Лекции по математическому анализу
Третий семестр

А.В. Щепетилов

2012 – 2020

Оглавление

Предисловие

В третьем семестре завершается изучение курса математического анализа на Физическом Факультете. В основу курса положены конспекты В.Ф. Бутузова, читающего много лет курс математического анализа на Физическом Факультете МГУ.

Содержит следующий материал: поверхностные интегралы, векторный анализ, числовые и функциональные ряды (в том числе ряды Фурье), несобственные интегралы (в том числе интеграл Фурье), введение в теорию обобщенных функций.

Дополнительный по сравнению с традиционным минимумом материал включает: топологическое определение ориентируемости поверхностей, пример Ван-дер-Вардена непрерывной на вещественной оси нигде не дифференцируемой функции, тождество параллелограмма для нормы в евклидовых пространствах, гильбертово пространство ℓ_2, теоремы Коши и Римана о перестановке членов абсолютно и условно сходящихся рядов соответственно.

В лекциях используются обычные в математической литературе обозначения: курсивом в тексте выделен определяемый в этом месте термин, формула $A =: B$ или $B := A$ означает, что B по определению полагается равным A.

Автор считает своим приятным долгом поблагодарить В.В. Колыбасову за многочисленные предложения по улучшению текста лекций и компьютерные рисунки, а также тех слушателей, которые своими вопросами побудили его заполнить некоторые пробелы в своих знаниях.

Основная литература:

1. Учебники:
   (a) Ильин В.А., Позняк Э.Г., Основы математического анализа. Часть II. 5-е изд. М. Физматлит, 2004. 464 с.
   (b) Будак Б.М., Фомин С.В., Кратные интегралы и ряды. Изд. 3-е, М. Физматлит, 2002. 512 с.
2. Задачники:
   (a) Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Медведев Г.Н., Шишкин А.А. Математический анализ в вопросах и задачах. 4-е изд., 2001.
   (b) Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Астрель, 2002.

Дополнительная литература:

1. Фихтенгольц Г.М., Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х томах. 8-е изд. М.: Физматлит, 2003. 864 с.
2. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ, часть II, М.: ТК Велби, изд-во Проспект, 2004, 368 с.
3. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981, Гл. II Обобщенные функции с. 82–189.

Поверхности и поверхностные интегралы

Поверхности

В данной главе мы завершим, начатое в конце прошлого семестра изучение кратных и поверхностных интегралов. Мы начнем с повторения понятий (кусочно-) гладкой поверхности и интегралов по таким поверхностям.

0.0.1 Определение поверхностей и способы их задания

Интуитивно, *непрерывная поверхность* является множеством Γ в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{E}^3$, каждая точка которого имеет окрестность V в Γ, являющуюся *гомеоморфным* (т.е. взаимно однозначным и взаимно непрерывным) образом круга K единичного радиуса на евклидовой плоскости.

Если дополнительно потребовать дифференцируемости соответствующего отображения и обратного к нему, то мы получим *гладкую поверхность*. Техническая проблема для четкой формулировки такого определения состоит в том, что нужно исключить из определения произвол, связанный с выбором конкретного отображения для каждой окрестности (пара, состоящая из окрестности U и соответствующего ей гомеоморфного отображения $h : K \mapsto U$, называется *картой*), и согласовать отображения для разных окрестностей. Этого можно добиться и даже определить поверхность абстрактно без содержащего ее евклидова пространства. На этом пути получаются определения *непрерывного* и *гладкого многообразий* произвольных размерностей [9]. Но этот путь технически слишком сложен для нас и мы по нему не пойдем, ограничившись рассмотрением поверхностей, задаваемых одной картой или явно составленных из небольшого их числа.

В курсе аналитической геометрии мы уже встречались с поверхностями второго порядка: эллипсоидом, гиперболоидом, эллиптическим и гиперболическим параболоидами, цилиндром, которые являются гладкими поверхностями. Эти поверхности были заданы неявно уравнением

$$F(x, y, z) = 0,$$

где F — многочлен второго порядка. Заметим, что для многочленов F произвольного порядка такие поверхности называются *алгебраическими.*

Но уже для конуса

$$z^2 = x^2 + y^2 \tag{1}$$

точка $(0, 0, 0)$ не обладает окрестностью в конусе, гомеоморфной открытому кругу (поскольку граница этой окрестности состоит из не менее чем двух связных компонент, а граница открытого круга связна). Поверхность куба является гладкой везде, кроме его ребер. Точки, в которых нарушается требование наличия окрестности, гомеоморфной единичному кругу, называются *особыми для непрерывных поверхностей*, а точки, в которых нарушается требование гладкости поверхности — *особыми для гладких поверхностей.* Если рассмотреть половину конуса (1), выделенную условием $z \geqslant 0$, то мы получим непрерывную поверхность, но гладкой она будет везде, за исключением точки $(0, 0, 0)$.

Таким образом, невозможно дать единое определение поверхностей, пригодное для всех встречающихся в математике ситуаций, и при рассмотрении конкретных случаев поверхностей приходится мириться с наличием особых точек.

Простейшим, но важным примером поверхности, заданной одной картой, является поверхность Γ, являющаяся графиком функции

$$z = f(x, y),\ (x, y) \in \overline{V}, \tag{2}$$

где V — область (т.е. открытое связное множество) в $\mathbb{R}^2$, а функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частые производные в V и непрерывна в $\overline{V}$. В этом случае $h(x, y) := (x, y, f(x, y))$ и $\Gamma := U := h(V)$. Взаимнооднозначность соответствия между точками $(x, y) \in V$ и точками поверхности Γ позволяет рассматривать (x, y) как координаты на Γ.

При таком задании поверхности координаты x, y и координата z не равноправны. Они станут равноправными, если удастся ввести новые координаты (u, v) и задать параметризацию точек поверхности Γ в виде:

$$x = \varphi(u, v),\ y = \psi(u, v),\ z = \chi(u, v),\ (u, v) \in \overline{V} \subset \mathbb{R}^2,$$

где функции $\varphi(u,v)$, $\psi(u,v)$, $\chi(u,v)$ имеют непрерывные частные производные в области V и непрерывны в $\overline{V}$. Иначе эту формулу можно записать в виде

$$\mathbf{r}(u,v) = \varphi(u,v)\mathbf{i} + \psi(u,v)\mathbf{j} + \chi(u,v)\mathbf{k},\ (u,v) \in \overline{V} \subset \mathbb{R}^2. \tag{3}$$

По определению, если существует касательная плоскость к поверхности в некоторой точке, то вектора $\mathbf{r}_u$ и $\mathbf{r}_v$ ей принадлежат.

Определение 0.1. *Параметризацию (3) назовем регулярной, если вектора $\mathbf{r}_u$ и $\mathbf{r}_v$ линейно независимы для всех $(u,v) \in V$ и соответствие $\mathbf{r}(u,v):\ V \mapsto \Gamma$ взаимно-однозначно.*

Регулярность параметризации гарантирует существование нормали $\mathbf{n} = [\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]$ (и, тем самым, касательной плоскости) к поверхности Γ во всех ее точках.

Изначально u и v являются декартовыми координатами в области V, но взаимнооднозначность отображения $\mathbf{r}(u,v):\ V \mapsto \Gamma$ позволяет рассматривать их как функции на поверхности Γ или, иначе, как криволинейные координаты на Γ. При этом кривые $u = \mathrm{const}$ и $v = \mathrm{const}$ являются *координатными линиями* на поверхности Γ.

0.0.2 Первая квадратичная форма поверхности

Определение 0.2. *Первой квадратичной формой или метрикой поверхности называется квадратичная форма*

$$\begin{aligned}\mathbf{I}(u,v) &:= E(u,v)du^2 + 2F(u,v)dudv + G(u,v)dv^2 := ds^2 = \\ &= d\mathbf{r}^2 = \mathbf{r}_u^2 du^2 + 2(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)dudv + \mathbf{r}_v^2 dv^2,\end{aligned}$$

где вектор-функция $\mathbf{r}(u,v)$ задана уравнением (3).

Через первую квадратичную форму $\mathbf{I}(u,v)$ можно выразить длины векторов

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv,\ \delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_u \delta u + \mathbf{r}_v \delta v,$$

лежащих в касательной плоскости, и углы между ними

$$\cos\theta = \frac{(d\mathbf{r}, \delta\mathbf{r})}{|d\mathbf{r}||\delta\mathbf{r}|} = \frac{Edu\delta u + F(du\delta v + \delta u dv) + Gdv\delta v}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}\sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}}.$$

Тем самым, первая квадратичная форма определяет *внутреннюю геометрию* поверхности, т.е. позволяет находить на поверхности длины кривых и углы между векторами.

Координатные линии $u = c_1 = \mathrm{const}$ и $v = c_2 = \mathrm{const}$ ортогональны, если в точке их пересечения $F = 0$. Криволинейные координаты на поверхности Γ называются *ортогональными*, если все их координатные линии пересекаются под прямыми углами. Это эквивалентно условию $F(u, v) \equiv 0$.

Если на поверхности Γ задана гладкая кривая γ, определенная дифференцируемыми функциями $(u(t), v(t))$, $t \in [a, b]$, то ее длину можно найти по формуле

$$L = \int\limits_a^b \sqrt{E(u(t), v(t))u'^2 + 2F(u(t), v(t))u'v' + G(u(t), v(t))v'^2}dt.$$

Пример 0.1. *Для поверхности вращения*

$$\mathbf{r}(u, v) = x(v)\cos u \cdot \mathbf{i} + x(v)\sin u \cdot \mathbf{j} + z(v) \cdot \mathbf{k},\ 0 \leqslant u < 2\pi$$

заметаемой кривой $x(v)$, $z(v)$ в плоскости (x, z) (профилем поверхности) при ее вращении вокруг оси Oz, мы имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_u &= -x(v)\sin u \cdot \mathbf{i} + x(v)\cos u \cdot \mathbf{j}, \\ \mathbf{r}_v &= x'(v)\cos u \cdot \mathbf{i} + x'(v)\sin u \cdot \mathbf{j} + z'(v) \cdot \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Следовательно, $E = x(v)^2$, $F = 0$, $G = x'(v)^2 + z'(v)^2$ и

$$\mathbf{I}(u, v) = x(v)^2 du^2 + (x'(v)^2 + z'(v)^2)dv^2.$$

Меридианы *(линии $u = \mathrm{const}$) и* параллели *(линии $v = \mathrm{const}$) поверхности вращения, очевидно, ортогональны. Если параметр v профиля $x(v)$, $z(v)$ является натуральным, т.е. длиной дуги, и тогда $x'(v)^2 + z'(v)^2 = 1$, то*

$$\mathbf{I}(u, v) = x(v)^2 du^2 + dv^2.$$

Пример 0.2. *Для сферы радиуса* 1 *с центром в начале координат имеем $x(v) = \cos v$, $z(v) = \sin v$, $-\pi \leqslant v \leqslant \pi$ и*

$$\mathbf{I}(u, v) = \cos^2 v du^2 + dv^2.$$

Пример 0.3. *Линия провеса однородной тяжелой нити называется цепной линией и является графиком гиперболического косинуса $x(v) = \mathrm{ch}(v)$, $z(v) = v$. Соответствующая ей поверхность вращения вокруг оси Oz называется катеноидом и для него*

$$\mathbf{I}(u, v) = \mathrm{ch}^2 v(du^2 + dv^2),\ 0 \leqslant u < 2\pi,\ v \in \mathbb{R}.$$

Рис. 1: катеноид.

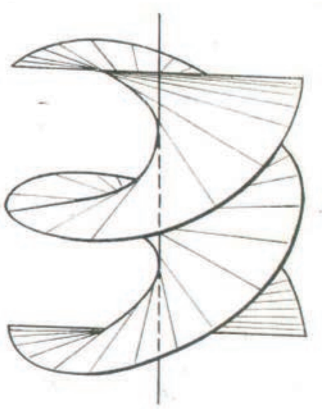

Рис. 2: геликоид.

Пример 0.4. *Пусть прямая, перпендикулярная оси Oz, равномерно вращается вокруг нее, оставаясь ей перпендикулярной и одновременно поднимаясь винтовым движением на высоту, пропорциональную углу поворота. Поверхность, заметаемая этой прямой, называется геликоидом.*[1] *Она имеет вид винтового пандуса для въезда автомашин.*

Если v — параметр на прямой, а u — угол поворота, то геликоид будет иметь параметризацию

$$\mathbf{r}(u,v) = v\cos u \cdot \mathbf{i} + v\sin u \cdot \mathbf{j} + u \cdot \mathbf{k},\ u, v \in \mathbb{R}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_u &= -v\sin u \cdot \mathbf{i} + v\cos u \cdot \mathbf{j} + \mathbf{k}, \\ \mathbf{r}_v &= \cos u \cdot \mathbf{i} + \sin u \cdot \mathbf{j}, \end{aligned}$$

откуда $E = 1 + v^2$, $F = 0$, $G = 1$ и

$$\mathbf{I}(u,v) = (1+v^2)du^2 + dv^2.$$

В новых координатах $u = u_1$, $v = \operatorname{sh} v_1$ мы получим $1 + v^2 = 1 + \operatorname{sh}^2 v_1 = \operatorname{ch}^2 v_1$, $du = du_1$, $dv = \operatorname{ch} v_1 dv_1$, и поэтому

$$\mathbf{I}(u_1,v_1) = \operatorname{ch}^2 v_1 (du_1^2 + dv_1^2).$$

Определение 0.3. *Взаимно-однозначное отображение поверхностей $\Gamma_1 \mapsto \Gamma_2$, переводящее кривые на поверхности Γ_1 в кривые на поверхности Γ_2 той же длины, называется изометрией Γ_1 на Γ_2. Эквивалентное сохранению длин кривых требование состоит в том, что квадратичная форма $\mathbf{I}_{\Gamma_1}$ переводится в форму $\mathbf{I}_{\Gamma_2}$.*

[1] Поверхность, заметаемая прямой линией при ее движении, называется *линейчатой*.

Из рассмотренных примеров мы видим, что разрезанный по меридиану $u = 0$ катеноид изометричен части $0 < u < 2\pi$ геликоида.

Пример 0.5. *Рассмотрим верхнюю полу конуса $z^2 = x^2 + y^2$, выделяемую из него условием $z \geqslant 0$. Введем для нее параметризацию*

$$\mathbf{r}(u,v) = v\cos u\cdot\mathbf{i} + v\sin u\cdot\mathbf{j} + v\cdot\mathbf{k},\ v \geqslant 0, 0 \leqslant u < 2\pi.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_u &= -v\sin u\cdot\mathbf{i} + v\cos u\cdot\mathbf{j},\\ \mathbf{r}_v &= \cos u\cdot\mathbf{i} + \sin u\cdot\mathbf{j} + \mathbf{k},\end{aligned}$$

откуда $E = v^2$, $F = 0$, $G = 2$ и

$$\mathbf{I}(u,v) = v^2du^2 + 2dv^2.$$

Введем новые координаты $(\tilde{x}, \tilde{y})$ по формулам

$$\tilde{x} = \sqrt{2}v\cos\frac{u}{\sqrt{2}},\ \tilde{y} = \sqrt{2}v\sin\frac{u}{\sqrt{2}},$$

откуда

$$d\tilde{x} = \sqrt{2}\cos\frac{u}{\sqrt{2}}dv - v\sin\frac{u}{\sqrt{2}}du,\ d\tilde{y} = \sqrt{2}\sin\frac{u}{\sqrt{2}}dv + v\cos\frac{u}{\sqrt{2}}du,$$
$$d\tilde{x}^2 + d\tilde{y}^2 = 2dv^2 + v^2du^2 = \mathbf{I}.$$

Тем самым, верхняя пола конуса, разрезанная по образующей, изометрична некоторому плоскому сектору, что наглядно подтверждается возможностью склеить конус из вырезанного из листа бумаги сектора без ее смятия или растяжения.

0.1 Площадь поверхности

Площадь является глобальной характеристикой поверхности.

Определим площадь гладкой поверхности и поверхности, состоящей из конечного числа гладких кусков.

Пусть гладкая поверхность Γ задана формулой (3). Разобьем ее кусочно-гладким кривыми на конечное число частей Γ_i, $d_i := \operatorname{diam}\Gamma_i$, выберем на каждой части Γ_i точку M_i, построим в каждой точке M_i касательную плоскость α_i. Ясно, что плоскость α_i натянута на вектора $\mathbf{r}_u|_{M_i}$ и $\mathbf{r}_v|_{M_i}$. Спроектируем каждую область Γ_i на соответствующую ей плоскость α_i и пусть S_i – площади этих плоских областей.

Определение 0.4. *Площадью поверхности* Γ *называется предел интегральных сумм*

$$S(\Gamma_i, M_i) := \sum_i S_i$$

при $d := \max_i \to 0$, *если этот предел не зависит от разбиения поверхности* Γ *на области* Γ_i *и выбора точек* M_i. *В этом случае поверхность называется квадрируемой.*

Площадью S *кусочно-гладкой поверхности, составленной из конечного числа гладких поверхностей, заданных формулами типа (3), называется сумма их площадей.*

Получим формулу для вычисления площади поверхности Γ. Будем разбивать поверхность Γ на области Γ_i координатными линиями $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ на криволинейные четырехугольники. У одной пары сторон такого четырехугольника значения параметра u совпадают, а значения параметра v различаются на величину Δv_i, а у другой пары сторон такого четырехугольника совпадают значения параметра v, а значения параметра u различаются на величину Δu_i. Ясно, что такие разбиения можно выбрать так, чтобы $d \to 0$, что соответствует тому, что $\max_i \max\{\Delta u_i, \Delta v_i\} \to 0$.

Понятно, что площади S_i отличаются от площадей параллелограммов, построенных на векторах $\mathbf{r}_u|_{M_i} \Delta u_i$, $\mathbf{r}_v|_{M_i} \Delta v_i$ на величину порядка малости выше второго по $\Delta u_i, \Delta v_i$. При вычислении предела интегральных сумм эта разность переходит в ноль, поэтому мы получаем

$$S = \iint\limits_{\overline{V}} |[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]|\, dudv.$$

Учтем теперь, что $[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]^2 = \mathbf{r}_u^2 \mathbf{r}_v^2 - (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)^2 = EG - F^2$ и окончательно получим

$$S = \iint\limits_{\overline{V}} \sqrt{EG - F^2}\, dudv. \tag{4}$$

Нетрудно убедиться, что для поверхностей, заданных формулой (2), мы получим формулу

$$S = \iint\limits_{\overline{V}} \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dxdy. \tag{5}$$

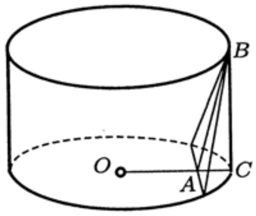

Рис. 3: Один слой «сапога» Шварца.

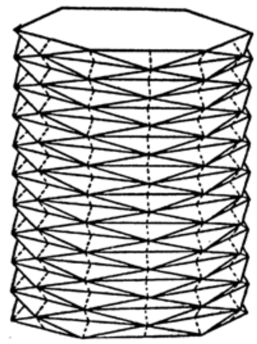

Рис. 4: «Сапог» Шварца.

Аналогично определению длины плоской или пространственной кривой через предел длин вписанных в нее ломаных может показаться естественным определить площадь поверхности как предел площадей вписанных в нее многогранников. Однако, следующий пример Шварца (на математическом жаргоне называемый также «сапог» Шварца), показывает невозможность такого определения.

Рассмотрим прямой круговой цилиндр радиуса R высоты H, разделённый на m «тонких» цилиндров $m+1$-ой параллельной плоскостью, перпендикулярной оси цилиндра.

Каждую получившуюся в сечениях окружность разделим n точками на n частей, располагая точки на соседних окружностях сдвинутыми друг относительно друга на половину сегмента между соседними точками. Возмем две соседние точки на одной окружности и точку, лежащую над или под серединой дуги, соединяющей эти две точки, и построим на этих трех точках треугольник. Совокупность всех таких треугольников образует (невыпуклый) многогранник, вписанный в исходный цилиндр. Этот многогранник напоминает голенище сапога. С ростом m и n площадь каждого треугольника стремиться к нулю, но число треугольников растет. Исследуем возможные предельные значения площади многогранника. Рассмотрим один из «тонких» цилиндров (см. рис. 1.3) и один из треугольников, вписанных в этот цилиндр. Пусть A – середина основания треугольника, а ℓ – длина этого основания. Тогда

$$|OA| = R\cos\frac{\pi}{n},\ |AB| = \sqrt{\left(\frac{H}{m}\right)^2 + R^2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2}, \ell = 2R\sin\frac{\pi}{n},$$

$$S_\triangle = \frac{1}{2}\ell|AB| = R\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{\left(\frac{H}{m}\right)^2 + R^2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2}.$$

В каждом слое $2n$ треугольников, т.е. всего $2nm$. Отсюда площадь «сапога» есть

$$S = 2nmS_\triangle = 2nR\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{H^2 + R^2m^2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2} = \\ = 2nR\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{H^2 + R^2m^2\sin^4\frac{\pi}{2n}}.$$

Если $\frac{m}{n^2} \to q$ при $n \to \infty, m \to \infty$, то

$$S \to 2\pi R\sqrt{H^2 + \frac{R^2\pi^4q^2}{4}}.$$

За счет выбора q можно получить в пределе любое число. Выбор $q = 0$ соответствует площади поверхности цилиндра.

Причина такого эффекта в том, что при $q \neq 0$ плоскости вписанных в цилиндр треугольников не приближаются при $n \to \infty, m \to \infty$ к поверхности цилиндра.

0.2 Поверхностные интегралы первого рода

Поверхностные интегралы определяются по стандартной схеме через интегральные суммы.

Пусть Γ – квадрируемая поверхность и пусть g – ограниченная функция на Γ. Разобьем поверхность Γ на n квадрируемых частей Γ_i : $\Gamma = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \Gamma_i$, на каждой части Γ_i выберем произвольную точку M_i и составим интегральную сумму

$$I(\Gamma_i, M_i) = \sum_{i=1}^{n} g(M_i)S(\Gamma_i),$$

где $S(\Gamma_i)$ – площадь Γ_i. Пусть $d_i := \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \operatorname{diam}\Gamma_i$.

Определение 0.5. *Число I называется пределом интегральных сумм $I(\Gamma_i, M_i)$ при $d \to 0$, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ такое, что $\forall$ разбиения Γ_i, у которого $d < \delta$ и любого выбора точек M_i выполняется неравенство*

$$|I(\Gamma_i, M_i) - I| < \varepsilon.$$

В этом случае число I называется поверхностным интегралом первого рода от функции f по поверхности Γ и обозначается

$$\iint_\Gamma g(M)\,d\sigma.$$

Следующая теорема дает способ вычисления поверхностного интеграла первого рода, сводя его к двойному интегралу по плоской области.

Теорема 0.1. *Пусть гладкая поверхность* Γ *задана формулой (3), а* g *– непрерывная функция на* Γ.

Тогда поверхностный интеграл первого рода $\iint_\Gamma g(M)\,d\sigma$ *существует и справедливо равенство*

$$\iint_\Gamma g(M)\,d\sigma = \iint\limits_{\overline{V}} g(M(u,v))\sqrt{EG-F^2}\,dudv.$$

Для поверхности Γ, заданной формулой $z = f(x,y)$, мы получим частный случай последней формулы:

$$\iint\limits_{\Gamma} g(M)\,d\sigma = \iint\limits_{\overline{V}} g(M(x,y))\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dxdy.$$

0.3 Ориентация поверхностей

Еще одной, наряду с площадью, глобальной характеристикой поверхности является ее ориентируемость.

Понятие стороны поверхности интуитивно ясно для поверхностей, заданных явно уравнением $z = f(x,y)$, и поверхностей, ограничивающих какую-либо трехмерную область. Это интуитивное понятие можно формализовать.

Определение 0.6. *Гладкая поверхность* Γ *— ориентируемая (двусторонняя), если на ней существует непрерывная вектор-функция единичных нормалей к поверхности, т.е.*

$$\mathbf{n}(M) = n_1(M)\mathbf{i} + n_2(M)\mathbf{j} + n_3(M)\mathbf{k},\ |\mathbf{n}(M)| \equiv 1,$$

где n_1, n_2, n_3 *— непрерывные функции на поверхности* Γ.

Ясно, что если для связной поверхности существует одна такая вектор-функция, то их существует в точности две: $\pm\mathbf{n}(M)$. Выбор любой из них называется *ориентацией поверхности*. В частности, для поверхности, заданной уравнением $z = f(x,y)$, нормали, соответствующие одной ориентации, составляют острый угол с осью Oz, а нормали, соответствующие второй, составляют тупой угол с осью Oz.

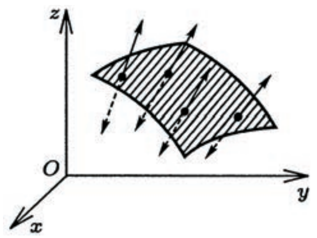

Рис. 5: выбор ориентации для поверхности, заданной уравнением $z = f(x, y)$.

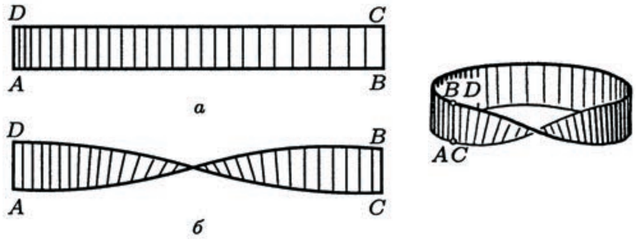

Рис. 6: лист Мебиуса.

Если Γ связна, то можно пытаться строить такую непрерывную вектор-функцию единичных нормалей, выбрав нормаль в фиксированной точке $M_0 \in \Gamma$ и перенося ее непрерывно во все другие точки $M \in \Gamma$ вдоль кривых, соединяющих M_0 и M (в силу связности поверхности Γ такие кривые всегда существуют). Но тут можно столкнуться с неоднозначностью результата такого переноса по двум разным кривым, соединяющим точки M_0 и M.

Эквивалентно: при непрерывном переносе нормали по замкнутому контуру можно получить в точке M_0 нормаль, противоположно направленную к исходной. Примером неориентируемой поверхности является лист Мебиуса.[2]

Это приводит к следующему определению.

Определение 0.7. *Если для любой точки M_0, принадлежащей связной гладкой поверхности Γ, и любого замкнутого контура $\gamma \in \Gamma$ такого, что $M_0 \in \gamma$, выбранное в точке M_0 направление нормали при непрерывном продолжении вдоль контура возвращается к исходному, то поверхность Γ называется ориентируемой (двухсторонней).*

Если определение 0.6 (или определение 0.7) не выполнено для связной гладкой поверхности Γ, то она называется *неориентируемой* (односторонней).

Если гладкая поверхность Γ состоит из n ориентируемых связных частей (компонент связности), то на каждой из компонент связности возможен выбор одной из двух возможных ориентаций, а значит на всей поверхности Γ можно выбрать 2^n различных ориентаций. Если хотя бы одна из компонент связности неориентируема, то и Γ неориентируема.

[2]Мёбиус Август Фердинанд (1790–1868) — немецкий математик.

Определения 0.6 и 0.7 ориентируемости не годятся для негладких поверхностей.

Пример 0.6. *Куб.*

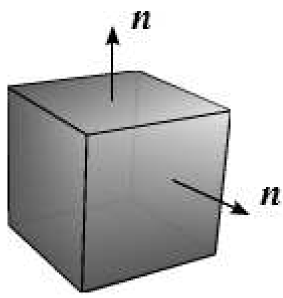

Рис. 7: куб.

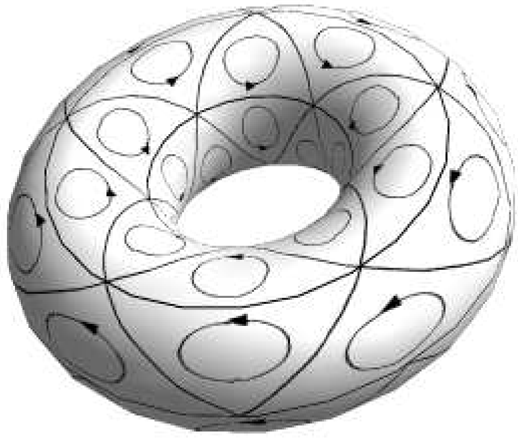

Рис. 8: триангуляция поверхности.

Возможный выход для негладких поверхностей состоит в том, чтобы забыть про нормаль и дать другое определение для *триангулируемых* поверхностей (не обязательно являющихся гладкими), т.е. поверхностей, которые можно разбить на конечное число криволинейных треугольников непрерывными кривыми (при этом, строго говоря, два криволинейных треугольника либо не пересекаются, либо имеют одну общую вершину, либо имеют одно общее ребро).

Назовем *направлением обхода треугольника триангуляции* порядок перечисления его вершин с точностью до циклической перестановки.

Определение 0.8. *Триангулируемая поверхность называется ориентируемой, если на (криволинейных) треугольниках можно выбрать согласованное направление обхода так, что на любой смежной стороне двух треугольников направления обхода противоположны. Выбор таких согласованных направлений обхода (криволинейных) треугольников называется ориентацией.*

Достоинства определения.

1. Нет апелляции к объемлющему пространству.

2. Не требуется гладкость.

Ориентируемость, таким образом, есть *внутреннее* свойство поверхности и *даже не геометрическое, а топологическое*[3].

Замечание 0.1. *Ориентация на двумерной поверхности порождает ориентацию на одномерной границе этой поверхности посредством задания направления обхода треугольников триангуляции, примыкающих к границе поверхности. Важность этого факта мы увидим далее, когда будем рассматривать формулу Стокса.*

Недостаток определения: оно явно зависит от конкретной триангуляции.

Для преодоления этого недостатка нужно согласовать определение 0.8 ориентируемости для различных триангуляций. В принципе, это можно сделать, но мы этим заниматься не будем.

Для гладких поверхностей определение 0.8 согласуется с определениями 0.6 и 0.7 при помощи правила правого винта. Пользуясь этим согласованием, можно "переносить" нормаль на кусочно-гладких поверхностях через ребро.

0.4 Поверхностные интегралы второго рода

Пусть Γ – гладкая двухсторонняя поверхность. Выберем на ней непрерывное поле единичных нормалей $\mathbf{n}(M)$, $M \in \Gamma$. Обозначим через $\alpha(M), \beta(M), \gamma(M)$ углы между вектором $\mathbf{n}(M)$ и осями координат, т.е. $\mathbf{n}(M) = \cos\alpha\mathbf{i} + \cos\beta\mathbf{j} + \cos\gamma\mathbf{k}$. Пусть на поверхности Γ определены три ограниченные функции $P(M), Q(M), R(M)$.

Рассмотрим поверхностные интегралы первого рода

$$I_1 = \iint\limits_{\Gamma} P(M)\cos\alpha(M)\,d\sigma,\ I_2 = \iint\limits_{\Gamma} Q(M)\cos\beta(M)\,d\sigma,$$
$$I_3 = \iint\limits_{\Gamma} R(M)\cos\gamma(M)\,d\sigma. \tag{6}$$

[3] *Топологией* называется раздел математики, в котором понятие непрерывности изучается в наиболее чистом виде. Несколько огрубляя ситуацию, можно сказать, что топология родственна геометрии, но не интересуется расстоянием между точками пространств.

Они называются *поверхностными интегралами второго рода* от функций P, Q, R соответственно и обозначаются также следующим образом

$$I_1 = \iint\limits_{\Gamma} P(M)\, dydz,\ I_2 = \iint\limits_{\Gamma} Q(M)\, dzdx, I_3 = \iint\limits_{\Gamma} R(M)\, dxdy. \tag{7}$$

Переход ко второму варианту обозначений мотивирован тем, что величина $\cos\alpha(M)\, d\sigma$ есть, с точностью до бесконечно малых порядка больше двух, равна площади проекции площадки $d\sigma$ на плоскость (x, y). Аналогичным образом обстоит дело с величинами $\cos\beta(M)\, d\sigma$ и $\cos\gamma(M)\, d\sigma$.

При смене ориентации поверхности Γ косинусы $\cos\alpha(M), \cos\beta(M)$, $\cos\gamma(M)$ сменят знак, а значит изменят знак и интегралы I_1, I_2, I_3. В этом отношении поверхностные интегралы второго рода аналогичны криволинейным интегралам второго рода, которые также меняют знак при изменении направления обхода кривой. Сумма

$$\begin{gathered} I = I_1 + I_2 + I_3 = \\ = \iint\limits_{\Gamma} \left(P(M)\cos\alpha(M) + Q(M)\cos\beta(M) + R(M)\cos\gamma(M)\right)\, d\sigma = \\ = \iint\limits_{\Gamma} P(M)\, dydz + Q(M)\, dzdx + R(M)\, dxdy. \end{gathered} \tag{8}$$

называется *общим поверхностным интегралом второго рода.*

Замечание 0.2. *Отличие поверхностного интеграла второго рода от поверхностного интеграла первого рода состоит в том, что в интеграле второго рода площадь $d\sigma$ рассматривается не как скалярная, а как векторная величина, имеющая компоненты*

$$\cos(\mathbf{n}, \mathbf{i})\, d\sigma, \cos(\mathbf{n}, \mathbf{j})\, d\sigma, \cos(\mathbf{n}, \mathbf{k})\, d\sigma$$

и потому направленная по нормали к поверхности. Развитие этой точки зрения приводит к понятию дифференциальной формы, лежащему за рамками нашего курса.

Если ввести вектор-функцию $\mathbf{a}(M) = P(M)\mathbf{i} + Q(M)\mathbf{j} + R(M)\mathbf{k}$, то можно записать равенство

$$I = \iint\limits_{\Gamma} (\mathbf{a}, \mathbf{n})\, d\sigma.$$

Пример 0.7. *Поток жидкости с полем скоростей* $\mathbf{v}(M)$ *через ориентированную поверхность* Γ *снабженную непрерывным полем нормалей* $\mathbf{n}(M)$ *задается интегралом*

$$\iint\limits_{\Gamma} (\mathbf{v}, \mathbf{n})\, d\sigma.$$

Вычисление поверхностных интегралов второго рода. Поскольку поверхностный интеграл второго рода был определен через поверхностный интеграл первого рода, то его можно вычислять по формуле теоремы 0.1, вводя параметризацию поверхности и сводя его к двойному интегралу по области в плоскости параметров.

Если мы можем взаимно-однозначно спроектировать связную поверхность Γ на связную область $\overline{V}$ в плоскости (x, y), то интеграл

$$\iint\limits_{\Gamma} R(M)\, dxdy = \pm \iint\limits_{\overline{V}} R(M(x, y))\, dxdy, \tag{9}$$

где знак $\pm$ выбирается равным знаку $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{k})$, который в этом случае не может меняться, т.к. это противоречило бы взаимной однозначности проектирования. Для поверхности Γ, состоящей из нескольких связных компонент, подобное равенство справедливо для каждой компоненты, при условии ее взаимно-однозначного проектирования. Наконец, нарушение требования взаимной однозначности проектирования на множестве нулевой площади не нарушает равенства (9). Аналогичное верно и для интегралов

$$\iint\limits_{\Gamma} P(M)\, dydz, \quad \iint\limits_{\Gamma} Q(M)\, dzdx$$

и координатных плоскостей (y, z) и (x, z) соответственно.

0.5 Интегральные формулы

0.5.1 Формула Остроградского–Гаусса

Определение 0.9. *Пусть функции* $z_1(x, y)$ *и* $z_2(x, y)$ *определены и непрерывны в ограниченной замкнутой области* $D \in \mathbb{E}^2$*, причем* $z_1(x, y) \leqslant z_2(x, y)$*. Замкнутую область* $G := \{(x, y, z) \in \mathbb{E}^3 \,|\, (x, y) \in D,\ z_1(x, y) \leqslant z \leqslant z_2(x, y)\}$ *в евклидовом пространстве* $\mathbb{E}^3$ *назовем* z-*цилиндрической.*

Аналогично определяются x*-цилиндрическая* и y*-цилиндрическая* замкнутые области.[4]

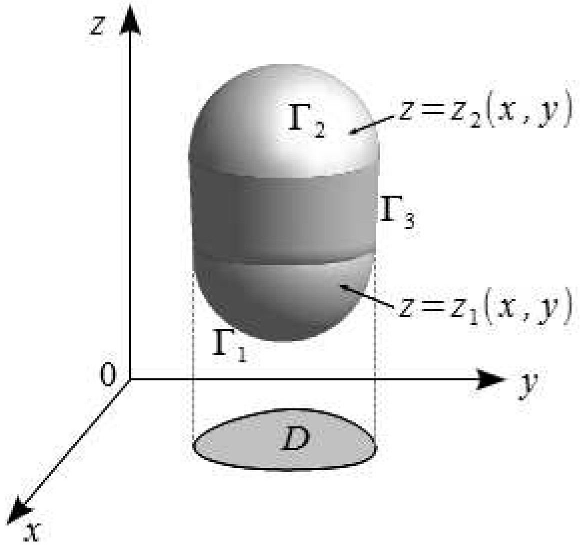

Рис. 9: z-цилиндрическая область.

Заметим, что x-цилиндрическая, y-цилиндрическая и z-цилиндрическая области являются ограниченными.

Определение 0.10. *Область G назовем* простой*, если ее можно разбить кусочно-гладкими поверхностями на конечное число x-цилиндрических областей, а также на конечное число y-цилиндрических областей и на конечное число z-цилиндрических областей.*

Например, параллелепипед и шар — простые области. Поверхность, ограничивающую область G, будем обозначать через Γ. Заметим, что простая область ограничена, поскольку разбивается кусочно-гладкими поверхностями на конечное число ограниченных областей.

Теорема 0.2. *Пусть функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ и их частные производные $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$ непрерывны в простой области G, ограниченной кусочно-гладкой поверхностью Γ. Тогда*

$$\iiint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \iint\limits_\Gamma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, d\sigma =$$

[4] Под *областью* в математике обычно понимают открытое связное множество, а интегралы определяют по замкнутым множествам. Чтобы не перегружать текст каждый раз разъяснениями этого обстоятельства, договоримся интегрировать по замкнутым областям или замыканиям открытых множеств, а в остальных случаях, если не сказано противное, считать областью открытое связное множество.

$$= \iint\limits_{\Gamma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy, \tag{10}$$

где поверхностный интеграл берется по внешней стороне поверхности Γ, а α, β, γ суть углы между внешней нормалью к поверхности Γ и осями координат Ox, Oy и Oz, соответственно.

Формула (10) называется формулой Остроградского–Гаусса.[5]

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда G — z-цилиндрическая область, и докажем справедливость равенства

$$\iiint\limits_{G} \frac{\partial R}{\partial z}\, dxdydz = \iint\limits_{\Gamma} R\, dxdy, \tag{11}$$

где интеграл справа берется по внешней стороне поверхности Γ.

Сведя тройной интеграл к повторному, получим

$$\begin{gathered}\iiint\limits_{G} \frac{\partial R}{\partial z}\, dxdydz = \iint\limits_{D} dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)\, dz = \\ = \iint\limits_{D} R(x,y,z)\Big|_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}\, dxdy = \iint\limits_{D} R(x,y,z_2(x,y))\, dxdy - \\ - \iint\limits_{D} R(x,y,z_1(x,y))\, dxdy = \iint\limits_{\Gamma_2} R\, dxdy + \iint\limits_{\Gamma_1} R\, dxdy,\end{gathered} \tag{12}$$

где мы выразили двойные интегралы через поверхностные по Γ_2 — верхней и Γ_1 — нижней стороне поверхности Γ, с учетом ориентаций на этих сторонах. На боковой стороне Γ_3 поверхности Γ имеем $\cos\gamma = 0$, поэтому

$$\iint\limits_{\Gamma_3} R\, dxdy = \iint\limits_{\Gamma_3} R\cos\gamma\, d\sigma = 0.$$

Теперь равенство (12) можно записать в виде

$$\iiint\limits_{G} \frac{\partial R}{\partial z}\, dxdydz = \sum_{i=1}^{3} \iint\limits_{\Gamma_i} R\, dxdy = \iint\limits_{\Gamma} R\, dxdy.$$

[5] Остроградский Михаил Васильевич (1801–1862) — российский математик, который получил эту формулу в 1828 году, опубликовал в 1831 г. В 1834 г. он обобщил эту формулу на n-мерный случай, опубликовал в 1838 г. Для частного случая $P = x$, $Q = y$, $R = z$ эту формулу получил Гаусс в 1813 г.

Таким образом, формула (11) доказана.

Пусть теперь G — простая область. Разобьем ее на конечное число z-цилиндрических областей G_i с границами Γ_i, $i = 1, \ldots, n$. Для каждой области G_i справедливо равенство (11):

$$\iiint\limits_{G_i} \frac{\partial R}{\partial z}\, dxdydz = \iint\limits_{\Gamma_i} R\, dxdy.$$

Суммируя все эти равенства, получим слева

$$\iiint\limits_{G} \frac{\partial R}{\partial z}\, dxdydz, \quad \text{а справа —} \quad \iint\limits_{\Gamma} R\, dxdy,$$

поскольку поверхностные интегралы по вспомогательным поверхностям, разделяющим область G на части G_i, берутся дважды, причем один раз по одной стороне каждой такой поверхности, а другой раз — по другой стороне, и поэтому, сумма таких двух интегралов равна нулю. Тем самым, мы доказали равенство (11) для простой области.

Аналогично можно доказать для простой области G следующие равенства

$$\iiint\limits_{G} \frac{\partial P}{\partial x}\, dxdydz = \iint\limits_{\Gamma} P\, dydz, \tag{13}$$

$$\iiint\limits_{G} \frac{\partial Q}{\partial y}\, dxdydz = \iint\limits_{\Gamma} Q\, dzdx. \tag{14}$$

Складывая (11), (13) и (14), получим равенство (10). □

Замечание 0.3. *Можно доказать, что формула Остроградского–Гаусса справедлива для любой ограниченной области G, граница которой состоит из конечного числа кусочно-гладких поверхностей (см. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х томах. М.: Физматлит, 2003, т. 3, n°. 638, с. 333).*

Следствие 0.1. *Если функции P, Q, R таковы, что $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 1$, то из формулы Остроградского–Гаусса получаем*

$$V(G) = \iiint\limits_{G} dxdydz = \iint\limits_{\Gamma} P\, dydz + Q\, dzdx + R\, dxdy.$$

В частности, если $P = \frac{1}{3}x$, $Q = \frac{1}{3}y$, $R = \frac{1}{3}z$, *то* $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 1$, *поэтому*

$$V(G) = \frac{1}{3} \iint\limits_{\Gamma} x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy.$$

Каждый из интегралов

$$\iint\limits_{\Gamma} x\,dydz, \ \iint\limits_{\Gamma} y\,dzdx, \ \iint\limits_{\Gamma} z\,dxdy$$

равен $V(G)$. *Осмыслить этот факт можно на примере* z*-цилиндрической области* G, *ограниченной снизу плоскостью* Oxy, *а сверху — поверхностью* $z = f(x, y)$. *Тогда*

$$V(G) = \iint\limits_{\Gamma} z\,dxdy = \iint\limits_{\Gamma_2} z\,dxdy = \iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy$$

— знакомая формула для объема криволинейного цилиндра.

Пример 0.8. *Вычислить*

$$I = \iint\limits_{\Gamma} \big(x^2 + f_1(y,z)\big)\ dydz + (\cos y + f_2(x,z))\ dzdx + (z + f_3(x,y))\ dxdy,$$

где Γ *— внешняя сторона сферы, заданной уравнением* $x^2+y^2+z^2 = R^2$. *Здесь* $P = x^2 + f_1(y,z)$, $Q = \cos y + f_2(x,z)$, $R = z + f_3(x,y)$, *поэтому* $\frac{\partial P}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial Q}{\partial y} = -\sin y$, $\frac{\partial R}{\partial z} = 1$. *По формуле Остроградского–Гаусса получаем*

$$I = \iiint\limits_{G} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz =$$
$$= \iiint\limits_{G} (2x - \sin y + 1)\ dxdydz = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

т.к. интегралы от нечетных функций $2x$ *и* $\sin y$ *равны нулю.*

Пример 0.9. *Пусть* G *— область в* $\mathbb{E}^3$ *с произвольной замкнутой кусочно-гладкой границей* Γ. *Тогда*

$$I = \iint\limits_{\Gamma} (y+z)\ dydz + (x+z)\ dzdx + (x+y)\ dxdy = 0,$$

т.к. $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial z} = 0$.

0.5.2 Формула Стокса

Определение 0.11. *Назовем поверхность* Γ *«xyz-проектируемой», если она взаимно-однозначно проектируется на каждую координатную плоскость прямоугольной системы координат* $Oxyz$.

Поверхность Γ, являющаяся «xyz-проектируемой», автоматически является ориентируемой и ее можно задать любым из трех уравнений:

$$\begin{aligned} z &= f_1(x,y),\ (x,y) \in D_1, \\ x &= f_2(y,z),\ (y,z) \in D_2, \\ y &= f_3(z,x),\ (z,x) \in D_3, \end{aligned} \tag{15}$$

где D_i, $i = 1,2,3$ — проекции поверхности Γ на координатные плоскости.[6] Простейшим примером такой поверхности является часть плоскости, заданной уравнением $x + y + z = 1$ и удовлетворяющая условиям $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.

Под *гладкой «xyz-проектируемой» поверхностью* будем понимать такую поверхность, что каждая из функций (15) имеет в соответствующей замкнутой области D_i непрерывные частные производные первого порядка, а границей поверхности является кусочно-гладкий контур L, взаимно-однозначно проектирующийся на границу каждой области D_i, $i = 1,2,3$.

Теорема 0.3. *Пусть*

1) *функции* $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ *и их частные производные первого порядка непрерывны в некоторой области* G;

2) *гладкая «xyz-проектируемая» поверхность* Γ, *ограниченная замкнутым контуром* L, *расположена внутри области* G.

[6] На поверхности, заданной уравнением $z = f_1(x,y)$ для гладкой функции $f_1(x,y)$, есть непрерывная нормаль $\mathbf{n}(x,y) = -f_{1x}\mathbf{i} - f_{1y}\mathbf{j} + \mathbf{k}$. В непрерывном случае ориентируемость такой поверхности Γ вытекает из ориентируемости области D_1 и гомеоморфности D_1 и Γ.

Тогда справедлива формула

$$\oint\limits_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint\limits_\Gamma \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy + \\ + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx = \\ = \iint\limits_\Gamma \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \\ + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta\right] d\sigma, \tag{16}$$

в которой направление обхода контура L согласовано с ориентацией поверхности Γ, а α, β, γ — углы между вектором нормали $\mathbf{n}(M)$ к поверхности Γ и осями координат.

Формула (16) называется формулой Стокса.[7] Она выражает криволинейный интеграл второго рода по замкнутому контуру L через поверхностный интеграл второго рода по поверхности Γ, ограниченной контуром L.

Доказательство. Запишем уравнение поверхности Γ в виде

$$z = f(x, y),\ (x, y) \in D_1,$$

где D_1 — проекция поверхности Γ на плоскость Oxy. Обозначим через ℓ проекцию кривой L на плоскость Oxy. Контур ℓ является границей плоской области D_1. Рассмотрим первое слагаемое

$$\oint\limits_L P\,dx$$

в левой части (16) и преобразуем его в интеграл по поверхности Γ по следующей схеме:

$$\oint\limits_L \xrightarrow{(1)} \oint\limits_\ell \xrightarrow{(2)} \iint\limits_{D_1} \xrightarrow{(3)} \iint\limits_\Gamma .$$

1. Для определенности будем рассматривать верхнюю сторону поверхности Γ и согласованное с этой ориентацией поверхности Γ направление обхода контура L. При проектировании на плоскость Oxy это

[7] Стокс Джордж Габриэль (1819–1903) — английский физик и математик.

направление обхода контура L переходит в направление контура ℓ, положительно согласованное с областью D_1. Поэтому

$$\oint\limits_L P(x,y,z)\,dx = \oint\limits_\ell P(x,y,f(x,y))\,dx$$

поскольку интегральные суммы этих двух интегралов совпадают.

2. По формуле Грина

$$\oint\limits_\ell P(x,y,f(x,y))\,dx = -\iint\limits_{D_1} \frac{\partial}{\partial y}\left[P(x,y,f(x,y))\right]\,dxdy =$$

$$= -\iint\limits_{D_1} \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\right)\,dxdy.$$

3. Поскольку

$$\mathbf{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\} = \frac{\{-f_x, -f_y, 1\}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}, \text{ то}$$

$$\cos\gamma = \left(1+f_x^2+f_y^2\right)^{-1/2}, \text{ и } -f_y = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}.$$

Поэтому

$$-\iint\limits_{D_1} \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\right)\,dxdy =$$

$$= \iint\limits_{D_1} \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right)\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dxdy =$$

$$= \iint\limits_{\Gamma} \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right)\,d\sigma.$$

Итак,

$$\oint\limits_L P\,dx = \iint\limits_{\Gamma} \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right)\,d\sigma. \tag{17}$$

Аналогично можно доказать, что

$$\oint\limits_L Q\,dy = \iint\limits_{\Gamma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\cos\gamma - \frac{\partial Q}{\partial z}\cos\alpha\right)\,d\sigma, \tag{18}$$

$$\oint\limits_L R\,dz = \iint\limits_\Gamma \left(\frac{\partial R}{\partial y}\cos\alpha - \frac{\partial R}{\partial x}\cos\beta\right)\,d\sigma. \tag{19}$$

Складывая равенства (17)–(19), получаем

$$\oint\limits_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$

$$= \iint\limits_\Gamma \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta\right]\,d\sigma,$$

что и требовалось доказать. □

Замечание 0.4. *Формула Стокса остается справедливой, если поверхность Γ можно разбить кусочно-гладкими кривыми на конечное число «xyz-проектируемых» частей. Доказательство просто: складываем формулы Стокса для каждой части и учитываем, что по общим частям границы прилегающих друг к другу частей криволинейные интегралы сокращаются. Примером такой поверхности является сфера, разбитая тремя попарно перпендикулярными плоскостями, проходящими через ее центр, на восемь «xyz-проектируемых» частей.*

Замечание 0.5. *Формула Стокса справедлива и для плоских областей, параллельных какой либо координатной плоскости, хотя они и не являются «xyz-проектируемыми». В этом случае она переходит в формулу Грина.*

Замечание 0.6. *Слагаемые в обеих частях формулы Стокса получаются друг из друга циклической заменой, поэтому достаточно запомнить вид первого из них, т.е. формулу Грина.*

Замечание 0.7. *Формула Стокса остается справедливой, если граница L поверхности Γ состоит из нескольких связных компонент. При этом в левой части должна быть сумма интегралов по всем связным компонентам контура L.*

Замечание 0.8. *В формулах Ньютона–Лейбница, Стокса и Гаусса–Остроградского имеется единообразие, состоящее в том, что с одной стороны в каждой из них стоит интеграл по n-мерному множеству, а с другой стороны — интеграл по $(n-1)$-мерной границе этого множества для $n = 1, 2, 3$. С помощью понятия дифференциальной формы,* *лежащего за рамками нашего курса, можно записать все эти формулы и их аналоги для произвольного $n \in \mathbb{N}$ единообразно. Соответствующая общая формула, справедливая для гладких многообразий, также носит название формулы Стокса.*

0.5.3 Условие независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования

Пусть G — область в пространстве $\mathbb{E}^3$, а Γ — кусочно-гладкая ориентируемая поверхность в пространстве $\mathbb{E}^3$. Будем называть область G *поверхностно односвязной*, если для любого кусочно-гладкого замкнутого контура L, лежащего в G, существует ориентируемая кусочно-гладкая поверхность, ограниченная контуром L, также целиком лежащая в G. Аналогично, будем называть поверхность Γ *односвязной*, если для любого кусочно-гладкого замкнутого контура L, лежащего в Γ, существует ориентируемая кусочно-гладкая поверхность, ограниченная контуром L, также целиком лежащая в Γ.

