены неправильно.

<u>Верно:</u> $I = \int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} x \cdot d\left(\sin x\right) = x \cdot \sin x\Big|_{\pi/6}^{\pi/2} - \int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \sin x \cdot dx = \left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{12}\right) + \cos x\Big|_{\pi/6}^{\pi/2} = \dfrac{5\pi}{12} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

<u>Комментарий:</u> ошибку можно обнаружить, если рассуждать немного по-другому, а именно: для вычисления определенного интеграла вычислим сначала неопределенный

интеграл, а потом воспользуемся формулой Ньютона-Лейбница, т.е. $\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$, где $F(x)$ – любая первообразная функции $f(x)$. Таким образом $J = \int x \cdot \cos x \cdot dx = \int x \cdot d(\sin x) = x \cdot \sin x - \int \sin x \cdot dx = x \cdot \sin x + \cos x + const$, откуда легко вычислить искомый интеграл:

$$I = J\Big|_{\pi/6}^{\pi/2} = (x \cdot \sin x + \cos x)\Big|_{\pi/6}^{\pi/2} = \left(\frac{\pi}{2} \cdot \sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{\pi}{6} \cdot \sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6}\right) = \frac{5\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Задача 6.2: вычислить интеграл $I = \int \sqrt{x^2 - 1} \cdot dx$, сделав замену $x = \dfrac{1}{\sin t}$.

В случае указанной замены переменной $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$. В процессе выполнения замены переменной необходимо корректно посчитать дифференциал переменной t.

<u>*Неверно:*</u> $dt = \dfrac{-\cos t}{\sin^2 t} \cdot dx$

<u>Верно:</u> $dx = \dfrac{-\cos t}{\sin^2 t} \cdot dt$

Сначала в соответствии с заменой переменной преобразуем подынтегральное выражение:

$$I = \int \sqrt{x^2 - 1} \cdot dx\Big|_{x = 1/\sin t} = \int \sqrt{\frac{1}{\sin^2 t} - 1} \cdot \frac{-\cos t}{\sin^2 t} \cdot dt = \int \sqrt{\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}} \cdot \frac{-\cos t}{\sin^2 t} \cdot dt = -\int \frac{\cos t}{\sin t} \cdot \frac{\cos t}{\sin^2 t} \cdot dt$$

Далее, заменой $z = \cos t$ переменной преобразуем подынтегральную функцию к частному двух многочленов, а именно:

$$I = -\int \frac{\cos^2 t}{\sin^3 t} dt = -\int \frac{\cos^2 t}{\sin^3 t} \cdot \frac{\sin t}{\sin t} dt = \int \frac{\cos^2 t}{\left(\sin^2 t\right)^2} \cdot d(\cos t) = \int \frac{\cos^2 t}{\left(1 - \cos^2 t\right)^2} \cdot d(\cos t)\Bigg|_{z = \cos(t)} = \int \frac{z^2}{\left(1 - z^2\right)^2} \cdot dz$$

Теперь воспользуемся стандартным приемом вычисления интеграла от рациональной функции – методом неопределенных коэффициентов:

$$I = \int \frac{z^2}{\left(1 - z^2\right)^2} \cdot dz = \int \frac{z^2}{(1 - z)^2 \cdot (1 + z)^2} \cdot dz = \int \left(\frac{A}{z - 1} + \frac{B}{z + 1} + \frac{C}{(z - 1)^2} + \frac{D}{(z + 1)^2}\right) \cdot dz$$

Далее, приводя подынтегральную функцию к единому знаменателю и приравнивая получившийся в числителе многочлен к z^2, находим численные значения неопределенных коэффициентов (в принципе, для уменьшения времени, необходимого для совершения выкладок, рациональнее вычислить коэффициенты C и D методом вычеркивания). Таким образом:

$$I=\int\frac{1/4}{z-1}\cdot dz+\int\frac{-1/4}{z+1}\cdot dz+\int\frac{1/4}{(z-1)^2}\cdot dz+\int\frac{1/4}{(z+1)^2}\cdot dz$$

Т.к $dz=d(z\pm1)$, то

$$I=\int\frac{1/4}{z-1}\cdot d(z-1)+\int\frac{-1/4}{z+1}\cdot d(z+1)+\int\frac{1/4}{(z-1)^2}\cdot d(z-1)+\int\frac{1/4}{(z+1)^2}\cdot d(z+1)$$

Таким образом, получили четыре табличных интеграла.

$$I=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right|-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z+1}\right)+const\Bigg|_{z=\cos(t)}$$

Осталось сделать обратные замены переменных, т.е. $z=\cos t=\sqrt{1-1/x^2}$, т.к. исходный интеграл есть функция от x, а полученный – от z.

$$I=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\cos t-1}{\cos t+1}\right|-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\cos t-1}+\frac{1}{\cos t+1}\right)\Bigg|_{\cos t=\sqrt{1-1/x^2}}+const=$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{1-1/x^2}-1}{\sqrt{1-1/x^2}+1}\right|-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{1-1/x^2}-1}+\frac{1}{\sqrt{1-1/x^2}+1}\right)+const$$

Строго говоря, ответ уже получен, но можно еще сделать упрощающие преобразования – домножить на сопряженное, избавиться от корня в знаменателе и выделить полный квадрат:

$$I=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\left(\sqrt{1-1/x^2}-1\right)\cdot\left(\sqrt{1-1/x^2}-1\right)}{\left(\sqrt{1-1/x^2}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1-1/x^2}-1\right)}\right|-\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{1-1/x^2}+1+\sqrt{1-1/x^2}-1}{\left(\sqrt{1-1/x^2}-1\right)\cdot\left(\sqrt{1-1/x^2}+1\right)}\right)+const=$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1-1/x^2-2\sqrt{1-1/x^2}+1}{1-1/x^2-1}\right|-\frac{1}{4}\left(\frac{2\sqrt{1-1/x^2}}{1-1/x^2-1}\right)+const=$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|-2x^2+1+2x^2\sqrt{1-1/x^2}\right|+\frac{1}{2}\left(x^2\sqrt{1-1/x^2}\right)+const=$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|-\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^2\right|+\frac{x}{2}\sqrt{x^2-1}+const=\frac{1}{2}\ln\left|x-\sqrt{x^2-1}\right|+\frac{x}{2}\sqrt{x^2-1}+const$$

В случае возникновения сомнений в правильности ответа (особенно, если для его получения потребовалось большое количество промежуточных выкладок), его можно проверить дифференцированием. С учетом того, что $\frac{d}{dx}\left(\left|f(x)\right|\right)=\begin{cases}\frac{df}{dx}, & f(x)>0\\ -\frac{df}{dx}, & f(x)<0\end{cases}$, имеем:

$$K=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\ln\left|x-\sqrt{x^2-1}\right|+\frac{x}{2}\sqrt{x^2-1}+const\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x-\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x^2-1}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}\right)$$

Остальное - дело техники: упростить первую дробь и привести к одному знаменателю:

$$K=\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x^2-1}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}}+\frac{x^2-1}{\sqrt{x^2-1}}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x^2-2}{\sqrt{x^2-1}}=\sqrt{x^2-1}\,.$$

Как видим, результат дифференцирования совпадает с подынтегральной функцией, т.е. первообразная была посчитана правильно.