Примерами поверхностно односвязных областей являются шар, область между двумя концентрическими сферами и области, гомеоморфные одной из этих двух областей, например, все пространство $\mathbb{E}^3$. Примером односвязной поверхности является сфера и любая поверхность, ей гомеоморфная. Напротив, утолщенная поверхность тора и полноторие не являются поверхностно односвязными областями, а тор не является односвязной поверхностью. Доказательства этих фактов мы дать не можем, поскольку это требует углубления в топологию.[8]

Теорема 0.4. *1. Пусть функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ определены и непрерывны в области G. Тогда следующие три условия эквивалентны (т.е. из каждого из них следуют два других):*

(a) Для любого замкнутого контура $L \subset G$:

$$\oint\limits_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0.$$

(b) Для любых двух точек $A, B \in G$ криволинейный интеграл

$$\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

[8] Существование в шаре непрерывной ориентируемой поверхности, ограниченной произвольным наперед заданным контуром, лежащим в данном шаре, доказана, например, в брошюре В.В. Прасолов «Наглядная топология», М.: МЦНМО, 1995, с. 22, теорема Франкля–Понтрягина–Зейферта.

не зависит от пути интегрирования, т.е. от выбора кривой, соединяющей точки A и B и целиком лежащей в области G.

(c) *Выражение $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ является полным дифференциалом, т.е. в области G существует дифференцируемая функция $u(x,y,z) = u(M)$ такая, что $du = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$. Отсюда следует, в частности, что*

$$\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = u(B) - u(A) \quad \forall A, B \in G.$$

2. *Если функции P, Q, R имеют в области G непрерывные частные производные первого порядка, то из любого из условий (a)–(c) следует условие*

$$(d) \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \ \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \quad \text{в области} \quad G.$$

Если, кроме того, область G поверхностно односвязна, то и наоборот, из условия (d) следуют условия (a) – (c).

Доказательство. Докажем первое утверждение теоремы по схеме $(a) \to (b) \to (c) \to (a)$.

Пусть выполнено условие (a) и пусть L_i, $i = 1, 2$ — два контура, соединяющие точки A и B и целиком лежащие в области G. Тогда разность интегралов

$$\int\limits_{L_1} P\,dx + Q\,dy + R\,dz - \int\limits_{L_2} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

является интегралом по замкнутому контуру и потому равна нулю. Тем самым, справедливо условие (b).

Пусть выполнено условие (b) и пусть A — фиксированная точка в области G. Тогда в области G корректно определена функция

$$u(x,y,z) := \int\limits_{AB(x,y,z)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

Рассматривая приращения функции u вдоль координатных осей, по формуле среднего значения легко показать, что $u_x(x,y,z) = P(x,y,z)$, $u_y(x,y,z) = Q(x,y,z)$ и $u_z(x,y,z) = R(x,y,z)$, а значит, в силу непрерывности функций P, Q, R, функция $u(x,y,z)$ дифференцируема в G.

Импликация $(c) \to (a)$ очевидна.

Докажем второе утверждение теоремы. Поскольку уже доказана эквивалентность условий (a) – (c), то достаточно доказать импликацию $(c) \to (d)$ и, в предположении о поверхностной односвязности области G, импликацию $(d) \to (a)$.

Пусть $P\,dx + Q\,dy + R\,dz = d\,u$, тогда $P = \frac{\partial u}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial u}{\partial y}$, $R = \frac{\partial u}{\partial z}$. По условию, функции P, Q, R имеют непрерывные частные производные, поэтому функции $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ непрерывны в области G. Следовательно, по соответствующему утверждению второго семестра, смешанные частные производные равны $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, т.е. $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. Аналогично доказывается, что $\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}$, $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$ в области G. Тем самым, доказана импликация $(c) \to (d)$.

Пусть теперь область G поверхностно односвязна и выполнено условие (d). Возмем произвольный замкнутый контур $L \subset G$. Пусть Γ — гладкая ориентируемая поверхность, расположенная в области G и ограниченная контуром L. По формуле Стокса[9]

$$\oint\limits_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint\limits_\Gamma \underbrace{\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)}_{=0} dxdy +$$
$$+ \underbrace{\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)}_{=0} dydz + \underbrace{\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)}_{=0} dzdx = 0,$$

что означает справедливость условия (a). □

Замечание 0.9. *Условия (a) и (b) непосредственно проверить сложно, поскольку в них фигурирует несчетное множество путей интегрирования, которое не имеет явной параметризации.*

Условие (c) можно проверить, строя функцию $\tilde{u}(x, y, z)$ как интеграл

$$\tilde{u}(x, y, z) = \int\limits_{L_{M_0 M}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz,$$

где $L_{M_0 M}$ — каким-то образом выбранные пути, соединяющие точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ с точкой $M(x, y, z)$ (например, эти пути могут быть ломаными, составленными из отрезков координатных линий), а затем

[9] Для возможности ее применения нам и нужна ориентируемость поверхности Γ.

проверяя дифференцируемость функции $\tilde{u}(x, y, z)$ *и сравнивая дифференциал* $d\tilde{u}(x, y, z)$ *и* $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$*. Однако построенная таким образом функция* $\tilde{u}(x, y, z)$ *может не быть даже непрерывной.*

Проще всего, конечно, проверяется условие (d)*.*

Глава 1

Скалярные и векторные поля

1.1 Основные понятия теории скалярных и векторных полей

1.1.1 Скалярное поле

Определение 1.1. *Если каждой точке M области G (на плоскости или в пространстве) поставлено в соответствие некоторое число $u(M)$, то говорят, что в области G задано скалярное поле.*

Скалярными полями задаются температура какого-либо тела, его плотность массы, плотность электрического заряда в трехмерной области или на поверхности.

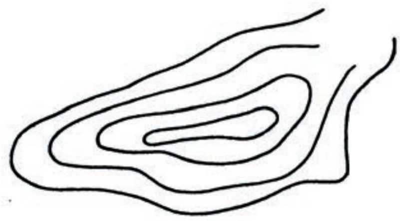

Рис. 1.1: линии уровня функции двух переменных.

Величина u есть функция точки M; если ввести ортогональную систему координат $Oxyz$, то скалярное поле будет описываться функцией трех переменных: $u = u(x, y, z)$. В разных системах координат эта функция может иметь различный вид. Но при фиксированной системе координат задание функции $u = u(x, y, z)$ эквивалентно заданию скалярного поля. Мы будем считать, что фиксирована некоторая прямоугольная система координат, и поэтому будем говорить, что функция $u = u(x, y, z)$, $(x, y, z) \in G$ задает скалярное поле в области G. Подмножество области G, заданное уравнением $u(x, y, z) = c = \text{const}$, называется множеством уровня функции $u(x, y, z)$.

Все это выглядит достаточно тривиальным, однако тут есть и весьма нетривиальный момент. Известно, что любое замкнутое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$ является множеством уровня некоторой бесконечно дифференцируемой функции (теорема Уитни)[1]. В то же время известно, что замкнутые множества могут быть весьма нерегулярными; примером является канторово подмножество отрезка $[0,1]$. Оно не содержит ни одного интервала, является так называемым *нуль множеством* (т.е. может быть покрыто конечной или счетной системой интервалов сколь угодно малой суммарной длины), и при этом несчетно. Однако для данной бесконечно дифференцируемой функции u множество тех значений $c \in \mathbb{R}$, для которых множество уровня не является гладкой поверхностью, является нуль множеством, при этом требование на гладкость функции можно понизить (теорема Сарда).

1.1.2 Векторное поле

Определение 1.2. *Если каждой точке M области G (на плоскости или в пространстве) поставлен в соответствие некоторый вектор $\mathbf{a}(M)$, то говорят, что в области G задано векторное поле.*

Физические примеры векторных полей: электрическое поле $\mathbf{E}(M)$, магнитное поле $\mathbf{B}(M)$, поле тяготения какой-либо массы $\mathbf{F}(M)$, поле скоростей жидкости $\mathbf{v}(M)$.

При фиксированной системе координат $Oxyz$ векторное поле задается вектор-функцией $\mathbf{a}(x,y,z)$ или тремя скалярными функциями — ее координатами:

$$\mathbf{a}(x,y,z) = \{P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\}. \tag{1.1}$$

Определение 1.3. *Гладкая кривая L называется* векторной линией *векторного поля $\mathbf{a}(M)$, если в каждой точке M кривой L вектор $\mathbf{a}(M)$ направлен по касательной к кривой L.*

В дальнейшем будем считать, что функции, задающие скалярное или векторное поле, имеют непрерывные частные производные первого порядка.

[1]Уитни Хаслер (1907–1989) — американский математик.

1.1.3 Производная по направлению и градиент скалярного поля

Во втором семестре для скалярного поля (скалярной функции) $u(x, y, z)$ были введены понятия градиента и производной по направлению:

$$\operatorname{grad} u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right\} = \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}, \ \ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{l}} = (\operatorname{grad} u, \mathbf{l}),$$

где $\mathbf{l}$ — единичный вектор заданного направления.

Данное определение градиента связано с выбором системы координат. Однако из последней формулы непосредственно следует, что на самом деле вектор $\operatorname{grad} u$ не зависит от выбора системы координат, поскольку его направление есть направление наибольшего роста скалярной величины u, а $|\operatorname{grad} u|$ есть скорость роста величины u в этом направлении. Если ввести другую систему координат, то координаты вектора $\operatorname{grad} u$ изменятся, но сам вектор, т.е. его длина и направление, останутся без изменения.

Определение 1.4. *Векторное поле называется* потенциальным *в области G, если его можно представить в этой области как градиент некоторого скалярного поля $u(M)$:*

$$\mathbf{a}(M) = \operatorname{grad} u(M) = \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\,\mathbf{k}. \tag{1.2}$$

Функция $u(M)$ называется скалярным потенциалом *векторного поля $\mathbf{a}(M)$.*

Пример 1.1. *Потенциал электрического поля точечного заряда q равен $u(M) = \dfrac{q}{r}$, а само электрическое поле есть*[2]

$$\mathbf{E}(M) = -\operatorname{grad} u(M) = \frac{q}{r^3}\mathbf{r} \quad \textit{при} \quad r := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \neq 0, \tag{1.3}$$

где $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ — радиус-вектор. Аналогичным образом потенциальным является и гравитационное поле точечной массы $\mathbf{F}(M) = -\dfrac{\gamma m}{r^3}\mathbf{r}$.

---

[2]В физике принято считать, что потенциальное векторное поле $\mathbf{a}$ связано со своим потенциалом u равенством $\mathbf{a} = -\operatorname{grad} u$.

1.1.4 Дивергенция векторного поля

Определение 1.5. Дивергенцией *векторного поля (1.1) называется скалярная функция*

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Это определение $\operatorname{div}\mathbf{a}$ связано с выбором системы координат. Мы покажем, что на самом деле функция $\operatorname{div}\mathbf{a}(M)$, $M = M(x, y, z)$ не зависит от выбора системы координат.

Пример 1.2. *Вычислим дивергенцию электрического поля (1.3) точечного заряда q, помещенного в начало координат.*

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = q\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3}\right)\right],$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right) = \frac{1}{r^3} - \frac{3x}{r^4}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5}.$$

Аналогично:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^3}\right) = \frac{1}{r^3} - \frac{3y^2}{r^5},\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3}\right) = \frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = q\frac{3r^2 - 3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = 0,\ r \neq 0.$$

1.1.5 Ротор векторного поля

Определение 1.6. Ротором *векторного поля (1.1) называется вектор-функция*

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

Ниже мы покажем, что ротор векторного поля, так же как и дивергенция векторного поля, не зависит от выбора системы координат.

Слушателям предлагается самостоятельно убедиться, что $\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$, $r \neq 0$ для электрического поля (1.3) точечного заряда q, помещенного в начало координат.

1.1.6 Циркуляция векторного поля

Определение 1.7. *Пусть в области G задано векторное поле (1.1) и пусть AB — кусочно-гладкая кривая, лежащая в области G. Криволинейный интеграл второго рода*

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz$$

называется циркуляцией *векторного поля* $\mathbf{a}$ *вдоль кривой* AB.

Если $d\mathbf{l} = \mathbf{t}\,ds =: \mathbf{i}dx + \mathbf{j}dy + \mathbf{k}dz$ — касательный вектор к кривой AB (в точках ее гладкости), $\mathbf{t}$ — единичный касательный вектор, а ds — дифференциал длины дуги, то циркуляцию можно записать в виде криволинейного интеграла второго или первого рода

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{AB} (\mathbf{a}, d\mathbf{l}) = \int\limits_{AB} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\ ds.$$

Данная форма записи циркуляции показывает, что *циркуляция не зависит от выбора системы координат.*

Работа силового поля $\mathbf{F}$ при перемещении материальной точки, на которую оно действует, по контуру L является циркуляцией поля $\mathbf{F}$ по контуру L.

1.1.7 Поток векторного поля

Определение 1.8. *Пусть в области G задано векторное поле (1.1) и пусть Γ — кусочно-гладкая двухсторонняя поверхность, лежащая в области G. Выберем одну из сторон поверхности Γ, зафиксировав непрерывное векторное поле единичных нормалей $\mathbf{n}(M) = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, т.е. ориентируем поверхность. Поверхностный интеграл второго рода*

$$\iint\limits_{\Gamma} (\mathbf{a}, \mathbf{n})\, d\sigma \tag{1.4}$$

называется потоком *векторного поля* $\mathbf{a}$ *через ориентированную поверхность* Γ.

Поток (1.4) можно также записать в виде

$$\iint\limits_{\Gamma} (\mathbf{a}, \mathbf{n})\, d\sigma = \iint\limits_{\Gamma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, d\sigma =$$

$$= \iint\limits_{\Gamma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy.$$

Очевидно, что поток векторного поля через ориентированную поверхность не зависит от выбора системы координат.

Физическими примерами потоков через поверхность Γ являются: при $\mathbf{a} = \mathbf{v}$ — поток жидкости, при $\mathbf{a} = \mathbf{B}$ — поток магнитного поля.

1.1.8 Инвариантное определение дивергенции векторного поля

С помощью введенных понятий дивергенции и потока векторного поля формулу Гаусса–Остроградского можно записать в виде:

$$\iiint\limits_{G} \operatorname{div}\mathbf{a}\, dxdydz = \iint\limits_{\Gamma} (\mathbf{a}, \mathbf{n})\, d\sigma, \tag{1.5}$$

т.е. поток векторного поля через внешнюю сторону замкнутой поверхности Γ равен интегралу от дивергенции поля по области G, ограниченной поверхностью Γ.

По формуле среднего значения левую часть (1.5) можно записать в виде

$$\iiint\limits_{G} \operatorname{div}\mathbf{a}\, dxdydz = \operatorname{div}\mathbf{a}(M^*)\cdot \iiint\limits_{G} dxdydz = \operatorname{div}\mathbf{a}(M^*)\cdot V(G),\ M^* \in G.$$

Поэтому

$$\operatorname{div}\mathbf{a}(M^*) = \frac{1}{V(G)} \iint\limits_{\Gamma} (\mathbf{a}, \mathbf{n})\, d\sigma.$$

Будем теперь стягивать поверхность Γ к некоторой точке $M \in G$. При этом $V(G) \to 0$, $M^* \to M$ и

$$\operatorname{div}\mathbf{a}(M) = \lim_{\Gamma \to M} \frac{1}{V(G)} \iint\limits_{\Gamma} (\mathbf{a}, \mathbf{n})\, d\sigma. \tag{1.6}$$

Так как объем области G и поток поля $\mathbf{a}$ через поверхность Γ не зависят от выбора системы координат, то и величина $\operatorname{div}\mathbf{a}(M)$ не зависит от выбора системы координат, а зависит только от самого поля $\mathbf{a}(M)$.

Обсудим теперь физический смысл дивергенции. Пусть полем $\mathbf{a}$ является электрическое поле $\mathbf{E}$, созданное набором N точечных электрических зарядов q_i, $i = 1, \ldots, N$, расположенных в области G. Удалим из области G малые шары с центрами, совпадающими с данными зарядами, и вычислим поток через границу Γ' получившейся области G'. С одной стороны, поскольку дивергенция поля точечного заряда (а значит, и их суперпозиции) равна нулю всюду, кроме точки расположения самого точечного заряда, то по формуле Гаусса–Остроградского поток электрического поля через поверхность Γ' равен нулю. С другой стороны, он складывается из потока через границу Γ области G и потоков через внутренние поверхности малых сфер. Устремляя радиусы малых сфер к нулю, получаем, что поток через i-ую сферу есть $-4\pi q_i$, а значит,

$$\iint\limits_{\Gamma} (\mathbf{E}, \mathbf{n})\, d\sigma = 4\pi Q,$$

где Q — полный электрический заряд области G. Данная формула, называемая в электростатике *теоремой Гаусса*, не зависит от количества точечных зарядов в области G, а потому справедлива и в предельном случае непрерывного распределения заряда в области G с объемной плотностью ρ. Подставляя теперь данное значение потока в формулу (1.6), мы получаем равенство

$$\operatorname{div} \mathbf{E}(M) = 4\pi\rho(M).$$

Таким образом, дивергенция является, с точностью до множителя, объемной плотностью источников векторного поля.

С помощью операции дивергенции записываются уравнения Максвелла для вектора электрического смещения $\mathbf{D}$ и вектора магнитной индукции $\mathbf{B}$:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho(M), \ \operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

1.1.9 Инвариантное определение ротора векторного поля

С помощью введенных понятий циркуляции и потока векторного поля формулу Стокса можно записать в виде:

$$\oint\limits_{L} (\mathbf{a}, d\mathbf{l}) = \iint\limits_{\Gamma} (\operatorname{rot} \mathbf{a}, \mathbf{n})\, d\sigma, \tag{1.7}$$

т.е. поток ротора векторного поля через ориентированную поверхность Γ равен циркуляции этого векторного поля по границе L поверхности Γ, направление обхода которой согласовано по правилу правого винта с ориентацией поверхности Γ.

По формуле среднего значения правую часть (1.7) можно записать в виде

$$\iint\limits_{\Gamma} (\operatorname{rot}\mathbf{a}, \mathbf{n})\, d\sigma = (\operatorname{rot}\mathbf{a}, \mathbf{n})|_{M^*} \iint\limits_{\Gamma} d\sigma = S(\Gamma)\, (\operatorname{rot}\mathbf{a}, \mathbf{n})|_{M^*}\,, \text{ где } M^* \in \Gamma.$$

Поэтому

$$(\operatorname{rot}\mathbf{a}, \mathbf{n})|_{M^*} = \frac{1}{S(\Gamma)} \oint\limits_{L} (\mathbf{a}, d\mathbf{l}).$$

Будем теперь стягивать границу L к некоторой точке $M \in \Gamma$ так, чтобы нормаль к поверхности Γ в точке M была постоянной. При этом $S(\Gamma) \to 0$, $M^* \to M$ и

$$(\operatorname{rot}\mathbf{a}, \mathbf{n})|_{M} = \lim_{L \to M} \frac{1}{S(\Gamma)} \oint\limits_{L} (\mathbf{a}, d\mathbf{l}). \tag{1.8}$$

Так как площадь поверхности Γ и циркуляция векторного поля $\mathbf{a}$ по контуру L не зависят от выбора системы координат, то и величина $(\operatorname{rot}\mathbf{a}, \mathbf{n})|_{M}$ не зависит от выбора системы координат, а зависит только от самого поля $\mathbf{a}(M)$.

Обсудим теперь физический смысл ротора. Циркуляция $\oint\limits_{L} (\mathbf{a}, d\mathbf{l})$ является количественной мерой *завихренности* векторного поля $\mathbf{a}$ (т.е. его способности совершать ненулевую работу вдоль замкнутых кривых) вдоль границы поверхности Γ, поэтому отношение

$$\frac{1}{S(\Gamma)} \oint\limits_{L} (\mathbf{a}, d\mathbf{l})$$

можно рассматривать как среднюю завихренность поля $\mathbf{a}$ на поверхности Γ, а предел этого отношения при $L \to M$ — как завихренность поля $\mathbf{a}$ в точке M в фиксированном направлении $\mathbf{n}$. Тем самым вектор $\operatorname{rot}\mathbf{a}(M)$ характеризует завихренность векторного поля $\mathbf{a}$ в точке M.

С помощью операции ротора записываются уравнения Максвелла, связывающие электрическое и магнитное поля:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},\ \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Здесь c — скорость света в вакууме, $\mathbf{H}$ – напряженность магнитного поля, а $\mathbf{j}$ — плотность электрического тока.

1.2 Потенциальные векторные поля

Обсудим свойства потенциальных векторных полей.

Если векторное поле $\mathbf{a}(M) = \{P, Q, R\}$ потенциально в области G, то, сравнивая (1.1) с (1.2), получаем

$$P = \frac{\partial u}{\partial x},\ Q = \frac{\partial u}{\partial y},\ R = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Следовательно, выражение

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy + \frac{\partial u}{\partial z}\,dz$$

является полным дифференциалом функции $u(x, y, z)$ в области G. Это означает, что выполнено условие (c) теоремы 0.4 об условиях независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования. Поэтому, по данной теореме, потенциальное в области G векторное поле $\mathbf{a}(M)$ обладает следующими свойствами:

1. Циркуляция потенциального поля $\mathbf{a}(M)$ вдоль любого замкнутого контура $L \subset G$ равна нулю:

   $$\oint\limits_L (\mathbf{a}, d\mathbf{l}) = \oint\limits_L Pdx + Qdy + Rdz = 0.$$

   Иногда это свойство принимают за определение потенциального поля.

2. $\forall A, B \in G$ циркуляция потенциального поля $\mathbf{a}(M) = \operatorname{grad} u(M)$ вдоль кривой, соединяющей точки A и B и целиком лежащей в области G, не зависит от вида этой кривой и равна разности значений потенциала u в точках A и B:

   $$\int\limits_{AB} (\mathbf{a}, d\mathbf{l}) = u(B) - u(A).$$

3. Если функции P, Q, R имеют непрерывные частные производные первого порядка и если поле $\mathbf{a}(M) = \{P, Q, R\}$ потенциально, то справедливо равенство

   $$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y},\ \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z},\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}. \tag{1.9}$$

   Эти равенства означают, что $\operatorname{rot} \mathbf{a} = \operatorname{rot} \operatorname{grad} u = 0$, т.е. *потенциальное поле является безвихревым.*

Рассмотрим обратный вопрос: верно ли, что безвихревое поле в области G является потенциальным? Это зависит от области. Если область G поверхностно односвязна, то в силу теоремы 0.4 из условия $\operatorname{rot}\mathbf{a} = 0$, т.е. из условия (1.9), следует существование функции u, определенной в области G и такой, что $\mathbf{a} = \operatorname{grad} u$, что означает потенциальность векторного поля $\mathbf{a}$.

Если же область G не является поверхностно односвязной, то безвихревое поле в этой области может не быть потенциальным. Действительно, пусть в пространстве $\mathbb{E}^3$ введена декартова система координат xyz и область G получена удалением из $\mathbb{E}^3$ оси Oz. Определим векторное поле $\mathbf{a}$ в G формулой

$$\mathbf{a}(x, y, z) = \left\{ \frac{-y}{x^2 + y^2},\, \frac{x}{x^2 + y^2},\, 0 \right\}. \tag{1.10}$$

Тогда

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot \mathbf{i} + 0 \cdot \mathbf{j} +$$

$$+ \left(\frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) = 0 \text{ в области } G.$$

Рассмотрим замкнутый контур $L: \ x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = \text{const},\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

$$\oint\limits_L (\mathbf{a}, d\mathbf{l}) = \int\limits_0^{2\pi} \left(-\frac{\sin t \cdot d\cos t}{\sin^2 t + \cos^2 t} + \frac{\cos t \cdot d\sin t}{\sin^2 t + \cos^2 t} \right) = \int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0.$$

Таким образом, хотя $\operatorname{rot}\mathbf{a} = 0$, но поле $\mathbf{a}$ не является потенциальным в области G.[3]

Подытожим: условие $\operatorname{rot}\mathbf{a} = 0$ в области V — необходимо для потенциальности поля $\mathbf{a}$, а необходимое условие и односвязность области V — достаточны для потенциальности поля $\mathbf{a}$ в области V.

[3]Наличию безвихревых векторных полей в поверхностно неодносвязных областях обязан своим существованием так называемый эффект Ааронова–Бома (1959 г.). Пусть имеется длинный тонкий соленоид с током. Вне соленоида магнитный потенциал, с точностью до постоянного множителя, равен (1.10), и ему соответствует нулевое магнитное поле. Поэтому соленоид вне себя не оказывает влияния на движение классической заряженной частицы (сила Лоренца равна нулю). Однако в уравнение Шредингера для квантовой частицы входит не само магнитное поле $\mathbf{H}$, а его векторный потенциал $\mathbf{A}$, $\operatorname{rot}\mathbf{A} = \mathbf{H}$, что приводит к дискретному спектру ее энергий и рассеянию на соленоиде. Подробнее см. И.М. Тернов, В.Ч. Жуковский, А.В. Борисов. Квантовая механика и макроскопические эффекты. МГУ, 1993. С. 15–26.

1.3 Соленоидальные векторные поля

Векторное поле $\mathbf{a}(M)$ называется *соленоидальным* (по греч. "трубчатым") в области G, если в этой области $\operatorname{div}\mathbf{a} = 0$, т.е. в области соленоидальности нет источников векторного поля.

Пример 1.3. *Электрическое поле точечного заряда* $\mathbf{E} = \dfrac{q\mathbf{r}}{r^3}$ *в любой области* G*, не содержащей заряда.*

Если векторное поле можно представить в виде

$$\mathbf{a} = \operatorname{rot}\mathbf{b},$$

то векторное поле $\mathbf{a}$ является соленоидальным (поскольку легко проверяется, что $\operatorname{div}\circ\operatorname{rot} \equiv 0$), а векторное поле $\mathbf{b}$ называется векторным потенциалом векторного поля $\mathbf{a}$.

Верно ли, что произвольное соленоидальное векторное поле в области G имеет векторный потенциал? Это зависит от области, и существуют области, в которых это неверно.

Пример 1.4. *Рассмотрим электрическое поле* $\mathbf{E} = q\mathbf{r}/r^3$ *точечного заряда* q*, расположенного в начале координат, в области* G*, заключенной между двумя концентрическими сферами с центром в начале координат (в шаровом слое). Как мы видели выше, в области* G *справедливо равенство* $\operatorname{div}\mathbf{E} = 0$*, но если бы в области* G *существовал векторный потенциал* $\mathbf{b}$ *такой, что* $\mathbf{E} = \operatorname{rot}\mathbf{b}$*, то для третьей сферы* $\mathbb{S}$*, концентрической с первыми двумя и расположенной между ними, в силу электростатической теоремы Гаусса и формулы Стокса было бы выполнено равенство*

$$4\pi q = \iint\limits_{\mathbb{S}} (\mathbf{E}, \mathbf{n})d\sigma = \iint\limits_{\mathbb{S}} (\operatorname{rot}\mathbf{b}, \mathbf{n})d\sigma = \int\limits_{\partial\mathbb{S}} (\mathbf{b}, \tau)d\ell = 0,$$

поскольку $\partial\mathbb{S} = \emptyset$*.*

Полученное противоречие показывает отсутствие векторного потенциала для данного соленоидального поля.

Область G называется *объемно односвязной*, если для любой ориентированной кусочно-гладкой замкнутой (= без границы) поверхности $\Gamma \subset G$ существует область $G_1 \subset G$ с границей Γ.

Шар, параллепипед — объемно односвязные области. Область G, заключенная между двумя сферами (не обязательно концентрическими), не является объемно односвязной (но является поверхностно односвязной), поскольку (деформированная) сфера, заключенная между двумя граничными сферами, не является границей никакой подобласти области G. Полноторие является объемно односвязной областью, но не является поверхностно односвязной.

Мы не можем доказать эти факты, поскольку это требует углубления в топологию. Можно доказать, хотя это и не просто, что выполнение условия $\operatorname{div}\mathbf{a} \equiv 0$ в объемно односвязной области V достаточно для существования в области V векторного потенциала для поля $\mathbf{a}$.[4]

Соленоидальное поле в объемно односвязной области G обладает следующим свойством: *поток соленоидального поля через любую кусочно-гладкую замкнутую поверхность* Γ*, расположенную в области* G*, равен нулю.* Действительно, пусть поверхность Γ является границей области $G_1 \subset G$. По формуле Остроградского–Гаусса имеем

$$\iint\limits_{\Gamma} (\mathbf{a}, \mathbf{n}) d\sigma = \iiint\limits_{G_1} \operatorname{div}\mathbf{a}\, dxdydz = \iiint\limits_{G_1} 0\, dxdydz = 0.$$

Как следует из примера 1.4, для областей, не являющихся объемно односвязными, данное свойство соленоидальных полей не имеет места.

Это свойство соленоидального поля показывает, что векторные линии соленоидального поля не могут начинаться и заканчиваться внутри области соленоидальности (как векторные линии электростатического поля, начинающиеся и заканчивающиеся на зарядах). Они либо начинаются и заканчиваются на границе области (пример: электростатическое поле в области, не содержащей зарядов), либо являются замкнутыми линиями (пример: магнитное поле длинного проводника).

[4]Также можно проверить прямым вычислением, что для шара любого радиуса с центром в начале координат формула

$$\begin{aligned}\mathbf{b} = \mathbf{i}\int_0^1 (zQ(tx,ty,tz) - yR(tx,ty,tz))\, t\, dt+\\ +\mathbf{j}\int_0^1 (xR(tx,ty,tz) - zP(tx,ty,tz))\, t\, dt+\\ +\mathbf{k}\int_0^1 (yP(tx,ty,tz) - xQ(tx,ty,tz))\, t\, dt\end{aligned}$$

задает векторный потенциал соленоидального поля $\mathbf{a} = \mathbf{P}\mathbf{i} + \mathbf{Q}\mathbf{j} + \mathbf{R}\mathbf{k}$. Эта формула справедлива и для области G, содержащей вместе с любой своей точкой M, отрезок, соединяющий M с началом координат, которое естественно можно выбрать произвольно (такие области называются звездными).

Для соленоидального поля имеет место **закон сохранения интенсивности векторной трубки**, т.е. трубки, составленной из векторных линий.

Поскольку

$$\iint\limits_{\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3} (\mathbf{a},\mathbf{n})d\sigma = 0 \text{ и } \iint\limits_{\Gamma_3} (\mathbf{a},\mathbf{n})d\sigma = 0,$$

в силу того, что поле **a** касается боковой поверхности трубки, то

$$\iint\limits_{\Gamma_1} (\mathbf{a},\mathbf{n})d\sigma = -\iint\limits_{\Gamma_2} (\mathbf{a},\mathbf{n})d\sigma.$$

Изменив ориентацию поверхности Γ_2, получим

$$\iint\limits_{\Gamma_1} (\mathbf{a},\mathbf{n})d\sigma = \iint\limits_{\Gamma_2} (\mathbf{a},\mathbf{n})d\sigma,$$

т.е. поток соленоидального векторного поля через все сечения векторной трубки постоянен.

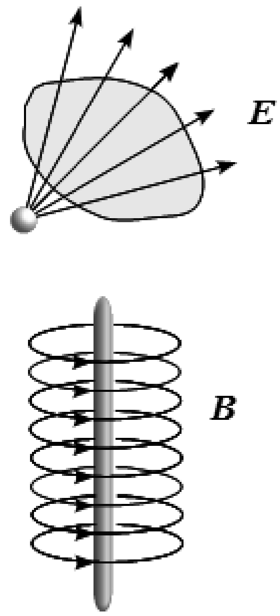

Рис. 1.2: соленоидальные поля.

Замечание 1.1. *Любое векторное поле* **a** *можно представить в виде суммы потенциального и соленоидального векторных полей:* $\mathbf{a} = \operatorname{grad} u + \mathbf{b}$*, где* $\operatorname{div}\mathbf{b} = 0$.

Действительно, взяв дивергенцию от равенства $\mathbf{a} = \mathbf{b} + \operatorname{grad} u$, получим уравнение Пуассона[5] $\operatorname{div}\operatorname{grad} u \equiv \triangle u = \operatorname{div}\mathbf{a}$, которое имеет решение (с большим произволом в виде граничных условий), что доказывается в курсе ММФ. Полагая теперь $\mathbf{b} := \mathbf{a} - \operatorname{grad} u$, получаем искомое разложение. Заметим, что оператор $\operatorname{div}\circ\operatorname{grad}$, действующий на скалярных функциях, называется *оператором Лапласа*.

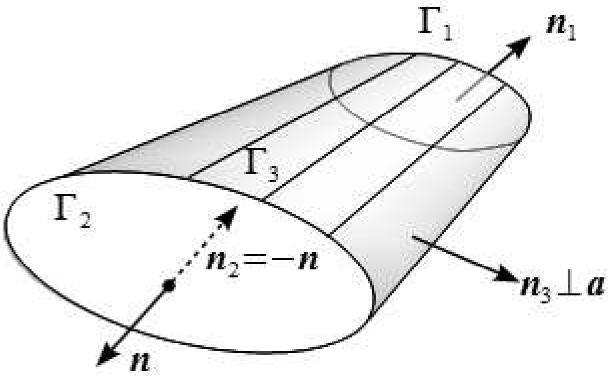

Рис. 1.3: трубка векторного поля.

[5]Пуассон Симеон Дени (1781–1840) — французский математик.

1.4 Оператор Гамильтона и повторные дифференциальные операции

Оператор Гамильтона[6] (или оператор "набла"[7]) определяется формулой

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} = \left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right\}.$$

При операциях с этим оператором нужно учитывать его двоякую векторно-дифференциальную природу. Как вектор он удовлетворяет тождествам векторной алгебры, а как оператор — правилам дифференцирования.

С помощью оператора Гамильтона можно записать операции векторного анализа в следующей форме:

$$\operatorname{grad} u = \nabla u = \mathbf{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial u}{\partial z},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = (\nabla, \mathbf{a}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}, \quad \text{где} \quad \mathbf{a} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k},$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = [\nabla, \mathbf{a}], \ \triangle = (\nabla, \nabla).$$

Зафиксируем некоторую (открытую) область G в пространстве $\mathbb{E}^3$. Обозначим через $\mathcal{F}$ линейное пространство бесконечное число раз дифференцируемых скалярных функций на G. Поскольку при умножении функций из $\mathcal{F}$ друг на друга и на вещественные числа результат будет опять лежать в $\mathcal{F}$, то линейное пространство $\mathcal{F}$ является *(коммутативной) алгеброй*. Обозначим через $\mathcal{X}$ линейное пространство бесконечное число раз дифференцируемых вектор-значных функций на G. При умножении функций из $\mathcal{X}$ на функции из коммутативной алгебры $\mathcal{F}$ мы получаем функции из $\mathcal{X}$. Поэтому линейное пространство $\mathcal{X}$ является *модулем* над алгеброй $\mathcal{F}$.

Теперь из операций grad, rot, div можно составить следующую последовательность отображений

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\text{grad}} \mathcal{X} \xrightarrow{\text{rot}} \mathcal{X} \xrightarrow{\text{div}} \mathcal{F},$$

причем, как мы уже видели ранее, выполнение двух последовательных отображений из этой последовательности дает нуль (последовательность

[6] Гамильтон Уильям Роуан (1805–1865) — ирландский математик.

[7] По древнегречески слово "набла" означает род арфы с треугольным остовом.

пространств и отображений с такими свойствами называется *цепным комплексом*).

Кроме этих двух нулевых повторных операций возможны еще три повторные операции:

$$\operatorname{div} \circ \operatorname{grad} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} =: \triangle u$$

— оператор Лапласа и операции $\operatorname{rot} \circ \operatorname{rot}$, $\operatorname{grad} \circ \operatorname{div}$, связанные тождеством

$$\operatorname{rot} \circ \operatorname{rot} \mathbf{a} = \operatorname{grad} \circ \operatorname{div} \mathbf{a} - \triangle \mathbf{a},$$

получаемым из известной формулы векторного анализа

$$[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}),$$

которая в данном случае записывается в виде

$$[\nabla, [\nabla, \mathbf{a}]] = \nabla(\nabla, \mathbf{a}) - (\nabla, \nabla)\mathbf{a}$$

и где операция $\triangle = (\nabla, \nabla)$ применяется к векторному полю $\mathbf{a}$ покомпонентно.

Уравнение Пуассона $\triangle u = f$ и его частный случай — уравнение Лапласа[8] $\triangle u = 0$ являются важными уравнениями математической физики. Важность оператора Лапласа и большая частота его появления в приложениях объясняется тем фактом, что он является с точностью до постоянного множителя единственным дифференциальным оператором второго порядка из $\mathcal{F}$ в $\mathcal{F}$, сохраняющим свой вид во всех декартовых системах координат. Более того, все дифференциальные операторы из $\mathcal{F}$ в $\mathcal{F}$, сохраняющие свой вид во всех декартовых системах координат, являются многочленами с постоянными коэффициентами от оператора $\triangle$.

Функции, удовлетворяющие в области G уравнению Лапласа, называются *гармоническими* в этой области. Примеры гармонических функций: $u = Ax + By + Cz$, $A, B, C = \mathrm{const}$; $u = 1/r$, $r \neq 0$. Следующие два примера приводят естественным образом к оператору Лапласа и гармоническим функциям.

Пример 1.5. *Пусть векторное поле* $\mathbf{a}$ *является потенциальным и соленоидальным. Тогда* $\mathbf{a} = \operatorname{grad} u$, $\triangle u = \operatorname{div} \operatorname{grad} u = \operatorname{div} \mathbf{a} = 0$, *т.е. скалярный потенциал векторного поля, являющегося потенциальным и соленоидальным, есть гармоническая функция.*

[8]Лаплас Пьер Симон де (1749–1827) — французский математик.

Поскольку вещественная и мнимая части аналитической функции являются гармоническими, то таким образом получается большой запас явных гармонических функций.

Пример 1.6. *Пусть векторное поле* $\mathbf{a} = P\mathbf{i}+Q\mathbf{j}+R\mathbf{k}$ *является соленоидальным и безвихревым, т.е.* $\operatorname{div}\mathbf{a} = 0$ *и* $\operatorname{rot}\mathbf{a} = 0$*, а его компоненты – дважды непрерывно дифференцируемы. Тогда*

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y},\ \frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z},\ \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}.$$

Отсюда получаем:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 R}{\partial x\partial z}=0,\ \frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 P}{\partial y^2},\ \frac{\partial^2 R}{\partial x\partial z}=\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}\ \Rightarrow$$
$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}=0,\ \Rightarrow \triangle P=0.$$

Аналогично доказывается, что $\triangle Q = 0$*,* $\triangle R = 0$*. Таким образом, компоненты соленоидального безвихревого поля являются гармоническими функциями.*

Пример 1.7. *Пусть векторное поле* $\mathbf{a} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ *является соленоидальным и безвихревым. Тогда*

$$\operatorname{div}\mathbf{a}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}=0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}.$$

Это в точности условия Коши–Римана для функции комплексной переменной $f(z) = Q(x, y) + iP(x, y)$*,* $z = x + iy$*, которая, в предположении существования непрерывных частных производных у функций* P, Q *в области* D*, является аналитической в* D*.*

1.5 Операции векторного анализа в криволинейных ортогональных координатах

Градиент, дивергенция и ротор были введены в прямоугольной системе координат $Oxyz$. Во многих задачах математической физики удобнее пользоваться выражениями для этих операций в других системах координат, например, в цилиндрической или сферической. Мы выведем выражения для grad, div и rot в так называемых криволинейных ортогональных координатах, частными случаями которых являются цилиндрическая и сферическая системы.

1.5.1 Криволинейные ортогональные координаты

При изучении тройного интеграла уже рассматривались замены переменных вида

$$x = \varphi(u, v, w), y = \psi(u, v, w), z = \chi(u, v, w).$$

Тройку чисел (u, v, w), соответствующую тройке чисел (x, y, z), можно рассматривать как криволинейные координаты точки $M(x, y, z)$, принадлежащей некоторой области G, которая может совпадать со всем пространством $\mathbb{E}^3$. Эти координаты называются криволинейными потому, что соответствующие им координатные поверхности ($u = \text{const}$, $v = \text{const}$ или $w = \text{const}$) и координатные линии (множества постоянства пары координат) являются, вообще говоря, кривыми поверхностями и линиями.

В данном параграфе будем обозначать криволинейные координаты через q_1, q_2, q_3, а формулы, связывающие координаты (x, y, z) с координатами (q_1, q_2, q_3), будем записывать в виде

$$x = x(q_1, q_2, q_3), y = y(q_1, q_2, q_3), z = z(q_1, q_2, q_3),$$

считая функции $x(q_1, q_2, q_3)$, $y(q_1, q_2, q_3)$, $z(q_1, q_2, q_3)$ дифференцируемыми достаточное количество раз. Через каждую точку пространства проходят три координатные линии, на каждой из которых изменяется только одна из координат: q_1, q_2 или q_3. Криволинейные координаты называются *ортогональными*, если в любой точке три координатные линии, проходящие через эту точку, попарно ортогональны, т.е. касательные к координатным линиям в этой точке попарно перпендикулярны.

1.5.2 Параметры Ламе

Пусть q_1, q_2, q_3 — криволинейные ортогональные координаты. Рассмотрим криволинейный параллелепипед, ограниченный тремя парами близких криволинейных координатных поверхностей. Пусть точка M соответствует тройкам координат q_1, q_2, q_3 и x, y, z, а вдоль криволинейного отрезка $[M, M_i]$ координатной линии координата q_i увеличивается на величину $\Delta q_i > 0$, $i = 1, 2, 3$. Вычислим длины $\Delta \ell_i$ ребер $[M, M_i]$, $i = 1, 2, 3$ параллелепипеда, площади его граней и его объем в первом ненулевом порядке по Δq_1, Δq_2, Δq_3.

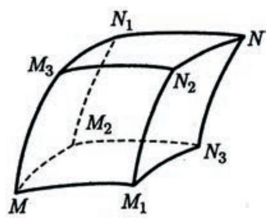

Рис. 1.4: криволинейный параллелепипед.

Пусть декартовы прямоугольные координаты точки M_1 равны $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$. Тогда

$$\Delta x = x(q_1 + \Delta q_1, q_2, q_3) - x(q_1, q_2, q_3) = \frac{\partial x}{\partial q_1}(M)\Delta q_1 + O(\Delta q_1^2).$$

Аналогично,

$$\Delta y = \frac{\partial y}{\partial q_1}(M)\Delta q_1 + O(\Delta q_1^2),\ \Delta z = \frac{\partial z}{\partial q_1}(M)\Delta q_1 + O(\Delta q_1^2).$$

Поэтому $\Delta \ell_1 = H_1 \Delta q_1 + O(\Delta q_1^2)$, где

$$H_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2}.$$

Аналогично, $\Delta \ell_2 = H_2 \Delta q_2 + O(\Delta q_2^2)$, $\Delta \ell_3 = H_3 \Delta q_3 + O(\Delta q_3^2)$, где

$$H_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)^2},$$

$$H_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)^2}.$$

Величины H_1, H_2, H_3 называются *параметрами Ламе*[9] для криволинейных координат q_1, q_2, q_3 или *масштабными множителями*. Они характеризуют изменение длины координатных линий в зависимости от изменения соответствующей криволинейной координаты.

Площади граней параллелепипеда равны, соответственно,

$$\begin{aligned}
\Delta s_1 &= \Delta \ell_2 \Delta \ell_3 + O(\Delta_3) = H_2 H_3 \Delta q_2 \Delta q_3 + O(\Delta_3),\\
\Delta s_2 &= \Delta \ell_1 \Delta \ell_3 + O(\Delta_3) = H_1 H_3 \Delta q_1 \Delta q_3 + O(\Delta_3),\\
\Delta s_3 &= \Delta \ell_1 \Delta \ell_2 + O(\Delta_3) = H_1 H_2 \Delta q_1 \Delta q_2 + O(\Delta_3),
\end{aligned}$$

а его объем —

$$V(G') = H_1 H_2 H_3 \Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3 + O(\Delta_4), \tag{1.11}$$

где Δ_i, $i = 3, 4$ — сумма всех возможных мономов i-ых степеней от переменных Δq_1, Δq_2, Δq_3.

[9] Ламе Габриэль (1795–1870) — французский математик.

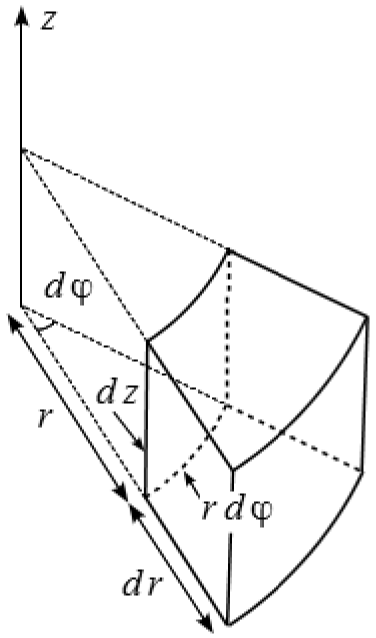

Рис. 1.5: цилиндрические координаты

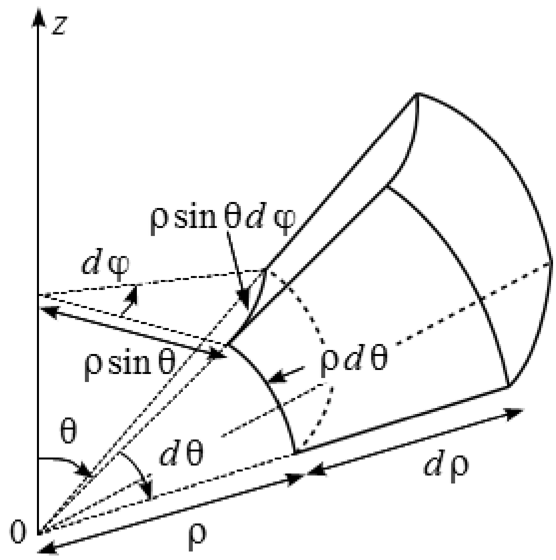

Рис. 1.6: сферические координаты

Пример 1.8. *Для цилиндрических координат $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$, $q_1 = r$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$, и мы получаем*

$$H_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi + 0} = 1,$$

$$H_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = \sqrt{(r\sin\varphi)^2 + (r\cos\varphi)^2 + 0} = r,$$

$$H_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2} = \sqrt{0+0+1} = 1.$$

Это можно усмотреть и без вычислений из рисунка 1.5.

Пример 1.9. *Для сферических координат (см. рис. 1.6) $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$, $q_1 = r \geqslant 0$, $q_2 = \theta \in [0,\pi]$, $q_3 = \varphi \in [0, 2\pi)$, и мы получаем*

$$H_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\sin^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\theta\sin^2\varphi + \cos^2\theta} = 1,$$

$$H_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{(r\cos\theta\cos\varphi)^2 + (r\cos\theta\sin\varphi)^2 + (r\sin\theta)^2} = r,$$

$$H_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{(r\sin\theta\sin\varphi)^2 + (r\sin\theta\cos\varphi)^2 + 0} = r\sin\theta.$$

1.5.3 Градиент

Пусть, как и выше, $M(q_1, q_2, q_3)$ и пусть $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ — ортогональный базис, состоящий из единичных касательных векторов к координатным линиям в точке M, направленных в сторону возрастания соответствующих координат. Заметим, что при движении точки M направления векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ будут, вообще говоря, меняться.[10] Пусть $u(M)$, $M \in G$ — некоторая дифференцируемая в области G функция. Разложим $\operatorname{grad} u(M)$ по базису $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.

Координаты вектора $\operatorname{grad} u(M)$ в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ — это проекции вектора $\operatorname{grad} u(M)$ на базисные векторы. Но проекция $\operatorname{grad} u(M)$ на вектор $\mathbf{e}_i$ равна скалярному произведению $(\operatorname{grad} u(M), \mathbf{e}_i)$, что совпадает с производной функции u по направлению $\mathbf{e}_i$. Поэтому

$$(\operatorname{grad} u(M), \mathbf{e}_1) = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{e}_1} = \lim_{\Delta\ell_1\to 0} \frac{u(q_1 + \Delta q_1, q_2, q_3) - u(q_1, q_2, q_3)}{\Delta\ell_1} =$$

$$= \frac{1}{H_1} \lim_{\Delta q_1\to 0} \frac{u(q_1 + \Delta q_1, q_2, q_3) - u(q_1, q_2, q_3)}{\Delta q_1} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}.$$

Аналогично получаем

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{e}_i} = \frac{1}{H_i}\frac{\partial u}{\partial q_i},\ i = 2, 3.$$

Окончательно,

$$\operatorname{grad} u(M) = \frac{1}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\mathbf{e}_2 + \frac{1}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\mathbf{e}_3.$$

Слушателям предлагается выписать формулы для градиента в цилиндрической и сферической системах координат.

[10] Такой базис называется *подвижным репером.*

1.5.4 Дивергенция

Пусть $\mathbf{a}(M) = \sum_{i=1}^{3} a_i(M)\mathbf{e}_i(M)$ — дифференцируемое векторное поле в области G. Для получения выражения $\operatorname{div}\mathbf{a}(M)$ в ортогональных криволинейных координатах будем использовать инвариантное определение дивергенции:

$$\operatorname{div}\mathbf{a}(M) = \lim_{\Gamma\to M} \frac{1}{V(G')} \iint\limits_{\Gamma} (\mathbf{a}(M), \mathbf{n})\, d\sigma, \tag{1.12}$$

где поверхность Γ ограничивает область G', содержащую точку M, и стягивается в пределе к этой точке. В качестве области G' мы возмем криволинейный параллелепипед, изображенный на рисунке 1.4 (тот факт, что точка M лежит на его границе Γ, не играет роли) и перейдем в (1.12) к пределу при $\Delta q_i \to 0$, $i = 1, 2, 3$. Поскольку $V(G')$ — величина третьего порядка малости относительно Δq_i, то для вычисления предела в (1.12) нам нужно вычислить интеграл

$$\iint\limits_{\Gamma} (\mathbf{a}(M), \mathbf{n})\, d\sigma \tag{1.13}$$

с точностью до членов четвертого порядка малости.[11]

Пусть $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{q}_3$ — координаты переменной точки в параллелепипеде G'. Обозначим через Γ_i грань параллелепипеда, лежащую на поверхности $\tilde{q}_i = q_i$, а через Γ_i' — грань параллелепипеда, лежащую на поверхности $\tilde{q}_i = q_i + \Delta q_i$. Тогда

$$\iint\limits_{\Gamma} (\mathbf{a}(M), \mathbf{n})\, d\sigma = \sum_{i=1}^{3} \iint\limits_{\Gamma_i \cup \Gamma_i'} (\mathbf{a}(M), \mathbf{n})\, d\sigma.$$

Поскольку нормаль к граням Γ_1 и Γ_1' параллелепипеда G' параллельна координатной линии $\tilde{q}_1$ и, поэтому, $d\sigma|_{\Gamma_1\cup\Gamma_1'} = H_2 H_3 d\tilde{q}_2 d\tilde{q}_3$, то первый интеграл можно представить по формуле среднего значения и формуле конечных приращений в виде:

$$\iint\limits_{\Gamma_1 \cup \Gamma_1'} (\mathbf{a}(M), \mathbf{n})\, d\sigma = \iint\limits_{\substack{q_2 \leqslant \tilde{q}_2 \leqslant q_2 + \Delta q_2 \\ q_3 \leqslant \tilde{q}_3 \leqslant q_3 + \Delta q_3}} [(a_1 H_2 H_3)(q_1 + \Delta q_1, \tilde{q}_2, \tilde{q}_3) -$$

[11]Отметим, что в книге Будак Б.М., Фомин С.В. Кратные интегралы и ряды. Изд. 3-е, М., Физматлит, 2002 формула для дивергенции в ортогональных криволинейных координатах получена нестрого, поскольку при вычислении интеграла (1.13) рассуждения ведутся с точностью только до третьего порядка малости. Аналогичное замечание справедливо для вычисления ротора.

$$- (a_1 H_2 H_3)(q_1, \tilde{q}_2, \tilde{q}_3)] \, d\tilde{q}_2 d\tilde{q}_3 = [(a_1 H_2 H_3)(q_1 + \Delta q_1, q_2^*, q_3^*) -$$
$$-(a_1 H_2 H_3)(q_1, q_2^*, q_3^*)] \Delta q_2 \Delta q_3 = \frac{\partial}{\partial q_1}(a_1 H_2 H_3)\Big|_{(q_1^*, q_2^*, q_3^*)} \cdot \Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3,$$

где $q_i \leqslant q_i^* \leqslant q_i + \Delta q_i$, $i = 1, 2, 3$. Применяя циклическую перестановку, получим

$$\iint\limits_{\Gamma} (\mathbf{a}(M), \mathbf{n}) \, d\sigma = \left[\frac{\partial}{\partial q_1}(a_1 H_2 H_3)\Big|_{(q_1^*, q_2^*, q_3^*)} + \frac{\partial}{\partial q_2}(a_2 H_1 H_3)\Big|_{(\overline{q}_1, \overline{q}_2, \overline{q}_3)} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial q_3}(a_3 H_1 H_2)\Big|_{(\hat{q}_1, \hat{q}_2, \hat{q}_3)} \right] \cdot \Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3,$$

где $q_i \leqslant \overline{q}_i$, $\hat{q}_i \leqslant q_i + \Delta q_i$, $i = 1, 2, 3$. Учитывая выражение (1.11) для объема криволинейного параллелепипеда, по формуле (1.12) получаем

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(M) = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \lim_{\Delta q_i \to 0} \left[\frac{\partial}{\partial q_1}(a_1 H_2 H_3)\Big|_{(q_1^*, q_2^*, q_3^*)} + \right. \tag{1.14}$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial q_2}(a_2 H_1 H_3)\Big|_{(\overline{q}_1, \overline{q}_2, \overline{q}_3)} + \frac{\partial}{\partial q_3}(a_3 H_1 H_2)\Big|_{(\hat{q}_1, \hat{q}_2, \hat{q}_3)} \right] =$$
$$= \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1}(a_1 H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(a_2 H_1 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_3}(a_3 H_1 H_2) \right]_{(q_1, q_2, q_3)}.$$

Слушателям предлагается выписать формулы для дивергенции в цилиндрической и сферической системах координат.

1.5.5 Ротор

Для получения выражения $\operatorname{rot} \mathbf{a}(M)$ в ортогональных криволинейных координатах будем использовать инвариантное определение ротора:

$$(\operatorname{rot} \mathbf{a}(M), \mathbf{n}(M)) = \lim_{L \to M} \frac{1}{S(\Gamma_0)} \oint\limits_{L} (\mathbf{a}(M), d\mathbf{l}), \tag{1.15}$$

где замкнутая кривая L ограничивает поверхность Γ_0, содержащую точку M, и стягивается в пределе к этой точке, а направление обхода кривой L связано правилом правого винта с полем единичных нормалей $\mathbf{n}$ на поверхности Γ_0. В качестве поверхности Γ_0 мы возмем грань Γ_1 нашего криволинейного параллелепипеда, изображенного на рисунке 1.4, в качестве нормали к поверхности Γ_0 выберем внутреннюю нормаль к параллелепипеду и перейдем в (1.15) к пределу при $\Delta q_i \to 0$, $i = 1, 2, 3$. Поскольку $S(\Gamma_0)$ — величина второго порядка малости относительно Δq_i, то для вычисления предела в (1.15) нам нужно вычислить интеграл

$$\oint_L (\mathbf{a}(M), d\mathbf{l}) \tag{1.16}$$

с точностью до членов третьего порядка малости.

Вычислим интеграл (1.16) по формуле среднего значения и формуле конечных приращений с учетом того, что

$$d\mathbf{l}\big|_{\substack{\tilde{q}_1=\text{const}\\ \tilde{q}_3=\text{const}}} = \pm H_2\mathbf{e}_2 d\tilde{q}_2, \ d\mathbf{l}\big|_{\substack{\tilde{q}_1=\text{const}\\ \tilde{q}_2=\text{const}}} = \pm H_3\mathbf{e}_3 d\tilde{q}_3.$$

Имеем:

$$\oint_L (\mathbf{a}(M), d\mathbf{l}) = \int_{q_2}^{q_2+\Delta q_2} \left[(a_2H_2)(q_1, \tilde{q}_2, q_3) - (a_2H_2)(q_1, \tilde{q}_2, q_3 + \Delta q_3)\right] d\tilde{q}_2 +$$

$$+ \int_{q_3}^{q_3+\Delta q_3} \left[(a_3H_3)(q_1, q_2 + \Delta q_2, \tilde{q}_3) - (a_3H_3)(q_1, q_2, \tilde{q}_3)\right] d\tilde{q}_3 =$$

$$= [(a_2H_2)(q_1, q_2^*, q_3) - (a_2H_2)(q_1, q_2^*, q_3 + \Delta q_3)]\Delta q_2 +$$

$$+[(a_3H_3)(q_1, q_2 + \Delta q_2, q_3^*) - (a_3H_3)(q_1, q_2, q_3^*)]\Delta q_3 =$$

$$= \left[- \frac{\partial}{\partial q_3}(a_2H_2)\bigg|_{(q_1, q_2^*, \overline{q}_3)} + \frac{\partial}{\partial q_2}(a_3H_3)\bigg|_{(q_1, \overline{q}_2, q_3^*)}\right] \cdot \Delta q_2 \Delta q_3,$$

где $q_i \leqslant \overline{q}_i, q_i^* \leqslant q_i + \Delta q_i$, $i = 2, 3$. Отсюда по формуле (1.15)

$$(\operatorname{rot} \mathbf{a}(M), \mathbf{e}_1) = \frac{1}{H_2H_3} \lim_{\substack{\Delta q_2 \to 0\\ \Delta q_3 \to 0}} \left[\frac{\partial}{\partial q_2}(a_3H_3)\bigg|_{(q_1, \overline{q}_2, q_3^*)} - \frac{\partial}{\partial q_3}(a_2H_2)\bigg|_{(q_1, q_2^*, \overline{q}_3)}\right] =$$

$$= \frac{1}{H_2H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_2}(a_3H_3) - \frac{\partial}{\partial q_3}(a_2H_2)\right]\bigg|_{(q_1, q_2, q_3)}.$$

Производя циклическую перестановку индексов, получим

$$\operatorname{rot} \mathbf{a}(M) = \frac{1}{H_1H_2H_3} \begin{vmatrix} H_1\mathbf{e}_1 & H_2\mathbf{e}_2 & H_3\mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ H_1a_1 & H_2a_2 & H_3a_3 \end{vmatrix}. \tag{1.17}$$

Слушателям предлагается выписать формулы для ротора в цилиндрической и сферической системах координат.

Пример 1.10. *Попробуем найти векторный потенциал кулоновского поля*

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{\mathbf{e}_r}{r^2}$$

точечного заряда в сферических координатах, отдавая себе отчет, что в области $\mathbb{E}^3 \setminus \{0\}$ *он не существует, поскольку эта область объемно не односвязна, а поток поля* $\mathbf{E}$ *через сферу с центром в начале координат отличен от нуля.*

Воспользуемся сферическими координатами (r, θ, φ), *рассмотренными в примере 1.9 с коэффициентами Ламе* $H_r = 1, H_\theta = r, H_\varphi = r \sin\theta$. *Используя формулу (1.17), запишем уравнение*

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} \equiv \operatorname{rot}(a_r \mathbf{e}_r + a_\theta \mathbf{e}_\theta + a_\varphi \mathbf{e}_\varphi) = \frac{\mathbf{e}_r}{r^2} \tag{1.18}$$

в виде:

$$\frac{\mathbf{e}_r}{r^2} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & r\sin\theta \mathbf{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ a_r & r a_\theta & r \sin\theta a_\varphi \end{vmatrix}.$$

Векторное уравнение (1.18) эквивалентно системе

$$\frac{r}{\sin\theta} \left(\frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta\, a_\varphi) - \frac{\partial a_\theta}{\partial\varphi} \right) = 1, \tag{1.19}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (r \sin\theta a_\varphi) = \frac{\partial (r a_\theta)}{\partial \varphi}, \tag{1.20}$$

$$\frac{\partial (r a_\theta)}{\partial r} = \frac{\partial a_r}{\partial \theta}. \tag{1.21}$$

трех скалярных уравнений. Поскольку коэффициенты Ламе не зависят от координаты φ, *естественно искать коэффициенты* a_r, a_θ, a_φ *также не зависящими от* φ. *Тогда уравнение (1.19) дает*

$$\frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta\, a_\varphi) = \frac{\sin\theta}{r} \;\Rightarrow\; a_\varphi = -\frac{\operatorname{ctg}\theta}{r} + \frac{f(r)}{\sin\theta}$$

и из (1.20) получим $f(r) = \dfrac{c}{r}$, $c = \mathrm{const}$ *и окончательно:*

$$a_\varphi = -\frac{\operatorname{ctg}\theta}{r} + \frac{c}{r\sin\theta} = \frac{c - \cos\theta}{r \sin\theta}.$$

Наконец, уравнение (1.21) проще всего удовлетворить, положив $a_\theta \equiv a_r \equiv 0$.

Итак, векторное поле

$$\mathbf{a} = \frac{c - \cos\theta}{r \sin\theta} \mathbf{e}_\varphi$$

является векторным потенциалом кулоновского поля точечного заряда, определенным во всем пространстве, кроме z-оси, т.е. в объемно односвязной области, которая, однако, не является звездной.

1.5.6 Оператор Лапласа

Выражение для оператора Лапласа в ортогональных криволинейных координатах получается композицией операторов div и grad:

$$\triangle u = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{H_1 H_3}{H_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} \right) \right].$$

Слушателям предлагается выписать формулы для оператора Лапласа в цилиндрической и сферической системах координат.

Глава 2

Числовые ряды

Самостоятельное значение понятие числового и функционального ряда приобрело в 17 веке, особенно после работ И. Ньютона, посвященных степенным рядам, работ Г. Лейбница и Я. Бернулли о применении рядов для вычисления определенных интегралов и интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. В 1712 г. Б. Тейлор нашел формулу разложения функций в степенные ряды, носящую теперь его имя (опубликована в 1715 г.). В несколько ином виде этот ряд был ранее известен Лейбницу и Я. Бернулли.

В 18 веке ряды широко использовались для проведения численных расчетов, в частности в задачах небесной механики, с точностью, недостижимой в предыдущие века. Например, задачей вычисления числа π с возможно большей точностью математики интересовались еще с античности.[1] В конце 16 века голландский математик Людольф ван Цейлен, затратив десять лет на вычисления числа π при помощи правильного n-угольника при $n = 60 \cdot 2^{29} = 32212254720$, получил 20 точных знаков, а позднее довел число точных знаков до 35.[2] Однако в начале 18 века при помощи ряда

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \tag{2.1}$$

при значительно меньших затратах труда было получено значительно больше точных десятичных знаков числа π. При $x = 1$ члены ряда (2.1)

---

[1] Одной из причин этого была надежда обнаружить период в десятичном разложении π и затем доказать, что оно рационально, что не верно, как было доказано в 1761 году И.Г. Ламбертом.

[2] Нетрудно проверить, что, если p_n и P_n – периметры вписанного и описанного правильных многоугольников вокруг окружности длины C, то $p_n < C < P_n$. Архимед, рассмотрев 96-угольник, получил оценку $3.14084 \dots \approx 3\frac{10}{71} \leqslant \pi \approx 3,14159 \leqslant 3\frac{1}{7} \approx 3.14285 \dots$. При этом, Архимед использовал формулы, выражающие периметр правильного вписанного или описанного многоугольника, через периметр предыдущего с вдвое меньшим числом сторон. Этим же пользовался и ван Цейлен.

слишком медленно убывают, однако используя формулы

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3} = 4\operatorname{arctg}\frac{1}{5} - \operatorname{arctg}\frac{1}{239}$$

и ряд (2.1), математикам удалось вычислить свыше ста точных десятичных цифр. Например, Эйлер, бывший, кроме прочего, уникальным вычислителем, получил 153 точных десятичных знаков числа π за 80 часов, что более чем достаточно для всех практических приложений.[3]

2.1 Основные понятия теории числовых рядов

Формальная сумма

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots, \; a_k \in \mathbb{R} \tag{2.2}$$

называется *числовым рядом*, а соответствующая ей последовательность

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

— *последовательностью частичных сумм числового ряда.*

Определение 2.1. *Числовой ряд (2.2) называется сходящимся, если сходится последовательность S_n. При этом $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ называется суммой ряда (2.2). В этом случае пишут $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$. Если же последовательность S_n не сходится к конечному пределу, то ряд (2.2) называется расходящимся. В случае $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$ пишут $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$.*

При исследовании сходимости числовых рядов мы следим за малостью членов a_k, т.е. за скоростью изменения членов последовательности S_n, в то время как при непосредственном исследовании сходимости последовательности S_n мы следим за приближением ее членов к некоторому пределу. Таким образом, мы видим, что сходимость числовых рядов представляет собой иной взгляд на понятие сходимости по отношению к сходимости последовательностей.

[3] По состоянию на 2011 год вычислено 10 триллионов десятичных знаков числа π. Примеры эффективных вычислений вручную с помощью рядов см. в книге Фихтенгольц Г.М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, Т. 2, п. 409-412. Более подробно о истории вычисления числа π можно прочитать в брошюре А.В. Жуков, О числе π, М: МЦНМО, 2002.

Пример 2.1. *Ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}$$

расходится, поскольку последовательность его частичных сумм $S_n = \frac{1}{2}(1-(-1)^n)$ *не имеет предела.*

Пример 2.2. *Рассмотрим ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1},$$

составленный из членов геометрической прогрессии. Его частичная сумма S_n *при* $q \neq 1$ *имеет вид*

$$S_n = \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q}.$$

Очевидно, что при $|q| < 1$ *последовательность частичных сумм* S_n *сходится и имеет предел, равный* $\frac{1}{1-q}$. *Таким образом, при* $|q| < 1$ *рассматриваемый ряд сходится и имеет сумму, равную* $\frac{1}{1-q}$.

При $|q| \geqslant 1$ *последовательность* S_n *расходится, а значит, расходится и рассматриваемый ряд.*

Пример 2.3. *Пусть* $x \in \mathbb{R}$. *Докажем, что ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \tag{2.3}$$

сходится к сумме e^x.

Действительно, в первом семестре было получено разложение функции e^x *по формуле Маклорена*

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!}e^{\theta x},\ 0 < \theta < 1.$$

Отсюда

$$\left|1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} - e^x\right| \leqslant \frac{|x|^n}{n!}e^{|x|} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Таким образом, ряд (2.3) сходится к функции e^x.

Пример 2.4. *Аналогично, используя формулу Маклорена для функций* $\sin x$ *и* $\cos x$*, можно доказать, что ряды*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}x^{2k-1}}{(2k-1)!},\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}x^{2k-2}}{(2k-2)!}$$

сходятся при любом x *и имеют суммы, соответственно,* $\sin x$ *и* $\cos x$*.*

Следующие два свойства рядов сразу следуют из определения сходимости.

Предложение 2.1. *1. Отбрасывание конечного числа членов ряда (или добавление к ряду конечного числа членов) не влияет на сходимость или расходимость этого ряда.*

2. Если $c = \mathrm{const} \neq 0$*, то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{n} ca_k$ *сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд* $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$*.*

Теорема 2.1 (критерий Коши[4]). *Для того чтобы ряд (2.2) сходился, необходимо и достаточно, чтобы* $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$ *такое, что* $\forall n > N$ *и* $\forall p \in \mathbb{N}$ *было выполнено неравенство*

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon. \tag{2.4}$$

Доказательство. Доказательство критерия Коши сразу получается из критерия Коши для сходимости последовательности частичных сумм S_n, поскольку $S_{n+p} - S_n = \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k$. □

Следствие 2.1. *Величина* $r_n := \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$ *называется* n*-ым остатком ряда (2.2). Если ряд (2.2) сходится, то последовательность* r_n *является бесконечно малой.*

Доказательство. Поскольку ряд для r_n отличается лишь конечным числом слагаемых от ряда (2.2), то из сходимости последнего следует сходимость первого. Если же при этом перейти в левой части неравенства (2.4)

[4]Коши Огюстен Луи (1789–1857) — французский математик.

к пределу при $p \to +\infty$, то мы получим, что $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$ такое, что $\forall n > N$ выполнено неравенство

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \right| \leqslant \varepsilon.$$

Это и означает, что $r_n \to 0$. $\square$

Аналогичным образом, полагая в (2.4) $p = 1$, получаем

Следствие 2.2 (необходимый признак сходимости ряда)**.** *Если ряд (2.2) сходится, то* $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$.

При исследовании вопроса о сходимости ряда полезно сначала проверить выполнение необходимого признака сходимости.

Пример 2.5.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

— гармонический ряд. *Необходимое условие сходимости для данного ряда, очевидно, выполнено. Однако данный ряд расходится. Действительно, если положить в критерии Коши* $p = n$, *то* $\forall n$ *имеем*

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{2n} n = \frac{1}{2} =: \varepsilon,$$

что влечет расходимость гармонического ряда.

Частичные суммы

$$H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

гармонического ряда называются гармоническими числами *и играют существенную роль в теории чисел.*

2.2 Ряды с неотрицательными членами

Рассмотрим сначала вопрос о сходимости рядов со знакопостоянными членами, поскольку для них последовательность S_n монотонна. Для определенности будем рассматривать ряды с неотрицательными членами, поскольку одновременная замена знаков всех членов ряда не влияет на его сходимость.

Из свойств монотонных последовательностей вытекает следующая теорема.

Теорема 2.2. *Для сходимости ряда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k,\ p_k \geqslant 0 \tag{2.5}$$

с неотрицательными членами необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частичных сумм была ограничена.

Доказательство. Как уже было сказано, последовательность частичных сумм ряда (2.5) монотонно не убывает, поэтому, если она ограничена, то она сходится. С другой стороны, как уже было доказано в первом семестре, всякая сходящаяся последовательность ограничена. □

Следующие две теоремы, называемые признаками сравнения рядов, позволяют сделать вывод о сходимости или расходимости знакопостоянного ряда с помощью его сравнения с заведомо сходящимся или расходящимся рядом.

Теорема 2.3. *Пусть имеется ряд (2.5) и ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} p'_k,\ p'_k \geqslant 0, \tag{2.6}$$

причем выполнено неравенство

$$p_k \leqslant p'_k. \tag{2.7}$$

Тогда из сходимости ряда (2.6) следует сходимость ряда (2.5), а из расходимости ряда (2.5) следует расходимость ряда (2.6).

Доказательство. Пусть $S_n := \sum_{k=1}^{n} p_k$, $S'_n := \sum_{k=1}^{n} p'_k$, тогда по условию теоремы $S_n \leqslant S'_n$. Последнее неравенство означает, что ограниченность последовательности S'_n влечет ограниченность последовательности S_n, а неограниченность последовательности S_n влечет неограниченность последовательности S'_n. В силу теоремы 2.2 этого достаточно для доказательства теоремы. □

Замечание 2.1. *На основании п. 1 предложения 2.1 теорема 2.3 останется справедливой, если в ее условии потребовать выполнение неравенства (2.7) не для всех номеров k, а лишь начиная с некоторого номера.*

Замечание 2.2. *На основании п. 2 предложения 2.1 теорема 2.3 останется справедливой, если в ее условии заменить неравенство (2.7) неравенством*

$$p_k \leqslant c p'_k,$$

где c — произвольная положительная постоянная.

Следствие 2.3. *Признак сравнения из теоремы 2.3 можно сформулировать и в предельной форме: если существует предел*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{p_k}{p'_k} = L,\ 0 \leqslant L \leqslant +\infty, \tag{2.8}$$

то при $L < +\infty$ из сходимости ряда (2.6) следует сходимость ряда (2.5), а при $L > 0$ из расходимости ряда (2.6) следует расходимость ряда (2.5). В частности, при $0 < L < +\infty$ ряды (2.5) и (2.6) сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. Пусть выполнено равенство (2.8) при $L < +\infty$. Тогда, по определению предела, для некоторого $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что при $k \geqslant N$ выполняется неравенство

$$L - \varepsilon < \frac{p_k}{p'_k} < L + \varepsilon.$$

Поэтому, при $k \geqslant N$ справедливо неравенство $p_k < (L+\varepsilon)p'_k$. В силу замечания 2.2 это доказывает следствие при $L < +\infty$.

При $L > 0$ мы имеем $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{p'_k}{p_k} = \dfrac{1}{L} < \infty$, откуда по уже доказанному из сходимости ряда (2.5) следует сходимость ряда (2.6). Поэтому, если ряд (2.6) расходится, то расходится и ряд (2.5). □

Теорема 2.4. *Пусть для всех номеров $k \geqslant 1$ справедливо неравенство*

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \leqslant \frac{p'_{k+1}}{p'_k},\ p_k, p'_k > 0. \tag{2.9}$$

Тогда сходимость ряда (2.6) влечет за собой сходимость ряда (2.5), а расходимость ряда (2.5) влечет за собой расходимость ряда (2.6).

Доказательство. Перемножая неравенства (2.9) при $k = 1, \ldots, n-1$ между собой, получим $\dfrac{p_n}{p_1} \leqslant \dfrac{p'_n}{p'_1}$ или $p_n \leqslant \dfrac{p_1}{p'_1} p'_n$. В силу замечания 2.2 последнее неравенство завершает доказательство. □

Теорема 2.5 (признак д'Аламбера). [5]

1. *Если $\forall k$, начиная с некоторого номера, выполнено неравенство*

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \leqslant q < 1 \ \left(\frac{p_{k+1}}{p_k} \geqslant 1\right), \tag{2.10}$$

то ряд (2.5) сходится (расходится).

2. *Если существует предел*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{p_{k+1}}{p_k} = L, \tag{2.11}$$

то ряд (2.5) сходится при $L < 1$ и расходится при $L > 1$.

Доказательство. Пусть $p'_k := q^k$ ($p'_k := 1$), тогда неравенство (2.10) можно переписать в виде

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \leqslant \frac{p'_{k+1}}{p'_k} \quad \left(\frac{p_{k+1}}{p_k} \geqslant \frac{p'_{k+1}}{p'_k}\right).$$

Тогда первое утверждение теоремы следует из теоремы 2.4.

Докажем второе утверждение теоремы. Если в (2.11) $L < 1$, то положим $\varepsilon := \frac{1}{2}(1 - L) > 0$, тогда $L + \varepsilon = 1 - \varepsilon$. По определению предела последовательности для указанного ε найдется номер N такой, что при $k \geqslant N$

$$L - \varepsilon < \frac{p_{k+1}}{p_k} < L + \varepsilon = 1 - \varepsilon. \tag{2.12}$$

В силу уже доказанного первого утверждения данной теоремы ряд (2.5) сходится.

Если же $L > 1$, то положим $\varepsilon := L - 1 > 0$. Опять, по определению предела последовательности для указанного ε найдется номер N такой, что при $k \geqslant N$ справедливо $\frac{p_{k+1}}{p_k} > L - \varepsilon = 1$. Тогда, в силу уже доказанного первого утверждения данной теоремы ряд (2.5) расходится. □

Замечание 2.3. *Неравенство (2.10) в теореме 2.5 нельзя заменить на неравенство* $\frac{p_{k+1}}{p_k} < 1$. *В самом деле, как показано выше, гармонический ряд расходится, но для этого ряда* $\frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{k}{k+1} < 1$.

[5] Д'Аламбер Жан ле Рон (1717–1783) — французский математик и философ.

Если в теореме 2.5 $L = 1$, то о сходимости ряда (2.5) нельзя сказать ничего определенного. В самом деле, для расходящегося гармонического ряда $L = 1$, в то же время $L = 1$ и для сходящегося (как мы увидим ниже) ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Пример 2.6. *Применим признак д'Аламбера в предельной форме к ряду*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{k/2}}{k!}.$$

Имеем

$$\lim_{k\to\infty} \frac{p_{k+1}}{p_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^{(k+1)/2}}{(k+1)!} \frac{k!}{k^{k/2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt{k+1}} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k/2} =$$
$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt{k+1}} \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k/2} = 0 \cdot \sqrt{e} = 0 < 1,$$

что означает сходимость рассматриваемого ряда.

Теорема 2.6 (признак Коши). 1. *Если $\forall k$, начиная с некоторого номера, выполнено*

$$\sqrt[k]{p_k} \leqslant q < 1 \ (\sqrt[k]{p_k} \geqslant 1), \tag{2.13}$$

то ряд (2.5) сходится (расходится).

2. *Если существует предел*

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{p_k} = L, \tag{2.14}$$

то ряд (2.5) сходится при $L < 1$ и расходится при $L > 1$.

Доказательство. Пусть $p'_k := q^k$ $(p'_k := 1)$, тогда неравенство (2.13) можно переписать в виде

$$p_k \leqslant p'_k \quad (p_k \geqslant p'_k)\,.$$

Тогда первое утверждение теоремы следует из теоремы 2.3 и условия сходимости геометрической прогрессии.

Для доказательства второго утверждения теоремы следует дословно повторить рассуждения при доказательстве второго утверждения теоремы 2.5, заменив $\dfrac{p_{k+1}}{p_k}$ на $\sqrt[k]{p_k}$. Теорема 2.6 доказана. □

Замечание 2.4. *Неравенство (2.13) в теореме 2.6 нельзя заменить на неравенство* $\sqrt[k]{p_k} < 1$*, поскольку, например, для расходящегося гармонического ряда имеем* $\sqrt[k]{p_k} = \dfrac{1}{\sqrt[k]{k}} < 1$.

Если в теореме 2.6 $L = 1$*, то о сходимости ряда (2.5) нельзя сказать ничего определенного, как показывают те же два примера из замечания к предыдущей теореме.*

Пример 2.7. *Применим признак Коши в предельной форме к ряду*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}.$$

Имеем

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{k}{2^k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2} \exp\left(\frac{\ln k}{k}\right) = \frac{1}{2} \exp\left(\lim_{k\to\infty} \frac{\ln k}{k}\right) = \frac{1}{2} e^0 = \frac{1}{2} < 1,$$

откуда следует сходимость рассматриваемого ряда.

Оказывается, что признак Коши в предельной форме сильнее признака д'Аламбера в предельной форме. Именно, если существует предел (2.11), то и существует равный ему предел (2.14)[6]. Таким образом, если сходимость числового ряда может быть установлена с помощью признака д'Аламбера, то она может быть установлена и по признаку Коши. Обратное неверно. Действительно, для ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k + 3}{2^{k+1}}$$

предел (2.14) существует и равен $\dfrac{1}{2}$, а предел (2.11) не существует.

Теорема 2.7 (интегральный признак Коши–Маклорена)**.** *Пусть функция* $f(x)$ *неотрицательна и не возрастает всюду на полупрямой* $x \geqslant m$*, где* m *— произвольное фиксированное натуральное число. Тогда числовой ряд*

$$\sum_{k=m}^{\infty} f(k)$$

[6]См. Ильин В.А., Позняк Э.Г., Основы математического анализа. Часть I. 3-е изд. М., Физматлит, 1971. С. 422, 448–449. Тот же рассуждение имеется в курсе Г.М. Фихтенгольца.

сходится тогда и только тогда, когда сходится последовательность

$$a_n = \int\limits_m^n f(x)dx.$$

Доказательство. Пусть $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant m+1$, тогда, в силу невозрастания функции $f(x)$ при $x \geqslant m$, справедливо неравенство

$$f(k) \leqslant f(x) \leqslant f(k-1),\ k-1 \leqslant x \leqslant k. \tag{2.15}$$

В силу ограниченности и монотонности, функция $f(x)$ интегрируема на любом сегменте, содержащемся в луче $[m, +\infty)$, поэтому из (2.15) получаем

$$f(k) = \int\limits_{k-1}^{k} f(k)\,dx \leqslant \int\limits_{k-1}^{k} f(x)\,dx \leqslant \int\limits_{k-1}^{k} f(k-1)\,dx = f(k-1). \tag{2.16}$$

Суммируя неравенства (2.16) при $m+1 \leqslant k \leqslant n$, получаем:

$$S_n - f(m) = \sum_{k=m+1}^{n} f(k) \leqslant a_n = \int\limits_m^n f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=m}^{n-1} f(k) = S_{n-1}, \tag{2.17}$$

где $S_n := \sum\limits_{k=m}^{n} f(k)$. Последовательности $\{S_n\}$ и $\{a_n\}$ являются неубывающими. Поэтому они сходятся тогда и только тогда, когда являются ограниченными. Но из неравенства (2.17) следует, что ограниченность одной из них влечет ограниченность другой. $\square$

Пример 2.8.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha},\ \alpha \geqslant 0$$

— обобщенный гармонический ряд. *Функция* $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ *удовлетворяет условиям теоремы 2.7 и*

$$a_n := \int\limits_1^n \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \left.\dfrac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\right|_1^n = \dfrac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \dfrac{1}{1-\alpha}, & \alpha \neq 1; \\ \ln x\big|_1^n = \ln n, & \alpha = 1. \end{cases}$$

Отсюда по интегральному признаку Коши–Маклорена получаем, что обобщенный гармонический ряд сходится тогда и только тогда, когда $\alpha > 1$.

Пример 2.9. *Рассмотрим ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\ln\frac{k+1}{k}\right). \tag{2.18}$$

Пусть $\varphi(x) := x-\ln(1+x)$. *Поскольку* $\varphi(0)=0$ *и* $\varphi'(x)=1-\frac{1}{1+x}>0$ *при* $x>0$, *то* $\varphi(x)>0$ *при* $x>0$. *Отсюда* $\frac{1}{k}-\ln\frac{k+1}{k}>0$ *и ряд (2.18) – знакоположительный. Кроме того,*

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{1}{k}-\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\frac{1}{k^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\frac{1}{2},$$

поэтому ряд (2.18) сходится по следствию 2.3. Его сумма обозначается C *и называется* постоянной Эйлера. *До сих пор не известно, является ли она рациональным числом. Ее приближенное численное значение равно* $0,5772$.

Поскольку частичные суммы ряда (2.18) равны $H_n-\ln(1+n)$, *справедлива асимптотическая формула для гармонических чисел*

$$H_n=\ln n+C+o(1).$$

Наличие признаков сравнения для исследования сходимости рядов наводит на мысль о поиске такого универсального предельно медленно сходящегося (или расходящегося) ряда, сравнение с которым позволило бы сделать заключение о сходимости (или расходимости) любого наперед заданного ряда с положительными членами. Это позволило бы четко описать границу между сходящимися и расходящимися рядами.

Докажем, что такого универсального сходящегося ряда не существует. Пусть даны два сходящихся знаконеотрицательных ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}p_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty}p'_k$; обозначим символами r_n и r'_n, соответственно, их n-ые остатки. Будем говорить, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}p'_k$ *сходится медленнее*, чем ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}p_k$, если $r_n=o(r'_n)$, $n\to\infty$.

Докажем, что для каждого сходящегося ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}p_k$ существует ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}p'_k$, сходящийся медленнее ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}p_k$. Положим $p'_k := \sqrt{r_{k-1}}-\sqrt{r_k}$, $k\geqslant 2$, $p'_1\geqslant 0$, тогда $r'_n=\sqrt{r_n}$, $n\geqslant 2$ и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{r'_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{\sqrt{r_n}}=0.$$

Докажем теперь отсутствие универсального сходящегося ряда, сравнение с которым позволило бы сделать вывод о сходимости произвольного ряда с неотрицательными членами. В самом деле, если бы такой универсальный сходящийся ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ существовал, то, взяв для него построенный выше сходящийся ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p'_k$, мы получили бы, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{p_k}{p'_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{r_{k-1} - r_k}{\sqrt{r_{k-1}} - \sqrt{r_k}} = \lim_{k\to\infty} (\sqrt{r_{k-1}} + \sqrt{r_k}) = 0.$$

Таким образом, из сравнения с рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ нельзя сделать вывод о сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p'_k$.

Аналогично доказывается отсутствие универсального расходящегося ряда, сравнение с которым позволило бы сделать вывод о расходимости произвольного ряда с неотрицательными членами.

Таким образом, мы не можем провести четкую границу между сходящимися и расходящимися рядами.

2.3 Абсолютно и условно сходящиеся ряды

Определение 2.2. *Назовем ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \tag{A}$$

состоящий из чисел произвольного знака, абсолютно сходящимся, если сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|. \tag{A1}$$

Ряд A называется условно сходящимся*, если он сходится, а ряд A1 — расходится.*

Теорема 2.8. *Если ряд сходится абсолютно, то он сходится.*

Доказательство. Воспользуемся критерием Коши сходимости числового ряда. Пусть сходится ряд A1. Тогда по критерию Коши $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N$

такое, что $\forall n > N$ и $\forall p \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon$. Но тогда и

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon,$$

что по критерию Коши влечет сходимость ряда A. □

Как мы увидим ниже, из сходимости числового ряда не следует его абсолютная сходимость.

Теорема 2.9 (Коши)**.** *Если ряд A сходится абсолютно, то любой ряд A', полученный из ряда A некоторой перестановкой членов, также сходится абсолютно и его сумма $S_{A'}$ равна сумме S_A ряда A.*

Доказательство.

1. Проведем доказательство в два приема. Предположим сначала, что все члены ряда A неотрицательны.

   Рассмотрим произвольную частичную сумму A'_k ряда A'. Так как все члены ряда A', содержащиеся в частичной сумме A'_k, содержатся в некоторой частичной сумме A_{n_k} ряда A, то $A'_k \leqslant A_{n_k} \leqslant S_A$. Поскольку последовательность A'_k монотонно не убывает, то это неравенство означает сходимость ряда A', причем $S_{A'} \leqslant S_A$.

   Но ряд A также получен из ряда A'_k некоторой перестановкой членов. Поэтому $S_A \leqslant S_{A'}$ и, значит, $S_A = S_{A'}$.

2. Пусть теперь A будет произвольным абсолютно сходящимся рядом. Поскольку при любой перестановке членов ряд $A1$ сохранит свою сходимость, то и ряд A также сохранит свою абсолютную сходимость, а значит и просто сходимость. Остается доказать лишь, что сумма его при этом не изменится.

   Пусть P и Q — ряды, составленные соответственно из неотрицательных и модулей отрицательных членов ряда A.[7] Из абсолютной сходимости ряда A, очевидно, следует сходимость рядов P и Q. Частичная сумма A_n ряда A равна

   $$A_n = P_k - Q_m \tag{2.19}$$

   для некоторых частичных сумм P_k и Q_m рядов P и Q. При $n \to \infty$ имеем $k, m \to \infty$, поэтому $S_A = S_P - S_Q$.

[7] Если один из этих рядов конечен, то утверждение теоремы легко сводится к уже доказанному выше частному случаю, поэтому будем считать, что оба ряда P и Q – бесконечны.

Но, по доказанному, при перестановке членов ряда A ряды P и Q сохраняют свои суммы, поэтому сохраняет свою сумму и ряд A.

$\square$

Теорема 2.10 (Риман)**.** *Если ряд A сходится условно, то $\forall S \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ можно так переставить члены ряда, что сумма полученного ряда A' будет равна S.*

Доказательство. Для условно сходящегося ряда A неотрицательные ряды $P =: \sum_{i=1}^{\infty} p_i$ и $Q =: \sum_{i=1}^{\infty} q_i$ из доказательства предыдущей теоремы расходятся. Действительно, если один из них сходится, то, в силу равенства (2.19) и сходимости ряда A, сходится и другой, а тогда сходятся и частичные суммы $A1_n = P_k + Q_m$ ряда $A1$, т.е. ряд A сходится абсолютно, что противоречит условию.

Поэтому частичные суммы P_k и Q_k стремятся к $+\infty$. Если S — конечное число любого знака, то можно найти такую частичную сумму P_{n_1} ряда P, что $P_{n_1} \geqslant S$, причем возьмём членов ряда P в частичной сумме P_{n_1} не более, чем требуется для выполнения данного неравенства.

Затем вычтем из этой суммы некоторый начальный отрезок $q_1 + q_2 + \ldots + q_{m_1}$ ряда Q так, что результат станет не больше S, причем опять возмем для этого членов ряда Q не более, чем требуется для выполнения данного неравенства.

Затем добавим к результату минимально возможный отрезок $p_{n_1+1} + p_{n_1+2} + \ldots + p_{n_2}$ ряда P так, чтобы опять сумма была не меньше, чем S.

Затем вычтем из результата минимально возможный отрезок $q_{m_1+1} + q_{m_1+2} + \ldots + q_{m_2}$ ряда Q так, чтобы опять сумма была не больше, чем S, и так далее.

В результате мы получим ряд, составленный из сумм

$$\begin{aligned} (p_1 + p_2 + \ldots + p_{n_1}) - (q_1 + q_2 + \ldots + q_{m_1}) + \\ + (p_{n_1+1} + p_{n_1+2} + \ldots + p_{n_2}) - (q_{m_1+1} + q_{m_1+2} + \ldots + q_{m_2}) + \ldots, \end{aligned} \tag{2.20}$$

сходящийся к S, поскольку отличие его частичной суммы S_n от числа S не превосходит модуля некоторого члена ряда A (кроме, может быть, суммы $p_1 + \ldots + p_{n_1}$ при отрицательном S, что несущественно), и следовательно, стремится к нулю при $n \to \infty$.

После раскрытия скобок в ряде (2.20) мы получим ряд A', отличный от ряда A некоторой перестановкой членов, который сходится к тому же числу S, поскольку частичные суммы ряда A' меняются внутри (опущенных) скобок монотонно между частичными суммами ряда (2.20).

Если теперь $S = +\infty$, то выберем такую последовательность n_k, что $p_{n_k+1} + p_{n_k+2} + \ldots + p_{n_{k+1}} \geqslant 2$. Тогда ряд, составленный из таких сумм и чисел $(-q_k)$,

$$(p_1 + p_2 + \ldots + p_{n_1}) - q_1 + (p_{n_1+1} + p_{n_1+2} + \ldots + p_{n_2}) - q_2 + \ldots +$$
$$+(p_{n_{k-1}+1} + p_{n_{k-1}+2} + \ldots + p_{n_k}) - q_k + \ldots$$

является некоторой перестановкой членов ряда A и сходится к $+\infty$, поскольку выражение, стоящее в каждой из скобок, $\geqslant 2$, а $q_k \to 0$.

Для $S = -\infty$ доказательство аналогично. □

Теорема Римана показывает, что для бесконечных сумм, в отличии от конечных, не справедлива коммутативность.[8] Приведем соответствующий пример.

Пример 2.10 (Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу, 2002, N. 2704). *Рассмотрим ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(k+1)}}{k}. \tag{2.21}$$

Докажем, что исходный ряд сходится к $\ln 2$, *а если переставить его члены так, чтобы за группой из его* p *последовательных положительных членов следовала бы группа из его* q *последовательных отрицательных членов, то он будет по-прежнему сходиться, но к* $\ln 2 + \frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}$.

Пусть

$$A_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}, B_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}.$$

Последовательность $S_n := A_{np} - B_{nq}$ *является подпоследовательностью последовательности* T_m *частичных сумм ряда с переставленными членами, при этом* $S_n = T_{n(p+q)}$. *Члены* T_k *при* $n(p+q)+1 \leqslant k \leqslant (n+1)(p+q)-1$ *отличаются от* S_n *не более, чем на*

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2(np+k)-1} + \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{2(nq+k)} \leqslant \frac{p}{2np+1} + \frac{q}{2nq+2} \to 0,\ n \to +\infty.$$

Поэтому, если мы докажем, что последовательность S_n *сходится, то и последовательность* T_k, *а значит и ряд с переставленными членами,*

[8]Наиболее простым примером, показывающим отличие бесконечных множеств от конечных, является "Отель Гильберта".

тоже будет сходиться к тому же пределу.[9]

Из доказанной выше асимптотической формулы для гармонических чисел $H_m = \ln m + C + o(1)$, $m \to \infty$ *следует, что* $B_m = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k} = \frac{1}{2}\ln m + \frac{1}{2}C + o(1)$ *и* $A_m + B_m = H_{2m} = C + \ln(2m) + o(1)$. *Отсюда*

$$A_m = -B_m + C + \ln(2m) + o(1) = \frac{1}{2}C + \ln 2 + \frac{1}{2}\ln m + o(1).$$

Наконец,

$$\begin{aligned} A_{np} - B_{nq} &= \frac{1}{2}C + \ln 2 + \frac{1}{2}\ln(np) - \frac{1}{2}\ln(nq) - \frac{1}{2}C + o(1) = \\ &= \ln 2 + \frac{1}{2}\ln\frac{p}{q} + o(1) \to \ln 2 + \frac{1}{2}\ln\frac{p}{q},\ n \to \infty. \end{aligned}$$

2.4 Арифметические операции над сходящимися рядами

Рассмотрим вопрос о возможности почленного сложения и перемножения сходящихся рядов.

Теорема 2.11. *Если два ряда* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ *и* $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ *сходятся и имеют суммы, соответственно равные* U *и* V, *то и ряд* $\sum_{k=1}^{\infty}(u_k \pm v_k)$ *сходится и имеет сумму, равную* $U \pm V$.

Доказательство. Обозначим через U_n, V_n и S_n частичные суммы рядов $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty}(u_k \pm v_k)$, соответственно. Тогда $S_n = U_n \pm V_n$, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}(U_n \pm V_n) = U \pm V$. □

Теорема 2.12. *Если два ряда* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ *и* $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ *сходятся абсолютно и имеют суммы, соответственно равные* U *и* V, *то и ряд* $\sum_{k,l=1}^{\infty} u_k v_l$, *суммируемый в произвольном порядке, также сходится абсолютно, и его сумма равна* UV.

Доказательство. Обозначим через w_j произведения $u_k v_l$, занумерованные в каком угодно порядке. Докажем, что ряд $\sum_{j=1}^{\infty} |w_j|$ сходится. Пусть S_n — n-ая частичная сумма этого ряда. Она состоит из членов вида $|u_k v_l|$.

[9] Еще проще это увидеть, если рассмотреть, наряду с подпоследовательностью S_n последовательности T_m подпоследовательность $S'_n := A_{(n+1)p} - B_{nq}$, имеющую тот же предел, что и S_n, и заметить, что члены последовательности T_m возрастают от S_n к S'_n и убывают от S'_n к $S_{(n+1)}$.

Среди индексов k и l, входящих в эту сумму, найдется наибольший, который мы обозначим через m. Тогда

$$S_n \leqslant \sum_{k=1}^{m} |u_k| \sum_{l=1}^{m} |v_l|.$$

В силу абсолютной сходимости рядов $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ и $\sum_{l=1}^{\infty} v_l$, суммы $\sum_{k=1}^{m} |u_k|$ и $\sum_{l=1}^{m} |v_l|$ ограничены величиной, не зависящей от m. Поэтому частичные суммы S_n также ограничены, что влечет абсолютную сходимость ряда $\sum_{j=1}^{\infty} w_j$.

Докажем, что сумма ряда $\sum_{j=1}^{\infty} w_j$ равна UV. В силу теоремы 2.9[10] сумма этого ряда не зависит от порядка, в котором мы его суммируем. Но подпоследовательность

$$W_m := \sum_{k=1}^{m} u_k \sum_{l=1}^{m} v_l$$

частичных сумм данного ряда сходится именно к UV.

□

2.5 Признаки сходимости произвольных рядов

Ни один из рассмотренных выше признаков не позволяет установить условную сходимость числового ряда. Перейдем к рассмотрению признаков, позволяющих это сделать.

Теорема 2.13 (признак Лейбница)**.** [11] *Пусть* $\{p_k\}$, $p_k \geqslant 0$ *— невозрастающая бесконечно малая последовательность. Тогда* знакочередующийся ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} p_k \tag{2.22}$$

сходится.

Доказательство. Поскольку

$$S_{2n} = (p_1 - p_2) + (p_3 - p_4) + \ldots + (p_{2n-1} - p_{2n})$$

[10] Вот пример использования теоремы Коши о перестановке членов абсолютно сходящегося ряда.

[11] Лейбниц Готфрид Вильгельм (1646–1716) — немецкий философ, математик (наряду с Ньютоном является основоположником дифференциального и интегрального исчисления), физик (ввел понятие кинетической энергии («живой силы»), закон сохранения «живых сил», принцип наименьшего действия), изобретатель, юрист, историк и языковед.

и каждая круглая скобка неотрицательна, то последовательность S_{2n} неотрицательна и не убывает. С другой стороны

$$S_{2n} = p_1 - (p_2 - p_3) - (p_4 - p_5) + \ldots - (p_{2n-2} - p_{2n-1}) - p_{2n},$$

откуда $S_{2n} \leqslant p_1$. Тем самым, последовательность S_{2n} сходится к некоторому пределу S. Поскольку $S_{2n+1} = S_{2n} + p_{2n+1}$ и $p_k \to 0$ при $k \to \infty$, то $S_{2n+1} \to S$. Таким образом, ряд (2.22) сходится к S. $\square$

Замечание 2.5. *Из равенства*

$$S_{2n-1} = p_1 - (p_2 - p_3) - (p_4 - p_5) - \ldots - (p_{2n-2} - p_{2n-1})$$

вытекает, что последовательность S_{2n-1} сходится к пределу S, не возрастая. Таким образом

$$S_{2n} \leqslant S \leqslant S_{2n-1},\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ввиду равенства $S_{2n-1} - S_{2n} = p_{2n}$, отсюда вытекает неравенство

$$|S - S_n| \leqslant p_n,$$

показывающее, что частичная сумма ряда приближает его сумму с ошибкой, не превышающей абсолютной величины последнего члена ряда в частичной сумме.

Пример 2.11. *Ряды*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2,\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \tag{2.23}$$

сходятся по признаку Лейбница (для первого из них это было установлено другим путем в примере 2.10). При этом соответствующие ряды из модулей расходятся. Для первого ряда это вытекает из расходимости гармонического ряда, а для второго из оценки $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} > \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Таким образом образом, ряды (2.23) сходятся условно.

Замечание 2.6. *Требование монотонности последовательности $\{p_k\}$ в признаке Лейбница не является излишним, как показывает пример ряда*

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} + \ldots \tag{2.24}$$

Для него выполнены все условия признака Лейбница, кроме монотонности убывания модуля общего члена ряда, поскольку $\frac{1}{\sqrt{k}+1} < \frac{1}{\sqrt{k+1}-1}$. *Рассмотрим ряд*

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{k}-1}-\frac{1}{\sqrt{k}+1}\right)=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2}{k-1}.$$

Он расходится по асимптотическому признаку сравнения с гармоническим рядом. А поскольку расходящаяся последовательность его частичных сумм является подпоследовательностью последовательности частичных сумм ряда (2.24), то ряд (2.24) также расходится.

Признаки Дирихле и Абеля относятся к рядам вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k, \tag{AB}$$

где $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ – вещественная, а $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$, вообще говоря, – комплексная последовательности, и являются наиболее употребительными признаками исследования сходимости рядов, не сходящихся абсолютно.[12]

Теорема 2.14 (Дирихле)**.** [13] *Если частичные суммы* $B_n := \sum_{k=1}^{n} b_k$ *в совокупности ограничены:*

$$|B_n| \leqslant M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},$$

а последовательность $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ *монотонна и стремится к нулю, то ряд* (AB) *сходится.*

Доказательство. Установим сначала следующее тождество Абеля[14]

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = \sum_{k=n+1}^{n+p-1}(a_k-a_{k+1})B_k + B_{n+p}a_{n+p} - B_n a_{n+1}. \tag{2.25}$$

[12]В некоторых учебниках первый признак называется также признаком Дирихле–Абеля, но мы будем придерживаться терминологии, принятой в Математической энциклопедии, Математическом энциклопедическом словаре, курсе Г.М. Фихтенгольца и в ряде других книг.

[13]Дирихле Петер Густав Лежён (1805–1859) — немецкий математик.

[14]Абель Нильс Хенрик (1802–1829) — норвежский математик. В 2002 г. правительство Норвегии учредило премию Абеля по математике, присуждаемую ежегодно с 2003 г., размер которой близок к размеру Нобелевской премии.

В этом тождестве на числа a_k, b_k, $k = 1, \ldots, n+p$ не накладывается никаких ограничений.[15]

В самом деле, подставляя равенство $b_k = B_k - B_{k-1}$ в левую часть (2.25), получаем

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k B_k - \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k B_{k-1} = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k B_k - \sum_{k=n}^{n+p-1} a_{k+1} B_k =$$
$$= \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + B_{n+p} a_{n+p} - B_n a_{n+1}.$$

Перейдем теперь к собственно доказательству теоремы Дирихле. Без ограничения общности, можем считать, что $a_k \downarrow 0$.

Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и убедимся в выполнении для ряда (AB) условий критерия Коши. По условию, существует такое число $M > 0$, что $|B_n| \leqslant M$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Поскольку $a_k \downarrow 0$, то $\exists N \in \mathbb{N}$ такое, что

$$0 \leqslant a_k < \frac{\varepsilon}{2M} \text{ при } \forall k > N. \tag{2.26}$$

Используя теперь тождество Абеля, данные оценки и неравенство $a_k \geqslant a_{k+1}$, получим

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |B_k| (a_k - a_{k+1}) + |B_{n+p}| a_{n+p} + |B_n| a_{n+1} \leqslant$$
$$\leqslant M \left(\sum_{k=n+1}^{n+p-1} (a_k - a_{k+1}) + a_{n+p} \right) + M a_{n+1} = M a_{n+1} + M a_{n+1} = 2M a_{n+1} <$$
$$< 2M \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon \quad \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}.$$

В силу критерия Коши, из этого следует сходимость ряда (AB). □

Замечание 2.7. *Признак Лейбница является частным случаем признака Дирихле при* $b_k = (-1)^{k-1}$.

---

[15] Если записать тождество Абеля в виде

$$\boxed{\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k (B_k - B_{k-1}) = B_{n+p} a_{n+p} - B_n a_{n+1} - \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (a_{k+1} - a_k) B_k},$$

то станет ясно, что оно является конечно-разностным аналогом формулы интегрирования по частям.

Теорема 2.15 (Абель)**.** *Если ряд* (B) *сходится, а последовательность* $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ *монотонна и ограничена (и потому сходится к некоторому пределу* a*), то ряд* (AB) *сходится.*

Доказательство. Рассмотрим ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k - a)b_k, \ \sum_{k=1}^{\infty} ab_k. \tag{2.27}$$

В предположениях признака Абеля, второй ряд из (2.27) сходится, а к первому ряду применим признак Дирихле, поэтому он также сходится. Остается заметить, что ряд (AB) является суммой рядов из (2.27) и применить теорему 2.11. $\square$

Замечание 2.8. *Аналог признака сравнения знакопостоянных рядов в предельной форме (следствие 2.3) для знакопеременных рядов не имеет места. Действительно, рассмотрим ряды*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \ \sum_{k=1}^{\infty} b_k,$$

при $a_k = \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$, $b_k = a_k + \frac{1}{k}$. *Ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится по признаку Лейбница, а ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *расходится как сумма сходящегося и расходящегося рядов. Тем не менее* $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{a_k}{b_k} = 1$.

Глава 3

Функциональные последовательности и ряды

Наряду с числовыми последовательностями и рядами можно рассматривать последовательности и ряды, состоящие из функций. Естественно, что важнейшим свойством таких последовательностей и рядов попрежнему является их сходимость. Однако некоторые свойства функций, образующих сходящуюся последовательность или ряд, такие как непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость, могут передаваться или не передаваться предельной функции или сумме ряда. Выяснению условий, обеспечивающих наследование предельной функцией или суммой ряда свойств членов последовательности или ряда, и посвящена, в основном, данная глава.

3.1 Определения

Последовательность функций $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, $x \in X$, определенных на некотором фиксированном множестве X, называется *функциональной последовательностью.*

Если зафиксировать некоторое значение $x = x_0$, то мы получим числовую последовательность $\{f_k(x_0)\}_{k=1}^{\infty}$. Если полученная числовая последовательность сходится (расходится), то говорят, что *функциональная последовательность сходится (расходится) в точке* x_0, а точка x_0 называется *точкой сходимости (расходимости)* функциональной последовательности $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$.

Если функциональная последовательность $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ сходится при всех $x \in X$, то говорят, что она *сходится на множестве* X. В этом случае $f(x) := \lim_{k\to\infty} f_k(x)$ есть *предельная функция последовательности* $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$. В этом случае используется также обозначение $f_k(x) \to f(x)$.

Пример 3.1. *Функциональная последовательность* $f_k(x) = x^k$, $x \in \mathbb{R}$ *сходится к функции* $f(x) := \begin{cases} 0, & -1 < x < 1, \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ *и расходится при* $x \notin (-1, 1]$. *При этом предельная функция* $f(x)$ *является разрывной в точке* 1.

Аналогичные определения вводятся для функциональных рядов.

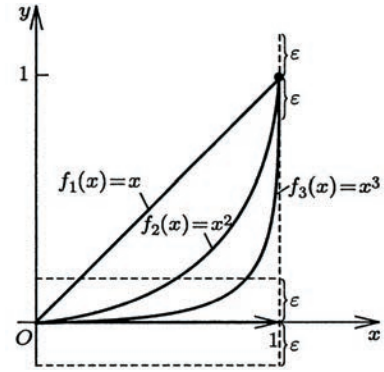

Рис. 3.1: последовательность x^k и ее предел.

Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x),$$

составленный из функций $u_k(x)$, определенных на некотором фиксированном множестве X, называется *функциональным рядом.*

Если для $x_0 \in X$ числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x_0)$$

сходится (расходится), то говорят, что *функциональный ряд сходится (расходится) в точке* x_0, а точка x_0 называется *точкой сходимости (расходимости)* данного функционального ряда. Для исследования вопроса о сходимости функционального ряда в данной точке можно использовать признаки сходимости числовых рядов.

Если данный функциональный ряд сходится при всех $x \in X$, то говорят, что он *сходится на множестве* X. В этом случае его сумма

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

является функцией, определённой на множестве X.

Пример 3.2. *Функциональный ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^k,\ x \in \mathbb{R},$$

являющийся суммой бесконечной геометрической прогрессии, сходится на интервале $(-1, 1)$, *и его сумма есть*

$$S(x) = \frac{x}{1-x}.$$

Во всех остальных точках вещественной оси ряд расходится. Отметим, что члены и сумма ряда $S(x)$ являются непрерывными функциями на $X = (-1, 1)$.

Может, однако, случиться и так, что сумма ряда из непрерывных функций является разрывной функцией.

Пример 3.3. *Функциональный ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-x)x^k,\ x \in \mathbb{R},$$

члены которого отличаются от членов предыдущего ряда множителем $1 - x$, не зависящим от k, сходится на полуинтервале $(-1, 1]$, и его сумма

$$S(x) = \begin{cases} x, & -1 < x < 1, \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

является разрывной в точке 1 функцией.

Таким образом, предел функциональной последовательности непрерывных функций и сумма ряда, составленного из непрерывных функций, могут быть разрывными функциями. Ответ на вопрос о том, когда этого не происходит, связан с понятием *равномерной сходимости.*

3.2 Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов

Определение 3.1. *Функциональная последовательность $f_n(x)$ равномерно сходится к функции $f(x)$ на множестве X*

$$(\textit{обозначение: } f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x)),$$

если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall n > N$ и $\forall x \in X$: $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

С геометрической точки зрения неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ означает, что при $n > N$ график любой функции $f_n(x)$ лежит в ε-окрестности графика функции $f(x)$.

Сформулируем второе (эквивалентное) определение равномерной сходимости функциональной последовательности, часто легче проверяемое.

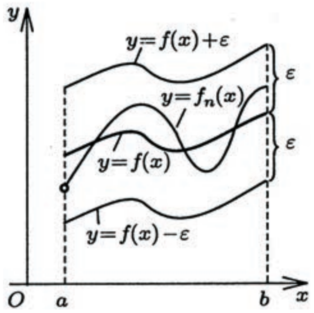

Рис. 3.2: равномерная сходимость последовательности функций.

Определение 3.2. *Функциональная последовательность $f_n(x)$ равномерно сходится к функции $f(x)$ на множестве X, если $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_X |f_n(x) - f(x)| = 0$.*

Отметим, что $\sup\limits_X |f_n(x) - f(x)|$ — числовая последовательность. Два определения равномерной сходимости эквивалентны. Это следует из того, что $\sup\limits_X |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon \quad \forall x \in X$.

Пример 3.4. *Рассмотрим вопрос о равномерной сходимости двух функциональных последовательностей на двух разных множествах.*

1. $f_n(x) = x^n$.

   (a) $X = [0, \frac{1}{2}]$: $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$; $\sup\limits_{[0,\frac{1}{2}]} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{[0,\frac{1}{2}]} x^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$ *при* $n \to \infty$. *Следовательно,* $x^n \rightrightarrows 0$ *на* $[0, \frac{1}{2}]$.

   (b) $X = [0, 1]$:
   $$f(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x < 1, \\ 1, & x = 1, \end{cases}$$
   $\sup\limits_{[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{[0,1)} x^n = 1 \not\to 0$ *при* $n \to \infty$. *Следовательно, функциональная последовательность* $\{x^n\}$ *сходится к* $f(x)$ *на отрезке* $[0, 1]$ *неравномерно.*

   (c) *Вопросы для студентов.*

      i. *Сходится ли функциональная последовательность* $\{x^n\}$ *к функции* $f(x) = 0$ *равномерно на* $[0, 1)$? *(Нет.)*

      ii. *Сходится ли функциональная последовательность* $\{x^n\}$ *к функции* $f(x) = 0$ *равномерно на* $[0, 1 - \delta]$, $\delta > 0$? *(Да.)*

2. $f_n(x) = \frac{n}{x+n}$.

(a) $X = [0, +\infty)$: $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1 =: f(x)$. *Поскольку функция* $\dfrac{x}{x+n}$ *монотонно растет с ростом* x, *то*

$$\sup_{x\in[0,+\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,+\infty)} \left|\frac{n}{x+n} - 1\right| = \sup_{x\in[0,+\infty)} \left|\frac{x}{x+n}\right| = 1 \not\to 0$$

при $n \to +\infty$. *Следовательно, последовательность* $\left\{\frac{n}{x+n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ *на множестве* $[0, +\infty)$ *сходится к своему пределу* 1 *неравномерно.*

(b) $X = [0, a]$, $a \in (0, +\infty)$:

$$\sup_{[0,a]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{[0,a]} \left|\frac{n}{x+n} - 1\right| = \sup_{[0,a]} \left|\frac{x}{x+n}\right| = \frac{a}{a+n} \to 0$$

при $n \to +\infty$. *Следовательно, последовательность* $\left\{\frac{n}{x+n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ *на множестве* $[0, a]$ *равномерно сходится к своему пределу* 1.

Определение 3.3. *Функциональный ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ *равномерно сходится к своей сумме* $S(x)$ *на множестве* X

$$\left(\text{обозначение: } \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \overset{X}{\rightrightarrows} S(x)\right),$$

если последовательность его частичных сумм S_n *равномерно сходится к* $S(x)$ *на* X.

Это означает, согласно определению 3.1, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)$ (один и тот же для всех $x \in X$) такой, что $\forall n > N$ и $\forall x \in X$ выполнено

$$|S(x) - S_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right| < \varepsilon,$$

т.е. при $n > N$ остаток ряда меньше ε сразу для всех $x \in X$, или, согласно определению 3.2, что

$$\sup_{x\in X} \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Пример 3.5. *1.* $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$, $X = [0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}]$, $S(x) = \dfrac{x}{1-x}$; $|S(x) - S_n(x)| = \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k = \dfrac{x^{n+1}}{1-x}$. *Поскольку сумма* $\sum_{k=n+1}^{\infty} x^k$ *растет с ростом* x, *то*

$$\sup_{[0,\frac{1}{2}]} |S(x) - S_n(x)| = \frac{(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Следовательно, данный ряд сходится равномерно к своей сумме на $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.

2. Тот же ряд, но $X = [0, 1)$. $S(x) = \dfrac{x}{1-x}$; $|S(x) - S_n(x)| = \dfrac{x^{n+1}}{1-x}$,

$$\sup_{[0,1)} \frac{x^{n+1}}{1-x} = \infty.$$

Следовательно, на $[0, 1)$ *данный ряд сходится неравномерно.*

3.3 Признаки равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов

Теорема 3.1 (критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности)**.** *Для того чтобы функциональная последовательность* $\{f_n(x)\}$ *сходилась равномерно к некоторой функции* $f(x)$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)$ *(не зависящий от* $x \in X$*) такой, что* $\forall n > N$, $\forall p \in \mathbb{N}$ *и* $\forall x \in X$ *выполнялось неравенство*

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Доказательство. 1. Необходимость. Пусть $f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x)$. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n > N$ и $\forall x \in X$ выполняется неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

а т.к. $n + p > n$, $p \in \mathbb{N}$, то

$$|f_{n+p}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому $\forall n > N$, $\forall p \in \mathbb{N}$ и $\forall x \in X$:

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| = |f_{n+p}(x) - f(x) - (f_n(x) - f(x))| \leqslant$$

$$\leqslant |f_{n+p}(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2. Достаточность. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Пусть $\forall n > N$, $\forall p \in \mathbb{N}$ и $\forall x \in X$ выполнено неравенство
$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.1}$$
Это означает, что $\forall x \in X$ числовая последовательность $\{f_n(x)\}$ является фундаментальной и, следовательно, сходится к некоторому числу, зависящему от x. Таким образом, последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится на множестве X при $n \to \infty$ к некоторой функции $f(x)$. Поэтому, переходя в неравенстве (3.1) к пределу при $p \to \infty$, получим
$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad \forall n > N \text{ и } \forall x \in X.$$
Но это и означает, что $f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x)$.

□

Теорема 3.2 (критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда). *Для того чтобы* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x) \overset{X}{\rightrightarrows} S(x)$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N = N(\varepsilon)$ *(не зависящий от* $x \in X$*) такой, что* $\forall n > N$, $\forall p \in \mathbb{N}$ *и* $\forall x \in X$ *выполнялось неравенство*
$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Доказательство теоремы 3.2 дословно повторяет доказательство теоремы 3.1 с заменой $f_n(x)$ на $S_n(x)$ и $f(x)$ на $S(x)$. □

Определение 3.4. *Числовой ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ *с неотрицательными членами называется мажорантным (или мажорирующим) для функционального ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ *на множестве* X, *если* $\forall k$ *и* $\forall x \in X$: $|u_k(x)| \leqslant p_k$.

Теорема 3.3 (признак Вейерштрасса[1]). *Если для функционального ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ *на множестве* X *существует* сходящийся *мажорантный ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$, *то функциональный ряд сходится абсолютно и равномерно на множестве* X.

[1]Вейерштрасс Карл Теодор Вильгельм (1815–1897) — немецкий математик.

Доказательство. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. По критерию Коши для числовых рядов $\exists N \in \mathbb{N}$ такой, что $\forall n > N$ и $\forall p \in \mathbb{N}$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} p_k\right| = \sum_{k=n+1}^{n+p} p_k < \varepsilon.$$

Поскольку $|u_k(x)| \leqslant p_k$, то $\forall n > N$, $\forall p \in \mathbb{N}$ и $\forall x \in X$ выполняется

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} p_k < \varepsilon.$$

Таким образом, для функционального ряда выполнено условие критерия Коши равномерной сходимости. Следовательно, функциональный ряд сходится равномерно и, очевидно, абсолютно. $\square$

Замечание 3.1. *Верно ли утверждение, обратное утверждению теоремы 3.3? Иначе говоря, следует ли из равномерной сходимости на множестве X функционального ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ существование сходящегося мажорантного ряда?*

Ответ отрицательный.

Действительно, пусть числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится условно. Рассмотрим числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$, $u_k(x) = a_k = \mathrm{const}$, как функциональный, сходящийся равномерно на произвольном множестве X. Если бы для него существовал сходящийся мажорантный ряд, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходился бы абсолютно, что не верно.

Пример 3.6. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sin kx}{k^{\alpha}}$, $\alpha > 1$, $|u_k(x)| = \dfrac{|\sin kx|}{k^{\alpha}} \leqslant \dfrac{1}{k^{\alpha}} =: p_k$; *ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^{\alpha}}$ *при* $\alpha > 1$ *сходится, следовательно, функциональный ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sin kx}{k^{\alpha}}$ *сходится равномерно на всей числовой прямой.*

Ниже мы увидим, что при $0 < \alpha \leqslant 1$ данный ряд сходится неравномерно на $\mathbb{R}$.

Определение 3.5. *Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$, $x \in X$ называется* равномерно ограниченной *на множестве X, если $\exists A > 0$ такое, что $\forall n \in \mathbb{N}$ и $\forall x \in X$ выполняется неравенство*

$$|f_n(x)| < A.$$

Пример 3.7. *1. Функциональная последовательность $\sin nx$ равномерно ограничена на $\mathbb{R}$.*

2. Рассмотрим функциональную последовательность $f_n(x) = \dfrac{xn}{x+n}$, $x \geqslant 0$. *Поскольку*

$$0 \leqslant f_n(x) = \frac{x(n+x) - x^2}{x+n} = x - \frac{x^2}{x+n} < x,$$
$$0 \leqslant f_n(x) = \frac{(x+n)n - n^2}{x+n} = n - \frac{n^2}{x+n} < n,$$

то последовательность $f_n(x)$ *состоит из ограниченных функций, и, кроме того, при каждом* x *числовая последовательность* $|f_n(x)|$ *ограничена. Однако поскольку* $f_n(n) = \frac{n}{2} \to \infty$ *при* $n \to \infty$, *то последовательность* $f_n(x)$ *не является равномерно ограниченной.*

Аналогично числовым рядам, признаки Дирихле и Абеля относится к функциональным рядам вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) b_k(x), \tag{3.2}$$

где $\{a_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ – вещественная, а $\{b_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, вообще говоря, – комплексные функциональные последовательности. Введем обозначение: $B_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k(x)$.

Теорема 3.4 (признак Дирихле равномерной сходимости функциональных рядов)**.** *Пусть*

1) *функциональная последовательность* $\{a_n(x)\}$ *монотонна при каждом* $x \in X$ *и равномерно на множестве* X *сходится к нулю;*

2) *последовательность* $\{B_n(x)\}$ *равномерно ограничена на множестве* X.

Тогда ряд (3.2) равномерно сходится на множестве X.

Доказательство. Доказательство теоремы 3.4 дословно повторяет доказательство теоремы о признаке Дирихле для числовых рядов, но только теперь нужно опираться на критерий Коши равномерной сходимости рядов:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) b_k(x) \right| \leqslant 2M \left| a_{n+1}(x) \right| < \varepsilon, \ \forall n > N(\varepsilon), \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in X,$$

где $|B_n(x)| \leqslant M, \ \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X$. $\square$

Теорема 3.5 (Абель). *Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k(x)$ равномерно сходится на множестве X, а последовательность $a_k(x)$ монотонна при каждом $x \in X$ и равномерно ограничена, то ряд (3.2) равномерно сходится на множестве X.*

Доказательство. Доказательство признака Абеля для числовых рядов из предыдущей главы не переносится непосредственно на данный случай, т.к. последовательность $a_k(x)$ не обязана равномерно сходиться и нам не удастся применить признак Дирихле, как в том доказательстве.

Будем действовать аналогично доказательству признака Дирихле для числовых рядов, проверяя критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда. Выберем и зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Пусть $|a_k(x)| < M = \text{const} > 0$, $\forall x \in X$. Из равномерной сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k(x)$, в силу того же критерия Коши следует существование $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такого, что $\forall n > N(\varepsilon)$ и $\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall x \in X$ выполнено неравенство

$$\left|\sum_{k=n+1}^{j} b_k(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3M},\ \forall j \geqslant n+1. \tag{3.3}$$

Выберем и зафиксируем произвольное $n > N(\varepsilon)$. Обозначим $B_n(x) := 0$, $B_j(x) := \sum_{k=n+1}^{j} b_k(x)$, $j \geqslant n+1$. В силу (3.3) справедливы неравенства $|B_j(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3M}$, $j \geqslant n$.

Тождество Абеля (2.25) примет, в данном случае, вид:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)b_k(x) = B_{n+p}(x)a_{n+p}(x) + \sum_{k=n+1}^{n+p-1}(a_k(x) - a_{k+1}(x))B_k(x).$$

Используя постоянство знака разности $a_k(x) - a_{k+1}(x)$, получим $\forall x \in X, \forall p \in \mathbb{N}$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)b_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |B_k(x)||a_k(x) - a_{k+1}(x)| + |B_{n+p}(x)||a_{n+p}| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{3M}\left(\sum_{k=n+1}^{n+p-1} |a_k(x) - a_{k+1}(x)| + |a_{n+p}|\right) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{3M}\left(\left|\sum_{k=n+1}^{n+p-1} (a_k(x) - a_{k+1}(x))\right| + |a_{n+p}|\right) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{3M}\left(|a_{n+1}(x) - a_{n+p}(x)| + |a_{n+p}(x)|\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{3M}\left(|a_{n+1}(x)| + 2|a_{n+p}(x)|\right) < \frac{\varepsilon}{3M}3M = \varepsilon.$$

В силу критерия Коши равномерной сходимости функционального ряда, из этого следует равномерная сходимость ряда (3.2). □

С помощью этой теоремы легко доказать *вторую теорему Абеля о степенных рядах*: если ряд

$$S(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k (z - z_0)^k,\ z_0, c_k \in \mathbb{C}$$

сходится в некоторой точке $z = z_1$ к S_1, то его сумма $S(z)$ (существующая при $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ в силу первой теоремы Абеля о степенных рядах) при стремлении z по отрезку от z_0 к z_1 стремиться к S_1.[2]

Пример 3.8. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sin kx}{k^{\alpha}}$, $0 < \alpha \leqslant 1$. *Мы уже видели ранее, что при фиксированном* $\alpha > 1$ *этот ряд сходится равномерно по* $x \in \mathbb{R}$. *Пусть* $b_k(x) := \sin kx,\ a_k(x) := \dfrac{1}{k^{\alpha}} \downdownarrows 0$ *при* $k \to \infty$, *т.е. условие 1 теоремы 3.4 выполнено; исследуем вопрос о равномерной ограниченности частичных сумм ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sin kx$.

Из формулы $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\right)$ *при* $x \neq 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$ *получаем*[3]

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kx \sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\left(k - \frac{1}{2}\right)x - \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)x\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{n+1}{2}x - \frac{n}{2}x\right) -\right.$$
$$\left. - \cos\left(\frac{n+1}{2}x + \frac{n}{2}x\right)\right) = \sin\frac{n+1}{2}x \sin\frac{n}{2}x \ \Rightarrow$$

[2]Действительно, переходя к переменной $x(z) := (z - z_0)/(z_1 - z_0)$, получим ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k x^k$, где $b_k := c_k (z_1 - z_0)^k$ при том, что числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится. Доказательство теоремы 3.5 не претерпевает изменения и при комплексных $b_k(x)$. Тогда по теореме 3.5 при $x \in [0,1], a_k(x) = x^k$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k x^k$ равномерно сходится к сумме $\tilde{S}(x(z)) = S(z)$, $x \in [0,1], z \in [z_0, z_1]$, которая, в силу равномерной сходимости, как это будет показано ниже, непрерывна.

[3]Для того же есть путь прямее:

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \operatorname{Im}\sum_{k=1}^{n} e^{ikx} = \operatorname{Im}\left(e^{ix}\frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}}\right) = \operatorname{Im}\left(e^{i\frac{n+1}{2}x}\frac{e^{i\frac{n}{2}x} - e^{-i\frac{n}{2}x}}{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}}\right) =$$
$$= \operatorname{Im}\left(e^{i\frac{n+1}{2}x}\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right) = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\sin \frac{n+1}{2}x \sin \frac{n}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}}.$$

Отсюда мы видим, что

$$|B_n(x)| = \left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|} \leqslant \frac{1}{\left|\sin \frac{\delta}{2}\right|} \quad \forall \delta : \ 0 < \delta < 2\pi,$$

$$\forall x \in X := \bigcup_{m=-\infty}^{+\infty} \left[2m\pi + \delta, 2(m+1)\pi - \delta\right].$$

Таким образом, условие 2 теоремы 3.4 выполнено на множестве X*, и данный ряд сходится на* X *равномерно.*

Понятно, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sin kx}{k^{\alpha}}$, $0 < \alpha \leqslant 1$ *сходится к нулю и при* $x = 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$, *но сходится ли он равномерно на* $\mathbb{R}$*? Ответ отрицательный.*

Докажем, что данный ряд не сходится равномерно даже на $[-\varepsilon, \varepsilon]$ $\forall \varepsilon > 0$.

Действительно, в силу выпуклости вверх графика синуса на сегменте $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, *имеем* $\sin t \geqslant \dfrac{2t}{\pi}$, $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2}$. *Пусть натуральное число* $N \geqslant \dfrac{\pi}{4\varepsilon}$. *Тогда*

$$\sup_{|x|\leqslant\varepsilon} \left|\sum_{k=N+1}^{2N} \frac{\sin kx}{k^{\alpha}}\right| \geqslant \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{\sin\left(k\frac{\pi}{4N}\right)}{k} \geqslant \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{2}{\pi k}\frac{\pi k}{4N} =$$

$$= \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{2N} = \frac{N}{2N} = \frac{1}{2}.$$

Тут первое неравенство получено подстановкой $x = \frac{\pi}{4N} \leqslant \varepsilon$ *с учетом неравенства* $k^{\alpha} \leqslant k$, *а второе – с помощью формулы* $\sin t \geqslant \dfrac{2t}{\pi}$, $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

Таким образом, условия критерия Коши (теорема 3.2) равномерной сходимости рассматриваемого ряда не выполнены.

3.4 Свойства равномерно сходящихся функциональных последовательностей и рядов

3.4.1 Равномерная сходимость и непрерывность

Мы уже отмечали в примере 3.1, что последовательность непрерывных функций может сходиться к разрывной функции, а пример 3.3 показывает, что сумма ряда, составленного из непрерывных функций, может оказаться разрывной функцией.

Следующая теорема дает достаточные условия непрерывности предела функциональной последовательности.

Теорема 3.6. *Пусть функции $f_n(x)$ непрерывны на промежутке X и пусть $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на X. Тогда функция $f(x)$ непрерывна на X.*

Доказательство. Докажем непрерывность функции $f(x)$ в произвольной точке $x_0 \in X$. Требуется доказать, что $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ такое, что $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ при $|x - x_0| < \delta$.

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. В силу $\{f_n\} \overset{X}{\rightrightarrows} f(x)$, $\exists N = N(\varepsilon)$ такое, что $\forall n > N$ и $\forall x \in X$:

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{3.4}$$

и, в частности,

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3.5}$$

Возмем какую-нибудь функцию $f_n(x)$ с фиксированным номером $n > N$. Так как $f_n(x)$ непрерывна в точке x_0, то для заданного ε $\exists \delta > 0$ такое, что

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{при} \quad |x - x_0| < \delta. \tag{3.6}$$

Из (3.4)–(3.6) следует, что при $|x - x_0| < \delta$

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \leqslant$$
$$\leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

□

Использованный при доказательстве прием называется «$\frac{\varepsilon}{3}$-приемом».

Равномерная сходимость — только достаточное, но не необходимое условие непрерывности предельной функции последовательности непрерывных функций. В примере 3.4.2 уже была рассмотрена функциональная последовательность, неравномерно сходящаяся к своему непрерывному пределу.

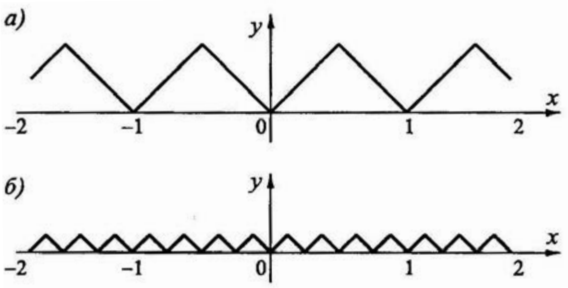

Рис. 3.3: графики функций а) u_0 и б) u_1.

Теорема 3.7. *Если все функции $u_k(x)$ непрерывны на промежутке X и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на X, то сумма ряда $S(x)$ непрерывна на X.*

Доказательство. Так как функция $u_k(x)$ непрерывна, то частичная сумма $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$ непрерывна на X. По условию $\{S_n(x)\} \rightrightarrows S(x)$ на X. Поэтому по теореме 3.6 функция $S(x)$ непрерывна на X. □

Пример 3.9 (пример Ван-дер-Вардена[4] непрерывной на $\mathbb{R}$, но нигде не дифференцируемой функции). *Обозначим через $u_0(x)$ расстояние между числом $x \in \mathbb{R}$ и ближайшим к x целым числом. Эта функция линейна на каждом промежутке вида $\left[\frac{s}{2}, \frac{s+1}{2}\right]$, $s \in \mathbb{Z}$, непрерывна и имеет период 1, см. рис. 3.3 а). Положим $u_k(x) = \frac{1}{4^k} u_0(4^k x)$, $k \in \mathbb{N}$. Эта функция линейна в промежутках вида $\left[\frac{s}{2 \cdot 4^k}, \frac{s+1}{2 \cdot 4^k}\right]$, $s \in \mathbb{Z}$, непрерывна и имеет период $\frac{1}{4^k}$. Ее графиком является аналогичная ломаная, но с более мелким зубчиками и угловым коэффициентом ± 1, см. рис. 3.3 б). Ясно, что*

$$0 \leqslant u_k(x) \leqslant \frac{1}{2 \cdot 4^k}, \ k = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.7}$$

Пусть $f(x) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k(x)$. В силу (3.7), по признаку Вейерштрасса и теореме 3.7 функция $f(x)$ непрерывна.

Зафиксируем произвольную точку $x_0 \in \mathbb{R}$ и докажем, что в точке x_0 функция $f(x)$ не дифференцируема. Ясно, что $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists s_n \in \mathbb{Z}$ такое,

[4]Ван-дер-Варден Бартел Лендерт (1903–1996) — голландский математик

что
$$x_0 \in \Delta_n := \left[\frac{s_n}{2\cdot 4^n}, \frac{s_n+1}{2\cdot 4^n}\right).$$
Ясно, что $\Delta_0 \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \ldots$ *При* $\forall n \in \mathbb{N}$ *в промежутке* Δ_n *существует единственная точка* x_n *такая, что* $|x_0 - x_n| = \dfrac{1}{4^{n+1}}$ *— половине длины полуинтервала* Δ_n*. Отсюда* $x_n \to x_0 \in \Delta_n$, $n \to \infty$*. Составим отношение приращений:*
$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_k(x_n) - u_k(x_0)}{x_n - x_0}.$$
При $k > n$ *число* $\dfrac{1}{4^{n+1}}$ *кратно периоду* $\dfrac{1}{4^k}$ *функции* $u_k(x)$*, так что* $u_k(x_n) = u_k(x_0)$*, и поэтому*
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_k(x_n) - u_k(x_0)}{x_n - x_0} = \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k(x_n) - u_k(x_0)}{x_n - x_0}. \tag{3.8}$$

Но функция $u_k(x)$ *линейна на* $\Delta_k \supset \Delta_n$ *при* $k \leqslant n$*. Отсюда* $\dfrac{u_k(x_n) - u_k(x_0)}{x_n - x_0} = \pm 1$ *(знаки произвольны). Значит, при четных* n *число (3.8) — нечетное, а при нечетных* n *— четное. Поэтому последовательность* $\dfrac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$ *не имеет предела при* $n \to \infty$*, и предел* $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ *также не существует.*

Таким образом, функция $f(x)$ *не имеет производной ни в одной точке* $x_0 \in \mathbb{R}$*.*

3.4.2 Переход к пределу под знаком интеграла и почленное интегрирование ряда

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ на промежутке X и пусть все $f_n(x)$ и $f(x)$ — интегрируемые функции. Пусть x_0 и x — произвольные точки из промежутка X. Рассмотрим вопрос о справедливости равенства
$$\lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f_n(t)\,dt \overset{?}{=} \int_{x_0}^{x} \left[\lim_{n\to\infty} f_n(t)\right] dt = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt.$$

Если это равенство справедливо, то говорят, что *можно переходить к пределу под знаком интеграла* $\int_{x_0}^{x} f_n(t)\,dt$.

Следующий пример показывает, что переход к пределу под знаком интеграла не всегда возможен.

Пример 3.10. $f_n(x) = nxe^{-nx^2} \to f(x) \equiv 0$, *$n \to \infty$, $x \geqslant 0$. Возмем $x_0 = 0$ и любое $x > 0$. Тогда*

$$\int_0^x f_n(t)\,dt = \int_0^x nte^{-nt^2}\,dt = -\frac{1}{2}e^{-nt^2}\Big|_0^x = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-nx^2}\right) \to \frac{1}{2}$$

$$\textit{при} \quad n \to \infty, \forall x > 0, \quad \textit{но} \quad \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x 0\,dt = 0.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2} = \lim_{n\to\infty} \int_0^x f_n(t)\,dt \neq \int_0^x \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,dt = 0.$$

Аналогичный вопрос можно поставить и для сходящегося функционального ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$: верно ли равенство

$$\int_{x_0}^x \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\right) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{x_0}^x u_k(t)\,dt\ ?$$

Если это равенство верно, то говорят, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ *можно интегрировать почленно от x_0 до x*. Отметим, что для конечной суммы интегрируемых функций это всегда верно. Что касается ряда, то его не всегда можно интегрировать почленно. Пример такого ряда можно построить из разностей соседних членов последовательности из примера 3.10.

Теорема 3.8. *Пусть все функции $f_n(x)$ непрерывны на $[a, b]$ и $f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$. Тогда $\forall x_0 \in [a, b]$*

$$\int_{x_0}^x f_n(t)\,dt \overset{x\in[a,b]}{\rightrightarrows} \int_{x_0}^x f(t)\,dt.$$

Доказательство. По определению равномерной сходимости нужно доказать, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$ такое, что $\forall n > N$ и $\forall x \in [a, b]$ выполнено

неравенство
$$\left|\int\limits_{x_0}^{x} f_n(t)\,dt - \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt\right| < \varepsilon.$$

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$, то $\exists N$ такое, что $\forall n > N$ и $\forall x \in [a,b]$ выполнено неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/(b-a)$. Тогда $\forall n > N$ и $\forall x \in [a,b]$

$$\left|\int\limits_{x_0}^{x} f_n(t)\,dt - \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt\right| = \left|\int\limits_{x_0}^{x} (f_n(t) - f(t))\,\,dt\right| \leqslant \left|\int\limits_{x_0}^{x} |f_n(t) - f(t)|\,\,dt\right| <$$
$$< \frac{\varepsilon}{b-a}|x - x_0| \leqslant \varepsilon.$$

□

Замечание 3.2. *Отметим, что при выполнении условий теоремы 3.8 справедливо* $\int\limits_a^b f_n(x)\,dx \to \int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Замечание 3.3. *В теории интеграла Лебега имеется значительно более сильная теорема Лебега. В ней требуется, что бы последовательность интегрируемых по Лебегу функций (по модулю) имела интегрируемую мажоранту и сходилась бы почти всюду, т.е. всюду, за исключением точек некоторого нуль множества. Тогда предельная функция интегрируема и возможен переход к пределу под знаком интеграла.*

Теорема 3.9. *Если все функции $u_k(x)$ непрерывны на $[a,b]$ и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} S(x)$, то $\forall x, x_0 \in [a,b]$*

$$\int\limits_{x_0}^{x} \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\right)\,dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{x_0}^{x} u_k(t)\,dt$$

(т.е. ряд можно интегрировать почленно), причем ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{x_0}^{x} u_k(t)\,dt$ сходится равномерно по $x \in [a,b]$ при любом x_0.

Доказательство. Так как $u_k(x)$ — непрерывные функции, то $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$ — непрерывная функция на $[a,b]$. По условию теоремы $S_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows}$

$S(x)$. Поэтому по теореме 3.8 $\int\limits_{x_0}^{x} S_n(t)\,dt \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} \int\limits_{x_0}^{x} S(t)\,dt$, $\forall x_0 \in [a,b]$.

Но

$$\int\limits_{x_0}^{x} S_n(t)\,dt = \int\limits_{x_0}^{x} \sum_{k=1}^{n} u_k(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_0}^{x} u_k(t)\,dt; \int\limits_{x_0}^{x} S(t)\,dt = \int\limits_{x_0}^{x} \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \right) dt.$$

Таким образом,

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\int\limits_{x_0}^{x} u_k(t)\,dt \right) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} \int\limits_{x_0}^{x} \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \right) dt.$$

Это означает, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{n} \left(\int\limits_{x_0}^{x} u_k(t)\,dt \right)$ равномерно сходится на $[a,b]$ к своей сумме, равной $\int\limits_{x_0}^{x} \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(t) \right) dt$. □

3.4.3 Переход к пределу под знаком производной и почленное дифференцирование ряда

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ на промежутке X и пусть все $f_n(x)$ и $f(x)$ — дифференцируемые функции. Можно ли утверждать, что последовательность $\{f_n'(x)\}$ сходится к $\{f'(x)\}$? Если $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \right)' = f'(x)$, то говорят, что в этой последовательности *можно переходить к пределу под знаком производной.*

Следующий пример показывает, что переход к пределу под знаком производной не всегда возможен.

Пример 3.11. $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n} \to f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, *причем данная сходимость даже равномерная. Последовательность производных* $f_n'(x) = \cos nx$ *не сходится к* $f'(x) = 0$ *ни в одной точке* x *(она расходится при* $x \neq 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, *а при* $x = 2\pi k$ *она сходится к единице).*

Аналогичный вопрос можно поставить и для сходящегося функционального ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$: верно ли равенство

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x)\ ?$$

Если это равенство верно, то говорят, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ *можно дифференцировать почленно.* Отметим, что для конечной суммы дифференцируемых функций это равенство всегда верно. Что касается ряда, то оно может не выполняться. Пример такого ряда можно построить из разностей соседних членов последовательности из примера 3.11.

Теорема 3.10. *Пусть*

1) все функции $f_n(x)$ имеют непрерывные производные $f_n'(x)$ на $[a,b]$;

2) в некоторой точке $x_0 \in [a,b]$ $\{f_n(x_0)\} \to f_0 \in \mathbb{R}$, $n \to \infty$;

3) $\{f_n'(x)\} \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} \varphi(x)$.

Тогда функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится на $[a,b]$ к некоторой дифференцируемой функции $f(x)$, $f'(x) = \varphi(x)$, $f(x_0) = f_0$ и

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \Big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big)'.$$

Доказательство. Поскольку $\{f_n'(x)\} \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} \varphi(x)$, то по теореме 3.7 $\varphi(x)$ — непрерывная функция на $[a,b]$, а по теореме 3.8 $\forall x \in [a,b]$

$$f_n(x) - f_n(x_0) = \int\limits_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} \int\limits_{x_0}^{x} \varphi(t)\,dt,\ n \to \infty.$$

Но $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = f_0$, поэтому $f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x) := f_0 + \int\limits_{x_0}^{x} \varphi(t)\,dt$, $n \to \infty$ и

$$\exists\ f'(x) = \varphi(x).$$

□

Теорема 3.11. *Пусть*

1) все функции $u_k(x)$ имеют непрерывные производные на $[a,b]$;

2) в некоторой точке $x_0 \in [a,b]$ числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x_0)$ сходится к S_0;

3) ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k'(x)$ сходится равномерно на $[a,b]$ к функции $\varphi(x)$.

Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ *равномерно сходится на* $[a,b]$ *к некоторой дифференцируемой функции* $S(x)$*,* $S(x_0) = S_0$ *и* $S'(x) = \varphi(x)$ *или* $\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right)' = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u'_k(x)$*, т.е. ряд можно дифференцировать почленно.*

Доказательство. Из условий теоремы следует, что функции $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$ имеют непрерывные производные на $[a,b]$, $S_n(x_0) \to S_0$ и $S'_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} \varphi(x)$. Поэтому по теореме 3.10 $\exists$ такая дифференцируемая функция $S(x)$ на $[a,b]$, что $S_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} S(x)$, $S(x_0) = S_0$ и $S'(x) = \varphi(x)$. $\square$

3.5 Функциональные евклидовые, нормированные и метрические пространства

В начале 20 века, в связи с изучением дифференциальных уравнений в частных производных, интегральных уравнений, а позднее и квантовой механики, в математике возникла идея рассматривать функции не изолированно, а как элементы линейных пространств, наделенных некоторыми дополнительными свойствами. Эта идея оказалась очень плодотворной, обогатила теорию дифференциальных уравнений, породила такой раздел математики, как функциональный анализ, и широко использовалась при развитии численных методов.

Мы рассмотрим некоторые начальные понятия, связанные с развитием этой идеи.

В линейной алгебре рассматриваются линейные конечномерные пространства. Основной интерес для анализа представляют пространства функций, не являющиеся конечномерными. Напомним вначале основные факты, относящиеся к евклидовым пространствам.

Определение 3.6. *Вещественное линейное пространство* $\mathcal{E}$*, состоящее из элементов любой природы, называется евклидовым, если на множестве пар элементов из* $\mathcal{E}$ *задана вещественнозначная функция* (f,g)*,* $f,g \in \mathcal{E}$ *такая, что для нее выполнены аксиомы линейности, симметричности и положительной определенности:*

1) $(\alpha f + \beta g, h) = \alpha(f,h) + \beta(g,h) \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}, \forall f,g,h \in \mathcal{E};$

2) $(f, g) = (g, f) \quad \forall f, g \in \mathcal{E}$*;*

3) $(f, f) \geqslant 0 \quad \forall f \in \mathcal{E}$*, и если* $(f, f) = 0$*, то* $f = \theta \in \mathcal{E}$*.*

Для вещественных линейных евклидовых пространств справедливо неравенство Коши–Буняковского

$$|(f, g)| \leqslant \sqrt{(f, f)(g, g)} \quad \forall f, g \in \mathcal{E}.$$

Оно доказывается так: рассмотрим неотрицательный квадратный трехчлен $p_{f,g}(\lambda) = (f + \lambda g, f + \lambda g) = (f, f) + 2\lambda(f, g) + \lambda^2(g, g)$. В силу его неотрицательности, его дискриминант неположителен:

$$D(p_{f,g}) = 4((f, g)^2 - (g, g)(f, f)) \leqslant 0,$$

откуда и следует неравенство Коши–Буняковского.

Заметим, что при доказательстве этого неравенства мы не пользовались условием $(f, f) = 0 \ \Rightarrow f = \theta \in \mathcal{E}$, поэтому если на вещественном линейном пространстве определена вещественнозначная функция (f, g), $f, g \in \mathcal{E}$, удовлетворяющая всем аксиомам скалярного произведения, кроме условия $(f, f) = 0 \ \Rightarrow f = \theta \in \mathcal{E}$, то в таком вещественном линейном пространстве неравенство Коши–Буняковского все равно справедливо.

Определение 3.7. *Евклидовы пространства* $\mathcal{E}_1$ *и* $\mathcal{E}_2$ *со скалярными произведениями* $(\cdot, \cdot)_1$ *и* $(\cdot, \cdot)_2$*, соответственно, изометричны (изоморфны), если существует биективное отображение* $\varphi\colon \mathcal{E}_1 \mapsto \mathcal{E}_2$ *такое, что*

1) $\varphi(\alpha f + \beta g) = \alpha\varphi(f) + \beta\varphi(g) \quad \forall f, g \in \mathcal{E}_1, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$*;*

2) $(\varphi(f), \varphi(g))_2 = (f, g)_1 \quad \forall f, g \in \mathcal{E}_1$*.*

Отображение φ *при этом называется изометрией (изоморфизмом) евклидовых пространств.*

Пример 3.12. *Рассмотрим линейное пространство* $Q[a, b]$ *кусочно-непрерывных вещественнозначных функций, определенных на отрезке* $[a, b]$*, принимающих в каждой точке разрыва значение, равное полусумме правого и левого предельных значений в этой точке, причем в концевых точках отрезка функции предполагаются односторонне непрерывными. Снабдим это пространство скалярным произведением*

$$(f, g) = \int\limits_a^b f(x)g(x)dx, \ f, g \in Q[a, b].$$

Аксиомы скалярного произведения проверяются элементарно, при этом условие равенства значения функции в точке разрыва полусумме правого и левого предельных значений в этой точке нужно для выполнения аксиомы $(f, f) = 0 \Rightarrow f = \theta$ скалярного произведения.

Поэтому если не накладывать на кусочно-непрерывные функции условия равенства значения функции в точке разрыва полусумме правого и левого предельных значений в этой точке, то неравенство Коши–Буняковского, имеющее в данном случае вид

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx},$$

все равно будет справедливо. В данном случае оно называется интегральным неравенством Коши-Буняковского.

Более широкий класс линейных пространств, по сравнению с евклидовыми, образуют нормированные пространства.

Определение 3.8. *Вещественное линейное пространство $\mathcal{L}$, состоящее из элементов любой природы, называется нормированным, если на $\mathcal{L}$ задана вещественнозначная функция $\|f\|$, $f \in \mathcal{L}$ такая, что*

1) $\|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall f \in \mathcal{L}$;

2) $\|f\| \geqslant 0 \quad \forall f \in \mathcal{L}; \qquad \|f\| = 0 \Rightarrow f = \theta \in \mathcal{L}$;

3) $\|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\| \quad \forall f, g \in \mathcal{L}$.

Первая аксиома называется однородностью нормы, вторая — ее положительной определенностью, а последняя — неравенством треугольника или неравенством Минковского[5]. Неравенство треугольника гарантирует непрерывность нормы, что означает малость величины $|\|x + \triangle x\| - \|x\||$ при малых $\|\triangle x\|$. Действительно, неравенство $\|x + \triangle x\| \leqslant \|x\| + \|\triangle x\|$ есть просто неравенство треугольника в других обозначениях, а если в неравенстве треугольника положить $f + g = x$, $f = x + \triangle x$, то $g = -\triangle x$, и $\|x\| - \|x + \triangle x\| \leqslant \|-\triangle x\| = \|\triangle x\|$. В совокупности полученные неравенства дают $|\|x + \triangle x\| - \|x\|| \leqslant \|\triangle x\|$, что и означает непрерывность нормы.

[5]Минковский Герман (1864–1909) — немецкий математик и физик.

Определение 3.9. *Нормированные пространства* $\mathcal{L}_1$ *и* $\mathcal{L}_2$ *с нормами* $\|\cdot\|_1$ *и* $\|\cdot\|_2$*, соответственно, изоморфны, если существует биективное отображение* $\varphi\colon \mathcal{L}_1 \mapsto \mathcal{L}_2$ *такое, что*

1. $\varphi(\alpha f + \beta g) = \alpha\varphi(f) + \beta\varphi(g) \quad \forall f, g \in \mathcal{L}_1,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$;
2. $\|\varphi(f)\|_2 = \|f\|_1 \quad \forall f \in \mathcal{L}_1$.

Заметим, что любое евклидово пространство $\mathcal{E}$ можно сделать нормированным, введя норму по формуле $\|f\| = \sqrt{(f,f)}$, $f \in \mathcal{E}$. Проверки требует лишь неравенство треугольника: $\|f+g\|^2 = (f+g, f+g) = (f,f) + 2(f,g) + (g,g) \leqslant \|f\|^2 + 2\|f\|\|g\| + \|g\|^2 = (\|f\| + \|g\|)^2 \quad \Rightarrow \|f+g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$.

В евклидовых пространствах для нормы выполняется *тождество параллелограмма*:

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2, \tag{3.9}$$

которое интерпретируется как равенство суммы квадратов длин диагоналей параллелограмма сумме квадратов его сторон. В его справедливости легко убедиться, если раскрыть скалярные произведения в левой части равенства (3.9).

Наоборот, если в нормированном пространстве выполнено тождество параллелограмма, то в нем можно ввести скалярное произведение по формуле

$$(x,y) = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right),\ x, y \in \mathcal{L}. \tag{3.10}$$

Действительно, симметричность и положительная определенность скалярного произведения в данном случае очевидны, и проверки требует только линейность произведения (3.10). Проверим сначала равенство

$$(x+y, z) = (x,z) + (y,z). \tag{3.11}$$

Оно эквивалентно равенству

$$\|x+y+z\|^2 - \|x+y\|^2 - \|z\|^2 = \|x+z\|^2 - \|x\|^2 - \|z\|^2 + \|y+z\|^2 - \|y\|^2 - \|z\|^2,$$

которое, в свою очередь, эквивалентно равенству

$$\|x+y+z\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2 + \|z\|^2 = \|x+y\|^2 + \|y+z\|^2 + \|x+z\|^2, \tag{3.12}$$

явно симметричному относительно любой перестановки x, y, z. Для доказательства равенства (3.12) запишем следующие тождества параллелограмма

$$\begin{gathered}
\|x+y+z\|^2+\|x+y-z\|^2=2\|x+y\|^2+2\|z\|^2, \\
\|x+y-z\|^2+\|x-y+z\|^2=2\|x\|^2+2\|y-z\|^2, \\
\|x+z+y\|^2+\|x+z-y\|^2=2\|x+z\|^2+2\|y\|^2.
\end{gathered}$$

Вычитая из первого равенства второе и прибавляя третье, после сокращения на 2 получим

$$\|x+y+z\|^2=\|x+y\|^2+\|z\|^2-\|x\|^2-\|y-z\|^2+\|x+z\|^2+\|y\|^2.$$

Если теперь в правую часть данного равенства подставить норму $\|y-z\|^2$, выраженную из тождества параллелограмма

$$\|y+z\|^2+\|y-z\|^2=2\|y\|^2+2\|z\|^2,$$

то мы получим (3.12), что доказывает (3.11).

Подставляя в (3.11) $y=-x$, получаем $0=(\theta, z)=(x, z)+(-x, z)$, откуда $(-x, z)=-(x, z)$.

Теперь из (3.11) мы получим очевидной индукцией равенство $(nx, y)=n(x, y)\quad \forall n \in \mathbb{Z}$, а из него, подстановкой $x=\frac{1}{n}x'$, — равенство $\frac{1}{n}(x', y)=(\frac{1}{n}x', y)$, а значит, и равенство $(\lambda x, y)=\lambda(x, y)\quad \forall \lambda \in \mathbb{Q}$, $\forall x, y \in \mathcal{L}$. В силу непрерывности нормы, скалярное произведение (3.10) также непрерывно, поэтому из последнего равенства вытекает

$$(\lambda x, y)=\lambda(x, y)\quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathcal{L}. \tag{3.13}$$

Из равенств (3.11) и (3.13) вытекает линейность скалярного произведения (3.10), что и завершает доказательство.

Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема 3.12. *В нормированном пространстве $\mathcal{L}$ норма $\|\cdot\|$ порождена скалярным произведением тогда и только тогда, когда она удовлетворяет тождеству параллелограмма (3.9).*

Пример 3.13. *Рассмотрим линейное пространство $C[a, b]$ непрерывных вещественнозначных функций, определенных на отрезке $[a, b]$. Снабдим это пространство нормой*

$$\|f\|_C=\sup_{x \in [a, b]}|f(x)|.$$

Аксиомы нормы проверяются в этом случае без труда.

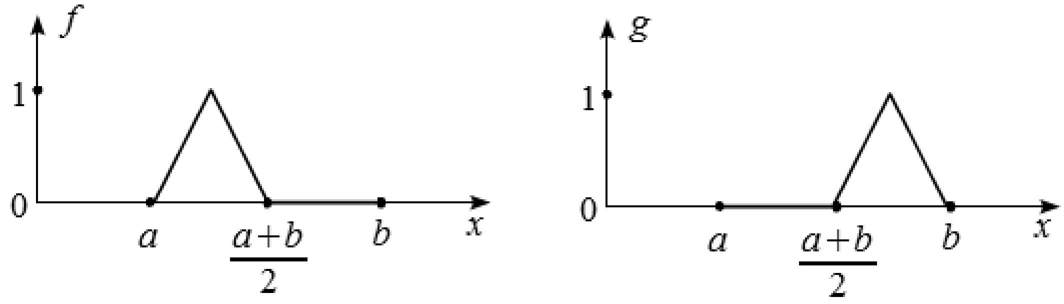

Рис. 3.4: пара функций, не удовлетворяющих тождеству параллелограмма в пространстве $C[a,b]$.

Поскольку для функций $f,g \in C[a,b]$, графики которых показаны на рисунке 3.4, имеют место равенства $\|f+g\| = \|f-g\| = \|f\| = \|g\| = 1$, то тождество параллелограмма (3.9) в данном случае не выполнено, и в пространстве $C[a,b]$ нельзя ввести скалярное произведение, согласованное с нормой.

Еще более общий класс пространств образуют метрические пространства.

Определение 3.10. *Множество X называется метрическим пространством, если на множестве пар элементов из X определена вещественнозначная неотрицательная функция $\rho(f,g)$, $f,g \in X$, называемая расстоянием, такая, что*

1) $\rho(f,g) = 0 \Leftrightarrow f = g$;

2) $\rho(f,g) = \rho(g,f)$ *(аксиома симметрии);*

3) $\rho(f,g) \leqslant \rho(f,h) + \rho(h,g)$ *(неравенство треугольника).*

Первая аксиома означает, что функция $\rho(\cdot,\cdot)$ различает точки множества X.

Легко проверить, что нормированные (а значит, и евклидовы) пространства являются метрическими с функцией $\rho(f,g) = \|f-g\|$. Метрическое пространство не обязано быть линейным, но никаких метрических пространств, отличных от нормированных, мы рассматривать не будем.

Определение 3.11. *Метрические пространства X_1 и X_2 с метриками ρ_1 и ρ_2, соответственно, изометричны (изоморфны), если существует биективное отображение φ: $X_1 \mapsto X_2$ такое, что $\rho_2(\varphi(f),\varphi(g)) = \rho_1(f,g) \quad \forall f,g \in X_1$. При этом отображение φ называется изометрией (изоморфизмом) метрических пространств.*

Определение 3.12. *Последовательность $\{f_n\}$ элементов метрического пространства X сходится к элементу $f \in X$ тогда и только тогда, когда $\rho(f_n, f) \to 0$ при $n \to \infty$.*

Говоря о сходимости последовательностей в нормированных пространствах, мы будем иметь в виду сходимость по метрике, порожденной нормой.

Определение 3.13. *Последовательность $\{f_n\}$ элементов метрического пространства X называется фундаментальной, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ такое, что $\rho(f_n, f_m) < \varepsilon$ при $\forall n, m > N$.*

С помощью неравенства треугольника легко проверить, что сходящаяся последовательность элементов метрического пространства является фундаментальной. Однако, в отличие, например, от вещественной оси, в произвольном метрическом пространстве не всякая фундаментальная последовательность сходится.

Определение 3.14. *Метрическое пространство X называется полным, если любая фундаментальная последовательность элементов пространства X сходится к некоторому элементу из X.*

В полном метрическом пространстве X справедлив обычный критерий Коши: последовательность элементов из X сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.

Поскольку нормированное пространство является метрическим, то на него переносятся определения фундаментальности и полноты.

Пример 3.14. *Множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел является метрическим пространством с метрикой $\rho(x, y) = |x - y|$, $x, y \in \mathbb{Q}$. Оно даже является линейным нормированным пространством над самим собой как числовым полем. Однако полным оно не является, в чем и состоит основная причина введения вещественных чисел. Так, в первом семестре доказывалось, что последовательность рациональных чисел $\{x_n\}$, заданная рекуррентной формулой*

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right),\ a \in \mathbb{Q},\ a > 0,\ x_1 \in \mathbb{Q},\ x_1 > 0,\ n = 1, 2, 3, \ldots,$$

сходится к числу $\sqrt{a}$, которое для многих $a \in \mathbb{Q}$ является иррациональным. Другая последовательность рациональных чисел

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

сходится к иррациональному числу e.

Заметим, что нормы пространств $C[a,b]$ и $Q[a,b]$ можно вычислять и для многих функций, не принадлежащих пространствам $C[a,b]$ и $Q[a,b]$, соответственно, и эти нормы удовлетворяют всем аксиомам нормы, возможно кроме того, что из $\|f\| = 0$ следует $f(x) \equiv 0$.

Очевидно, что сходимость в пространстве $C[a,b]$ является равномерной сходимостью функциональных последовательностей на сегменте $[a,b]$. Поскольку равномерный предел непрерывных на сегменте функций является непрерывной функцией, пространство $C[a,b]$ является полным.

Сходимость в пространстве $Q[a,b]$ называется *сходимостью в среднеквадратичном.* Это пространство полным не является.

Действительно, ограниченная на сегменте $[a,b]$ функция со счетным числом точек разрыва является интегрируемой по Риману, не входит пространство $Q[a,b]$, но может быть сколь угодно точно аппроксимирована функциями из $Q[a,b]$ в среднеквадратичной норме. Конкретный пример такой функции содержится в следующем примере.

Пример 3.15. *Определим функциональную последовательность $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ на отрезке $[0,1]$ равенством*

$$f_n(t) := \begin{cases} \frac{1}{k},\ \frac{1}{k+1} < t < \frac{1}{k}, k = 1, 2, \ldots, n \\ \frac{1}{n+1},\ 0 \leqslant t < \frac{1}{n+1}, \\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1}\right),\ t = \frac{1}{k}, k = 2, \ldots, n+1 \\ 1,\ t = 1. \end{cases}$$

Эта последовательность фундаментальна в пространстве $Q[0,1]$, т.к. при $n > m > N$ функции f_n и f_m отличаются на множестве, входящем в отрезок $[0, \frac{1}{m+1}]$, значения функций f_n и f_m там (и на всем отрезке $[0,1]$) лежат в $[0,1]$, а значит

$$\|f_n - f_m\|_{Q[0,1]} \leqslant \left(\int_0^{1/(m+1)} \left(f_n(t) - f_m(t)\right)^2 \, dt\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{m+1}\right)^{1/2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{N+1}} \to 0, \text{ при } N \to +\infty.$$

Однако, поскольку точки разрыва функции f_n суть $1/2, 1/3, \ldots, 1/(n+1)$, а их число неограниченно возрастает с ростом n, последовательность f_n не может сходиться ни к какой функции $f \in Q[0,1]$ с конечным числом точек разрыва, т.к. начиная с некоторого n_0 функции f_n

имеют стабильное поведение в некоторой окрестности точки $1/n_0$ (в которой они имеют разрыв), а функция $f(t)$ непрерывна в этой точке[6].

Теорема 3.13. *Если последовательность $f_n(x) \in Q[a,b]$ сходится к функции $f(x) \in Q[a,b]$ по норме пространства $Q[a,b]$, то*

$$\int\limits_{x_0}^{x} f_n(t)dt \overset{x\in[a,b]}{\rightrightarrows} \int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt,\; n \to \infty, x_0 \in [a,b].$$

Доказательство. Действительно, в силу интегрального неравенства Коши-Буняковского,

$$\left|\int\limits_{x_0}^{x} f_n(t)dt - \int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt\right| \leqslant \int\limits_{a}^{b} |f_n(t) - f(t)|dt \leqslant$$

[6]Можно предположить, что если перейти от пространства $Q[a,b]$ к пространству $\mathcal{R}[a,b]$ всех интегрируемых функций на отрезке $[a,b]$ (пополнить пространство $Q[a,b]$ максимальным образом, не выходя за рамки интеграла Римана) с той же среднеквадратичной метрикой, то мы получим полное пространство. Однако и эта попытка терпит неудачу. Докажем это, воспользовавшись *критерием Лебега интегрируемости функции по Риману: ограниченная на отрезке [a,b] функция интегрируема по Риману на этом отрезке, тогда и только тогда, когда множество ее точек разрыва является нуль-множеством, т.е. может быть покрыто конечным или счетным набором отрезков сколь угодно малой суммарной длины.* Построим множество $K \subset [a,b]$ как результат следующей процедуры из бесконечного числа шагов. На первом шаге выбросим из отрезка $[a,b]$ средний интевал длины $\Delta \in (0,(b-a)/3)$, на втором шаге, выбросим из двух оставшихся отрезков их средние интевалы длины $\Delta/3$ и т.д., на n-ом шаге выбросим из 2^{n-1} отрезков, оставшихся в результате предыдущего шага их средние интевалы длины $\Delta/3^{n-1}$ и т.д. Пусть K – подмножество точек отрезка $[a,b]$, не выбрасываемых ни на каком шаге, а E – множество точек, выбрасываемых на каком либо шаге. Понятно, что E является объединением счетного числа непересекающихся интервалов суммарной длины $\Delta\sum_{k=1}^{\infty}(2/3)^k = 3\Delta < (b-a)$ и открыто, а, значит, множество K – замкнуто и не может быть покрыто конечным или счетным набором отрезков сколь угодно малой суммарной длины.

Пусть, теперь, $h_n(x)$, $x \in [a,b]$ – функция, равная нулю в точках, выброшенных вплоть до n-ого шага и равная единице в остальных точках отрезка $[a,b]$. Нетрудно убедиться, что последовательность h_n – фундаментальна относительно метрики пространства $\mathcal{R}[a,b]$. Если бы некоторая функция $f \in \mathcal{R}[a,b]$ была бы пределом последовательности h_n относительно этой метрики, то она совпала бы на $[a,b]$ с точностью до значений на нуль-множестве с характеристической функцией h множества K ($h(x) = 1$ при $x \in K$, $h(x) = 0$ при $x \in E$.

Поскольку, из построения множества K следует, что в любой окрестности любой точки множества K есть некий интервал из множества E, а множество K не является нуль-множеством, то функция h – разрывна во всех точках множества K и не может быть сделана непрерывной на всем множестве K путем изменения ее значений на некотором нуль множестве. Поэтому, по критерию Лебега, функции h и f неинтегрируемы и сами и с квадратом на отрезка $[a,b]$. Полученное противоречие показывает, что у последовательности h_n нет предела в пространстве $\mathcal{R}[a,b]$ и это пространство неполно.

В неполноте пространства $\mathcal{R}[a,b]$ и состоит главный недостаток интеграла Римана. Понятие интеграла Лебега (Анри Лебег (1875 – 1941) – французский математик) расширяет множество интегрируемых функций так, что расширение $\mathcal{L}^2[a,b]$ пространств $Q[a,b] \subset \mathcal{R}[a,b]$, состоящее из вещественнозначных функций $f(x)$, $x \in [a,b]$ (не обязательно ограниченных), для которых определен интеграл Лебега $\int_a^b f^2(x)\,dx$, будет полным пространством.

$$\leqslant \sqrt{b-a}\sqrt{\int\limits_a^b (f_n(t)-f(t))^2 dt} \to 0,\ n\to\infty.$$

□

Теорема 3.14. *Если функции $f(x)$, $f_n(x)$ интегрируемы на сегменте $[a,b]$ и $f_n \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$, то $\|f_n - f\|_{Q[a,b]} \to 0$ при $n\to\infty$.*

Доказательство. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. В силу $f_n \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$ существует такое N, что $\forall n > N$ и $\forall x \in [a,b]$ выполнено неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{(b-a)^{1/2}}$. Тогда $\forall n > N$ выполнено неравенство

$$\|f_n - f\|_{Q[a,b]} = \left(\int\limits_a^b |f_n(x) - f(x)|^2\, dx\right)^{1/2} < \frac{\varepsilon}{(b-a)^{1/2}} \left(\int\limits_a^b dx\right)^{1/2} = \varepsilon.$$

Это и означает, что $\|f_n - f\|_{Q[a,b]} \to 0$ при $n\to\infty$. □

Замечание 3.4. *Можно доказать*[7]*, что условие интегрируемости функции f в этой теореме следует из остальных, т.е. равномерный предел интегрируемых функций является функцией интегрируемой. Эта теорема означает, в частности, что из равномерной сходимости следует сходимость в среднеквадратичном. Как показывает следующий пример, обратное неверно, т.е. из сходимости по норме $\|\cdot\|_{Q[a,b]}$ не следует даже поточечная сходимость, не говоря уже о равномерной.*

Пример 3.16. *Для $\forall k \in \mathbb{N}$ определим функциональную последовательность на сегменте $[0,1]$ формулой:*

$$f_{ki}(x) = \begin{cases} 1, & \dfrac{i-1}{k} < x < \dfrac{i}{k}, \\ \dfrac{1}{2}, & x = \dfrac{i-1}{k}, \dfrac{i}{k} \\ 0, & \text{в остальных точках сегмента } [0,1], \end{cases} \qquad i = 1,2,\ldots,k.$$

Положим $\{f_n(x)\} = \{f_{11}, f_{21}, f_{22}, f_{31}, f_{32}, f_{33}, \ldots, f_{k1}, f_{k2}, \ldots, f_{kk}, \ldots\} \subset Q[0,1]$. Имеем $\|f_{ki}\|_{Q[0,1]} = \left(\dfrac{1}{k}\right)^{1/2} \to 0$ при $k\to\infty$. Однако ни в одной точке сегмента $[0,1]$ последовательность $f_n(x)$ не сходится.

[7] См. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа, ч. II, гл. 1, §2, с. 27.

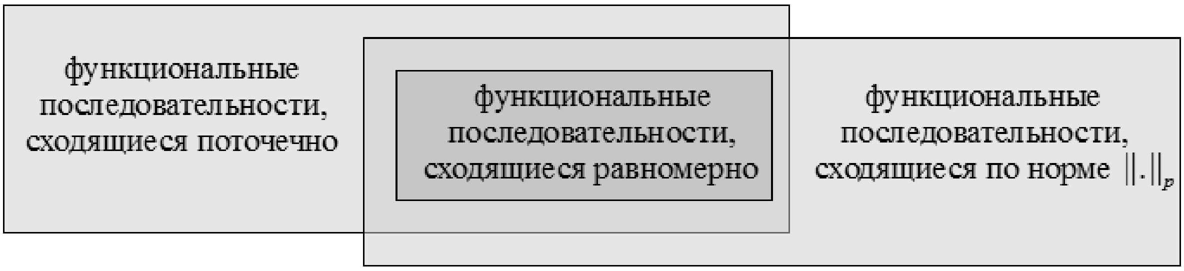

Рис. 3.5: соотношения между различными видами сходимости функциональных последовательностей: по норме $\|\cdot\|_{Q[a,b]}$, поточечной и равномерной.

Следующий пример показывает, что и из поточечной сходимости не следует сходимость по норме $\|\cdot\|_{Q[a,b]}$.

Пример 3.17. *Определим функциональную последовательность $\{f_n(x)\}$ на сегменте $[0,\pi]$:*

$$f_n(x) = \begin{cases} n^{1/2}\sin nx, & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{n}, \\ 0, & \dfrac{\pi}{n} \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

Ясно, что $f_n(x) \to 0$ для любого фиксированного x. В то же время,

$$\|f_n\|^2_{Q[a,b]} = \int\limits_0^{\pi/n} n\sin^2(nx)dx = \int\limits_0^{\pi} \frac{1}{2}(1-\cos 2t)dt = \frac{\pi}{2}.$$

Значит, $\|f_n\|_{Q[a,b]} \not\to 0$ при $n \to \infty$.

Этот пример качественно похож на пример 3.10 на бесконечной полуоси.

Соотношение между различными видами сходимости функциональных последовательностей: равномерной, поточечной и по норме $\|\cdot\|_{Q[a,b]}$, изображено на рис. 3.5. Заметим, что поточечная сходимость, в отличие от остальных двух, не является метрической.

Определение 3.15. *Функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится по норме $\|\cdot\|$ к своей сумме $S(x)$ тогда и только тогда, когда $\|S_n - S\| \to 0$ при $n \to \infty$ для $S_n(x) := \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$.*

Таким образом, для функционального ряда, наряду с равномерной сходимостью, определено и понятия сходимости в среднеквадратичном.

3.6 Теорема Арцела

По теореме Больцано–Вейерштрасса, изученной в первом и втором семестрах, из ограниченной числовой последовательности, а также из ограниченной последовательности точек m-мерного евклидова пространства, можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Рассмотрим вопрос о возможности перенесения этого утверждения в бесконечномерное пространство $C[a,b]$. Пусть функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$, $x \in [a,b]$, ограничена в пространстве $C[a,b]$. Для любой фиксированной точки $x_1 \in [a,b]$ числовая последовательность $\{f_n(x_1)\}$ ограничена, и из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{f_{n_k}(x_1)\}$. Для другой точки $x_2 \in [a,b]$ также можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{f_{\overline{n}_i}(x_2)\}$, однако последовательности номеров n_k и $\overline{n}_i$ могут быть различны. Таким образом, ответ на вопрос о возможности выделения из последовательности $\{f_n(x)\}$ подпоследовательности $\left\{f_{n_j}(x)\right\}$, сходящейся по норме пространства $C[a,b]$ или хотя бы поточечно, не является очевидным.

Положительный ответ на этот вопрос при некотором дополнительном условии дает теорема Арцела.[8]

Определение 3.16. *Функциональная последовательность* $\{f_n(x)\}$, $x \in X$ *называется* равностепенно непрерывной *на промежутке* X, *если* $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ *такое, что* $\forall n \in \mathbb{N}$ *и* $\forall x', x'' \in X$, *удовлетворяющих условию* $|x' - x''| < \delta$, *выполняется неравенство*

$$|f_n(x') - f_n(x'')| < \varepsilon.$$

Если в этом определении зафиксировать n, то мы получаем просто определение равномерно непрерывной функции $f_n(x)$, поэтому существенно в этом определении то, что δ — общее для всех n и всех $x \in X$.

Пример 3.18. *Функциональная последовательность* $\sin nx$, $x \in [0,1]$ *не является равностепенно непрерывной, хотя по теореме Кантора*[9] *каждая функция* $f_n(x)$ *равномерно непрерывна на* $[0,1]$. *В самом деле, возмем* $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, $x' = \dfrac{\pi}{2n}$, $x'' = \dfrac{\pi}{n}$, *тогда* $\forall \delta > 0\ \exists n$ *такое, что* $|x' - x''| = \dfrac{\pi}{2n} < \delta$, *но при этом*

$$|f_n(x') - f_n(x'')| = |\sin\frac{\pi}{2} - \sin\pi| = 1 > \varepsilon = \frac{1}{2}.$$

[8] Арцела Чезаре (1847–1912) — итальянский математик.

[9] Кантор Георг Фердинанд Людвиг Филипп (1845–1918) — немецкий математик, основатель теории множеств.

Из формулы конечных приращений Лагранжа легко следует, что достаточным условием равностепенной непрерывности последовательности $\{f_n\}$ на промежутке X является равномерная ограниченность последовательности $\{f'_n(x)\}$ на промежутке X.

Теорема 3.15 (Арцела)**.** *Если функциональная последовательность* $\{f_n(x)\}$ *равномерно ограничена и равностепенно непрерывна на* $[a,b]$, *то из нее можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся на* $[a,b]$.

Доказательство. Доказательство проведем в два этапа.

1. Из последовательности $\{f_n(x)\}$ выделим подпоследовательность, сходящуюся во всех рациональных точках сегмента $[a,b]$.

2. Докажем, что эта подпоследовательность сходится равномерно на $[a,b]$.

1. В силу счетности множества всех рациональных чисел из всех рациональных точек сегмента $[a,b]$ можно образовать числовую последовательность $\{x_n\}$. Рассмотрим числовую последовательность $\{f_n(x_1)\}$. Она ограничена. Поэтому по теореме Больцано–Вейерштрасса из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность, которую занумеруем так: $f_{11}(x_1), f_{12}(x_1), \ldots, f_{1n}(x_1), \ldots$ Итак, функциональная последовательность $f_{11}(x), f_{12}(x), \ldots, f_{1n}(x), \ldots$ сходится в точке x_1. Выделим из нее подпоследовательность, сходящуюся в точке x_2, и занумеруем ее так: $f_{21}(x), f_{22}(x), \ldots, f_{2n}(x), \ldots$ Эта подпоследовательность сходится в двух точках: x_1 и x_2. Из нее выделим подпоследовательность, сходящуюся в точке x_3. Продолжая этот процесс неограниченно, получим последовательность подпоследовательностей

$$\begin{array}{ccccc} f_{11}(x), & f_{12}(x), & \ldots & f_{1n}(x), & \ldots \\ f_{21}(x), & f_{22}(x), & \ldots & f_{2n}(x), & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{n1}(x), & f_{n2}(x), & \ldots, & f_{nn}(x), & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Каждая из этих последовательностей является подпоследовательностью предыдущих последовательностей, поэтому подпоследовательность, стоящая в n-ой строчке, сходится в точках $x_1, \ldots, x_n$. Следовательно, *диагональная подпоследовательность*

$$f_{11}(x), f_{22}(x), \ldots, f_{nn}(x), \ldots$$

сходится во всех рациональных точках $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ отрезка $[a, b]$. В самом деле, для любой точки x_n диагональная подпоследовательность, начиная с номера n, является подпоследовательностью последовательности, стоящей в n-ой строчке, которая сходится в точке x_n. Выделение диагональной подпоследовательности называется *диагональной процедурой Кантора.*

2. Докажем, что подпоследовательность $\{f_{nn}(x)\}$ сходится равномерно на $[a, b]$.

   Для этого достаточно доказать, что она удовлетворяет условию критерия Коши равномерной сходимости функциональной последовательности, т.е. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$ такое, что $\forall n, m > N$ и $\forall x \in [a, b]$ выполнено неравенство $|f_{nn}(x) - f_{mm}(x)| < \varepsilon$.

   Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Так как последовательность $\{f_n(x)\}$ равностепенно непрерывна, то $\exists\, \delta > 0$ такое, что $\forall n$ и $\forall x', x'' \in [a, b]$, удовлетворяющих условию $|x' - x''| < \delta$, выполняется неравенство

$$|f_n(x') - f_n(x'')| < \varepsilon/3. \tag{3.14}$$

   Для указанного δ из последовательности $\{x_n\}$ можно выбрать конечное число точек $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_p}$ так, что они разобьют отрезок $[a, b]$ на частичные сегменты, длины которых меньше δ.[10] Тогда $\forall x \in [a, b]$ $\exists x_{n_i}$ такое, что $|x - x_{n_i}| < \delta$. Диагональная подпоследовательность сходится во всех рациональных точках, в том числе и в точках $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_p}$. Поэтому, в силу критерия Коши для числовых последовательностей и конечности числа точек x_{n_i}, $i = 1, \ldots, p$, для заданного ε $\exists N = N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n, m > N$ выполнено неравенство:

$$|f_{mm}(x_{n_i}) - f_{nn}(x_{n_i})| < \frac{\varepsilon}{3},\ i = 1, 2, \ldots, p. \tag{3.15}$$

Возмем теперь любое $x \in [a, b]$ и такое x_{n_i}, что $|x - x_{n_i}| < \delta$. В силу (3.14), получаем:

$$|f_{mm}(x) - f_{mm}(x_{n_i})| < \frac{\varepsilon}{3},\ |f_{nn}(x) - f_{nn}(x_{n_i})| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

[10] Такое разбиение называется *δ-сетью.*

Поэтому, используя (3.15), $\forall n, m > N$ и $\forall x \in [a, b]$ имеем:

$$|f_{mm}(x) - f_{nn}(x)| \leqslant |f_{mm}(x) - f_{mm}(x_{n_i})| + |f_{mm}(x_{n_i}) - f_{nn}(x_{n_i})| + \\ + |f_{nn}(x_{n_i}) - f_{nn}(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Таким образом, мы доказали выполнение условия критерия Коши равномерной сходимости подпоследовательности $\{f_{nn}(x)\}$ последовательности $\{f_n(x)\}$ на отрезке $[a, b]$. $\square$

Условие равномерной ограниченности последовательности $\{f_n(x)\}$ на отрезке $[a, b]$ можно заменить на условие ограниченности этой последовательности в какой либо одной точке этого отрезка, т.к. из этого условия и равностепенной непрерывности, очевидно, следует равномерная ограниченность последовательности $\{f_n(x)\}$ на всем отрезке.

Чтобы увидеть, как диагональная процедура Кантора работает в другой ситуации, докажем несчетность множества действительных чисел отрезка $[0, 1]$.

Теорема 3.16 (Кантор)**.** *Множество действительных чисел отрезка* $[0, 1]$ *несчетно.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное счетное множество действительных чисел α_i, $i \in \mathbb{N}$ отрезка $[0, 1]$ и докажем существование на отрезке $[0, 1]$ действительного числа, не принадлежащего данному счетному множеству. Очевидно, что этого достаточно для доказательства теоремы. Запишем числа α_i в виде бесконечных десятичных дробей:

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = 0, a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots a_{1n}, \dots, \\ &\alpha_2 = 0, a_{21}, a_{22}, a_{23}, \dots a_{2n}, \dots, \\ &\alpha_3 = 0, a_{31}, a_{32}, a_{33}, \dots a_{3n}, \dots, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\alpha_n = 0, a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \dots a_{nn}, \dots, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{aligned}$$

где a_{ki} — i-ая десятичная цифра числа α_k. Построим десятичную дробь $\beta = 0, b_1, b_2, b_3, \dots b_n, \dots$ диагональной процедурой Кантора, а именно: положим $b_n = 2$, если $a_{nn} = 1$, и $b_n = 1$, если $a_{nn} \neq 1$. Эта дробь не может совпасть ни с одним из чисел α_i, поскольку ее i-ый десятичный знак отличен от i-ого десятичного знака дроби α_i, и, в то же время, дробь β не содержит бесконечной серии нулей или девяток, т.е. не принадлежит к тому типу десятичных дробей, для которых нарушается взаимно-однозначное соответствие между действительными числами и десятичными дробями. □

Глава 4

Несобственные интегралы

Во первом семестре изучались определенные интегралы по Риману от ограниченных функций по конечным сегментам. Однако в математике и ее приложениях широко используются также интегралы от неограниченных функций и интегралы по всей вещественной прямой или полупрямой. Очевидно, что в таких случаях интегральные суммы интеграла по Риману будут неограничены и для корректного определения интеграла нужно модифицировать его определение.

4.1 Несобственный интеграл 1 рода

Определение 4.1. *Пусть функция $f(x)$ определена на полупрямой $a \leqslant x < +\infty$ и пусть $\forall A \geqslant a$ существует определенный интеграл $\int\limits_a^A f(x)\,dx$. Независимо от того, существует или нет*

$$\lim_{A\to+\infty} \int\limits_a^A f(x)\,dx,$$

будем называть его несобственным интегралом 1 рода *от функции $f(x)$ по полупрямой $[a,+\infty)$ и обозначать*

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Если указанный предел существует и конечен, то несобственный интеграл называется сходящимся, *в противном случае* – расходящимся.

Геометрический смысл несобственного интеграла 1 рода — площадь бесконечной вправо криволинейной трапеции, взятая со знаком «+» при $f(x) \geqslant 0$ и взятая со знаком «−» при $f(x) \leqslant 0$.

Физическая трактовка несобственного интеграла 1 рода: если $f(x)$ — сила, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ — работа этой силы по перемещению материальной точки из точки a в $+\infty$.

Аналогично определяются несобственные интегралы по полупрямой $(-\infty, a]$ и по всей числовой прямой $(-\infty, \infty)$:

$$\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx := \lim_{B\to-\infty} \int\limits_{B}^{a} f(x)\,dx, \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx := \lim_{\substack{A\to+\infty\\ B\to-\infty}} \int\limits_{B}^{A} f(x)\,dx.$$

Пример 4.1.

1. $$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_0^{A} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to+\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_0^A = $$
$$= \lim_{A\to+\infty} \operatorname{arctg} A = \frac{\pi}{2}.$$

2. $$\int\limits_0^{+\infty} \sin x\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_0^{A} \sin x\,dx = \lim_{A\to+\infty} (1-\cos A)$$

не существует, поэтому интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \sin x\,dx$ *расходится.*

3. $$\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_a^{A} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{A\to+\infty} \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}\Big|_a^A, & \alpha \neq 1 \\ \ln x\big|_a^A, & \alpha = 1 \end{cases} =$$
$$= \lim_{A\to+\infty} \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}\left(A^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}\right), & \alpha \neq 1 \\ \ln \dfrac{A}{a}, & \alpha = 1 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1}, & \alpha > 1 \\ +\infty, & \alpha \leqslant 1 \end{cases}.$$

Итак, $\int\limits_a^{+\infty} \dfrac{dx}{x^\alpha}$ *сходится при* $\alpha > 1$ *и расходится при* $\alpha \leqslant 1$.

В примерах 1–3 первообразная вычислялась в элементарных функциях, и поэтому вопрос о сходимости несобственного интеграла сводился к вопросу о пределе элементарной функции. Однако возможна ситуация, когда первообразная неэлементарна.

Пример 4.2.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_0^{A} \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{A\to+\infty} \left(\mathcal{F}(A) - \mathcal{F}(0)\right),$$

где $\mathcal{F}(x)$ *— первообразная функции* $\dfrac{\sin x}{x}$. *Она существует, т.к. функция* $\dfrac{\sin x}{x}$ *непрерывна, но не является элементарной.*

Как же в этом случае исследовать вопрос о сходимости несобственного интеграла? Как и в случае рядов, нам необходимы *признаки сходимости несобственных интегралов.*

4.2 Признаки сходимости несобственных интегралов 1 рода

Теорема 4.1 (критерий Коши сходимости несобственных интегралов 1 рода)**.** *Пусть* $\forall A > a\ \exists \int\limits_a^A f(x)\,dx$. *Для того чтобы несобственный интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *сходился, необходимо и достаточно, чтобы* $\forall \varepsilon > 0$ $\exists A$ *такое, что* $\forall A' > A$ *и* $A'' > A$ *выполнялось неравенство*

$$\left| \int\limits_{A'}^{A''} f(x)\,dx \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Доказательство легко получается из критерия Коши существования предела функции и определения несобственного интеграла 1 рода. Действительно, обозначим $\Phi(A) = \int\limits_a^A f(x)\,dx$. По определению, сходимость несобственного интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ эквивалентна существованию предела $\lim\limits_{A\to+\infty} \Phi(A)$, что, в свою очередь, в силу критерия Коши существования предела функции эквивалентно тому, что $\forall \varepsilon > 0$ $\exists A$ такое, что $\forall A', A'' > A$ выполнялось неравенство $|\Phi(A') - \Phi(A'')| <$

ε. Остается заметить, что $\Phi(A') - \Phi(A'') = \int\limits_a^{A''} f(x)\,dx - \int\limits_a^{A'} f(x)\,dx = \int\limits_{A'}^{A''} f(x)\,dx$. $\square$

Пример 4.3. *Применим критерий Коши к несобственному интегралу $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$. С помощью интегрирования по частям $\forall A', A'' > 0$ получаем оценку:*

$$\left|\int\limits_{A'}^{A''} \frac{\sin x}{x}\,dx\right| = \left|\int\limits_{A'}^{A''} \frac{d(-\cos x)}{x}\right| = \left|-\left.\frac{\cos x}{x}\right|_{A'}^{A''} - \int\limits_{A'}^{A''} \frac{\cos x}{x^2}dx\right| \leqslant \left|\frac{\cos A'}{A'}\right| +$$

$$+\left|\frac{\cos A''}{A''}\right| + \left|\int\limits_{A'}^{A''} \left|\frac{\cos x}{x^2}\right|dx\right| \leqslant \frac{1}{A'} + \frac{1}{A''} + \left|\int\limits_{A'}^{A''} \frac{dx}{x^2}\right| =$$

$$= \frac{1}{A'} + \frac{1}{A''} + \left|-\left.\frac{1}{x}\right|_{A'}^{A''}\right| \leqslant \frac{2}{A'} + \frac{2}{A''}.$$

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и возмем $A = \frac{4}{\varepsilon}$. Тогда $\forall A', A'' > A$ получаем: $\left|\int\limits_{A'}^{A''} \frac{\sin x}{x}\,dx\right| \leqslant \frac{2}{A'} + \frac{2}{A''} < \frac{4}{A} = \varepsilon \;\Rightarrow$ по критерию Коши $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ сходится.

Однако на практике вместо критерия Коши более удобны достаточные условия сходимости, к изложению которых мы и приступаем.

Теорема 4.2 (признак сравнения)**.** *Пусть $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ при $x \geqslant a$ и функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на любом сегменте $[a, b]$, $\forall b > a$. Тогда из сходимости интеграла*

$$\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx \tag{4.1}$$

следует сходимость интеграла

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx, \tag{4.2}$$

а из расходимости (4.2) следует расходимость (4.1).

Доказательство. $\forall A \geqslant a$ имеем $\Phi(A) := \int\limits_a^A f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^A g(x)\,dx =: G(A)$. Отсюда следует, что если интеграл (4.1) сходится, то $G(A)$ — ограниченная функция, поэтому $\Phi(A)$ — также ограниченная функция и, в силу неотрицательности $f(x)$, она монотонно не убывает, т.е. сходится к конечному пределу. Поэтому и интеграл (4.2) сходится.

Если же интеграл (4.2) расходится, то $\Phi(A)$ — неограниченная функция, поэтому $G(A)$ — также неограниченная функция, и, значит, интеграл (4.1) расходится. $\square$

Следствие 4.1. *Если* $0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{c}{x^\alpha}$ *при* $x \geqslant a > 0$, $c = \mathrm{const} > 0$ *и* $\alpha > 1$, *то* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *сходится. Если же* $f(x) \geqslant \frac{c}{x^\alpha}$ *при* $x \geqslant a > 0$, $c = \mathrm{const} > 0$ *и* $\alpha \leqslant 1$, *то* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *расходится.*

Следствие 4.2 (признак сравнения в предельной форме)**.** *Если* $f(x) \geqslant 0$ *и* $g(x) \geqslant 0$ *при* $x \geqslant a$ *и*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k > 0, \tag{4.3}$$

то интегралы (4.1) и (4.2) сходятся или расходятся одновременно. Если же $k = 0$, *то из сходимости (4.1) следует сходимость (4.2).*

Доказательство. При $k > 0$ из (4.3) следует наличие такого $A > 0$, что

$$\frac{k}{2} \leqslant \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant \frac{3k}{2},\ \forall x \geqslant A.$$

Но тогда $g(x) \leqslant \frac{2}{k} f(x)$, $f(x) \leqslant \frac{3}{2} k g(x)$, что по теореме 4.2 означает, что интегралы (4.1) и (4.2) сходятся или расходятся одновременно.

Если же $k = 0$, то из (4.3) следует существование $A > 0$ такого, что $\dfrac{f(x)}{g(x)} \leqslant 1$, $\forall x \geqslant A$. Но тогда $f(x) \leqslant g(x)$, $\forall x \geqslant A$, и по теореме 4.2 из сходимости (4.1) следует сходимость (4.2). $\square$

Пример 4.4. *1.*

$$\int\limits_1^{+\infty} x^\alpha \sin\frac{1}{x}\,dx,\ 0 \leqslant f(x) = x^\alpha \sin\frac{1}{x} = x^\alpha\left(\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^{-\alpha+1}}} = 1.$$

Следовательно, интеграл сходится при $-\alpha+1 > 1$, *т.е. при* $\alpha < 0$, *и расходится при* $\alpha \geqslant 0$.

2. *Интеграл* $\int\limits_1^{+\infty} x^\alpha e^{-x}\,dx$ *сходится* $\forall\alpha$, *т.к.* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha e^{-x}}{\frac{1}{x^2}} = 0$, *а* $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ *сходится.*

3. *Интеграл Пуассона* $\int\limits_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ *сходится, т.к.* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{-x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 e^{-x^2} = 0$.

Признак сравнения относится к неотрицательным функциям. В этом отношении он аналогичен признаку сравнения для рядов с положительными членами. Для исследования сходимости несобственных интегралов от знакопеременных функций полезен признак Дирихле, аналогичный признаку Дирихле для рядов. Он относится к несобственным интегралам вида $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$.

Теорема 4.3 (признак Дирихле). *Пусть*

1. *функция* $f(x)$ *(возможно комплексозначная) непрерывна на* $[a, +\infty)$ *и имеет на этой полупрямой ограниченную первообразную* $F(x)$ *(т.е.* $F'(x) = f(x)$ *и* $\exists M > 0$ *такое, что* $\forall x \in [a, +\infty)$ *справедливо неравенство* $|F(x)| \leqslant M$*);*

2. *функция* $g(x)$ *не возрастает на* $[a, +\infty)$, *стремится к нулю при* $x \to +\infty$ *(*$g(x) \downarrow 0$ *при* $x \to +\infty$*) и имеет непрерывную производную* $g'(x)$ *на* $[a, +\infty)$.

Тогда несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ *сходится.*

Доказательство. Воспользуемся критерием Коши (теорема 4.1). С этой целью рассмотрим следующий интеграл:

$$\int\limits_{A'}^{A''} f(x)g(x)\,dx = \int\limits_{A'}^{A''} g(x)\,dF(x) = g(x)F(x)\Big|_{A'}^{A''} - \int\limits_{A'}^{A''} F(x)g'(x)\,dx.$$

Так как $g'(x)$ — непрерывная функция, то интеграл в правой части равенства существует, а поскольку $g(x)$ не возрастает и стремится к нулю при $x \to +\infty$, то $g'(x) \leqslant 0$, $g(x) \geqslant 0$ при $x \geqslant a$. Пусть $A'' \geqslant A'$. Тогда

$$\left|\int\limits_{A'}^{A''} f(x)g(x)\,dx\right| \leqslant |g(A'')F(A'') - g(A')F(A')| + M\int\limits_{A'}^{A''} |g'(x)|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant |g(A'')F(A'')| + |g(A')F(A')| - \int\limits_{A'}^{A''} Mg'(x)\,dx \leqslant M(g(A'') + g(A'))-$$

$$-M(g(A'') - g(A')) = 2Mg(A').$$

Если же $A' \geqslant A''$, то из этой же оценки получаем, что

$$\left|\int\limits_{A'}^{A''} f(x)g(x)\,dx\right| \leqslant 2Mg(A'').$$

Зададим теперь произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $g(x) \to 0$ при $x \to +\infty$, то $\exists A > 0$ такое, что $g(A) < \frac{\varepsilon}{2M}$ и, тем более, $\forall A' > A$: $g(A') \leqslant g(A) < \frac{\varepsilon}{2M}$. Следовательно, $\forall A', A'' > A$ имеет место неравенство $\left|\int\limits_{A'}^{A''} f(x)g(x)\,dx\right| \leqslant$ $2Mg(A) < \varepsilon$. По критерию Коши несобственный интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ сходится. $\square$

Замечание 4.1. *Условие существования непрерывной производной* $g'(x)$ *на* $[a, +\infty)$ *излишне. Без него утверждение теоремы можно доказать, используя вместо формулы интегрирования по частям, так называемую* вторую формулу среднего значения

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)g(x)\,dx = g(a)\int\limits_{a}^{\xi} f(x)\,dx + g(b)\int\limits_{\xi}^{b} f(x)\,dx,$$

где функция $f(x)$ *– интегрируема на сегменте* $[a, b]$*, функция* $g(x)$ *– монотонна на сегменте* $[a, b]$*, а* $\xi \in [a, b]$.[1]

[1]См. В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Бл.Х. Сендов. Математический анализ. Начальный курс. М: изд-во Моск. ун-та, 1985, стр. 353-356, 376-377.

Пример 4.5. *1.* $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$. *Функция* $f(x) = \sin x$ *непрерывна и имеет на* $[1, +\infty)$ *ограниченную первообразную* $-\cos x$. *Если* $\alpha > 0$, *то функция* $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ *убывает при* $x \geqslant 1$, *стремится к нулю при* $x \to +\infty$ *и имеет непрерывную производную* $g'(x) = -\alpha x^{-\alpha-1}$. *По теореме 4.3 интеграл* $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$ *сходится при* $\alpha > 0$ *(для* $\alpha = 1$ *мы это уже доказали в примере 4.2).*

При $\alpha \leqslant 0$ *этот интеграл расходится. Для* $\alpha = 0$ *это уже было доказано по определению в примере 4.1.2. Пусть* $\alpha < 0$. *Воспользуемся критерием Коши. Рассмотрим произвольное* $A > 1$. *Возмем* $\varepsilon = 1$. *Положим* $A' = 2\pi n$, $A'' = 2\pi n + \pi$, *причем возмем* $n \in \mathbb{N}$ *столь большим, чтобы было* $A' > A$ *и* $A'' > A$. *Тогда* $\sin x \geqslant 0$, $\frac{1}{x^\alpha} \geqslant (2\pi n)^{-\alpha}$ *при* $A' \leqslant x \leqslant A''$, *и поэтому* $\left|\int\limits_{A'}^{A''} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx\right| \geqslant (2\pi n)^{-\alpha} \int\limits_{2\pi n}^{2\pi n+\pi} \sin x\,dx = 2 \cdot (2\pi n)^{|\alpha|} > 1 = \varepsilon$. *Отсюда, согласно критерию Коши, следует, что интеграл расходится при* $\alpha < 0$.

2. $\int\limits_0^{+\infty} \sin x^2\,dx$ *— интеграл Френеля (он используется в оптике).*

Представим его в виде $\int\limits_0^{+\infty} = \int\limits_0^1 + \int\limits_1^{+\infty}$ *и во втором слагаемом положим* $x^2 = t$. *Тогда* $dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$ *и интеграл* $\int\limits_1^{+\infty} \sin x^2\,dx = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}}\,dt$ *сходится, как показано в предыдущем примере.*

В последнем примере мы использовали замену переменной в несобственном интеграле. Правомерно ли это? Справедлива следующая теорема.

Теорема 4.4. *Пусть*

1. *функция* $f(x)$ *непрерывна на* $[a, +\infty)$ *и* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *сходится;*

2. *функция* $g(t)$ *определена и возрастает на* $[\alpha, +\infty)$, *ее производная* $g'(t)$ *непрерывна, а множеством значений функции* $g(t)$ *является* $[a, +\infty)$, *в частности,* $g(\alpha) = a$.

Тогда несобственный интеграл $\int\limits_{\alpha}^{+\infty} f(g(t))g'(t)\,dt$ *сходится и имеет место равенство* $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{\alpha}^{+\infty} f(g(t))g'(t)\,dt$.

Доказательство. Перейдем к пределу при $A \to +\infty$ в формуле замены переменной в собственном интеграле: $\int\limits_{a}^{A} f(x)\,dx = \int\limits_{\alpha}^{g^{-1}(A)} f(g(t))g'(t)\,dt$. □

Сформулируем также теорему об интегрировании по частям для несобственного интеграла первого рода.

Теорема 4.5. *Пусть функции* $u(x)$ *и* $v(x)$ *определены и непрерывны вместе со своими первыми производными во всех точках промежутка* $[a, +\infty)$. *Тогда имеет место равенство*

$$\int\limits_{a}^{+\infty} u(x)\,dv(x) = \lim_{b\to+\infty} u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int\limits_{a}^{+\infty} v(x)\,du(x).$$

При этом предполагается, что из двух интегралов и предела существуют и конечны два, тогда существует конечный третий.

Доказательство. Перейдем к пределу при $b \to +\infty$ в обычной формуле замены переменной в собственном интеграле:

$$\int\limits_{a}^{b} u(x)\,dv(x) = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int\limits_{a}^{b} v(x)\,du(x),\ b > a.$$

При этом если из трех слагаемых, зависящих от b, два имеют конечные предельные значения, то конечное предельное значение имеет и третье слагаемое. □

Пример интеграла Френеля показывает, что для сходящегося несобственного интеграла первого рода $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ возможно, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \neq 0$. Это значит, что для него не справедлив аналог необходимого условия $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$ сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

4.3 Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов 1 рода

Определение 4.2. *Несобственный интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *называется* абсолютно сходящимся, *если сходится интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$. *Несобственный интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *называется* условно сходящимся, *если он сходится, а интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ *расходится.*

Отметим, что если интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ абсолютно сходится, то он сходится. Это следует из критерия Коши и неравенства $\left|\int\limits_{A'}^{A''} f(x)\,dx\right| \leqslant \left|\int\limits_{A'}^{A''} |f(x)|\,dx\right|$. Если правая часть неравенства $< \varepsilon$, то и левая $< \varepsilon$.

Пример 4.6. *Как было показано выше, интеграл* $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$ *сходится при* $\alpha > 0$ *и расходится при* $\alpha \leqslant 0$.

Так как $\left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| \leqslant \frac{1}{x^\alpha}$, *то при* $\alpha > 1$ *этот интеграл сходится абсолютно. Докажем, что при* $0 < \alpha \leqslant 1$ *он сходится условно, т.е. при* $0 < \alpha \leqslant 1$ *интеграл* $\int\limits_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^\alpha}\,dx$ *расходится.*

Поскольку $|\sin x| \geqslant \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$, *то для расходимости интеграла* $\int\limits_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^\alpha}\,dx$ *достаточно (в силу признака сравнения) доказать расходимость интеграла* $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1 - \cos 2x}{2x^\alpha}\,dx$.

В самом деле, интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x^\alpha}\,dx$ *сходится при* $0 < \alpha \leqslant 1$ *(это легко доказать, используя признак Дирихле), а интеграл* $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{2x^\alpha}\,dx$ *расходится при* $0 < \alpha \leqslant 1$, *поэтому расходится и интеграл*

$\int\limits_1^{+\infty} \frac{1-\cos 2x}{2x^\alpha}\,dx.$

4.4 Несобственные интегралы 2 рода

Определение 4.3. *Пусть функция $f(x)$ определена и не ограничена на полусегменте $(a,b]$, но ограничена на любом сегменте $[a+\delta,b]\subset(a,b]$. Точку a назовем* особой точкой *функции $f(x)$. Ясно, что функция $f(x)$ не интегрируема по Риману на $(a,b]$. Предположим, что функция $f(x)$ интегрируема на любом сегменте $[a+\delta,b]$ и рассмотрим*

$$\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{a+\delta}^{b} f(x)\,dx.$$

Не зависимо от того, существует этот предел или нет, назовем его несобственным интегралом 2 рода от функции $f(x)$ по полусегменту $(a,b]$ *и будем обозначать так же, как определенный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$. Если этот предел существует, то говорят, что* несобственный интеграл сходится*, а если не существует —* расходится.

Геометрический смысл несобственного интеграла второго рода: если $f(x)\geqslant 0$ на $(a,b]$, то $\int_a^b f(x)\,dx$ есть площадь бесконечной вверх криволинейной трапеции.

Замечание 4.2. *1. Аналогично определяются несобственный интеграл второго рода: а) по полусегменту $[a,b)$, если b — особая точка; б) по интервалу (a,b), если a и b — особые точки (и других особых точек на $[a,b]$ у функции $f(x)$ нет):*

$$\text{а)} \int\limits_a^b f(x)\,dx := \lim_{\delta\to+0}\int\limits_a^{b-\delta} f(x)\,dx;$$

$$\text{б)} \int\limits_a^b f(x)\,dx := \lim_{\substack{\delta_1\to+0\\ \delta_2\to+0}}\int\limits_{a+\delta_1}^{b-\delta_2} f(x)\,dx.$$

2. Если особой точкой функции $f(x)$ является внутренняя точка c сегмента $[a,b]$ и других особых точек нет, то по определению по-

лагают:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx := \lim_{\delta_1\to+0}\int\limits_a^{c-\delta_1} f(x)\,dx + \lim_{\delta_2\to+0}\int\limits_{c+\delta_2}^{a} f(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

Если оба предела существуют (хотя бы один не существует), то говорят, что несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *сходится (расходится).*

3. *Если на сегменте* $[a,b]$ *функция* $f(x)$ *имеет несколько особых точек, то несобственный интеграл* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *определяется как сумма несобственных интегралов по полусегментам и сегментам, у которых одна или обе граничные точки — особые.*

Пример 4.7. *У функции* $\dfrac{1}{x^\alpha}$ *при* $\alpha > 0$ *на отрезке* $[0,1]$ *есть единственная особая точка* 0 *и*

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\delta\to+0}\int\limits_\delta^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\delta\to+0}\begin{cases}\left.\dfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_\delta^1, & \alpha\neq 1\\ \ln x\big|_\delta^1, & \alpha = 1\end{cases} =$$

$$= \lim_{\delta\to+0}\begin{cases}\dfrac{1}{1-\alpha}\left(1-\delta^{1-\alpha}\right), & \alpha\neq 1\\ -\ln\delta, & \alpha = 1\end{cases} = \begin{cases}\dfrac{1}{1-\alpha}, & \alpha<1\\ +\infty, & \alpha\geqslant 1\end{cases}.$$

Таким образом, интеграл $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geqslant 1$, в отличие от интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^\alpha}$, который сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$.

Пример 4.8. *Аналогичным образом, интегралы* $\int\limits_a^b \dfrac{dx}{(x-a)^\alpha}$ *и* $\int\limits_a^b \dfrac{dx}{(x-b)^\alpha}$ *сходятся при* $\alpha < 1$ *и расходятся при* $\alpha \geqslant 1$.

Для несобственных интегралов второго рода имеют место признаки сходимости, аналогичные признакам сходимости несобственных интегралов первого рода. Сформулируем некоторые из них для несобственных интегралов по полусегменту $(a, b]$, где a — единственная особая точка подынтегральных функций.

Теорема 4.6 (критерий Коши)**.** *Для того чтобы несобственный интеграл* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *сходился, необходимо и достаточно, чтобы* $\forall\varepsilon > 0\,\exists\delta > 0$ *такое, что* $\forall\delta'$ *и* δ''*, удовлетворяющих условию* $0 < \delta', \delta'' < \delta$*, выполнялось неравенство:* $\left|\int\limits_{a+\delta'}^{a+\delta''} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$*.*

Доказательство. Утверждение теоремы вытекает из того, что сходимость несобственного интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ по определению эквивалентна существованию конечного предела $\lim\limits_{\delta\to+0} \Phi(\delta)$, где $\Phi(\delta) := \int\limits_{a+\delta}^{b} f(x)\,dx$ и критерия Коши существования одностороннего предела функции $\Phi(\delta)$ при $\delta \to +0$. □

Теорема 4.7 (признак сравнения)**.** *Если* $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ *при* $a < x \leqslant b$*, то из сходимости интеграла*

$$\int\limits_a^b g(x)\,dx \tag{4.4}$$

следует сходимость интеграла

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx, \tag{4.5}$$

а из расходимости интеграла (4.5) следует расходимость интеграла (4.4).

Следствие 4.3. *Если* $f(x) \geqslant 0$ *и* $g(x) \geqslant 0$ *при* $a < x \leqslant b$ *и* $\lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = k > 0$*, то интегралы (4.4) и (4.5) сходятся или расходятся одновременно, а если* $\lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$*, то из сходимости интеграла (4.4) следует сходимость интеграла (4.5).*

Доказательства теоремы 4.7 и следствия 4.3 совершенно аналогичны доказательствам признака сравнения (теоремы 4.2) для несобственных интегралов первого рода и следствия 4.1. Слушателям предлагается провести их самостоятельно.

Пример 4.9.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}},\ f(x) := \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}.$$

Возмем $g(x) := \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$, *тогда* $\lim\limits_{x\to 1-0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 1-0} \dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x^4}} = \lim\limits_{x\to 1-0} \dfrac{1}{\sqrt{(1+x^2)(1+x)}} = \dfrac{1}{2}$ *и интеграл* $\int\limits_0^1 g(x)\,dx = \int\limits_0^1 \dfrac{dx}{(1-x)^{1/2}}$ *сходится. Следовательно, интеграл* $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ *также сходится.*

Понятия абсолютной и условной сходимости для несобственных интегралов второго рода формулируются так же, как и для несобственных интегралов первого рода. Для доказательства условной сходимости также можно использовать следующий признак Дирихле, аналогичный признаку Дирихле сходимости несобственных интегралов первого рода.

Теорема 4.8 (признак Дирихле)**.** *Пусть*

1. *функция $f(x)$ (возможно комплексозначная) непрерывна на $(a, b]$ и имеет на этом промежутке ограниченную первообразную $F(x)$;*

2. *функция $g(x)$ не убывает на $(a, b]$, стремится к нулю при $x \to a+0$ ($g(x) \downarrow 0$ при $x \to a+0$) и имеет непрерывную производную $g'(x)$ на $(a, b]$.*

Тогда несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx$ *сходится.*

Доказательство этой теоремы совершенно аналогично доказательству признака Дирихле (теоремы 4.3) для несобственных интегралов первого рода. Слушателям предлагается провести его самостоятельно.

Если промежуток интегрирования является бесконечным и функция $f(x)$ имеет на этом промежутке конечное число особых точек, то интеграл (несобственный) от функции $f(x)$ по этому промежутку представляется в виде суммы несобственных интегралов первого и второго рода.

Если все эти интегралы сходятся, то говорят, что исходный интеграл сходится, и полагают его равным сумме этих несобственных интегралов.

Пример 4.10. *1.*

$$I := \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^{3/2}}\,dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{\sin x}{x^{3/2}}\,dx}_{=I_2\ -\ \text{н. и. 2 рода}} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^{3/2}}\,dx}_{=I_1\ -\ \text{н. и. 1 рода}}.$$

В силу $\dfrac{\sin x}{x^{3/2}} \sim \dfrac{1}{x^{1/2}}$ *при* $x \to 0$ *несобственный интеграл* I_2 *сходится. Несобственный интеграл* I_1 *также сходится по признаку сравнения ввиду оценки* $\left|\dfrac{\sin x}{x^{3/2}}\right| \leqslant \dfrac{1}{x^{3/2}}$. *Таким образом, несобственный интеграл* I *сходится.*

2.

$$I := \int_0^\infty x^\alpha e^{-x}\,dx = \underbrace{\int_0^1 x^\alpha e^{-x}\,dx}_{=I_2\ -\ \text{н. и. 2 рода}} + \underbrace{\int_1^\infty x^\alpha e^{-x}\,dx}_{=I_1\ -\ \text{н. и. 1 рода}}.$$

Интеграл I_2 *сходится при* $-\alpha < 1$, *т.е. при* $\alpha > -1$. *Интеграл* I_1 *сходится при любом* α. *Таким образом, интеграл* I *сходится при* $\alpha > -1$.

3. Интеграл $\int\limits_0^\infty \dfrac{dx}{x^\alpha}$ *расходится при любом* α.

4.5 Главное значение несобственного интеграла

Рассмотрим:

Пример 4.11. *Поскольку следующий предел*

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx = \lim_{\substack{A\to+\infty\\ B\to-\infty}} \int_B^A x\,dx = \lim_{\substack{A\to+\infty\\ B\to-\infty}} \frac{1}{2}(A^2 - B^2)$$

не существует, то интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\,dx$ *расходится. Однако при* $B = -A$ *имеем:* $\lim\limits_{A\to+\infty} \int\limits_{-A}^{A} x\,dx = \lim\limits_{A\to+\infty} \dfrac{1}{2}(A^2 - A^2) = 0.$

Этот пример мотивирует следующее определение:

Определение 4.4. *Пусть функция $f(x)$ определена на $\mathbb{R}$ и интегрируема на любом конечном сегменте. Если существует предел*

$$\lim_{A\to+\infty}\int\limits_{-A}^{A} f(x)\,dx,$$

то он называется главным значением *несобственного интеграла*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \tag{4.6}$$

в смысле Коши и обозначается[2]

$$\text{v. p.}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx.$$

Очевидно, что если несобственный интеграл (4.6) сходится, то его значение совпадает с v. p. Но, как показывает рассмотренный выше тривиальный пример 4.11, интеграл (4.6) может расходиться, но иметь конечное главное значение.

Рассмотрим теперь несобственный интеграл второго рода

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx, \tag{4.7}$$

причем внутренняя точка c сегмента $[a, b]$ является единственной особой точкой функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Определение 4.5. *Если существует предел*

$$\lim_{\delta\to+0}\left(\int\limits_{a}^{c-\delta} f(x)\,dx + \int\limits_{c+\delta}^{b} f(x)\,dx\right),$$

то он называется главным значением *несобственного интеграла (4.7) в смысле Коши и обозначается*

$$\text{v. p.}\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx.$$

[2]Это обозначение происходит от французского словосочетания «valeur principal», означающего «главное значение».

Отметим, что при этом несобственный интеграл (4.7) может быть расходящимся, т.е. может не существовать конечный предел

$$\lim_{\substack{\delta_1\to+0\\ \delta_2\to+0}}\left(\int\limits_a^{c-\delta_1} f(x)\,dx+\int\limits_{c+\delta_2}^{b} f(x)\,dx\right).$$

Пример 4.12. *Поскольку*

$$\int\limits_{-1}^{2}\frac{dx}{x}=\lim_{\substack{\delta_1\to+0\\ \delta_2\to+0}}\left(\int\limits_{-1}^{-\delta_1}\frac{dx}{x}+\int\limits_{\delta_2}^{2}\frac{dx}{x}\right)=\lim_{\substack{\delta_1\to+0\\ \delta_2\to+0}}\left(\ln\left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)+\ln 2\right)$$

и последний предел не существует, то интеграл $\int\limits_{-1}^{2}\dfrac{dx}{x}$ *расходится. Однако*

$$\text{v. p.}\int\limits_{-1}^{2}\frac{dx}{x}=\lim_{\delta\to+0}\left(\int\limits_{-1}^{-\delta}\frac{dx}{x}+\int\limits_{\delta}^{2}\frac{dx}{x}\right)=\lim_{\delta\to+0}\left(\ln\frac{\delta}{\delta}+\ln 2\right)=\ln 2.$$

4.6 Кратные несобственные интегралы

Наряду с уже рассмотренными несобственными интегралами по подмножествам вещественной оси, можно определить и кратные несобственные интегралы по областям m-мерного евклидова пространства, а также несобственные криволинейные и поверхностные интегралы. Мы подробно рассмотрим только случай двойных несобственных интегралов; m-кратные интегралы рассматриваются аналогично.

4.6.1 Интеграл от неограниченной функции по ограниченной области

Пусть в ограниченной квадрируемой открытой области Ω на евклидовой плоскости с декартовыми координатами x, y задана функция $f(M)=f(x,y)$, неограниченная в окрестности точки $M_0(x_0,y_0)\in\overline{\Omega}$, и пусть для любой квадрируемой области ω_δ диаметра δ, содержащей внутри себя точку M_0,

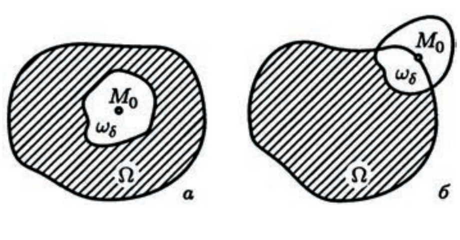

Рис. 4.1: исчерпание области Ω, при наличии особой точки функции f: а) внутри области, б) на границе области.

существует интеграл по Риману

$$\iint\limits_{\Omega\setminus\omega_\delta} f(M)\,d\sigma.$$

В такой ситуации точка M_0 называется *особой* для функции $f(M)$ в области Ω. При $\delta \to 0$ область ω_δ стягивается к точке M_0.[3]

Определение 4.6. *Несобственным интегралом от функции $f(M) = f(x, y)$ по области Ω называется предел (независимо от того, существует он или нет)*

$$\iint\limits_{\Omega} f(M)\,d\sigma := \lim_{\delta\to 0}\iint\limits_{\Omega\setminus\omega_\delta} f(M)\,d\sigma. \tag{4.8}$$

Если этот предел существует, конечен и не зависит от выбора областей ω_δ, то несобственный интеграл

$$\iint\limits_{\Omega} f(M)\,d\sigma$$

называется сходящимся; в противном случае он называется расходящимся.

Замечание 4.3. *Ввиду эквивалентности определений предела функции по Коши и по Гейне, в данном определении двойного несобственного интеграла семейство областей ω_δ, зависящих от непрерывного параметра, можно заменить на произвольную последовательность областей ω_{δ_n}, $\delta_n \to 0$.*

Замечание 4.4. *Области $\Omega\setminus\omega_\delta$ и ω_δ не предполагаются связными.*

Замечание 4.5. *Если точка M_0 лежит внутри области Ω, то исследование на сходимость интеграла (4.8) можно заменить исследованием на сходимость интеграла*

$$\iint\limits_{\Omega'} f(M)\,d\sigma$$

по любой подобласти Ω' области Ω, содержащей внутри себя точку M_0. Если же точка M_0 лежит на границе области Ω, то в качестве области Ω' можно взять $\Omega \cap \Omega^*$, где Ω^* — произвольная открытая область, содержащая точку M_0.

[3]До конца данной главы будем считать все ограниченные области квадрируемыми, даже если это не указано явно.

Замечание 4.6. *Случай, когда функция $f(M)$ имеет произвольное конечное число особых точек в области Ω или на ее границе, рассматривается разбиением области Ω на подобласти Ω_i такие, что каждая $\overline{\Omega}_i$ содержит единственную особую точку функции $f(M)$.*

Определение 4.7. *Несобственным интегралом от функции $f(M) = f(x, y)$ по области Ω в смысле главного значения называется предел*

$$\text{v. p.} \iint\limits_{\Omega} f(M)\, d\sigma := \lim_{\delta\to 0} \iint\limits_{\Omega\setminus K_\delta} f(M)\, d\sigma, \tag{4.9}$$

где K_δ — круг радиуса δ с центром в точке M_0.

4.6.2 Интегралы от неотрицательных функций по ограниченным областям

Рассмотрим в первую очередь интегралы от знакопостоянных функций, поскольку их исследование проще, и сами они могут быть использованы при исследовании интегралов от знакопеременных функций. Рассмотрим интегралы от неотрицательных функций. Рассмотрение интегралов от неположительных функций совершенно аналогично.

Теорема 4.9 (критерий сходимости несобственного интеграла от неотрицательной неограниченной функции с одной особой точкой по ограниченной области евклидовой плоскости)**.** *Пусть функция $f(M)$, $M \in \Omega$ неотрицательна и пусть последовательность δ'_n монотонно убывает к нулю. Тогда для сходимости интеграла (4.8) необходимо и достаточно, чтобы числовая последовательность*

$$I_n := \iint\limits_{\Omega\setminus K_{\delta'_n}} f(M)\, d\sigma,\ n = 1, 2, 3, \ldots \tag{4.10}$$

была ограниченной.

Доказательство. **Необходимость** условия теоремы сразу вытекает из определения сходимости интеграла (4.8), поскольку если интеграл (4.8) сходится, то сходится и последовательность (4.10), а значит, она ограничена.

Достаточность. Пусть последовательность (4.10) ограничена. Ввиду монотонного убывания последовательности δ'_n к нулю, последовательность областей $\Omega\setminus K_{\delta'_n}$ монотонно расширяется, т.е. $\Omega\setminus K_{\delta'_n} \subset \Omega\setminus K_{\delta'_{n+1}}$,

$n = 1, 2, 3, \ldots$. Поэтому в силу неотрицательности функции $f(M)$ последовательность (4.10) является неубывающей, а раз она ограничена, то сходится к некоторому пределу J. Нам остается доказать, что при любом выборе последовательности ω_{δ_n}, $\delta_n \to 0$, $n \to \infty$ стягивающихся к точке M_0 областей соответствующая последовательность интегралов

$$J_n := \iint\limits_{\Omega \setminus \omega_{\delta_n}} f(M)\, d\sigma,\ n = 1, 2, 3, \ldots \tag{4.11}$$

сойдется к тому же пределу J. Заметим, что при любом достаточно большом n для области ω_{δ_n} можно найти такие круги $K_{\delta'_{p(n)}}$ и $K_{\delta'_{q(n)}}$, чтобы имело место включение

$$K_{\delta'_{q(n)}} \subset \omega_{\delta_n} \subset K_{\delta'_{p(n)}}$$

и чтобы радиусы $\delta'_{p(n)}$ и $\delta'_{q(n)}$ этих кругов стремились к нулю при $n \to \infty$. Тогда имеет место включение

$$\Omega \setminus K_{\delta'_{p(n)}} \subset \Omega \setminus \omega_{\delta_n} \subset \Omega \setminus K_{\delta'_{q(n)}},$$

из которого, в силу неотрицательности функции $f(M)$, вытекает неравенство

$$\iint\limits_{\Omega \setminus K_{\delta'_{p(n)}}} f(M)\, d\sigma \leqslant \iint\limits_{\Omega \setminus \omega_{\delta_n}} f(M)\, d\sigma \leqslant \iint\limits_{\Omega \setminus K_{\delta'_{q(n)}}} f(M)\, d\sigma.$$

Крайние интегралы в этом двойном неравенстве стремятся к J при $n \to \infty$. Значит и

$$\lim_{n \to \infty} \iint\limits_{\Omega \setminus \omega_{\delta_n}} f(M)\, d\sigma = J.$$

$\square$

В соответствии со следующей теоремой последовательность кругов в условии теоремы 4.9 можно заменить на произвольную последовательность ω_{δ_n}, $\delta_n \to 0$, $n \to \infty$ стягивающихся к точке M_0 областей.

Теорема 4.10. *Пусть функция $f(M)$, $M \in \Omega$ неотрицательна и пусть ω_{δ_n}, $\delta_n \to 0$, $n \to \infty$ — произвольная последовательность стягивающихся к точке M_0 областей. Тогда для сходимости интеграла (4.8) необходимо и достаточно, чтобы числовая последовательность*

$$L_n := \iint\limits_{\Omega \setminus \omega_{\delta_n}} f(M)\, d\sigma,\ n = 1, 2, 3, \ldots \tag{4.12}$$

была ограниченной.

Доказательство. **Необходимость** условия теоремы устанавливается так же, как и при доказательстве предыдущей теоремы.

Для доказательства **достаточности** возмем какую-нибудь монотонно стремящуюся к нулю последовательность δ'_n и докажем, что последовательность (4.10) ограничена. Тогда применение теоремы 4.9 завершит доказательство.

Ввиду $\delta_m \to 0$ при $m \to \infty$ для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется такое m, что будет иметь место включение

$$\omega_{\delta_m} \subset K_{\delta'_n},$$

откуда

$$\Omega \backslash K_{\delta'_n} \subset \Omega \backslash \omega_{\delta_m},$$

и, ввиду неотрицательности функции $f(M)$, получим

$$\iint\limits_{\Omega \backslash K_{\delta'_n}} f(M)\, d\sigma \leqslant \iint\limits_{\Omega \backslash \omega_{\delta_m}} f(M)\, d\sigma.$$

В силу ограниченности последовательности (4.12) отсюда и следует ограниченность последовательности (4.10). □

Пример 4.13. *Докажем, что интеграл*

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{C}{r^\alpha}\, dxdy, \text{ где } C = \mathrm{const} > 0,\ \alpha = \mathrm{const},\ r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \tag{4.13}$$

по ограниченной области Ω, содержащей внутри себя точку $M_0(x_0, y_0)$, сходится при $\alpha < 2$ и расходится при $\alpha \geqslant 2$.

В соответствии с замечанием 4.5 интеграл (4.13) по области Ω можно заменить интегралом по какой-либо ее подобласти Ω', содержащей внутри себя точку M_0. В качестве такой подобласти возмем круг K_R с центром в точке M_0 и достаточно малым радиусом R и исследуем интеграл

$$\iint\limits_{K_R} \frac{C}{r^\alpha}\, dxdy. \tag{4.14}$$

Для этого возмем какую-либо монотонно стягивающуюся последовательность кругов

$$K_R \supset K_{\delta_1} \supset K_{\delta_2} \supset \ldots \ni M_0, \text{ где } \delta_n \to 0 \text{ при } n \to +\infty,$$

и рассмотрим интеграл

$$\iint\limits_{K_R \setminus K_{\delta_n}} \frac{C}{r^\alpha}\, dxdy.$$

Переходя к полярным координатам, получаем

$$\iint\limits_{K_R \setminus K_{\delta_n}} \frac{C}{r^\alpha}\, dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{\delta_n}^{R} \frac{C}{r^\alpha} r\, dr = 2\pi C \begin{cases} \left.\dfrac{r^{2-\alpha}}{2-\alpha}\right|_{r=\delta_n}^{r=R} & \text{при } \alpha \neq 2, \\ \ln r\big|_{r=\delta_n}^{r=R} & \text{при } \alpha = 2. \end{cases} \tag{4.15}$$

При $\alpha < 2$ правая часть (4.15) стремится к конечному пределу при $n \to \infty$, а при $\alpha \geqslant 2$ она неограничена, что и доказывает требуемое.

Аналогично в n-мерном евклидовом пространстве интеграл

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{C}{r^\alpha}\, dx_1 \cdot \ldots \cdot dx_n, \text{ где } C = \mathrm{const} > 0,\ \alpha = \mathrm{const},$$

$$r = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + \ldots (x_n - x_n^0)^2},$$

по ограниченной области Ω, содержащей внутри себя точку $M_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, сходится при $\alpha < n$ и расходится при $\alpha \geqslant n$. Таким образом, значение степени, равное значению размерности пространства, является критическим для сходимости интеграла от обратной степени расстояния до фиксированной точки.

4.6.3 Абсолютная сходимость

Определение 4.8. *Интеграл* $\iint\limits_{\Omega} f(M)\, d\sigma$ *называется* абсолютно сходящимся, *если сходится интеграл* $\iint\limits_{\Omega} |f(M)|\, d\sigma$.

Теорема 4.11. *Если интеграл* $\iint\limits_{\Omega} f(M)\, d\sigma$ *сходится абсолютно, то он сходится.*

Доказательство. [4] Заметим, прежде всего, что если интегралы $\iint\limits_{\Omega} f_1(M)\, d\sigma$ и $\iint\limits_{\Omega} f_2(M)\, d\sigma$ сходятся, то сходится и интеграл

$$\iint\limits_{\Omega} \left(\alpha f_1(M) + \beta f_2(M)\right)\, d\sigma = \alpha \iint\limits_{\Omega} f_1(M)\, d\sigma + \beta \iint\limits_{\Omega} f_2(M)\, d\sigma.$$

[4] Доказательство этой теоремы не столь просто, как для однократных несобственных интегралов, ввиду отсутствия для сходимости двойных несобственных интегралов критерия Коши.

Представим подынтегральную функцию $f(M)$ в виде разности двух неотрицательных функций

$$f(M) = f_1(M) - f_2(M), \tag{4.16}$$
$$\text{где } f_1(M) = |f(M)|,\ f_2(M) = |f(M)| - f(M).$$

Интеграл $\iint\limits_{\Omega} f_1(M)\,d\sigma = \iint\limits_{\Omega} |f(M)|\,d\sigma$ сходится по условию. Поскольку

$$f_2(M) = |f(M)| - f(M) \leqslant 2|f(M)|,$$

а интеграл $\iint\limits_{\Omega} 2|f(M)|\,d\sigma = 2\int\limits_{\Omega} |f(M)|\,d\sigma$ сходится по условию доказываемой теоремы, то, в силу теоремы 4.10, какова бы не была стягивающаяся к точке M_0 последовательность областей ω_{δ_n}, соответствующая ей последовательность интегралов $\iint\limits_{\Omega\backslash\omega_{\delta_n}} 2|f(M)|\,d\sigma$ ограничена. Поэтому, в силу очевидного неравенства

$$\iint\limits_{\Omega\backslash\omega_{\delta_n}} f_2(M)\,d\sigma \leqslant \iint\limits_{\Omega\backslash\omega_{\delta_n}} 2|f(M)|\,d\sigma$$

последовательность $\iint\limits_{\Omega\backslash\omega_{\delta_n}} f_2(M)\,d\sigma$ также ограничена. Применяя теорему 4.10 в другую сторону, получаем сходимость интеграла $\iint\limits_{\Omega\backslash\omega_{\delta_n}} f_2(M)\,d\sigma$. В силу равенства (4.16) будет сходиться и интеграл $\iint\limits_{\Omega} f(M)\,d\sigma$, причем будет выполняться равенство

$$\iint\limits_{\Omega} f(M)\,d\sigma = \int\limits_{\Omega} f_1(M)\,d\sigma - \int\limits_{\Omega} f_2(M)\,d\sigma.$$

$\square$

4.6.4 Признаки абсолютной сходимости

Теорема 4.12 (общий признак сравнения)**.** *Пусть функции $f(M)$ и $g(M)$ определены в области Ω за исключением единственной общей особой точки $M_0 \in \bar{\Omega}$ (в частности, интегрируемы по Риману в любой области вида $\Omega\backslash K_\delta(M_0)$, $\delta > 0$) и в области $\Omega\backslash\{M_0\}$ выполняется неравенство*

$$0 \leqslant |f(M)| \leqslant g(M). \tag{4.17}$$

Тогда

1. если $\iint\limits_{\Omega} g(M)\,d\sigma$ *сходится, то и* $\iint\limits_{\Omega} f(M)\,d\sigma$ *сходится абсолютно;*

2. если $\iint\limits_{\Omega} f(M)\,d\sigma$ *расходится, то и* $\iint\limits_{\Omega} g(M)\,d\sigma$ *расходится.*

Доказательство. Возмем какую-нибудь стягивающуюся к точке M_0 при $\delta_n \to 0$ последовательность областей ω_{δ_n}. В силу неравенства (4.17) будем иметь

$$\iint\limits_{\Omega\setminus\omega_{\delta_n}} |f(M)|\,d\sigma \leqslant \iint\limits_{\Omega\setminus\omega_{\delta_n}} g(M)\,d\sigma. \tag{4.18}$$

1. Если интеграл $\iint\limits_{\Omega} g(M)\,d\sigma$ сходится, то остается ограниченной последовательность интегралов $\iint\limits_{\Omega\setminus\omega_{\delta_n}} g(M)\,d\sigma$, но тогда, в силу неравенства (4.18), последовательность интегралов $\iint\limits_{\Omega\setminus\omega_{\delta_n}} |f(M)|\,d\sigma$ также ограничена, следовательно по теореме 4.10 интеграл $\iint\limits_{\Omega} |f(M)|\,d\sigma$ сходится.

2. Если интеграл $\iint\limits_{\Omega} f(M)\,d\sigma$ расходится, то расходится также и интеграл $\iint\limits_{\Omega} |f(M)|\,d\sigma$; действительно, если бы последний интеграл сходился, то сходился бы по теореме 4.11 также и интеграл $\iint\limits_{\Omega} f(M)\,d\sigma$. Из расходимости интеграла $\iint\limits_{\Omega} |f(M)|\,d\sigma$ вытекает, в силу теоремы 4.10, что при любом выборе стягивающейся к точке M_0 последовательности областей ω_{δ_n} последовательность интегралов $\iint\limits_{\Omega\setminus\omega_{\delta_n}} |f(M)|\,d\sigma$ неограничена; но тогда, в силу неравенства (4.18), неограничена также последовательность интегралов $\iint\limits_{\Omega\setminus\omega_{\delta_n}} g(M)\,d\sigma$, а следовательно, интеграл $\iint\limits_{\Omega} g(M)\,d\sigma$ расходится.

□

Из примера 4.13, теоремы 4.11 и теоремы 4.12 вытекает следующий частный признак сравнения кратных несобственных интегралов.

Теорема 4.13. *Пусть функция f и область Ω такие, как в теореме 4.12, и выполняется неравенство*

$$|f(M)| = |f(x,y)| \leqslant \frac{C}{r^{\alpha}}, \text{ где } C = \mathrm{const} > 0, \\ \alpha = \mathrm{const} < 2,\ r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}, \tag{4.19}$$

то интеграл $\iint\limits_{\Omega} f(M)\, d\sigma$ *сходится и притом абсолютно.*

Замечание 4.7. *В случае несобственного интеграла по n-мерной области Ω*

$$\int\limits_{\Omega}\cdots\int f(x_1,\ldots,x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$$

от функции $f(M) = f(x_1,\ldots,x_n)$, имеющей единственную особую точку $M_0 = (x_1^0,\ldots,x_n^0)$ в области Ω или на ее границе, в теореме 4.13 следует положить

$$r = \sqrt{(x_1-x_1^0)^2 + \ldots (x_n-x_n^0)^2} \quad \text{и} \quad \alpha < n.$$

Пример 4.14. *Напряженность электрического поля, создаваемого электрическим зарядом плотности ρ, распределенным в области Ω, дается в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ интегралом*

$$\mathbf{E}(M_0) = \iiint\limits_{\Omega} \rho(M) \frac{\mathbf{r}_{MM_0}}{r^3_{MM_0}}\, d\sigma, \tag{4.20}$$

где $\mathbf{r}_{MM_0}$ — вектор, начинающийся в точке M и заканчивающийся в точке M_0. Если функция $\rho(M)$ непрерывна и ограничена в области $\Omega \subset \mathbb{E}^3$ ($|\rho(M)| \leqslant \rho_0 = \mathrm{const}$), то подынтегральные функции для компонент вектора $\mathbf{E}(M_0)$ допускают оценку

$$\left|\rho(M)\frac{x_0 - x}{r^3_{MM_0}}\right| \leqslant \frac{\rho_0}{r^2_{MM_0}},$$

из которой следует абсолютная сходимость интеграла (4.20) в случае $M_0 \in \Omega$.

4.6.5 Эквивалентность сходимости и абсолютной сходимости кратных несобственных интегралов

Теорема 4.14. *Пусть в области $\Omega \subset \mathbb{E}^2$ или на ее границе содержится единственная особая точка M_0 функции $f(M)$. Если интеграл*

$\iint\limits_{\Omega} f(M)\,dxdy$ сходится, то интеграл $\iint\limits_{\Omega} |f(M)|\,dxdy$ также сходится.

Доказательство. [5] Пусть особая точка M_0 функции $f(M)$ лежит в области Ω. Проведем доказательство от противного. Предположим, что интеграл $\iint\limits_{\Omega} |f(M)|\,dxdy$ расходится и покажем, что интеграл $\iint\limits_{\Omega} f(M)\,dxdy$ также расходится, что противоречит условию теоремы. Очевидно, что этого достаточно для доказательства теоремы.

Взяв какую угодно стягивающуюся последовательность концентрических кругов

$$\Omega \supset K_1 \supset K_2 \supset \ldots \supset K_n \supset \ldots \ni M_0 \tag{4.21}$$

с центром в точке M_0, в силу неотрицательности функции $|f(M)|$ получим

$$\lim_{n\to+\infty} \iint\limits_{\Omega\setminus K_n} |f(M)|\,dxdy = +\infty. \tag{4.22}$$

Построим последовательность K_n специальным образом, выбирая круг K_{n+1} по кругу K_n достаточно малым так, что бы выполнялись неравенства

$$\iint\limits_{K_n\setminus K_{n+1}} |f(M)|\,dxdy > 2\iint\limits_{\Omega\setminus K_n} |f(M)|\,dxdy + 2n,\ n = 1, 2, \ldots \tag{4.23}$$

Идея доказательства теоремы состоит в том, что бы с помощью последнего неравенства получить неравенство

$$\iint\limits_{\Omega\setminus\omega_n} f(M)\,d\sigma > n$$

для некоторой последовательности ω_n, стягивающихся к точке M_0 областей, откуда и будет следовать расходимость интеграла $\iint\limits_{\Omega} f(M)\,d\sigma$.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \iint\limits_{K_n\setminus K_{n+1}} f(M)\,dxdy.$$

Его последовательностью частичных сумм является последовательность интегралов

$$I_n := \iint\limits_{K_1\setminus K_n} f(M)\,dxdy, \tag{4.24}$$

[5]Это доказательство — самое сложное в данной главе.

сходящаяся при $n \to +\infty$ к интегралу

$$I := \iint\limits_{K_1} f(M)\,dxdy. \tag{4.25}$$

Очевидно, что имеет место хотя бы один из следующих двух случаев: 1) бесконечное число членов последовательности (4.24) не превосходит предельного значения (4.25); 2) бесконечное число членов последовательности (4.24) не меньше предельного значения (4.25). Заменяя, при необходимости, функцию $f(M)$ на $-f(M)$, мы можем считать, что имеет место первый случай. При этом все рассуждения выше сохранят свою силу. Теперь, мы можем выделить монотонно не убывающую подпоследовательность I_{n_k} последовательности I_n. Тогда имеют место неравенства

$$I_{n_{k+1}} - I_{n_k} = \iint\limits_{K_{n_k}\setminus K_{n_{k+1}}} f(M)\,dxdy \geqslant 0. \tag{4.26}$$

Заменяя теперь последовательность кругов (4.21) ее подпоследовательностью K_{n_k} и возвращаясь к прежним одноиндексным обозначениям, мы можем считать, что справедливы все неравенства

$$I_{n+1} - I_n = \iint\limits_{K_n\setminus K_{n+1}} f(M)\,dxdy \geqslant 0. \tag{4.27}$$

При этом неравенство (4.23) сохранит свою силу, т.к. $n_k \geqslant k$.

Введем функции

$$f_+(M) = \frac{1}{2}\left(|f(M)| + f(M)\right),\ f_-(M) = \frac{1}{2}\left(|f(M)| - f(M)\right).$$

Очевидно, что $f_+(M) \geqslant 0$, $f_-(M) \geqslant 0$ и

$$f(M) = f_+(M) - f_-(M),\ |f(M)| = f_+(M) + f_-(M). \tag{4.28}$$

Отсюда и из (4.27) получим неравенства

$$\iint\limits_{K_n\setminus K_{n+1}} f_+(M)\,dxdy \geqslant \iint\limits_{K_n\setminus K_{n+1}} f_-(M)\,dxdy. \tag{4.29}$$

Ввиду (4.28) и (4.29) из (4.23) получаем

$$2\iint\limits_{K_n\setminus K_{n+1}} f_+(M)\,dxdy \overset{(4.29)}{\geqslant} \iint\limits_{K_n\setminus K_{n+1}} \left(f_+(M) + f_-(M)\right)\,dxdy \overset{(4.28)}{=}$$

$$\overset{(4.28)}{=} \iint\limits_{K_n \setminus K_{n+1}} |f(M)|\,dxdy \overset{(4.23)}{>} 2 \iint\limits_{\Omega \setminus K_n} |f(M)|\,dxdy + 2n,\ n = 1, 2, \ldots,$$

откуда

$$\iint\limits_{K_n \setminus K_{n+1}} f_+(M)\,dxdy > \iint\limits_{\Omega \setminus K_n} |f(M)|\,dxdy + n,\ n = 1, 2, \ldots \tag{4.30}$$

Разобьем теперь кольцо $K_n \setminus K_{n+1}$ на малые квадрируемые ячейки и обозначим через $m_i^{f_+}$ точную нижнюю грань функции f_+ на i-ой ячейке, а через Δ_i – площадь i-ой ячейки. Тогда, если ячейки достаточно малы, то из неравенства (4.30) мы получим неравенство для нижней интегральной суммы интеграла $\iint\limits_{K_n \setminus K_{n+1}} f_+(M)\,dxdy$

$$\sum_i m_i^{f_+} \Delta_i > \iint\limits_{\Omega \setminus K_n} |f(M)|\,dxdy + n,\ n = 1, 2, \ldots \tag{4.31}$$

На всех этих ячейках $m_i^{f_+} \geqslant 0$, поскольку $f_+ \geqslant 0$ всюду. Не нарушая неравенства (4.31), отбросим из суммы $\sum_i m_i^{f_+} \Delta_i$ все слагаемые, для которых $m_i^{f_+} = 0$. Если обозначить через G_n область, составленную из ячеек, соответствующих оставшимся слагаемым, то, очевидно, на этой области $f(M) = f_+(M)$ и

$$\iint\limits_{G_n} f(M)\,dxdy = \iint\limits_{G_n} f_+(M)\,dxdy \geqslant \sum_{\Delta_i \subset G_n} m_i^{f_+} \Delta_i > \iint\limits_{\Omega \setminus K_n} |f(M)|\,dxdy + n,$$
$$n = 1, 2, \ldots \tag{4.32}$$

Складывая теперь неравенство (4.32) с очевидным неравенством

$$\iint\limits_{\Omega \setminus K_n} f(M)\,dxdy \geqslant -\iint\limits_{\Omega \setminus K_n} |f(M)|\,dxdy,\ n = 1, 2, \ldots,$$

получаем неравенство

$$\iint\limits_{H_n} f(M)\,dxdy > n,\ n = 1, 2, \ldots, \tag{4.33}$$

где $H_n := (\Omega \setminus K_n) \cup G_n$. Тогда ввиду $G_n \subset K_n \setminus K_{n+1}$ имеем $\Omega \setminus K_n \subset H_n \subset \Omega \setminus K_{n+1} \ \Rightarrow\ K_{n+1} \subset \Omega \setminus H_n \subset K_n$, и если обозначить $\omega_n := \Omega \setminus H_n$, то $H_n = \Omega \setminus \omega_n$ и $\operatorname{diam} \omega_n \to 0$ при $n \to +\infty$, т.к. $\omega_n \subset K_n$.

Из (4.33) следует расходимость интеграла $\iint\limits_{\Omega} f(M)\,dxdy$, откуда и вытекает утверждение теоремы в рассматриваемом случае $M_0 \in \Omega$.

Если же особая точка M_0 функции $f(x)$ лежит на границе области Ω, то проведенное доказательство сохранит свою силу, если вместо кругов K_n взять их пересечения с областью Ω. $\square$

Замечание 4.8. *Если в определении n-кратного несобственного интеграла при $n \geqslant 2$ области $\Omega \backslash \omega_{\delta_n}$ считать связными, то теорема 4.14 об эквивалентности сходимости и абсолютной сходимости кратного несобственного интеграла сохранит свою силу. Действительно, область H_n в доказательстве теоремы 4.14 можно сделать связной, сохранив неравенство (4.33); для этого достаточно соединить связные куски, составляющие H_n, квадрируемыми полосками с достаточно малой суммарной площадью.*

Напротив, если в случае однократного несобственного интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ вместо последовательности интервалов $[a, b-\lambda]$, входящих в определение этого интеграла, брать исчерпывающие последовательности произвольных "разрывных" областей, то класс функций, интегрируемых в несобственном смысле, сузится; интегрируемыми в несобственном смысле функциями окажутся лишь абсолютно интегрируемые в несобственном смысле функции. Абсолютно интегрируемые в несобственном смысле функции в обоих определениях, очевидно, одинаковы.

4.6.6 Несобственные интегралы с неограниченной областью определения

Несобственные интегралы, подынтегральные функции которых ограничены в любой ограниченной подобласти, исследуются совершенно аналогично. Сформулируем для примера определение несобственного интеграла и достаточный признак сходимости.

Определение 4.9. *Пусть дана неограниченная область $\Omega \subset \mathbb{E}^2$. Расширяющаяся последовательность ее ограниченных подобластей*

$$\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n, \ldots \subset \Omega \tag{4.34}$$

называется исчерпывающей, *если, каково бы ни было $R > 0$, все точки области Ω, принадлежащие кругу радиуса R с центром в начале коор-*

динат, будут принадлежать всем Ω_n, начиная с достаточно большого n.

Определение 4.10. *Пусть в неограниченной области Ω задана функция $f(M)$, интегрируемая в обычном смысле по любой ограниченной подобласти. Если при любом выборе исчерпывающей последовательности (4.34) соответствующая последовательность чисел*

$$\iint\limits_{\Omega_1} f(M)\,d\sigma,\ \iint\limits_{\Omega_2} f(M)\,d\sigma,\ \ldots,\ \iint\limits_{\Omega_n} f(M)\,d\sigma,\ \ldots$$

сходится к одному и тому же конечному пределу J, то интеграл $\iint\limits_{\Omega} f(M)\,d\sigma$ называется сходящимся*; в противном случае он называется* расходящимся.

Теорема 4.15 (достаточный признак сходимости)**.** *Если функция $f(M) = f(x, y)$ удовлетворяет требованиям, сформулированным в предыдущем определении, и неравенству*

$$|f(M)| = |f(x, y)| \leqslant \frac{C}{r^\alpha},\ \textit{где}\ C = \mathrm{const} > 0,$$
$$\alpha = \mathrm{const} > 2,\ r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

причем $M_0(x_0, y_0)$ — какая-нибудь фиксированная точка области Ω, то интеграл $\iint\limits_{\Omega} f(M)\,d\sigma$ сходится.

Заметим, что аналоги всех теорем, доказанных для несобственных интегралов по ограниченным областям, справедливы и для несобственных интегралов по неограниченным областям.

4.6.7 Методы вычисления несобственных кратных интегралов

Сведение сходящегося несобственного двойного интеграла к повторному осуществляется так же, как и в случае собственного двойного интеграла:

1. для неотрицательной (неположительной) подынтегральной функции — при условии сходимости повторного интеграла от этой функции;

2. для знакопеременной подынтегральной функции — при условии сходимости повторного интеграла от ее модуля.

Замена переменных в сходящемся несобственном n-кратном интеграле осуществляется по тем же правилам, что и в случае собственного n-кратного интеграла.

Мы не будем доказывать эти общие утверждения. Рассмотрим лишь один из способов вычисления важного интеграла Пуассона $J := \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ при помощи двойного несобственного интеграла.

Пусть

$$I := \iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dxdy$$

– сходящийся ввиду экспоненциального убывания подынтегральной функции двойной несобственный интеграл. Рассмотрим исчерпание плоскости $\mathbb{R}^2$ областями $[-R,R]\times[-R,R]$. Тогда

$$(2J)^2 = \lim_{R\to+\infty}\left(\int\limits_{-R}^{R} e^{-x^2}\,dx\right)^2 = \lim_{R\to+\infty}\left(\int\limits_{-R}^{R} e^{-x^2}\,dx \int\limits_{-R}^{R} e^{-y^2}\,dy\right)^2 =$$
$$= \lim_{R\to+\infty} \iint\limits_{\substack{-R\leqslant x\leqslant R\\ -R\leqslant y\leqslant R}} e^{-x^2-y^2}\,dxdy = I.$$

С другой стороны, плоскость $\mathbb{R}^2$ можно исчерпывать кругами радиуса $R\to+\infty$. Поэтому, переходя к полярным координатам и повторному интегралу, получаем

$$I = \lim_{R\to+\infty}\int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^{R} e^{-r^2} r\,dr = \pi\int\limits_0^{+\infty} e^{-\xi}\,d\xi = \pi.$$

Следовательно, $J = \sqrt{\pi}/2$.

Глава 5

Интегралы, зависящие от параметров

Если подынтегральная функция в собственном или несобственном интеграле зависит от одного или нескольких параметров, то такой интеграл называется *интегралом, зависящим от параметров.*

5.1 Собственные интегралы, зависящие от параметра

Пусть функция $f(x, y)$ определена в прямоугольнике

$$\Pi := \{(x, y) |\, a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\}$$

и интегрируема по x на $[a, b]$ при каждом $y \in [c, d]$. Тогда интеграл

$$\mathcal{F}(y) := \int\limits_a^b f(x, y)\, dx$$

зависит от параметра y, пробегающего отрезок $[c, d]$. Займемся исследованием его свойств.

Теорема 5.1 (о непрерывности собственного интеграла, зависящего от параметра)**.** *Если функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике Π, то функция $\mathcal{F}(y)$ непрерывна на отрезке $[c, d]$.*

Доказательство. По теореме Кантора функция $f(x, y)$ равномерно непрерывна в прямоугольнике Π. Докажем, что функция $\mathcal{F}(y)$ равномерно непрерывна на $[c, d]$. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists \delta > 0$ такое, что $\forall x \in [a, b]$ и $\forall y', y'' \in [c, d]$, удовлетворяющих условию $|y' - y''| < \delta$, выполняется неравенство

$$|f(x, y') - f(x, y'')| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Следовательно,

$$|\mathcal{F}(y') - \mathcal{F}(y'')| = \left| \int\limits_a^b f(x, y')\, dx - \int\limits_a^b f(x, y'')\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_a^b |f(x, y') - f(x, y'')|\, dx < \frac{\varepsilon}{b-a} \int\limits_a^b dx = \varepsilon.$$

Это означает, что функция $\mathcal{F}(y)$ равномерно непрерывна на отрезке $[c, d]$, что эквивалентно ее непрерывности на $[c, d]$. □

Следствие 5.1. *Пусть выполнены условия теоремы 5.1 и пусть* $\forall y \in [c, d]$: $a \leqslant x_1(y), x_2(y) \leqslant b$, *где* $x_1(y), x_2(y)$ *— непрерывные функции. Тогда* $g(y) := \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\, dx$ *— непрерывная функция на* $[c, d]$.

Доказательство. Докажем непрерывность функции $g(y)$ в произвольной точке $y_0 \in [c, d]$. Представим $g(y)$ в виде:

$$g(y) = \int\limits_{x_1(y)}^{x_1(y_0)} f(x, y)\, dx + \int\limits_{x_1(y_0)}^{x_2(y_0)} f(x, y)\, dx + \int\limits_{x_2(y_0)}^{x_2(y)} f(x, y)\, dx =:$$

$$=: g_1(y) + g_2(y) + g_3(y).$$

Функция $g_2(y)$ непрерывна по теореме 5.1 как интеграл с постоянными пределами интегрирования, а для функции $g_1(y)$ справедлива оценка

$$|g_1(y)| \leqslant \left| \int\limits_{x_1(y)}^{x_1(y_0)} |f(x, y)|\, dx \right| \leqslant M\, |x_1(y_0) - x_1(y)| \to 0 \text{ при } y \to y_0,$$

где $|f(x, y)| \leqslant M$, $(x, y) \in \Pi$. Аналогично, $g_3(y) \to 0$ при $y \to y_0$. Таким образом, $g(y) \to g(y_0)$ при $y \to y_0$. □

Теорема 5.2 (об интегрировании по параметру собственного интеграла)**.** *Если функция* $f(x, y)$ *непрерывна в прямоугольнике* Π, *то*

$$\int\limits_c^d \mathcal{F}(y)\, dy = \int\limits_c^d \left[\int\limits_a^b f(x, y)\, dx \right] dy = \int\limits_a^b \left[\int\limits_c^d f(x, y)\, dy \right] dx. \qquad (5.1)$$

Доказательство. Интегрируемость функции $\mathcal{F}(y)$ следует из ее непрерывности, которая имеет место по теореме 5.1. Поскольку функция $f(x,y)$ непрерывна в прямоугольнике П, то существуют двойной интеграл и внутренние интегралы в повторных в (5.1). Тогда по теореме, доказанной во втором семестре, повторные интегралы равны двойному, а значит, и между собой. $\square$

Теорема 5.3 (о дифференцировании по параметру собственного интеграла)**.** *Пусть функции* $f(x,y)$ *и* $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ *непрерывны в прямоугольнике* П. *Тогда функция* $\mathcal{F}(y)$ *имеет на* $[c,d]$ *непрерывную производную* $\mathcal{F}'(y)$, *причем*[1]

$$\mathcal{F}'(y) = \int\limits_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx.$$

Доказательство. Введем обозначения: $G(y) := \int\limits_a^b \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx$. Нужно доказать, что $\exists\ \mathcal{F}'(y) = G(y)$. В силу теоремы 5.1 $G(y)$ — непрерывная и, следовательно, интегрируемая функция на $[c,d]$. В силу теоремы 5.2 и формулы Ньютона–Лейбница имеем:

$$\int\limits_c^y G(t)\,dt = \int\limits_c^y \left[\int\limits_a^b \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\,dx\right]\,dt = \int\limits_a^b \left[\int\limits_c^y \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\,dt\right]\,dx =$$
$$= \int\limits_a^b \left[f(x,y) - f(x,c)\right]\,dx = \mathcal{F}(y) - \mathcal{F}(c).$$

Следовательно: $\mathcal{F}(y) = \int\limits_c^y G(t)\,dt + \mathcal{F}(c)$. Поскольку $G(t)$ — непрерывная функция, то

$$\exists\ \mathcal{F}'(y) = \frac{d}{dy}\left[\int\limits_c^y G(t)\,dt\right] = G(y).$$

$\square$

Следствие 5.2. *Пусть выполнены условия теоремы 5.3 и пусть* $a \leqslant x_1(y), x_2(y) \leqslant b$, *где* $x_1(y)$, $x_2(y)$ *— дифференцируемые функции. Тогда*

[1] В таком случае говорят, что интеграл, зависящий от параметра, можно дифференцировать по параметру под знаком интеграла.

$g(y) := \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx$ — *дифференцируемая функция на* $[c,d]$, *причем*

$$g'(y) := \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx + f(x_2(y),y)x_2'(y) - f(x_1(y),y)x_1'(y).$$

Доказательство. Введем обозначение $\Phi(u,v,y) := \int_u^v f(x,y)\,dx$. Найдем частные производные функции $\Phi(u,v,y)$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v} = f(v,y), \frac{\partial \Phi}{\partial u} = -f(v,y), \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \int\limits_u^v \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx.$$

Заметим, что эти частные производные — непрерывные функции от u, v, y, поэтому $\Phi(u,v,y)$ — дифференцируемая функция своих аргументов. Если положить $u = x_1(y)$, $v = x_2(y)$, то мы получим сложную функцию аргумента y: $\Phi(x_1(y), x_2(y), y) = g(y)$, которая дифференцируема по теореме о дифференцируемости сложной функции, причем

$$g'(y) = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial u}x_1'(y) + \frac{\partial \Phi}{\partial v}x_2'(y) + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right]_{\substack{u=x_1(y)\\ v=x_2(y)}} =$$

$$= -f(x_1(y),y)x_1'(y) + f(x_2(y),y)x_2'(y) + \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx.$$

□

5.2 Несобственные интегралы 1 рода, зависящие от параметра. Признаки равномерной сходимости

Пусть функция $f(x,y)$ определена в полуполосе[2]

$$\Pi := \{(x,y)|\, x \geqslant a, c \leqslant y \leqslant d\}$$

и пусть несобственный интеграл $\int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ сходится $\forall y \in [c,d]$. Тогда при $y \in [c,d]$ определена функция $\mathcal{F}(y) := \int\limits_a^\infty f(x,y)dx$, которая называется *несобственным интегралом 1 рода*, зависящим от параметра y.

[2] Ниже в этой главе, если явно не сказано противное, мы допускаем, что c и d могут независимо принимать значения $-\infty$ и $+\infty$.

Можно рассматривать случаи, когда параметр y изменяется не на сегменте, а на полупрямой или на всей прямой или на каком-то другом множестве. Несобственные интегралы, зависящие от параметра, аналогичны функциональным рядам.

Пример 5.1.

$$\mathcal{F}(y) := \int\limits_0^{+\infty} ye^{-xy}\,dx = \begin{cases} 0,\ y=0, \\ \lim_{A\to+\infty} \int\limits_0^A ye^{-xy}\,dx,\ y>0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0,\ y=0, \\ \lim_{A\to+\infty} \left(-e^{-xy}\right)\big|_0^A,\ y>0 \end{cases} = \begin{cases} 0,\ y=0, \\ 1, y>0. \end{cases}$$

Таким образом, предельная функция разрывна в точке $y = 0$, несмотря на то, что подынтегральная функция непрерывна в квадранте $\{(x, y)|\, x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$.

На этом примере мы видим, что в отличии от собственных интегралов, непрерывность подынтегральной функции для несобственных интегралов не гарантирует непрерывность самого интеграла. С аналогичной ситуацией мы сталкивались в теории функциональных последовательностей и рядов: сумма ряда непрерывных функций может быть разрывной функцией. Ключевым понятием для перенесения “хороших” свойств подынтегральных функций на сами несобственные интегралы, зависящие от параметра, является, как и для функциональных последовательностей и рядов, понятие равномерной сходимости.

Определение 5.1. *Несобственный интеграл $\int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ называется сходящимся равномерно по параметру y на $[c, d]$, если он сходится $\forall y \in [c, d]$ и если $\forall \varepsilon > 0\ \exists A \geqslant a$ такое, что $\forall A' \geqslant A$ и $\forall y \in [c, d]$ выполняется неравенство*

$$\left| \int\limits_{A'}^{\infty} f(x,y)dx \right| < \varepsilon.$$

Это означает, что остаток интеграла может быть сделан равномерно малым при достаточно большом нижнем пределе интегрирования.

Более удобным для практической проверки может оказаться другое эквивалентное определение:

Определение 5.2. *Несобственный интеграл* $\int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ *называется сходящимся равномерно по параметру* y *на* $[c,d]$, *если он сходится* $\forall y \in [c,d]$, *и если*

$$\lim_{A\to+\infty} \sup_{y\in[c,d]} \left| \int\limits_A^\infty f(x,y)dx \right| = 0.$$

Вернемся к примеру 5.1. В данном случае

$$\forall A > 0 : \sup_{y\geqslant 0} \left| \int\limits_A^\infty ye^{-xy}\,dx \right| = \sup_{y\geqslant 0} \left(-e^{-xy}\Big|_A^{+\infty} \right) = \sup_{y\geqslant 0} e^{-Ay} = 1,$$

следовательно на множестве $y \geqslant 0$ равномерная сходимость не имеет места. В то же время $\forall\delta > 0$, $\forall A > 0$

$$\sup_{y\geqslant\delta} \left| \int\limits_A^\infty ye^{-xy}\,dx \right| = \sup_{y\geqslant\delta} \left(-e^{-xy}\Big|_A^{+\infty} \right) = \sup_{y\geqslant\delta} e^{-Ay} = e^{-A\delta} \to 0,\ A \to +\infty.$$

Значит, на множестве $y \geqslant \delta > 0$ интеграл из примера 5.1 сходится равномерно.

Теорема 5.4 (критерий Коши равномерной сходимости н.и. 1 рода, зависящего от параметра)**.** *Несобственный интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ *сходится равномерно по* $y \in [c,d]$ *тогда и только тогда, когда* $\forall\varepsilon > 0$ $\exists A \geqslant a$ *(не зависящее от* y*) такое, что* $\forall A', A'' > A$ *и* $\forall y \in [c,d]$ *выполнено неравенство*

$$\left| \int\limits_{A'}^{A''} f(x,y)\,dx \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. 1. Необходимость. Если $\forall A' \geqslant A$ и $\forall y \in [c,d]$ выполнено

$$\left| \int\limits_{A'}^{\infty} f(x,y)\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

то $\forall A', A'' \geqslant A$ и $\forall y \in [c,d]$ выполнено неравенство:

$$\left| \int\limits_{A'}^{A''} f(x,y)\,dx \right| = \left| \int\limits_{A'}^{\infty} f(x,y)\,dx - \int\limits_{A''}^{\infty} f(x,y)\,dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int\limits_{A'}^{\infty} f(x,y)\,dx\right| + \left|\int\limits_{A''}^{\infty} f(x,y)\,dx\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

2. Достаточность. Пусть $\forall\varepsilon>0\ \exists A$ такое, что $\forall A', A''>A$ и $\forall y\in[c,d]$:

$$\left|\int\limits_{A'}^{A''} f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon.$$

   Переходя в этом неравенстве к пределу при $A''\to\infty$, получаем

$$\left|\int\limits_{A'}^{\infty} f(x,y)\,dx\right| \leqslant \varepsilon,$$

   а это и означает, что н.и. сходится равномерно.

□

Теорема 5.5 (мажорантный признак Вейерштрасса)**.** *Пусть*

1. $|f(x,y)|\leqslant g(x)$, $(x,y)\in\Pi$ *и пусть функция* $f(x,y)$ *(возможно комплексозначная) интегрируема по* x *на любом сегменте* $[a,A]$, $A>a$ *при* $y\in[c,d]$*;*
2. *несобственный интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *сходится.*

Тогда несобственные интегралы $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ *и* $\int\limits_a^{+\infty} |f(x,y)|\,dx$ *сходятся равномерно по* $y\in[c,d]$*.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon>0$. По критерию Коши для несобственного интеграла первого рода $\exists A\geqslant a$ такое, что $\forall A', A''>A$ выполнено неравенство

$$\left|\int\limits_{A'}^{A''} g(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Используя условие 1, получаем, что $\forall y\in[c,d]$:

$$\left|\int\limits_{A'}^{A''} f(x,y)\,dx\right| \leqslant \left|\int\limits_{A'}^{A''} |f(x,y)|\,dx\right| \leqslant \left|\int\limits_{A'}^{A''} g(x)\,dx\right| < \varepsilon,$$

а это и означает, в силу теоремы 5.4, справедливость утверждения теоремы. □

Пример 5.2. *Рассмотрим еще раз интеграл* $\int\limits_0^{+\infty} ye^{-xy}\,dx$ *из примера 5.1. Мы уже доказали его равномерную сходимость при* $y \geqslant \delta > 0$ *по определению.*

При помощи мажорантного признака Вейерштрасса мы можем доказать его равномерную сходимость при $\delta \leqslant y \leqslant M$*, поскольку* $0 < ye^{-xy} \leqslant Me^{-\delta x} =: g(x)$ *при* $\delta \leqslant y \leqslant M$*,* $0 \leqslant x < \infty$ *и интеграл* $\int\limits_0^{\infty} Me^{-\delta x}\,dx = \dfrac{M}{\delta}$ *сходится.*

При $y \geqslant \delta > 0$ *у подынтегральной функции нет интегрируемой мажоранты, поскольку (с учетом* $\frac{\partial}{\partial y}(ye^{-xy}) = (1-xy)e^{-xy}$*)*

$$\sup_{y\geqslant\delta} ye^{-xy} = \begin{cases} \frac{1}{ex}, & x \leqslant 1/\delta \\ \delta e^{-x\delta}, & x \geqslant 1/\delta \end{cases}$$

и $\int\limits_0^{1/\delta} \frac{dx}{x}$ *расходится.*

Таким образом, этот пример показывает, что мажорантный признак Вейерштрасса достаточен, но не необходим для равномерной сходимости несобственного интеграла, даже для знакопостоянной подынтегральной функции.

Мажорантный признак Вейерштрасса позволяет доказать равномерную и абсолютную сходимость несобственного интеграла 1 рода. В случае отсутствия абсолютной сходимости он не применим. В этой ситуации, как и для функциональных рядов, используется признак Дирихле.

Теорема 5.6 (признак Дирихле)**.** *Пусть*

1. *функция* $f(x,y)$ *(возможно комплексозначная) непрерывна в полуполосе* Π *и* $\left|\int\limits_a^x f(t,y)\,dt\right| \leqslant M = \mathrm{const}$, $\forall x \geqslant a$, $\forall y \in [c,d]$.
2. *функция* $g(x,y)$ *определена в полуполосе* Π*, имеет в ней непрерывную производную по* x *и монотонно по* x *и равномерно по* $y \in [c,d]$ *стремится к нулю при* $x \to +\infty$ *(последний факт обозначается так:* $g(x,y) \downdownarrows 0$*,* $x \to \infty$*,* $y \in [c,d]$*).*

Тогда несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)\,dx$ *сходится равномерно по* $y \in [c,d]$*.*

Доказательство. Доказательство на основе критерия Коши повторяет доказательство признака Дирихле для н.и. первого рода. □

Пример 5.3.

$$\int\limits_1^\infty \frac{\sin xy}{x}\,dx,\ 0<\delta\leqslant y\leqslant\infty.$$

Функция $f(x,y) = \sin xy$ *непрерывна при* $x \geqslant 1$, $y \geqslant \delta$ *и имеет по переменной* x *ограниченную первообразную* $\left|-\dfrac{\cos xy}{y}\right| \leqslant \dfrac{1}{\delta}$. *Функция* $g(x,y) = \dfrac{1}{x}$ *монотонно по* $x \geqslant 1$ *и равномерно по* $y \geqslant \delta$ *стремится к нулю при* $x \to +\infty$, *причем имеет непрерывную производную по* x.

Поэтому по признаку Дирихле данный интеграл равномерно сходится при $y \geqslant \delta$.

Покажем, что $\forall\varepsilon > 0$ *при* $0 < y < \varepsilon$ *данный интеграл не сходится равномерно. Воспользуемся для этого критерием Коши. Пусть* $y_n := 1/n$, $n \geqslant [1/\varepsilon]+1$, $A' := 2\pi/y_n, A'' := 3\pi/y_n$. *Тогда*

$$\int\limits_{A'}^{A''} \frac{\sin xy_n}{x}\,dx = \int\limits_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin z}{z}\,dz > \frac{1}{3\pi}\int\limits_{2\pi}^{3\pi} \sin z\,dz = \frac{2}{3\pi}.$$

Поскольку при $n \to \infty$ *также* $A', A'' \to \infty$, *по критерию Коши получаем отсутствие равномерной сходимости.*

Тем более, равномерная сходимость отсутствует при $y \geqslant 0$ *и* $y \in \mathbb{R}$.

5.3 О непрерывности, интегрировании и дифференцировании по параметру несобственных интегралов, зависящих от параметра

Теорема 5.7 (о непрерывности несобственного интеграла, зависящего от параметра). *Пусть*

1. *функция* $f(x,y)$ *непрерывна в полуполосе* Π;
2. *несобственный интеграл* $\mathcal{F}(y) = \int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx$ *сходится равномерно по* $y \in [c,d]$.

Тогда функция $\mathcal{F}(y)$ непрерывна на $[c, d]$.

Доказательство. Рассмотрим функциональную последовательность $\mathcal{F}_n(y) = \int\limits_a^{a+n} f(x, y)\, dx$, $n \in \mathbb{N}$. По теореме о непрерывности собственного интеграла, зависящего от параметра, каждая функция $\mathcal{F}_n(y)$ непрерывна на $[c, d]$, а в силу условия 2 $\mathcal{F}_n(y) \overset{y\in[c,d]}{\rightrightarrows} \mathcal{F}(y)$. Поэтому по теореме о непрерывности равномерного предела последовательности непрерывных функций, функция $\mathcal{F}(y)$ непрерывна на $[c, d]$. □

Теорема 5.8 (об интегрировании несобственного интеграла по параметру)**.** *Если выполнены условия предыдущей теоремы, причем c и d являются конечными величинами, то*

$$\int\limits_c^d \mathcal{F}(y)dy = \int\limits_c^d \left[\int\limits_a^{\infty} f(x, y)\, dx\right] dy = \int\limits_a^{\infty} \left[\int\limits_c^d f(x, y)\, dy\right] dx. \qquad (5.2)$$

Доказательство. По предыдущей теореме функция $\mathcal{F}(y)$ интегрируема на $[c, d]$, поэтому нам нужно только доказать равенство (5.2), т.е. то, что

$$\lim_{A\to\infty} \int\limits_a^A \left[\int\limits_c^d f(x, y)\, dy\right] dx = \int\limits_c^d \left[\int\limits_a^{\infty} f(x, y)\, dx\right] dy.$$

Поскольку функция $f(x, y)$ непрерывна, то собственные интегралы под знаком предела можно переставить и равенство (5.2) эквивалентно равенству

$$\lim_{A\to\infty} \int\limits_c^d \underbrace{\left[\int\limits_a^{\infty} f(x, y)\, dx - \int\limits_a^{A} f(x, y)\, dx\right]}_{=\int\limits_A^{\infty} f(x,y)\, dx} dy = 0. \qquad (5.3)$$

Так как интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x, y)\, dx$ сходится равномерно по y на $[c, d]$, то $\forall \varepsilon > 0$ $\exists A$ такое, что $\forall A' > A$ и $\forall y \in [c, d]$ выполнено неравенство $\left|\int\limits_{A'}^{\infty} f(x, y)\, dx\right| < \frac{\varepsilon}{d-c}$. Следовательно, $\forall A' > A$ выполнено неравенство $\left|\int\limits_c^d \left[\int\limits_{A'}^{\infty} f(x, y)\, dx\right] dy\right| < \frac{\varepsilon}{d-c}(d - c) = \varepsilon$, что и означает справедливость равенства (5.3). □

Докажем теорему о перестановке двух несобственных интегралов первого рода.

Теорема 5.9. *Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна при $a \leqslant x < +\infty$, $c \leqslant y < +\infty$, а интегралы*

$$\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy \qquad \text{и} \qquad \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx \tag{5.4}$$

сходятся равномерно: первый на любом конечном отрезке $[a,b], b > a$, а второй – на любом конечном отрезке $[c,d], d > c$.

Тогда, если хотя бы один из повторных интегралов

$$\int_a^{+\infty}\int_c^{+\infty} |f(x,y)|\,dy\,dx \qquad \text{и} \qquad \int_c^{+\infty}\int_a^{+\infty} |f(x,y)|\,dx\,dy \tag{5.5}$$

сходится, то сходятся и равны между собой повторные интегралы

$$\int_a^{+\infty}\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy\,dx \qquad \text{и} \qquad \int_c^{+\infty}\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy. \tag{5.6}$$

Доказательство. Без ограничения общности, будем считать, что сходится второй интеграл из (5.5). Тогда, в силу двукратного применения признака сравнения, второй из интегралов из (5.6) также сходиться.

Остается доказать только равенство

$$\lim_{A\to+\infty}\int_a^{A}\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^{+\infty}\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy. \tag{5.7}$$

В силу равномерной сходимости первого из интегралов 5.4 на конечных отрезках и теоремы 5.8 при $\forall d > c$ получаем

$$\left|\int_c^{+\infty}\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy - \int_a^{A}\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy\,dx\right| =$$
$$= \left|\int_c^{+\infty}\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy - \int_c^{+\infty}\int_a^{A} f(x,y)\,dx\,dy\right| =$$
$$= \left|\int_c^{+\infty}\int_A^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy\right| =$$
$$= \left|\int_c^{d}\int_A^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy + \int_d^{+\infty}\int_A^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\int_c^{d}\int_A^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy\right| + \int_d^{+\infty}\int_a^{+\infty} |f(x,y)|\,dx\,dy.$$

В силу сходимости второго интеграла из (5.5), $\forall \varepsilon > 0\ \exists d > c$ такое, что выполнено неравенство

$$\int_d^{+\infty} \int_a^{+\infty} |f(x,y)|\, dx\, dy < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Зафиксировав такое d, в силу равномерной сходимости интеграла $\int_A^{+\infty} f(x,y)\, dx$ на отрезке $[c,d]$, можно выбрать столь большое $A_1(\varepsilon)$, что выполнено неравенство

$$\left| \int_c^d \int_A^{+\infty} f(x,y)\, dx\, dy \right| < \varepsilon/2,\ \forall A > A_1.$$

Отсюда получаем требуемую оценку

$$\left| \int_c^{+\infty} \int_a^{+\infty} f(x,y)\, dx\, dy - \int_a^A \int_c^{+\infty} f(x,y)\, dy\, dx \right| < \varepsilon,\ \forall A > A_1,$$

эквивалентную равенству (5.7). $\square$

Замечание 5.1. *Если первое условие теоремы для интегралов от модулей не выполняется, то интегралы (5.5) могут не равняться друг другу.*

Теорема 5.10 (о дифференцировании несобственного интеграла по параметру)**.** *Пусть:*

1. *функции $f(x,y)$ и $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ непрерывны в полуполосе Π;*
2. *несобственный интеграл $\mathcal{F}(y) := \int\limits_a^{\infty} f(x,y)\, dx$ сходится $\forall y \in [c,d]$;*
3. *несобственный интеграл $\int\limits_a^{\infty} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\, dx$ сходится равномерно по $y \in [c,d]$.*

Тогда функция $\mathcal{F}(y)$ дифференцируема на $[c,d]$ и справедливо равенство

$$\mathcal{F}'(y) = \frac{d}{dy} \int\limits_a^{\infty} f(x,y)\, dx = \int\limits_a^{\infty} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\, dx.$$

В таком случае говорят, что несобственный интеграл можно дифференцировать по параметру под знаком интеграла.

Доказательство. Рассмотрим функциональную последовательность $\{\mathcal{F}_n(y)\} := \int\limits_a^{a+n} f(x,y)\,dx$. В силу второго условия доказываемой теоремы $\{\mathcal{F}_n(y)\} \to \mathcal{F}(y)$, $y \in [c,d]$. По теореме 5.3 при $y \in [c,d]$ $\exists\ \mathcal{F}'_n(y) = \int\limits_a^{a+n} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx$, а в силу третьего условия доказываемой теоремы, $\mathcal{F}'_n(y) \overset{[c,d]}{\rightrightarrows} \int\limits_a^{\infty} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx$. Отсюда по теореме 3.10 о дифференцируемости предела функциональной последовательности следует, что функция $\mathcal{F}(y)$ дифференцируема на $[c,d]$ и имеет место равенство $\mathcal{F}'(y) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{F}'_n(y)$, т.е.

$$\frac{d}{dy}\int\limits_a^{\infty} f(x,y)\,dx = \int\limits_a^{\infty} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx.$$

$\square$

О несобственных интегралах второго рода, зависящих от параметра

Пусть функция $f(x,y)$ определена на множестве

$$\Pi_1 := \{(x,y)|\ a < x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}.$$

При этом $\forall y \in [c,d]$ она, как функция аргумента x, неограничена в окрестности точки a и интегрируема на любом отрезке $[a+\delta, b]$, $\forall\delta$, $0 < \delta < b-a$. Таким образом, интеграл $\int\limits_a^b f(x,y)\,dx$, $\forall y \in [c,d]$ является *несобственным интегралом второго рода, зависящим от параметра* y.

Определение 5.3. *Несобственный интеграл второго рода* $\int\limits_a^b f(x,y)dx$, *зависящий от параметра* y, *называется сходящимся равномерно по параметру* $y \in [c,d]$, *если он сходится* $\forall y \in [c,d]$ *и если* $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ *такое, что* $\forall\delta' \in (0,\delta)$ *и* $\forall y \in [c,d]$ *выполняется неравенство*

$$\left|\int\limits_a^{a+\delta'} f(x,y)dx\right| < \varepsilon.$$

Все доказанные факты о несобственных интегралах первого рода, зависящих от параметра, имеют аналоги и для несобственных интегралов второго рода, зависящих от параметра.

5.4 Вычисление несобственных интегралов с помощью дифференцирования по параметру

Рассмотрим следующую задачу: вычислить несобственный интеграл $\int_0^\infty \dfrac{\sin x}{x}\,dx$ (при $x = 0$ считаем подынтегральную функцию равной 1). Мы знаем, что этот интеграл сходится условно, но чему он равен?

Для ответа на этот вопрос рассмотрим несобственный интеграл

$$\mathcal{F}(y) := \int\limits_0^\infty e^{-yx}\frac{\sin x}{x}\,dx,\ y \geqslant 0, \tag{5.8}$$

который при одном из значений параметра y ($y = 0$) переходит в искомый интеграл[3], докажем, что функция $\mathcal{F}(y)$ непрерывна при $y \geqslant 0$ и при $y > 0\ \exists\ \mathcal{F}'(y) = -\dfrac{1}{1+y^2}$. Отсюда уже легко найти $\mathcal{F}(y)$ и, в частности, $\mathcal{F}(0)$.

Представим функцию $\mathcal{F}(y)$ в виде:

$$\mathcal{F}(y) := \int\limits_0^1 e^{-yx}\frac{\sin x}{x}\,dx + \int\limits_1^\infty e^{-yx}\frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Первое слагаемое является собственным интегралом, дифференцируемо зависящим от параметра y. Ко второму слагаемому применим признак Дирихле равномерной сходимости при $y \geqslant 0$. Действительно,

1. $f(x,y) = \sin x$ — непрерывная функция, которая имеет ограниченную первообразную по x;
2. $g(x,y) = \dfrac{e^{-xy}}{x} \downarrow 0$ при $x \to \infty$, причем ввиду оценки $\dfrac{e^{-xy}}{x} \leqslant \dfrac{1}{x}$, $y \geqslant 0$ это стремление равномерно при $y \geqslant 0$;
3. при $x \geqslant 1$, $y \geqslant 0\ \exists$ непрерывная производная $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)$.

Значит, несобственный интеграл

$$\int\limits_1^\infty e^{-yx}\frac{\sin x}{x}\,dx$$

[3]Прием введения параметра часто используется для вычисления значений несобственных интегралов и числовых рядов.

сходится равномерно при $y \geqslant 0$, и по теореме 5.7 функция $\mathcal{F}(y)$ непрерывна при $y \geqslant 0$.

Рассмотрим произвольный сегмент $[y_0, y_1]$, $0 < y_0 < y_1$ вещественной оси и проверим, что на нем выполняются условия теоремы 5.10 для интеграла (5.8). Действительно, если $f(x,y) = e^{-yx}\dfrac{\sin x}{x}$, то

1. $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -e^{-xy}\sin x$ — непрерывная функция при $x \geqslant 0$, $y_0 \leqslant y \leqslant y_1$;
2. интеграл (5.8) сходится при $y_0 \leqslant y \leqslant y_1$;
3. интеграл $\int\limits_0^\infty \dfrac{\partial f}{\partial y}\,dx$ сходится равномерно при $y_0 \leqslant y \leqslant y_1$ по признаку Вейерштрасса: $|e^{-xy}\sin x| \leqslant e^{-xy_0}$, а интеграл $\int\limits_0^\infty e^{-xy_0}\,dx = \dfrac{1}{y_0}$ сходится.

Тем самым, по теореме 5.10 интеграл (5.8) — дифференцируемая функция от y на $[y_0, y_1]$, а ввиду произвольности y_0, y_1 — и на $(0, +\infty)$, причем $\mathcal{F}'(y) = -\int\limits_0^\infty e^{-xy}\sin x\,dx$.

Вычислим последний интеграл:

$$\mathcal{F}'(y) = -\int\limits_0^\infty e^{-xy}\sin x\,dx = -\operatorname{Im}\int\limits_0^\infty e^{-xy+ix}\,dx = \operatorname{Im}\frac{1}{y-i}e^{(-y+i)x}\Big|_{x=0}^{x=\infty} =$$

$$= -\operatorname{Im}\frac{y+i}{y^2+1} = -\frac{1}{y^2+1},\ y > 0.$$

Отсюда $\mathcal{F}(y) = -\operatorname{arctg} y + c$, $y \geqslant 0$, ввиду непрерывности функции $\mathcal{F}(y)$ при $y \geqslant 0$.

Для нахождения c устремим $y \to +\infty$. Тогда

$$|\mathcal{F}(y)| \leqslant \int\limits_0^\infty e^{-xy}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\,dx \leqslant \int\limits_0^\infty e^{-xy}\,dx = \frac{1}{y},$$

откуда $\mathcal{F}(+\infty) = 0$. Значит, $c = \dfrac{\pi}{2}$ и

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \mathcal{F}(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Рассмотрим теперь интеграл[4] $I(\alpha) := \int\limits_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{x}\,dx$. Очевидно, что $I(0)=0$, а при $\alpha>0$ имеем: $I(\alpha) = \int\limits_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{\alpha x}\,d(\alpha x) = \int\limits_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$. В то же время, ввиду нечетности функции $I(\alpha)$, мы получаем, что $I(\alpha) = -\frac{\pi}{2}$ при $\alpha<0$. Итак,

$$I(\alpha) = \begin{cases} \frac{\pi}{2},\ \alpha>0, \\ 0,\ \alpha=0, \\ -\frac{\pi}{2},\ \alpha<0 \end{cases} = \frac{\pi}{2}\operatorname{sign}(\alpha).$$

Функция $I(\alpha)$ называется *разрывным множителем Дирихле.*

Пример 5.4. *Интеграл* $I(\alpha,\beta) := \int\limits_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{x}\frac{\sin\beta x}{x}\,dx$ *равномерно сходится на бесконечности при* $\alpha\in\mathbb{R}$ *и при* $\beta\in\mathbb{R}$ *по признаку Вейерштрасса, следовательно* $I(\alpha,\beta)$ *— непрерывная функция при* $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$*. Далее, интеграл*

$$\int\limits_0^\infty \frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{\sin\alpha x}{x}\frac{\sin\beta x}{x}\,dx = \int\limits_0^\infty \frac{\cos\alpha x\sin\beta x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \frac{\sin(\alpha+\beta)x}{x}\,dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \frac{\sin(\beta-\alpha)x}{x}\,dx$$

сходится равномерно по признаку Дирихле при $|\alpha+\beta|\geqslant\delta>0$, $|\alpha-\beta|\geqslant\delta>0 \Rightarrow I_\alpha(\alpha,\beta) = \frac{\pi}{4}\left(\operatorname{sign}(\alpha+\beta)+\operatorname{sign}(\beta-\alpha)\right)$, $\alpha+\beta\neq 0$, $\alpha-\beta\neq 0 \Rightarrow$ *(ввиду* $I(\alpha,\beta)=I(\beta,\alpha), I(0,\beta)=0$*)* $I(\alpha,\beta) = \frac{\pi}{4}\left(|\alpha+\beta|-|\alpha-\beta|\right)$*, что верно по непрерывности* $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$*. В частности,* $I(1,1) = \int\limits_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2}$.

Пусть $G(\alpha) := \int\limits_0^\infty \left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^3 dx$*, тогда*

$$G'(\alpha) = 3\int\limits_0^\infty \left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^2 \cos\alpha x\,dx = \frac{3}{2}\int\limits_0^\infty \frac{\sin(2\alpha x)\sin\alpha x}{x^2}\,dx =$$

[4] Его не следует путать с *интегральными синусами* $\mathrm{Si}(x) := \int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$ и $\mathrm{si}(x) = \int\limits_\infty^x \frac{\sin t}{t}\,dt = \mathrm{Si}(x) - \frac{\pi}{2}$.

$$= \frac{3}{2} I(2\alpha, \alpha) = \frac{3}{2}\frac{\pi}{4}\left(|3\alpha| - |\alpha|\right) = \frac{3}{4}\pi|\alpha| \;\Rightarrow\; G(\alpha) = \frac{3\pi}{8}\alpha^2 \operatorname{sign}(\alpha).$$

В частности, $G(1) = \int\limits_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 dx = \frac{3\pi}{8}$.

5.5 Эйлеровы интегралы

Важные в математике или ее приложениях неэлементарные функции называются *специальными.*[5] Примерами таких функций являются Γ-функция

$$\Gamma(p) := \int\limits_0^\infty x^{p-1} e^{-x}\, dx \tag{5.9}$$

и B-функция

$$B(p,q) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\, dx. \tag{5.10}$$

5.5.1 Свойства Γ-функции

1. **Область определения.** Представим интеграл (5.9) в виде

$$\Gamma(p) = \int\limits_0^1 x^{p-1}e^{-x}\, dx + \int\limits_1^\infty x^{p-1}e^{-x}\, dx =: \Gamma_2(p) + \Gamma_1(p),$$

где $\Gamma_i(p)$, $i = 1, 2$ — несобственные интегралы первого и второго рода, соответственно. Из признака сравнения для несобственных интегралов сразу следует, что интеграл, определяющий функцию $\Gamma_1(p)$, сходится $\forall p$, а интеграл, определяющий функцию $\Gamma_2(p)$, сходится при $p > 0$.[6]

Таким образом, формула (5.9) определяет Γ-функцию при $p > 0$. При этом подынтегральное выражение положительно $\forall p > 0$, $\forall x > 0$, поэтому при $p > 0$ у Γ-функции нет нулей.

[5] Им посвящены различные руководства и справочники, например «Справочник по специальным функций», под ред. М. Абрамовица, И. Стиган, М.: Наука, 1979.

[6] Если рассматривать эти интегралы при комплексных $p = p' + ip''$, то из того же признака сравнения и того, что $\left|x^{p-1}\right| = \left|x^{p'-1}e^{ip''\ln x}\right| = x^{p'-1}$ следует, что они сходятся при $\operatorname{Re} p > 0$ и при этих p формула (5.9) определяет аналитическую функцию $\Gamma(p)$, поскольку, как показано ниже при $p > 0$ (те же рассуждения справедливы и при $\operatorname{Re} p > 0$), $\Gamma(p)$ имеет производную.

2. **Непрерывность.** Рассмотрим сегмент $p \in [p_1, p_2]$ при произвольных $p_2 > p_1 > 0$. Поскольку $x^{p-1}e^{-x} \leqslant x^{p_2-1}e^{-x}$ и интеграл $\int\limits_1^\infty x^{p_2-1}e^{-x}\,dx$ сходится, то по признаку Вейерштрасса интеграл $\int\limits_1^\infty x^{p-1}e^{-x}\,dx$ сходится равномерно по параметру $p \in [p_1, p_2]$, и следовательно, функция $\Gamma_1(p)$ непрерывна на $[p_1, p_2]$, а ввиду произвольности $p_2 > p_1 > 0$ — и на $(0, +\infty)$. Аналогично доказывается непрерывность функции $\Gamma_2(p)$.

   Таким образом, Γ-функция непрерывна при $p > 0$.

3. Дифференцируемость. Аналогично, интегралы $\int\limits_0^1 \dfrac{\partial}{\partial p} x^{p-1}e^{-x}\,dx = \int\limits_0^1 x^{p-1}e^{-x}\ln x\,dx$ и $\int\limits_1^\infty \dfrac{\partial}{\partial p} x^{p-1}e^{-x}\,dx = \int\limits_1^\infty x^{p-1}e^{-x}\ln x\,dx$ сходятся равномерно по параметру $p \in [p_1, p_2]$ при произвольных $p_2 > p_1 > 0$, а значит,

$$\exists\ \Gamma'(p) = \int\limits_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\ln x\,dx,\ 0 < p < \infty.$$

   По индукции легко доказать, что

$$\exists\ \Gamma^{(n)}(p) = \int\limits_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\ln^n x\,dx,\ 0 < p < \infty, n \in \mathbb{N}.$$

4. **Рекуррентная формула.** При $\operatorname{Re} p > 0$ при помощи интегрирования по частям получаем рекуррентное соотношение:

$$\Gamma(p+1) = \int\limits_0^\infty x^p e^{-x}\,dx = -x^p e^{-x}\Big|_{x=0}^{x=+\infty} + \int\limits_0^\infty p x^{p-1}e^{-x}\,dx = p\Gamma(p).$$

   Пользуясь этой формулой рекуррентно при $p > n-1$, получаем

$$\begin{gathered} \Gamma(p+1) = p\Gamma(p) = p(p-1)\Gamma(p-1) = \ldots \\ \ldots = p(p-1)\ldots(p-n+1)\Gamma(p-n+1), \end{gathered} \tag{5.11}$$

   что дает возможность свести вычисление функции $\Gamma(p)$ к ее вычислению в полуполосе $0 < \operatorname{Re} p \leqslant 1$. Учитывая, что $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$, получаем из (5.11) при $p = n$ формулу $\Gamma(n+1) = n!$. Таким образом, Γ-функция обобщает функцию факториал на нецелые положительные значения.

5. **Продолжение Γ-функции во всю комплексную плоскость.** С другой стороны, рекуррентная формула в виде $\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p}$ может быть использована для аналитического продолжения Γ-функции в область $\operatorname{Re} p \leqslant 0$. Действительно, если $\operatorname{Re} p > -1$, то $\operatorname{Re}(p+1) > 0$ и по формуле $\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p}$ мы аналитически продолжаем Γ-функцию в полосу $-1 < \operatorname{Re} p \leqslant 0$. При этом точка $p = 0$ для продолженной функции будет полюсом первого порядка с вычетом, равным $\Gamma(1) = 1$. Вторично применяя эту формулу, мы получаем аналитическое продолжение Γ-функции в полосу $-2 < \operatorname{Re} p \leqslant -1$. Действуя так и далее, мы получаем аналитическое продолжение Γ-функции во всю комплексную область.

   При этом полюс Γ-функции в точке $p = 0$ порождает полюса первого порядка Γ-функции во всех целых отрицательных точках $p = -n$, $n \in \mathbb{N}$ с вычетами, равными $(-1)^n/n!$. Действительно, если $\Gamma(p-n) \sim \dfrac{c_n}{p}$, $p \to 0$, то $\Gamma(p-(n+1)) = \dfrac{\Gamma(p-n)}{p-n-1} \sim \dfrac{c_n}{p(p-n-1)} \sim -\dfrac{c_n}{(n+1)p}$, $p \to 0$. Очевидно, что других полюсов у Γ-функции нет.[7]

6. **Значение $\Gamma(\frac{1}{2})$.** Пользуясь значением интеграла Пуассона, полученным в конце предыдущей главы, получаем:

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x}\,dx = 2\int_0^\infty e^{-x}\,d\sqrt{x} = \sqrt{\pi}.$$

   С помощью полученной формулы и формулы приведения нетрудно получить значения Γ-функции во всех полуцелых точках.

7. **Формула дополнения.** Существует представление Γ-функции

$$\Gamma(p) = \frac{1}{p}\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^p}{1+\frac{p}{k}},\ p \in \mathbb{C}\backslash\{0,-1,-2,-3,\ldots\} \tag{5.12}$$

   через *бесконечное произведение.*[8] Преимущество этого представления Γ-функции перед интегральным представлением (5.9) в том, что оно сходится во всей комплексной плоскости кроме полюсов Γ-функции.

[7] Через представление Γ-функции в виде бесконечного произведения можно доказать, что у нее нет нулей во всей комплексной плоскости.

[8] Бесконечное произведение $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$ называется *сходящимся*, если сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \ln a_k$.

С помощью формулы (5.12), а также разложения синуса в бесконечное произведение

$$\sin z = z\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)$$

сомножителей, соответствующих его нулям, легко доказать формулу

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin p\pi},\ p\notin\mathbb{Z}. \tag{5.13}$$

Действительно,

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\Gamma(p)(-p)\Gamma(-p)=\frac{1}{p}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^{p}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-p}}{\left(1+\frac{p}{k}\right)\left(1-\frac{p}{k}\right)}=$$

$$=\left(p\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{p^2}{k^2}\right)\right)^{-1}=\frac{\pi}{\pi p\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{(p\pi)^2}{k^2\pi^2}\right)}=\frac{\pi}{\sin\pi p},\ p\notin\mathbb{Z}.$$

5.5.2 Свойства B-функции

1. **Область определения.** Представим интеграл (5.10) в виде

$$B(p,q)=\int\limits_0^{1/2}x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx+\int\limits_{1/2}^{1}x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx=:B_1(p,q)+B_2(p,q).$$

Интеграл $B_1(p,q)$ является несобственным второго рода при $p<1$ и он сходится при $p>0$. Аналогично, интеграл $B_2(p,q)$ является несобственным второго рода при $q<1$ и он сходится при $q>0$. Таким образом, формула (5.10) определяет B-функцию при $p>0$, $q>0$.

2. **Симметрия.** Докажем, что $B(p,q)=B(q,p)$. Для этого сделаем замену переменных: $x=1-t$, $dx=-dt$. Тогда

$$B(p,q)=\int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx=-\int\limits_1^0(1-t)^{p-1}t^{q-1}\,dt=$$

$$=\int\limits_0^1 t^{q-1}(1-t)^{p-1}\,dt=B(q,p).$$

3. **Связь с Γ-функцией.** Можно доказать,[9] что

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{5.14}$$

Из этой формулы следует возможность аналитического продолжения функции $B(p,q)$ в область комплексных значений переменных p, q и, в частности, то, что при $p,q\neq 0,-1,-2,-3,\ldots$ функция $B(p,q)$ имеет производные всех порядков.

4. **Альтернативное интегральное представление B-функции.** Делая в (5.10) замену переменных $x=\dfrac{1}{1+t}$, $dx=-\dfrac{dt}{(1+t)^2}$, $1-x=\dfrac{t}{1+t}$, получаем $B(p,q)=\int\limits_0^\infty t^{q-1}(1+t)^{-p-q}\,dt$, а в силу симметрии B-функции, эту формулу можно переписать в виде

$$B(p,q)=\int\limits_0^\infty x^{p-1}(1+x)^{-p-q}\,dx. \tag{5.15}$$

5. **Примеры вычисления определенных и несобственных интегралов с помощью эйлеровых интегралов.**

Пример 5.5.

$$\int\limits_0^{+\infty}\sqrt[4]{x}(1+x)^{-2}\,dx=\int\limits_0^{+\infty}x^{5/4-1}(1+x)^{-5/4-3/4}\,dx\overset{(5.15)}{=}$$

$$\overset{(5.15)}{=}B(\tfrac54,\tfrac34)\overset{(5.14)}{=}\frac{\Gamma(\frac54)\Gamma(\frac34)}{\Gamma(2)}=\tfrac14\Gamma(\tfrac14)\Gamma(\tfrac34)\overset{(5.13)}{=}\frac14\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi\sqrt2}{4}.$$

Пример 5.6.

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{p-1}x\cos^{q-1}x\,dx$$

Очевидно, что этот несобственный интеграл второго рода сходится при $p>0$, $q>0$. Сделаем замену переменных: $\sin x=\sqrt{t}$, $0\leqslant t\leqslant 1$. *Тогда* $\cos x=\sqrt{1-t}$, $\cos x\,dx=\frac{dt}{2\sqrt t}$ *и*

$$I=\frac12\int\limits_0^1 t^{\frac p2-1}(1-t)^{\frac q2-1}\,dx=\frac12 B(\tfrac p2,\tfrac q2)\overset{(5.14)}{=}\frac12\frac{\Gamma(\frac p2)\Gamma(\frac q2)}{\Gamma(\frac{p+q}{2})}.$$

[9] см., Будак Б.М., Фомин С.В. Кратные интегралы и ряды. Изд. 3-е, М. Физматлит, 2002, с. 392–393.

Пусть $p = 3$, $q = 3$. *Тогда*

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2}\frac{\Gamma^2(\frac{3}{2})}{\Gamma(3)} = \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})\right)^2}{2} = \frac{\frac{1}{4}\pi}{4} = \frac{\pi}{16}.$$

5.6 Кратные несобственные интегралы, зависящие от параметров

Мы ограничимся рассмотрением тройных интегралов вида

$$u(M) = \iiint\limits_G f(M,P)g(P)\,dV_P, \tag{5.16}$$

где $G \subset \mathbb{E}^3$ — ограниченная кубируемая область, $M \in \mathbb{E}^3$, dV_P — элемент объема в точке $P \in G$, $g(P) = g(x,y,z)$ — ограниченная, интегрируемая в области G функция, а функция $f(M,P)$ непрерывна при $M \neq P$ и неограничена как функция от P в произвольной окрестности точки M. Здесь роль параметров играют координаты x_0, y_0, z_0 точки M.

Важным примером таких интегралов является потенциал гравитационного поля, создаваемого в точке M телом G с плотностью массы $g(P) = \rho(P)$. Этот потенциал (он называется также *объемным* или *ньютоновским потенциалом*) имеет вид:

$$u(M) = \iiint\limits_G \frac{\rho(P)}{r_{MP}}\,dV_P, \tag{5.17}$$

где r_{MP} — расстояние между точками M и P.

При $M \notin G$ интеграл (5.17) является собственным, зависящим от параметров, дифференцируемым под знаком интеграла по координатам точки M любое число раз. При этом, поскольку $\triangle\frac{1}{r_{MP}} = 0$, $M \neq P$, где оператор $\triangle$ действует на координаты точки $M(x_0,y_0,z_0)$, то $\triangle u(M) = 0$, $M \notin G$.

Если же $M \in G$, то интеграл (5.17) является несобственным, зависящим от параметров, и вопрос о его непрерывности и дифференцируемости является более сложным. Для его решения введем новые понятия и докажем некоторые утверждения.

Определение 5.4. *Несобственный интеграл (5.16) называется* сходящимся равномерно *относительно M в точке $M_0 \in G$, если $\forall \varepsilon > 0$*

$\exists\delta > 0$ такое, что $B^{\delta}_{M_0} \subset G$, где $B^{\delta}_{M_0}$ — шар радиуса δ с центром в точке M_0, $\forall$ кубируемой области $\omega \subset B^{\delta}_{M_0}$ и $\forall M \in B^{\delta}_{M_0}$ выполняется неравенство

$$\left|\iiint\limits_{\omega} f(M,P)g(P)\,dV_P\right| < \varepsilon.$$

Теорема 5.11. *Если несобственный интеграл (5.16) сходится равномерно относительно M в точке M_0, то функция $u(M)$ непрерывна в точке M_0.*

Доказательство. По определению непрерывности нужно доказать, что $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ такое, что $|u(M) - u(M_0)| < \varepsilon$ при $r_{MM_0} < \delta$. Представим функцию u в следующем виде:

$$u(M) = \iiint\limits_{B^{\delta_1}_{M_0}} f(M,P)g(P)\,dV_P + \iiint\limits_{G\backslash B^{\delta_1}_{M_0}} f(M,P)g(P)\,dV_P =: u_1(M) + u_2(M).$$

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Так как функция $u(M)$ сходится равномерно относительно M в точке M_0, то $\exists\delta_1$ такое, что $\forall M \in B^{\delta_1}_{M_0}$ выполняется неравенство

$$|u_1(M)| < \frac{\varepsilon}{3}, \text{ в частности } |u_1(M_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{5.18}$$

Интеграл $u_2(M)$ является собственным для M, близких к M_0, поэтому $\exists\delta > 0$ такое, что

$$|u_2(M) - u_2(M_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{при} \quad r_{MM_0} < \delta. \tag{5.19}$$

Уменьшим, если нужно, δ до значения, меньшего δ_1. Неравенство (5.19) тем более будет выполнено. Тогда, если $r_{MM_0} < \delta$, то $M \in B^{\delta_1}_{M_0}$, и, следовательно, выполняются неравенства (5.18).

Итак, если $r_{MM_0} < \delta$, то из (5.18) и (5.19) получим:

$$|u(M) - u(M_0)| = |u_1(M) + u_2(M) - u_1(M_0) - u_2(M_0)| \leqslant$$
$$\leqslant |u_1(M)| + |u_1(M_0)| + |u_2(M) - u_2(M_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

□

Теорема 5.12 (достаточное условие равномерной сходимости в точке). *Если $|f(M,P)| \leqslant \dfrac{c}{r^{\alpha}_{MP}}$, где $0 < \alpha < 3$, $c = \mathrm{const} > 0$, то несобственный интеграл (5.16) сходится равномерно относительно M в любой внутренней точке $M_0 \in G$.*

Доказательство. Пусть $M_0 \in G$ и $|g(P)| \leqslant A = \mathrm{const}$. Требуется доказать, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что $\forall$ области $\omega \subset B^{\delta}_{M_0}$ и $\forall M \in B^{\delta}_{M_0}$ выполняется неравенство

$$\left| \iiint\limits_{\omega} f(M,P)g(P)\,dV_P \right| < \varepsilon. \tag{5.20}$$

Поскольку $|f(M,P)| \leqslant \dfrac{c}{r^{\alpha}_{MP}}$, то

$$\left| \iiint\limits_{\omega} f(M,P)g(P)\,dV_P \right| \leqslant cA \iiint\limits_{\omega} \frac{dV_P}{r^{\alpha}_{MP}} \leqslant cA \iiint\limits_{B^{\delta}_{M_0}} \frac{dV_P}{r^{\alpha}_{MP}} \leqslant$$

$$\leqslant cA \iiint\limits_{B^{2\delta}_{M}} \frac{dV_P}{r^{\alpha}_{MP}} =: cAI,$$

поскольку $B^{\delta}_{M_0} \subset B^{2\delta}_{M}$.

В интеграле I перейдем к сферическим координатам с центром в точке M:

$$I = \int\limits_0^{\pi} \sin\theta\,d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2\delta} \frac{r^2}{r^{\alpha}}\,dr = 4\pi \int\limits_0^{2\delta} r^{2-\alpha}\,dr = \frac{4\pi}{3-\alpha}(2\delta)^{3-\alpha}.$$

Поскольку $(2\delta)^{3-\alpha} \to 0$ при $\delta \to 0$, то $cAI < \varepsilon$ при достаточно малом δ. Это означает выполнение неравенства (5.20) при том же δ $\forall$ области $\omega \subset B^{\delta}_{M_0}$ и $\forall M \in B^{\delta}_{M_0}$. $\square$

Следствие 5.3. *Для m-кратных несобственных интегралов того же вида (5.16) достаточным условием равномерной сходимости в точке $M_0 \in G$ является неравенство*

$$|f(M,P)| \leqslant \frac{c}{r^{\alpha}_{MP}}, \quad \text{где} \quad 0 < \alpha < m,\ c = \mathrm{const} > 0.$$

Оставшаяся часть данного параграфа посвящена вычислению первых и вторых производных ньютоновского потенциала.

Первые производные ньютоновского потенциала

Применим полученные теоремы к ньютонову потенциалу (5.17) с ограниченной плотностью $\rho(M)$ такой, что $|\rho(M)| \leqslant A = \mathrm{const}$. Докажем, что первые производные этого потенциала $u(M)$ можно вычислять дифференцированием под знаком интеграла и при $M \in G$.

В соответствии с определением производной нужно доказать, что

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x_0+\Delta x, y_0, z_0)-u(x_0,y_0,z_0)}{\Delta x} = X(M) := \iiint\limits_G \frac{\rho(P)(x-x_0)}{r^3_{MP}}\,dV_P,$$

т.е. что $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что если $0 < |\Delta x| < \delta$, то

$$\left|\frac{u(M_1)-u(M)}{\Delta x} - X(M)\right| < \varepsilon, \tag{5.21}$$

где $M_1 = M_1(x_0+\Delta x, y_0, z_0)$.

Разобьем область G в формулах для функций u и X на шар $B_M^{\delta_1}$ и его дополнение $G\backslash B_M^{\delta_1}$ для некоторого $\delta_1 > 0$, которое выберем ниже. Пусть $u = u_1 + u_2$ и $X = X_1 + X_2$ — соответствующие разбиения функций u и X на сумму двух слагаемых. Тогда

$$\begin{aligned}\left|\frac{u(M_1)-u(M)}{\Delta x} - X(M)\right| \leqslant \left|\frac{u_1(M_1)-u_1(M)}{\Delta x}\right| + |X_1(M)| + \\ + \left|\frac{u_2(M_1)-u_2(M)}{\Delta x} - X_2(M)\right|.\end{aligned} \tag{5.22}$$

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Подынтегральная функция в выражении для $X(M)$ имеет оценку: $\left|\dfrac{\rho(P)(x-x_0)}{r^3_{MP}}\right| \leqslant \dfrac{C}{r^2_{MP}}$, поэтому по теореме 5.12 несобственный интеграл в определении функции $X(M)$ сходится равномерно в любой точке $M \in G$. Следовательно, $\exists \delta_1 > 0$ такое, что $|X_1(M)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Получим аналогичную оценку и для $\left|\dfrac{u_1(M_1)-u_1(M)}{\Delta x}\right|$. Действительно,

$$\frac{u_1(M_1)-u_1(M)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\iiint\limits_{B_M^{\delta_1}}\left(\frac{\rho(P)}{r_{M_1P}} - \frac{\rho(P)}{r_{MP}}\right)dV_P =$$

$$= \iiint\limits_{B_M^{\delta_1}} \frac{r_{MP}-r_{M_1P}}{\Delta x}\frac{\rho(P)}{r_{M_1P}r_{MP}}\,dV_P.$$

По неравенству треугольника $\left|\dfrac{r_{MP}-r_{M_1P}}{\Delta x}\right| \leqslant 1$. Кроме того: $\dfrac{1}{r_{M_1P}r_{MP}} \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{r^2_{M_1P}} + \dfrac{1}{r^2_{MP}}\right)$, $|\rho(P)| \leqslant A$. По теореме 5.12 несобственный интеграл

$\iiint\limits_G \dfrac{1}{r^2_{MP}}\,dV_P$ сходится равномерно в любой точке $M \in G$. Следовательно, при достаточно малом $\delta_1 > 0$ выполняется неравенство

$$\iiint\limits_{B_M^{\delta_1}} \frac{A}{2r^2_{M'P}}\,dV_P < \frac{\varepsilon}{6},\ \forall M' \in B_M^{\delta_1}.$$

Поэтому при $|\Delta x| < \delta_1$ справедлива оценка

$$\left|\frac{u_1(M_1) - u_1(M)}{\Delta x}\right| \leqslant \frac{A}{2}\iiint\limits_{B_M^{\delta_1}} \left(\frac{1}{r^2_{M_1P}} + \frac{1}{r^2_{MP}}\right) dV_P < \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Наконец, $u_2(M') = \iiint\limits_{G\setminus B_M^{\delta_1}} \dfrac{\rho(P)}{r_{M'P}}\,dV_P$ — собственный интеграл $\forall M' \in B_M^{\delta_1}$, поэтому его можно дифференцировать под знаком интеграла и $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\left[\frac{u_2(M_1)-u_2(M)}{\Delta x} - X_2(M)\right] = 0$, и, следовательно, $\exists \delta_2 > 0$ такое, что при $|\Delta x| < \delta_2$ выполняется неравенство: $\left|\frac{u_2(M_1)-u_2(M)}{\Delta x} - X_2(M)\right| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Положим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.[10] Тогда, если $|\Delta x| < \delta$, то каждое слагаемое в правой части (5.22) по модулю меньше, чем $\frac{\varepsilon}{3}$, и поэтому справедливо (5.21), что и доказывает возможность вычисления первых производных ньютоновского потенциала под знаком интеграла.

Вторые производные ньютоновского потенциала

Вторые производные ньютоновского потенциала уже нельзя вычислять дифференцированием под знаком интеграла, однако имеет место следующая теорема.

Теорема 5.13. *Пусть функция плотности $\rho(M)$ имеет в области G непрерывные частные производные первого порядка. Тогда ньютоновский потенциал (5.17) имеет во внутренних точках области G непрерывные частные производные второго порядка и удовлетворяет в G уравнению Пуассона*

$$\Delta u(M) = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_0^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z_0^2}\right)\Bigg|_M = -4\pi\rho(M).$$

[10] При этом мы не меняем δ_1 в интегралах выше.

Доказательство. Как и ранее, разобьем область G на две части: B_M^δ и $G\backslash B_M^\delta$ и будем считать, что $P = P(x,y,z)$. Зафиксируем точку $M(x_0,y_0,z_0) \in G$, а в качестве переменной точки будем рассматривать точку $M_1 = M_1(x_1,y_1,z_1) \in B_M^\delta$. Тогда

$$u(M_1) = \iiint\limits_{B_M^\delta} \frac{\rho(P)}{r_{M_1P}}\,dV_P + \iiint\limits_{G\backslash B_M^\delta} \frac{\rho(P)}{r_{M_1P}}\,dV_P =: u_1(M_1) + u_2(M_1).$$

Выше было доказано, что

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x_1}(M_1) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}(M_1) + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}(M_1) = \iiint\limits_{B_M^\delta} \rho(P)\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{r_{M_1P}}\right)dV_P + \\ + \iiint\limits_{G\backslash B_M^\delta} \rho(P)\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{r_{M_1P}}\right)dV_P.\end{aligned} \tag{5.23}$$

Ввиду $M_1 \in B_M^\delta$, второе слагаемое в правой части (5.23) является собственным интегралом и его частные производные любого порядка можно вычислять дифференцированием под знаком интеграла, и, в частности,

$$\left.\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial z_1^2}\right)\right|_{M_1} = 0.$$

Рассмотрим первое слагаемое в правой части (5.23). Так как

$$r_{M_1P} = \sqrt{(x_1-x)^2 + (y_1-y)^2 + (z_1-z)^2},$$
$$\text{то}\quad \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{r_{M_1P}}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r_{M_1P}}\right).$$

Отсюда,

$$\rho(P)\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{r_{M_1P}}\right) = -\rho(P)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r_{M_1P}}\right) = \frac{\partial\rho}{\partial x}(P)\frac{1}{r_{M_1P}} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho(P)}{r_{M_1P}}\right).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}(M_1) = \iiint\limits_{B_M^\delta} \rho(P)\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{r_{M_1P}}\right)dV_P = \iiint\limits_{B_M^\delta} \frac{\partial\rho}{\partial x}(P)\frac{1}{r_{M_1P}}\,dV_P - \\ - \iiint\limits_{B_M^\delta} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho(P)}{r_{M_1P}}\right)dV_P =: I_1(M_1) - I_2(M_1).\end{aligned}$$

Несобственный интеграл $I_1(M_1)$ такого же типа, как функция $u(M_1)$, только вместо $\rho(P)$ стоит $\frac{\partial\rho}{\partial x}(P)$. Следовательно, $I_1(M_1)$ имеет непрерывные частные производные первого порядка, которые можно вычислять дифференцированием под знаком интеграла и, ввиду сходимости несобственного интеграла, модули этих производных сколь угодно малы при достаточно малом $\delta > 0$.

Для несобственного интеграла $I_2(M_1)$ справедливы следующие равенства, второе из которых следует из формулы Остроградского–Гаусса,

$$I_2(M_1) = \lim_{\varepsilon\to 0} \iiint\limits_{B_M^\delta\setminus B_{M_1}^\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho(P)}{r_{M_1P}}\right) dV_P = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\iint\limits_{S_M^\delta} \frac{\rho(P)}{r_{M_1P}} \cos\left(\widehat{\mathbf{n}(P),\mathbf{i}}\right)\, d\sigma_P + \right.$$

$$\left. + \iint\limits_{S_{M_1}^\varepsilon} \frac{\rho(P)}{r_{M_1P}} \cos\left(\widehat{\mathbf{n}(P),\mathbf{i}}\right)\, d\sigma_P\right] = \iint\limits_{S_M^\delta} \frac{\rho(P)}{r_{M_1P}} \cos\left(\widehat{\mathbf{n}(P),\mathbf{i}}\right)\, d\sigma_P,$$

т.к.

$$\left|\iint\limits_{S_{M_1}^\varepsilon} \frac{\rho(P)}{r_{M_1P}} \cos\left(\widehat{\mathbf{n}(P),\mathbf{i}}\right)\, d\sigma_P\right| \leqslant \frac{C}{\varepsilon}\iint\limits_{S_{M_1}^\varepsilon} d\sigma_P = 4\pi C\varepsilon \to 0,\ \varepsilon\to 0,$$

где $\mathbf{n}(P)$ — поле нормалей на поверхности $S_M^\delta \cup S_{M_1}^\varepsilon$, внешних по отношению к области $B_M^\delta\setminus B_{M_1}^\varepsilon$. Таким образом, интеграл $I_2(M_1)$ выражается через поверхностный собственный интеграл, если точка M_1 лежит строго внутри сферы S_M^δ, поэтому частные производные функции $I_2(M_1)$ можно вычислять под знаком интеграла.

Тем самым, мы доказали существование непрерывных частных производных

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(M_1), \frac{\partial^2 u}{\partial y_1 x_1}(M_1), \frac{\partial^2 u}{\partial z_1 x_1}(M_1)$$

ньютоновского потенциала $u(M_1) = u_1(M_1) + u_2(M_1)$. Совершенно аналогично доказывается существование и непрерывность и остальных частных производных второго порядка у ньютоновского потенциала.

Остается доказать, что ньютоновский потенциал $u(M_1) = u_1(M_1) + u_2(M_1)$ удовлетворяет уравнению Пуассона. Поскольку уже доказано, что функция $u_2(M_1)$ – гармоническая, достаточно доказать, что ему удовлетворяет функция $u_1(M_1)$. Имеем:

$$\frac{\partial I_2}{\partial x_1}(M_1) = \iint\limits_{S_M^\delta} \rho(P)\cos\left(\widehat{\mathbf{n}(P),\mathbf{i}}\right)\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{r_{M_1P}}\right)\,d\sigma_P = \\ = \iint\limits_{S_M^\delta} \rho(P)\cos\left(\widehat{\mathbf{n}(P),\mathbf{i}}\right)\frac{x-x_1}{r_{M_1P}^3}\,d\sigma_P$$

откуда

$$\left.\frac{\partial I_2}{\partial x_1}(M_1)\right|_{M_1=M} = \iint\limits_{S_M^\delta} \rho(P)\cos\left(\widehat{\mathbf{n}(P),\mathbf{i}}\right)\frac{x-x_0}{r_{MP}^3}\,d\sigma_P = \\ = \iint\limits_{S_M^\delta} \frac{\rho(P)}{r_{MP}^2}\cos^2\left(\widehat{\mathbf{n}(P),\mathbf{i}}\right)\,d\sigma_P = \frac{1}{\delta^2}\iint\limits_{S_M^\delta} \rho(P)\cos^2\left(\widehat{\mathbf{n}(P),\mathbf{i}}\right)\,d\sigma_P.$$

Следовательно,

$$\Delta u_1(M) = -\frac{1}{\delta^2}\iint\limits_{S_M^\delta} \rho(P)\left(\cos^2\left(\widehat{\mathbf{n}(P),\mathbf{i}}\right) + \cos^2\left(\widehat{\mathbf{n}(P),\mathbf{j}}\right) + \right. \\ \left. + \cos^2\left(\widehat{\mathbf{n}(P),\mathbf{k}}\right)\right)\,d\sigma_P + J(\delta) = -\frac{1}{\delta^2}\iint\limits_{S_M^\delta} \rho(P)\,d\sigma_P + J(\delta), \tag{5.24}$$

где функция $J(\delta)$ содержит члены, аналогичные частным производным первого порядка от $I_1(M_1)$, и $J(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$. Переходя теперь в (5.24) к пределу при $\delta \to 0$, окончательно получаем по формуле среднего значения:

$$\Delta u(M) = \Delta u_1(M) = -4\pi\rho(M).$$

$\square$

Глава 6

Ряды и интегралы Фурье

Периодические процессы играют огромную роль в нашей жизни. Достаточно упомянуть три самых важных периодических процесса космического происхождения: вращение Земли по своей орбите (период год), вращение Земли вокруг своей оси (период сутки), вращение Луны и Земли вокруг общего центра масс (период месяц). Конечно, эти процессы периодичны лишь приближенно, но многие периоды жизнедеятельности живых существ на Земле происходят из этих трех периодических процессов.

Математическая идея рядов Фурье[1] состоит в том, чтобы разложить периодическую функцию на такие периодические слагаемые, например тригонометрические функции, с которыми оперировать проще, чем с исходной функцией.

6.1 Тригонометрические ряды Фурье

Определение 6.1. *Функция $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ называется периодической, если существует число $T > 0$ такое, что $f(x+T) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Наименьшее число T, для которого верно это тождество, называется периодом функции f.*

Простейшие непостоянные периодические функции — это $\sin x$ и $\cos x$. Их период равен 2π. Из них можно составить последовательность периодических функций

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \ldots, \cos nx,\ \sin nx, \ldots$$

[1]Фурье Жан Батист Жозеф (1768–1830) — французский математик. Его не следует путать с Франсуа Мари Шарлем Фурье (1772–1837) — французским социалистом-утопистом.

Эта последовательность называется *тригонометрической системой*, а функции $\cos nx$, $\sin nx$ — *n-ыми гармониками*. В данной главе мы изучим вопрос представимости данной периодической функции в виде (бесконечной) линейной комбинации функций тригонометрической системы с постоянными коэффициентами.

Будут установлены достаточные условия, при выполнении которых функцию $f(x)$ можно представить в виде ряда

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right), \ a_n, b_n \in \mathbb{R}. \tag{6.1}$$

Равенство (6.1) называется разложением функции $f(x)$ в *тригонометрический ряд Фурье*, а коэффициенты a_n, b_n — коэффициентами Фурье функции $f(x)$. Выведем формулы, по которым вычисляются коэффициенты Фурье данной функции. С этой целью предварительно отметим важное свойство тригонометрической системы — ее ортогональность в евклидовом пространстве $Q[-\pi, \pi]$ (вместо сегмента $[-\pi, \pi]$ можно взять любой другой сегмент длины 2π). Действительно:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \ dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2nx) dx = \pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \ dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2nx) dx = \pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx \ dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx \ dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos((n+m)x) + \cos((n-m)x) dx = 0,$$

$$n \neq m,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos((n-m)x) - \cos((n+m)x) dx = 0,$$

$$n \neq m,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin((n+m)x) + \sin((m-n)x) dx = 0,$$

$$\forall n, m.$$

Предположим, что ряд Фурье в правой части (6.1) можно интегрировать почленно. Интегрируя от $-\pi$ до π, получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx\right) = a_0\pi.$$

Отсюда,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx.$$

Умножим теперь равенство (6.1) на $\cos kx$ и снова проинтегрируем от $-\pi$ до π. Учитывая ортогональность тригонометрической системы, получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx = a_k\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kxdx = \frac{a_k}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2kx)dx = a_k\pi,$$

откуда

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx. \tag{6.2}$$

Аналогично, умножая равенство (6.1) на $\sin kx$ и интегрируя от $-\pi$ до π, находим

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kxdx. \tag{6.3}$$

Теперь, после того как мы нашли формулы для коэффициентов Фурье, мы можем для данной функции $f(x)$ вычислить эти коэффициенты, составить ряд Фурье и исследовать вопрос о сходимости этого ряда Фурье к функции $f(x)$. Заметим, что если ряд Фурье сходится к функции $f(x)$ на сегменте $[-\pi,\pi]$, то поскольку коэффициенты Фурье учитывают значения функции только на сегменте $[-\pi,\pi]$, вне этого сегмента ряд Фурье будет сходится к периодическому продолжению функции $f(x)$ с сегмента $[-\pi,\pi]$.

Пример 6.1. *$f(x) = x$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.*

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xdx = 0;\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nxdx = 0;\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nxdx =$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\int\limits_0^\pi x d(\cos nx) = -\frac{2}{n\pi}\left(x\cos nx|_0^\pi - \int\limits_0^\pi \cos nx dx\right) =$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\pi\cos\pi n = -\frac{2}{n}(-1)^n = 2\frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Таким образом, ряд Фурье для функции x есть

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx. \tag{6.4}$$

В следующем параграфе будет доказано, что этот ряд сходится к функции x при $x \in (-\pi, \pi)$.

Пример 6.2. $f(x) = |x|$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|x|dx = \pi;\ a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|x|\cos nx dx = \frac{2}{\pi n}\int\limits_0^\pi x d\sin nx =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\left(x\sin nx|_0^\pi - \int\limits_0^\pi \sin nx dx\right) = \frac{2}{n^2\pi}\cos nx\Big|_0^\pi = \frac{2}{\pi n^2}\left[(-1)^n - 1\right] =$$

$$= \begin{cases} -\frac{4}{n^2\pi},\ n = 2k-1,\ k = 1, 2, \ldots \\ 0,\ n = 2k, \end{cases} \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|x|\sin nx dx = 0.$$

Таким образом, ряд Фурье для функции $|x|$ есть

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}. \tag{6.5}$$

В следующем параграфе будет доказано, что этот ряд сходится к функции $|x|$ при $x \in [-\pi, \pi]$.

При $x = 0$ получим сумму обратных квадратов нечетных чисел[2]

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

[2] В середине 17 века была предложена задача, впоследствии названная «базельской» в честь Якоба Бернулли – профессора математики из университета в швейцарском г. Базель. Ее безуспешно пытались решить Лейбниц, Стирлинг, де Муавр, братья Якоб и Иоганн Бернулли. В 1735 г. ее решил Л. Эйлер – ученик И. Бернулли. Из значения суммы $S_1 := \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ решение базельской задачи получается легко:

$$S := \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2} = S_1 + \frac{1}{4}S,$$

откуда $S = \frac{4}{3}S_1 = \pi^2/6$. Оригинальное решение Л. Эйлер не могло опираться на ряды Фурье, При $0 \leqslant x < \pi$ функция $f(x) = x$ представима как рядом (6.4), так и рядом (6.5).

6.2 Поточечная сходимость тригонометрического ряда Фурье

Нам потребуется одно простое свойство периодических функций.

Лемма 6.1. *Если интегрируемая на любом конечном сегменте вещественной оси функция $f(x)$ периодична с периодом T, то $\forall a \in \mathbb{R}$ справедливо равенство*

$$\int\limits_a^{a+T} f(x)dx = \int\limits_0^T f(x)dx.$$

Доказательство.

$$\int\limits_a^{a+T} f(x)dx = \int\limits_a^0 f(x)dx + \int\limits_0^T f(x)dx + \int\limits_T^{a+T} f(x)dx.$$

Но

$$\int\limits_T^{a+T} f(x)dx = \int\limits_0^a f(T+t)dt = -\int\limits_a^0 f(t)dt.$$

Поэтому $\int\limits_a^{a+T} f(x)dx = \int\limits_0^T f(x)dx$, что и нужно. □

Определение 6.2. *Кусочно-непрерывная на сегменте $[a,b]$ функция $f(x)$ называется кусочно-гладкой на этом сегменте, если ее производная $f'(x)$ существует и непрерывна всюду на $[a,b]$, за исключением, может быть, конечного числа точек, в которых существуют конечные правый и левый пределы функции $f'(x)$.*

возникшие только в начале 19 века. Его рассуждения, хотя и далекие от современных стандартов строгости, фактически использовали разложение

$$\sin x = x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).$$

Сравнивая коэффициенты при степени x^3 справа и слева, получим $S = \pi^2/6$.

Правый и левый пределы функции $f'(x)$ в точке x_0 будем обозначать $f'(x_0+0)$ и $f'(x_0-0)$. Следует отличать эти пределы от левой и правой производной в точке x_0:

$$f'_r(x_0) = \lim_{x\to x_0+0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},\ f'_l(x_0) = \lim_{x\to x_0-0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Пример 6.3. *Рассмотрим функцию*

$$f(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x},\ x\neq 0, \\ 0,\ x=0 \end{cases}.$$

Для нее $f'(0)=0$, *и поэтому* $f'_r(0)=f'_l(0)=0$. *Но ее производная* $f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$ *не имеет предела ни справа, ни слева в точке* 0.

Пример 6.4. *Функция* $f(x)=\operatorname{sgn} x$ *является кусочно-непрерывной,* $f'(0)$ *не существует, но* $f'(0+0)=f'(0-0)=0$, *поэтому* $f(x)$ *— кусочно-гладкая функция.*

Пример 6.5. *Функция*

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{x},\ x\geqslant 0 \\ 0,\ x<0 \end{cases}$$

является непрерывной, $g'(0-0)=0$, $g'(0+0)=+\infty$, *поэтому функция* $g(x)$ *не является кусочно-гладкой.*

Лемма 6.2. *Если* $f'(x)$ *существует в правой полуокрестности точки* x_0 *и существует конечная величина* $f'(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0} f'(x)$, *то существует*

$$\lim_{\xi\to+0} \frac{f(x_0+\xi)-f(x_0+0)}{\xi} = f'(x_0+0).$$

Доказательство. Доказательство сразу следует из формулы конечных приращений Лагранжа. □

Лемма 6.3. *Если* $f(x)$ *интегрируема (по Риману) на* $[a,b]$, *то*

$$J_1(\lambda) = \int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx \to 0,\ J_2(\lambda) = \int_a^b f(x)\sin\lambda x\,dx \to 0 \text{ при } \lambda\to\infty.$$

Доказательство. Докажем утверждение леммы для $J_1(\lambda)$; для $J_2(\lambda)$ доказательство совершенно аналогично. Напомним, что *колебанием* $\omega_f[\alpha,\beta]$ функции $f(x)$ на отрезке $[\alpha,\beta]$ называется величина $\sup\limits_{x\in[\alpha,\beta]} f(x) - \inf\limits_{x\in[\alpha,\beta]} f(x)$. Критерий интегрируемости функции $f(x)$ на сегменте $[a,b]$: для $\forall\varepsilon > 0$ $\exists\delta > 0$ такое, что для $\forall$ разбиения $x_0 := a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n := b$ отрезка $[a,b]$ такого, что $(x_i - x_{i-1}) < \delta$, $i = 1,\ldots,n$, справедливо неравенство:

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon, \text{ где } \omega_i := \omega_f[x_{i-1}, x_i].$$

Перейдем теперь непосредственно к доказательству леммы. Зафиксируем $\forall\varepsilon > 0$. В силу интегрируемости функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, $\exists\delta > 0$ такое, что $\forall$ разбиения $x_0 := a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n := b$ отрезка $[a,b]$ такого, что $(x_i - x_{i-1}) < \delta$, $i = 1,\ldots,n$, справедливо неравенство:

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon/2.$$

Зафиксируем некоторое такое разбиение и получим тогда:

$$\int\limits_a^b f(x)\sin\lambda x\,dx = \sum_{i=1}^{n}\left(\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}(f(x) - m_i)\sin\lambda x\,dx + m_i\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\sin\lambda x\,dx\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}(f(x) - m_i)\sin\lambda x\,dx + \frac{m_i}{\lambda}(\cos(\lambda x_{i-1}) - \cos(\lambda x_i))\right),$$

где $m_i := \inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$. Отсюда,

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\sin\lambda x\,dx\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\left(\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}|f(x) - m_i|\,dx + 2\frac{|m_i|}{|\lambda|}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n}\omega_i(x_i - x_{i-1}) + \frac{2}{|\lambda|}\sum_{i=1}^{n}|m_i| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

если $|\lambda| > 4\sum_{i=1}^{n}|m_i|/\varepsilon$. □

Замечание 6.1. *Кусочно-непрерывные функции на отрезке $[a,b]$ являются интегрируемыми (по Риману) на этом отрезке, поэтому для них* *лемма 6.3 выполняется. Кроме того, лемма выполняется и для неограниченной функции, имеющей на отрезке $[a, b]$ конечное число особых точек, интегрируемой по Риману на $\forall$ отрезке $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ не содержащем особых точек, и абсолютно интегрируемой на отрезке $[a, b]$. Доказательство меняется очевидным образом выделением окрестностей особых точек, интеграл по каждой из которых от $|f(x)|$ достаточно мал.*

Теорема 6.1 (о поточечной сходимости тригонометрического ряда Фурье)**.** *Пусть $f(x)$ — кусочно-гладкая функция на сегменте $[-\pi, \pi]$. Тогда ряд Фурье*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

сходится в каждой точке $x \in [-\pi, \pi]$ и для его суммы $S(x)$ справедливы равенства

1. $S(x) = \frac{1}{2}\left(f(x-0) + f(x+0)\right)$, $\forall x \in (-\pi, \pi)$, *в частности,* $S(x) = f(x)$ *в точках непрерывности* $f(x)$*;*
2. $S(-\pi) = S(\pi) = \frac{1}{2}\left(f(-\pi+0) + f(\pi-0)\right)$.

Доказательство. Продолжим периодически функцию $f(x)$ на всю числовую прямую с периодом 2π. Рассмотрим частичную сумму $S_n(x)$ ряда Фурье в произвольной точке $x \in [-\pi, \pi]$. С учетом формул (6.2), (6.3) для коэффициентов ряда Фурье имеем:

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx\right] dt =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(t-x)\right] f(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{D}_n(t-x) f(t)dt =$$

$$= \int_{-\pi-x}^{\pi-x} \mathcal{D}_n(\xi) f(x+\xi) d\xi \overset{\text{лемма 6.1}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{D}_n(\xi) f(x+\xi) d\xi =$$

$$= \int_{-\pi}^{0} \mathcal{D}_n(\xi) f(x+\xi) d\xi + \int_{0}^{\pi} \mathcal{D}_n(\xi) f(x+\xi) d\xi =: S_n^-(x) + S_n^+(x),$$

где

$$\mathcal{D}_n(\xi) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k\xi\right) \quad \text{— ядро Дирихле порядка } n.$$

Для доказательства первого утверждения теоремы нам достаточно доказать, что $S_n^+(x) \to \frac{1}{2}f(x+0)$, $S_n^-(x) \to \frac{1}{2}f(x-0)$ при $n \to \infty$.

Поскольку

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathcal{D}_n(\xi)d\xi = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k\xi\right)d\xi = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\pi = 1,$$

и т.к. $\mathcal{D}_n(\xi)$ — четная функция, то

$$\int\limits_{-\pi}^{0} \mathcal{D}_n(\xi)d\xi = \int\limits_{0}^{\pi} \mathcal{D}_n(\xi)d\xi = \frac{1}{2}.$$

Поэтому

$$S_n^+(x) - \frac{1}{2}f(x+0) = \int\limits_{0}^{\pi}\left[f(x+\xi) - f(x+0)\right]\mathcal{D}_n(\xi)d\xi,$$

$$S_n^-(x) - \frac{1}{2}f(x-0) = \int\limits_{-\pi}^{0}\left[f(x+\xi) - f(x-0)\right]\mathcal{D}_n(\xi)d\xi.$$

Преобразуем выражение для $\mathcal{D}_n(\xi)$. Для этого умножим[3] его на $\sin\frac{\xi}{2}$ и воспользуемся формулой:

$$\sin\frac{\xi}{2}\cos k\xi = \frac{1}{2}\left[\sin(\frac{\xi}{2} + k\xi) - \sin(k\xi - \frac{\xi}{2})\right].$$

[3] Другой путь:

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kx = \frac{1}{2} + \mathrm{Re}\sum_{k=1}^{n} e^{ikx} = \frac{1}{2} + \mathrm{Re}\left(e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}}\right) = \frac{1}{2} + \mathrm{Re}\left(e^{i\frac{n+1}{2}x}\frac{e^{i\frac{n}{2}x} - e^{-i\frac{n}{2}x}}{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} + \mathrm{Re}\left(e^{i\frac{n+1}{2}x}\frac{\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\right) = \frac{1}{2} + \cos\frac{n+1}{2}x\frac{\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{\sin\frac{x}{2} + 2\cos\frac{n+1}{2}x\sin\frac{n}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{\sin(\frac{n+1}{2}x - \frac{n}{2}x) + 2\cos\frac{n+1}{2}x\sin\frac{n}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)\cos\frac{n}{2}x + \cos\frac{n+1}{2}x\sin\frac{n}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Получим:

$$\mathcal{D}_n(\xi)\sin\frac{\xi}{2} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}\sin\frac{\xi}{2} + \frac{1}{2}\left(\sin\frac{3\xi}{2} - \sin\frac{\xi}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\sin\frac{5\xi}{2} - \sin\frac{3\xi}{2}\right) + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{1}{2}\left(\sin(n+\frac{1}{2})\xi - \sin(n-\frac{1}{2})\xi\right)\right] = \frac{1}{2\pi}\sin(n+\frac{1}{2})\xi.$$

Таким образом:

$$\mathcal{D}_n(\xi) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\xi}{\sin\frac{\xi}{2}}.$$

При $\xi \to 0$ это выражение имеет предел $\mathcal{D}_n(0) := \dfrac{1}{\pi}(n+\frac{1}{2})$.

Отсюда

$$S_n^+(x) - \frac{1}{2}f(x+0) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi [f(x+\xi) - f(x+0)]\,\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\xi}{2\sin\frac{\xi}{2}}d\xi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \left\{\frac{f(x+\xi)-f(x+0)}{\xi}\cdot\frac{\xi/2}{\sin\xi/2}\right\}\sin(n+\frac{1}{2})\xi\, d\xi =: J(x,n).$$

Функция, стоящая в фигурных скобках, является кусочно-гладкой при $0 < \xi \leqslant \pi$ и имеет предел, равный $f'(x+0)$ при $\xi \to +0$. Следовательно, эта функция кусочно-непрерывна на сегменте $[0,\pi]$. Отсюда по лемме 6.3 следует, что $J(x,n) \to 0$, $\forall x \in [-\pi,\pi]$ при $n \to \infty$.

В точности так же доказывается, что $S_n^-(x) \to \frac{1}{2}f(x-0)$ при $n \to \infty$.

Тем самым, первое утверждение теоремы доказано. В частности, если x — точка непрерывности функции $f(x)$, то $f(x+0) = f(x-0) = f(x)$ и $S(x) := \lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x)$.

С учетом периодичности функций $f(x)$ и $S(x)$ из первого утверждения теоремы мы получаем:

$$S(-\pi) = S(\pi) = \frac{1}{2}\left(f(\pi+0) + f(\pi-0)\right) = \frac{1}{2}\left(f(-\pi+0) + f(\pi-0)\right),$$

что доказывает утверждение 2 и всю теорему. □

Замечание 6.2. *Достаточное условие сходимости ряда Фурье в точке может быть ослаблено. С помощью леммы 6.3 и замечания 6.1 нетрудно доказать, что, если функция $f(x)$ интегрируема (по Риману) на отрезке $[-\pi,\pi]$ и при некотором $\delta > 0$ сходятся интегралы*

$$\int\limits_{-\delta}^0 \left|\frac{f(x+t)-f(x-0)}{t}\right| dt \quad \textit{и} \quad \int\limits_0^\delta \left|\frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}\right| dt$$

(условие Дини[4]*), то ряд Фурье функции f при данном x сходится к $\frac{1}{2}(f(x-0)+f(x+0))$. Однако, одной непрерывности функции f на сегменте $[-\pi,\pi]$ не достаточно для поточечной сходимости ее ряда Фурье и существуют непрерывные на сегменте $[-\pi,\pi]$ функции, ряд Фурье которых расходится на всюду плотном подмножестве сегмента $[-\pi,\pi]$.*[5]

Для рядов Фурье имеет место *принцип локализации*, который утверждает, что сходимость ряда Фурье интегрируемой на отрезке $[-\pi,\pi]$ функции $f(x)$ в точке $x_0 \in [-\pi,\pi]$ зависит исключительно от поведения функции $f(x)$ в сколь угодно малой окрестности точки x_0, несмотря на то что коэффициенты ряда Фурье выражаются через интеграл по всему сегменту $[-\pi,\pi]$. Действительно, из доказательства теоремы 6.1 следует, что $\forall\delta$: $0<\delta<\pi$ имеем:

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\xi}{\sin\frac{\xi}{2}} f(x+\xi)d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi} \frac{f(x+\xi)+f(x-\xi)}{\sin\frac{\xi}{2}} \sin\left[(n+\frac{1}{2})\xi\right]\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\delta} \frac{f(x+\xi)+f(x-\xi)}{\sin\frac{\xi}{2}} \sin\left[(n+\frac{1}{2})\xi\right]\, d\xi +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\delta}^{\pi} \frac{f(x+\xi)+f(x-\xi)}{\sin\frac{\xi}{2}} \sin\left[(n+\frac{1}{2})\xi\right]\, d\xi.$$

Теперь достаточно заметить, что в силу леммы 6.3 последнее слагаемое при $n\to\infty$ стремится к нулю.[6]

В условиях теоремы 6.1 тригонометрический ряд Фурье сходится к периодическому продолжению на $\mathbb{R}$ функции $f(x)$, определенной первоначально на $[-\pi,\pi]$.

---

[4]Улисс Дини (1845-1918) – итальянский математик.

[5]Ряд крупных математиков 19 века (Дирихле, Риман, Вейерштрасс и Дедекинд) полагали, что ряд Фурье непрерывной функции обязательно сходится к ней во всех точках. Однако, немецкий математик Paul du Bois-Reymond в 1876 г. показал, что существуют непрерывные функции, ряд Фурье которых расходится в одной точке. Неконструктивное доказательство существования таких функций имеется и в книге А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин, Элементы теории функций и функционального анализа, М.: Наука, 1989, с. 473.

[6]Заметим также, что из теоремы Фейера и принципа локализации следует, что если ряд Фурье непрерывной на каком-либо интервале функции сходится, то именно к данной функции.

Если функция $f(x)$ имеет точки разрыва на сегменте $[-\pi, \pi]$, а также, если $f(x)$ непрерывна на $[-\pi, \pi]$, но $f(-\pi) \neq f(\pi)$, то ряд Фурье функции $f(x)$ сходится на $[-\pi, \pi]$ неравномерно (в силу непрерывности равномерного предела последовательности непрерывных функций).

Если $f(x)$ — нечетная функция на $[-\pi, \pi]$, то ее разложение в ряд Фурье содержит только синусы, а если четная, то только косинусы. В частности, если $f(x)$ задана на $[0, \pi]$, то ее можно продолжить на $[-\pi, 0]$ как четным, так и нечетным образом, и представить на сегменте $[0, \pi]$ как в виде ряда по косинусам, так и в виде ряда по синусам. Вспомним примеры из предыдущего параграфа:

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx,\ 0 \leqslant x < \pi,$$

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2},\ 0 \leqslant x \leqslant \pi.$$

Поскольку функция x после периодического продолжения с сегмента $[-\pi, \pi]$ на $\mathbb{R}$ имеет разрывы в точках πk, $k \in \mathbb{Z}$, то первый из этих рядов сходится неравномерно. В то же время, по признаку Вейерштрасса, второй ряд сходится равномерно на $\mathbb{R}$.

Вся изложенная теория переносится на случай равенства периода функции $f(x)$ величине 2ℓ заменой $x \to \dfrac{\pi}{\ell}x$. Ортогональную тригонометрическую систему на сегменте $[-\ell, \ell]$ образуют функции:

$$1,\ \cos\frac{\pi n x}{\ell},\ \sin\frac{\pi n x}{\ell},\ n \in \mathbb{N}.$$

Ряд Фурье функции $f(x)$ по этой системе функций имеет вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{\pi n x}{\ell} + b_n \sin\frac{\pi n x}{\ell}\right),$$

где

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_{\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{\pi n x}{\ell}\,dx,\ n \in \{0\} \cup \mathbb{N},\ b_n = \frac{1}{\ell}\int_{\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{\pi n x}{\ell}\,dx,\ n \in \mathbb{N}.$$

6.3 Комплексная форма ряда Фурье

Вместо системы периодических функций

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \ldots, \cos nx,\ \sin nx, \ldots$$

можно рассмотреть систему комплексных экспонент $\exp inx$, $n \in \mathbb{Z}$, удобную тем, что в этой системе нет разделения функций на два типа и все формулы единообразны. Поскольку связь между этими системами

$$e^{inx} = \cos nx + i \sin nx, \ \cos nx = \frac{1}{2}\left(e^{inx} + e^{-inx}\right), \ \sin nx = \frac{1}{2i}\left(e^{inx} - e^{-inx}\right)$$

затрагивает только n-ые гармоники, то все утверждения, касающиеся сходимости рядов Фурье по косинусам и синусам, справедливы и для рядов по экспонентам.

Для нахождения коэффициентов Фурье по системе экспонент умножим ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

на e^{-imx} и проинтегрируем от $-\pi$ до π. Ввиду очевидной формулы

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-imx}\, dx = \begin{cases} 0, \ n \neq m, \\ 2\pi, \ n = m \end{cases}$$

получим

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx. \tag{6.6}$$

Этот способ нахождения формул для коэффициентов Фурье предполагает возможность переставить суммирование и интегрирование. Однако к тем же формулам (6.6) можно прийти несколько более долгим путем, используя формулы (6.2), (6.3) и связь между экспонентами e^{inx} и функциями $\cos nx$, $\sin nx$.

6.4 Интеграл Фурье

Рассмотрим ряд Фурье функции $f(x)$ на $[-l, l]$:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} \left(a_k \cos \frac{\pi}{l} kx + b_k \sin \frac{\pi}{l} kx \right). \tag{6.7}$$

Частоты $\lambda_k = \frac{\pi}{l} k$ гармоник этого ряда образуют бесконечно большую последовательность, причем разность $\frac{\pi}{l}$ двух соседних частот тем меньше, чем больше l, т.е. с увеличением l соседние частоты становятся все ближе друг к другу. В пределе $l \to \infty$ получается разложение функции $f(x)$ по гармоникам с непрерывно изменяющейся частотой λ от 0 до ∞, а ряд Фурье переходит в так называемый *интеграл Фурье.*

Получим сначала с помощью нестрогих рассуждений выражение для интеграла Фурье. Подставляя выражение для коэффициентов Фурье в ряд (6.7), преобразуем его к виду

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\frac{\pi}{l}}_{\Delta\lambda_n}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\cos\underbrace{\frac{\pi n}{l}}_{\lambda_n}(t-x)\,dt = \\ &= \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int\limits_{-l}^{l} f(t)\cos\lambda_n(t-x)dt\right]\Delta\lambda_n.\end{aligned} \tag{6.8}$$

Будем считать, что функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на всей числовой прямой, т.е. несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx$ сходится. Перейдем к пределу при $l \to +\infty$. Тогда первое слагаемое в (6.8) стремится к нулю, а второе переходит в следующее выражение для интеграла Фурье

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)dt.$$

Получим теперь условия представимости функции $f(x)$ интегралом Фурье.

Теорема 6.2. *Пусть функция $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ является кусочно-гладкой на любом сегменте числовой прямой и абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$. Тогда справедливо равенство*

$$\frac{1}{2}\left[f(x+0)+f(x-0)\right] = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)dt. \tag{6.9}$$

Доказательство. Согласно определению несобственного интеграла, нам нужно доказать равенство

$$\begin{aligned}\lim_{\Lambda\to+\infty} S_\Lambda := \lim_{\Lambda\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\Lambda}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[f(t)\cos\lambda(t-x)dt\right]d\lambda = \\ = \frac{1}{2}\left[f(x+0)+f(x-0)\right].\end{aligned} \tag{6.10}$$

По признаку Вейерштрасса в силу абсолютной интегрируемости функции $f(x)$ на $\mathbb{R}$ внутренний интеграл в левой части равенства (6.10) сходится равномерно по $\lambda \geqslant 0$. Поэтому в силу результата главы 5 можно поменять порядок интегрирования в (6.10) и получить

$$S_\Lambda(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left[\int\limits_0^\Lambda \cos\lambda(t-x)d\lambda\right]dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left[\frac{\sin\Lambda(t-x)}{t-x}\right]dt \underset{t-x=:\xi}{=} \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x+\xi)\frac{\sin\Lambda\xi}{\xi}\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{0} f(x+\xi)\frac{\sin\Lambda\xi}{\xi}\,d\xi + \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} f(x+\xi)\frac{\sin\Lambda\xi}{\xi}\,d\xi := S_\Lambda^-(x) + S_\Lambda^+(x).$$

В силу равенства

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\Lambda\xi}{\xi}\,d\xi := \begin{cases} \frac{\pi}{2},\ \Lambda > 0, \\ 0,\ \Lambda = 0, \\ -\frac{\pi}{2},\ \Lambda < 0 \end{cases}$$

получаем

$$S_\Lambda^+(x) - \frac{1}{2}f(x+0) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{f(x+\xi)-f(x+0)}{\xi}\sin\Lambda\xi\,d\xi =: \mathcal{J}^+(x,\Lambda),$$

$$S_\Lambda^-(x) - \frac{1}{2}f(x-0) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{f(x+\xi)-f(x-0)}{\xi}\sin\Lambda\xi\,d\xi =: \mathcal{J}^-(x,\Lambda).$$

Для доказательства теоремы нам достаточно доказать, что $\mathcal{J}^+(x,\Lambda)$, $\mathcal{J}^-(x,\Lambda) \to 0$, $\Lambda \to \infty$.

Хотя функция $\frac{f(x+\xi)-f(x+0)}{\xi}$ является кусочно-непрерывной при $\xi \geqslant 0$, мы не можем просто применить лемму 6.3, поскольку $\mathcal{J}^+(x,\Lambda)$ и $\mathcal{J}^-(x,\Lambda)$ являются несобственными интегралами первого рода.

Чтобы обойти эту трудность, представим $\mathcal{J}^+(x,\Lambda)$ в виде

$$\mathcal{J}^+(x,\Lambda) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^A \frac{f(x+\xi)-f(x+0)}{\xi}\sin\Lambda\xi\,d\xi +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{A}^{+\infty} f(x+\xi)\frac{\sin\Lambda\xi}{\xi}\,d\xi - \frac{f(x+0)}{\pi}\int\limits_{A}^{+\infty}\frac{\sin\Lambda\xi}{\xi}\,d\xi =: \mathcal{J}_1^+ + \mathcal{J}_2^+ + \mathcal{J}_3^+,$$

где $A > 0$.

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и возмем $A \geqslant 1$ столь большое, чтобы выполнялось неравенство

$$\left|\mathcal{J}_2^+\right| \leqslant \frac{1}{\pi}\int\limits_{A}^{+\infty}|f(x+\xi)|\cdot\left|\frac{\sin\Lambda\xi}{\xi}\right|\,d\xi \leqslant \frac{1}{\pi}\int\limits_{A}^{+\infty}|f(x+\xi)|\,d\xi < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Это возможно, поскольку интеграл $\int\limits_0^{+\infty}|f(x+\xi)|\,d\xi$ сходится и $\left|\frac{\sin\Lambda\xi}{\xi}\right| \leqslant 1$ при $\xi \geqslant A \geqslant 1$. Зафиксируем это значение A.

В силу леммы 6.3, $\mathcal{J}_1^+ \to 0$ при $\Lambda \to +\infty$, и поэтому $\exists\,\Lambda_1$ такое, что $\left|\mathcal{J}_1^+\right| < \frac{\varepsilon}{3}$ при $\Lambda > \Lambda_1$.

Наконец,

$$\int\limits_{A}^{+\infty}\frac{\sin\Lambda\xi}{\xi}\,d\xi \underset{\Lambda\xi=t}{=} \int\limits_{\Lambda A}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt$$

и т.к. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt$ сходится, то $\exists\,\Lambda_2$ такое, что $\left|\mathcal{J}_3^+\right| < \frac{\varepsilon}{3}$ при $\Lambda > \Lambda_2$.

Следовательно, при $\Lambda > \max(\Lambda_1, \Lambda_2)$ справедливо:

$$|\mathcal{J}^+(x,\Lambda)| \leqslant |\mathcal{J}_1^+| + |\mathcal{J}_2^+| + |\mathcal{J}_3^+| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

а это и означает, что $\mathcal{J}^+(x,\Lambda) \to 0$ при $\Lambda \to +\infty$.

Аналогично доказывается, что $\mathcal{J}^-(x,\Lambda) \to 0$ при $\Lambda \to +\infty$. □

Замечание 6.3. *Условия, вывод и доказательство этой теоремы похожи на условия, вывод и доказательство теоремы о поточечной сходимости ряда Фурье.*

6.5 Преобразование Фурье

Пусть выполнены условия теоремы 6.2. Поскольку функция

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(x-t)dt$$

относительно λ является четной, а функция

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda(x-t)dt$$

— нечетной, то по формуле Эйлера получаем

$$\text{v. p.}\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\exp(i\lambda(x-t))dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\lambda(x-t))dt +$$

$$+\,\text{v. p.}\,\frac{i}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(\lambda(x-t))dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\lambda(x-t))dt + 0 = \frac{1}{2}\left[f(x+0)+f(x-0)\right].$$

Для непрерывной функции $f(x)$ эту формулу можно записать в виде двух очень похожих формул:

$$\mathcal{F}:\ f(x)\to\mathcal{F}[f](\lambda)\equiv\hat{f}(\lambda):=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt$$

— прямое преобразование Фурье и

$$\mathcal{F}^{-1}:\ \hat{f}(\lambda)\to\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](x)\equiv f(x):=\text{v. p.}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda$$

— обратное преобразование Фурье.

Функция $\hat{f}(\lambda)$ называется *Фурье-образом функции* $f(x)$, а функция $f(x)$ — *оригиналом* функции $\hat{f}(\lambda)$.

Если функция $f(x)$, заданная при $x \geqslant 0$, кусочно-непрерывна и абсолютно интегрируема по положительной полуоси, то продолжая ее четным или нечетным образом на всю числовую ось, получаем прямое и обратное *косинус-преобразования Фурье*:

$$f(x)\to\hat{f}_c(\lambda):=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{\infty} f(t)\cos\lambda t\,dt,$$

$$\hat{f}_c(\lambda) \to \frac{1}{2}(f(x-0+f(x+0)) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \hat{f}_c(\lambda)\cos\lambda x\, d\lambda,\ x \geqslant 0$$

и прямое и обратное *синус-преобразования Фурье*:

$$f(x) \to \hat{f}_s(\lambda) := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{\infty} f(t)\sin\lambda t\, dt,$$

$$\hat{f}_s(\lambda) \to \frac{1}{2}(f(x-0+f(x+0)) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \hat{f}_s(\lambda)\sin\lambda x\, d\lambda,\ x > 0.$$

Тут уже учтено, что

$$\mathrm{v.\,p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda(x-t)dt = 0,$$

поэтому оставшиеся интегралы имеют обычный несобственный смысл.

6.6 Понятие общего ряда Фурье

Тригонометрический ряд Фурье является частным случаем разложения элемента бесконечномерного евклидова пространства по счетной системе элементов этого пространства.

Определение 6.3. *Последовательность* $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *ненулевых элементов евклидова пространства* $\mathcal{E}$ *называется ортогональной системой, если ее элементы попарно ортогональны. Ортогональная система называется ортонормированной, если нормы всех ее элементов равны* 1.

Пример 6.6. *В пространстве* $Q[-\pi,\pi]$ *нормированная тригонометрическая система*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \ldots$$

является ортонормированной.

Пример 6.7. *Еще один пример ортогональной системы в пространстве* $Q[-1,1]$ *дают полиномы Лежандра*[7]

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right],\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

[7]Лежандр Андриен Мари (1752–1833) — французский математик.

Система $\psi_n(x) := \sqrt{\frac{2n+1}{2}}P_n(x)$ *является ортонормированной системой в пространстве* $Q[-1,1]$.

Ортогональность этой системы устанавливается просто: если $n > m$, *то, интегрируя по частям, получаем*

$$\int\limits_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{1}{2^m m!}\int\limits_{-1}^{1}(x^2-1)^n \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}\left[(x^2-1)^m\right]\,dx = 0,$$

поскольку $\dfrac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}\left[(x^2-1)^m\right] = 0$.

Нормировочный множитель можно вычислить, пользуясь уже имеющимися у нас знаниями о Β *и* Γ *функциях. Действительно,*

$$\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\right)\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\,dx = (-1)^n\int\limits_{-1}^{1}(x^2-1)^n\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(x^2-1)^n\,dx =$$

$$= (-1)^n\int\limits_{-1}^{1}(x^2-1)^n(2n)!\,dx \overset{x=t-1}{=} (-1)^n(2n)!\int\limits_{0}^{2} t^n(t-2)^n\,dt \overset{t=2v}{=}$$

$$\overset{t=2v}{=} (2n)!\,2^{2n+1}\int\limits_{0}^{1} v^n(1-v)^n\,dv = (2n)!\,2^{2n+1}\mathrm{B}(n+1,n+1) =$$

$$= (2n)!\,2^{2n+1}\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+2)} = 2\frac{(2^n n!)^2}{2n+1}.$$

Пусть в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ задана ортогональная система $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ и пусть $f \in \mathcal{E}$. Попробуем подобрать коэффициенты c_k, $k = 1,\dots,n$ так, чтобы конечная линейная комбинация $\sum_{k=1}^n c_k\psi_k$ приближала бы элемент f наилучшим (в смысле нормы) в $\mathcal{E}$ образом:

$$\|\sum_{k=1}^n c_k\psi_k - f\|^2 = (\sum_{k=1}^n c_k\psi_k - f, \sum_{k=1}^n c_k\psi_k - f) = \sum_{k=1}^n c_k^2(\psi_k,\psi_k) -$$

$$-2\sum_{k=1}^n c_k(f,\psi_k) + (f,f) = \sum_{k=1}^n\left(c_k\|\psi_k\| - \frac{(f,\psi_k)}{\|\psi_k\|}\right)^2 - \sum_{k=1}^n\left(\frac{(f,\psi_k)}{\|\psi_k\|}\right)^2 + \|f\|^2.$$

Отсюда видно, что величина $\|\sum_{k=1}^n c_k\psi_k - f\|^2$ принимает минимальное значение тогда и только тогда, когда $c_k = f_k := \dfrac{(f,\psi_k)}{\|\psi_k\|^2}$. Величины f_k называются *коэффициентами Фурье* элемента f по системе $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Определение 6.4. *Рядом Фурье элемента* $f \in \mathcal{E}$ *по ортогональной системе* $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ *называется ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k \psi_k$. *Если система* $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ – *ортонормированная, то* $f_k = (f, \psi_k)$.

Ряд Фурье является обобщением разложения по ортогональному базису элементов конечномерного евклидова пространства.

Очевидно, что при нормировке элемента ψ_k меняются ψ_k и f_k, но не их произведения, т.е. ряд Фурье любого элемента $f \in \mathcal{E}$ при этом не меняется. Подытожим эти рассуждения в виде теоремы.

Теорема 6.3. *[Об экстремальном свойстве конечной суммы ряда Фурье] Пусть* $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — *ортогональная система элементов евклидова пространства* $\mathcal{E}$. *При фиксированном* n *из всех сумм вида* $\sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k$, $c_k \in \mathbb{R}$ *наименьшее отклонение от элемента* f *по норме пространства* $\mathcal{E}$ *имеет* n*-я частичная сумма* $\sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k$ *ряда Фурье элемента* f.

Определение 6.5. *Ряд Фурье элемента* f *сходится к этому элементу по норме пространства* $\mathcal{E}$, *если* $\lim\limits_{n\to\infty} \| \sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k - f \| = 0$.

Геометрический смысл теоремы 6.3. Множество всевозможных линейных комбинаций $\sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k$ образуют подпространство евклидова пространства $\mathcal{E}$. Мы ищем наименьшее отклонение элемента f от данного подпространства, т.е. расстояние между f и данным подпространством. Из всевозможных отрезков $f - \sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k$, соединяющих f с этим подпространством, наименьшую “длину” (норму) имеет тот, который перпендикулярен к подпространству, а для этого он должен быть перпендикулярен к каждому базисному элементу ψ_i, $i = 1, \ldots, n$, этого подпространства, откуда $(f - \sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k, \psi_i) = 0$, т.е. $c_i = (f, \psi_i) = f_i$, $i = 1, \ldots, n$. Таким образом, наименьшим по норме перпендикуляром является $f - \sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k$.

Следствие 6.1. *Из доказательства теоремы 6.3 получаем тождество Бесселя*[8]

$$\| \sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k - f \|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 \|\psi_k\|^2, \tag{6.11}$$

а ввиду неотрицательности левой части тождества Бесселя, и неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} f_k^2 \|\psi_k\|^2 \leqslant \|f\|^2.$$

[8]Бессель Фридрих Вильгельм (1784–1846) — немецкий астроном и математик.

Отсюда следует сходимость ряда $\sum_{k=1}^{n} f_k^2 \|\psi_k\|^2$ *и неравенство Бесселя*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \|\psi_k\|^2 \leqslant \|f\|^2. \tag{6.12}$$

Пример 6.8. *Рассмотрим в пространстве* $Q[-\pi,\pi]$ *ряд Фурье*

$$\frac{\overline{a}_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\overline{a}_k}{\sqrt{\pi}} \cos kx + \frac{\overline{b}_k}{\sqrt{\pi}} \sin kx \right) \tag{6.13}$$

функции $f \in Q[-\pi,\pi]$ *по ортонормированной системе функций*

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kx,\ k = 1, 2, \ldots \right\}.$$

Если ввести обозначения $\frac{\overline{a}_0}{\sqrt{2\pi}} = \frac{a_0}{2}$, $\frac{\overline{a}_k}{\sqrt{\pi}} = a_n$, $\frac{\overline{b}_k}{\sqrt{\pi}} = b_k$, *то этот ряд примет вид тригонометрического ряда Фурье.*

Ряд (6.13) поточечно может и не сходиться (если функция f *не является кусочно-гладкой), однако для его коэффициентов выполнено неравенство Бесселя*

$$\overline{a}_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\overline{a}_k^2 + \overline{b}_k^2 \right) \leqslant \|f\|^2 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx,$$

откуда, разделив на π, *получим неравенство*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^2 + b_k^2 \right) \leqslant \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx.$$

Из этого неравенства следует, что коэффициенты a_n, b_n *кусочно-непрерывной функции* f *стремятся к нулю при* $n \to \infty$. *Это же можно получить и из леммы 6.3, однако использованный метод проще и универсальнее.*

6.7 Замкнутые и полные ортогональные системы

Необходимо выяснить условия, при которых ряд Фурье элемента $f \in \mathcal{E}$ сходится к f по норме пространства $\mathcal{E}$.

Определение 6.6. *Ортогональная (в частности, ортонормированная) система элементов $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ в бесконечномерном евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ называется замкнутой, если любой элемент $f \in \mathcal{E}$ можно сколь угодно точно приблизить по норме этого пространства конечной линейной комбинацией элементов системы $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$, т.е. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \sum_{k=1}^{n} c_k\psi_k$ такая, что $\|f - \sum_{k=1}^{n} c_k\psi_k\| < \varepsilon$.*

Отметим, что в этом случае тем более выполнено неравенство $\|f - \sum_{k=1}^{n} f_k\psi_k\| < \varepsilon$, где f_k — коэффициенты Фурье элемента f по системе $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Теорема 6.4 (необходимое и достаточное условие замкнутости ортогональной системы)**.** *Следующие три условия эквивалентны:*

1. *ортогональная система $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – замкнута;*

2. *$\forall f \in \mathcal{E}$ выполняется равенство Парсеваля*[9]

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2\|\psi_k\|^2 = \|f\|^2, \tag{6.14}$$

где $f_k := \frac{(f_k,\psi)}{\|\psi_k\|^2}$ — коэффициенты Фурье элемента f по системе $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$;

3. *ряд Фурье $\forall f \in \mathcal{E}$ по ортогональной системе $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к f по норме.*

Доказательство. Докажем теорему по схеме $1 \to 2 \to 3 \to 1$.

$1 \to 2$. В силу замкнутости системы $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$, тождества Бесселя (6.11) и экстремального свойства частичной суммы ряда Фурье получаем, что $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$ такое, что левая часть тождества Бесселя $< \varepsilon$ при $n = N$. Следовательно, правая часть тождества Бесселя $< \varepsilon$ при $n \geqslant N$, а это значит, что

$$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2\|\psi_k\|^2 = 0,$$

т.е. справедливо равенство Парсеваля.

$2 \to 3$. Из справедливости равенства Парсеваля для $f \in \mathcal{E}$ и тождества Бесселя сразу следует сходимость ряда Фурье для элемента f к f.

[9]Парсеваль Марк Антуан (1755–1836) — французский математик. Ясно, что равенство Парсеваля есть не что иное, как теорема Пифагора в бесконечномерном пространстве.

$3 \to 1$. Из сходимость ряда Фурье для $\forall f \in \mathcal{E}$ к f сразу следует замкнутость системы $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$. $\square$

Замечание 6.4. *Замкнутую систему в бесконечномерном евклидовом пространстве можно назвать базисом этого пространства, поскольку ряд Фурье любого элемента $f \in \mathcal{E}$ сходится к f по норме $\mathcal{E}$.*

Докажем единственность такого разложения. Не ограничивая общности, можно считать систему $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ ортонормированной. Предположим, что ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k\psi_k \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty} f'_k\psi_k$$

сходятся к элементу $f \in \mathcal{E}$ по норме пространства $\mathcal{E}$. Тогда

$$\|\sum_{k=1}^{n} f_k\psi_k - \sum_{k=1}^{n} f'_k\psi_k\| \leqslant \|\sum_{k=1}^{n} f_k\psi_k - f\| + \|f - \sum_{k=1}^{n} f'_k\psi_k\| \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

откуда

$$\sum_{k=1}^{n}(f_k - f'_k)^2 = \|\sum_{k=1}^{n}(f_k - f'_k)\psi_k\|^2 \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

следовательно $f_k = f'_k$, что и означает единственность разложения элемента f.

Замечание 6.5. *Ниже мы докажем замкнутость тригонометрической системы в пространстве $Q[-\pi,\pi]$, откуда в силу теоремы 6.4 следует, что для любой функции $f \in Q[-\pi,\pi]$ ее ряд Фурье сходится к f по норме пространства $Q[-\pi,\pi]$, т.е. в среднеквадратичном, что, конечно, не означает поточечной сходимости.*

Остается открытым вопрос о существовании замкнутых систем в бесконечномерных евклидовых пространствах. Ниже мы определим *гильбертовы* пространства, для которых всегда существуют замкнутые системы.

Определение 6.7. *Ортогональная (в частности, ортонормированная) система элементов $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ в бесконечномерном евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ называется полной, если единственным элементом f, ортогональным ко всем элементам ψ_k данной системы, является нулевой элемент.*[10]

[10] В книге Будака, Фомина термины замкнутости и полноты системы элементов переставлены, а в книге Ильина, Позняка имеют тот же смысл, что и у нас.

Теорема 6.5. *Если $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — полная система элементов в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$, то два различных элемента f и g этого пространства не могут иметь одинаковые ряды Фурье по этой системе.*

Доказательство. Если элементы f и g пространства $\mathcal{E}$ имеют одинаковые ряды Фурье по системе $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$, то их разность $f-g$ имеет нулевые коэффициенты Фурье, а значит ортогональна всем элементам ψ_k. Отсюда, в силу полноты системы $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$, следует, что $f=g$. □

Теорема 6.6. *Любая замкнутая система элементов в пространстве $\mathcal{E}$ является полной.*

Доказательство. Пусть $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ – замкнутая система и пусть $f \in \mathcal{E}$ — элемент, ортогональный всем элементам данной системы. Поскольку $f_k = (f,\psi_k) = 0$, то в силу равенства Парсеваля, справедливого для замкнутых систем, имеем $\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \|\psi_k\|^2 = 0$, откуда по определению нормы $f=0$. □

Замечание 6.6. *Обратное утверждение, вообще говоря, неверно; в книге Ильина, Позняка (ч. II, гл. 11, §3, п. 2) с помощью интеграла Лебега построен пример полной системы в бесконечномерном не полном евклидовом пространстве, которая не является замкнутой.*

Определение 6.8. *Нормированное пространство L называется сепарабельным, если в нем существует счетное всюду плотное подмножество L_1, т.е. $\forall f \in L$ существует последовательность $f_i \in L_1$ такая, что $\|f_i - f\| \to 0$ при $i \to \infty$.*

Среди бесконечномерных евклидовых пространств особое место занимают *гильбертовы пространства.*

Определение 6.9. *Бесконечномерное полное сепарабельное евклидово пространство называется гильбертовым пространством.*

Пример 6.9. *Определим гильбертово пространство ℓ_2:*

$$\ell_2 := \left\{ \mathbf{x} = \{x_i\}_{i=1}^{\infty} | \, x_i \in \mathbb{R}, \, \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty \right\}.$$

Очевидно, что ℓ_2 — линейное пространство относительно поэлементной суммы последовательностей и умножения последовательностей на вещественные числа. Определим в ℓ_2 скалярное произведение

$$(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i \leqslant \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} (x_i^2 + y_i^2) < \infty.$$

Нам остается проверить полноту и сепарабельность пространства ℓ_2.

Пусть последовательность $\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \ell_2$ *фундаментальна. Это означает, что* $\forall\varepsilon > 0\ \exists N$ *такое, что*

$$\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n+p}\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty}(x_{n,i} - x_{n+p,i})^2 < \varepsilon \text{ при } \forall n \geqslant N,\ \forall p \in \mathbb{N}. \qquad (6.15)$$

Но тогда при любом фиксированном i *фундаментальна и последовательность* $\{x_{n,i}\}_{n=1}^{\infty}$, *откуда* $x_{n,i} \to y_i \in \mathbb{R}$, $n \to \infty$. *Покажем, теперь, что* $\mathbf{y} := \{y_i\}_{i=1}^{\infty} \in \ell_2$ *и* $\mathbf{x}_n \to \mathbf{y} := \{y_i\}_{i=1}^{\infty}$, $n \to \infty$. *Из неравенства (6.15) следует, что для любого фиксированного* m

$$\sum_{i=1}^{m}(x_{n,i} - x_{n+p,i})^2 < \varepsilon,\ \forall n \geqslant N(\varepsilon),\ \forall p \in \mathbb{N}.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $p \to \infty$, *получим*

$$\sum_{i=1}^{m}(x_{n,i} - y_i)^2 \leqslant \varepsilon,\ \forall n \geqslant N(\varepsilon).$$

Переходя теперь к пределу при $m \to \infty$, *получим*

$$\sum_{i=1}^{\infty}(x_{n,i} - y_i)^2 \leqslant \varepsilon,\ \forall n \geqslant N(\varepsilon). \qquad (6.16)$$

Теперь

$$\sum_{i=1}^{m} y_i^2 = \sum_{i=1}^{m}(y_i - x_{n,i} + x_{n,i})^2 \leqslant 2\sum_{i=1}^{m}((y_i - x_{n,i})^2 + x_{n,i}^2) \leqslant 2(\varepsilon + \|\mathbf{x}_n\|^2),$$

следовательно, ряд $\sum_{i=1}^{\infty} y_i^2$ *сходится, и поэтому* $\mathbf{y} \in \ell_2$. *С другой стороны, в силу произвольности* ε *из неравенства (6.16) следует* $\mathbf{x}_n \to \mathbf{y}$. *Таким образом, пространство* ℓ_2 *полно.*

В качестве счетного всюду плотного подмножества пространства ℓ_2 *можно взять множество*

$$\ell_{2,f,\mathbb{Q}} := \{\{x_1, x_2, \dots, x_s, 0, 0, 0, \dots\} \mid x_i \in \mathbb{Q},\ i = 1, \dots, s,\ s \in \mathbb{N}\}$$

финитных последовательностей рациональных чисел. Действительно, если $\mathbf{x}$ — *произвольный элемент из* ℓ_2, *а* $\varepsilon > 0$, *то* $\exists n \in \mathbb{N}$ *такое, что* $\sum_{i=n+1}^{\infty} x_i^2 < \varepsilon/2$. *Выберем теперь рациональные числа* y_i *так, что* $|x_i -$

$y_i|^2 < \varepsilon/(2n)$. *Тогда* $\mathbf{y} := \{y_1, y_2, \ldots, y_n, 0, 0, 0, \ldots\} \in \ell_{2,f,\mathbb{Q}}$ *и* $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 < \varepsilon$. *Таким образом,* $\ell_{2,f,\mathbb{Q}}$ *всюду плотно в* ℓ_2.

Покажем, что $\ell_{2,f,\mathbb{Q}}$ *счетно. Пусть* $\ell_{2,f,\mathbb{Q},s} := \{\mathbf{x} \mid x_i = 0, i > s\} = \mathbb{Q}^s \subset \ell_{2,f,\mathbb{Q}}$. *Тогда*

$$\ell_{2,f,\mathbb{Q}} := \bigcup_{s=1}^{\infty} \ell_{2,f,\mathbb{Q},s}$$

и поскольку объединение счетного числа счетных множеств счетно, то достаточно доказать счетность множества $\mathbb{Q}^s$. *Занумеруем элементы счетного множества* $\mathbb{Q}$ *и пусть* $\mathbb{Q}^s_k$ *— множество* s*-элементных последовательностей, члены которых находятся среди первых* k *элементов перенумерованного множества* $\mathbb{Q}$. *Поскольку число элементов множества* $\mathbb{Q}^s_k$ *конечно* ($\#\left(\mathbb{Q}^s_k\right) = ks$) *и* $\mathbb{Q}^s = \cup_{k=1}^{\infty}\mathbb{Q}^s_k$, *то* $\mathbb{Q}^s$ *счетно.*

Таким образом, пространство ℓ_2 *сепарабельно. Для доказательства того, что* ℓ_2 *– гильбертово, остается показать, что оно бесконечномерно. Это следует из того, что любая конечная подсистема системы*

$$e_i := \{\underbrace{0, \ldots, 0, 1}_{i \text{ чисел}}, 0, 0, \ldots\},\ i = 1, 2, 3, \ldots$$

состоит из линейно независимых элементов.

Итак, пространство ℓ_2 *– гильбертово. В качестве замкнутой системы в нем можно взять систему* $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Вопрос для самостоятельного изучения: какова мощность пространства ℓ_2 ?

Произвольное гильбертово пространство принято обозначать первой буквой $\mathcal{H}$ фамилии Hilbert [11] в рукописном начертании.

Теорема 6.7. *Любая полная ортогональная система* $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ *элементов полного евклидова пространства* $\mathcal{E}$ *является замкнутой.*

Доказательство. При нормировке элементов системы ее полнота (неполнота) и замкнутость (незамкнутость) сохраняются, поэтому, без ограничения общности, можно считать систему $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ ортонормированной.

Пусть φ — произвольный элемент пространства $\mathcal{E}$. Достаточно доказать, что ряд Фурье элемента φ сходится к этому элементу. Пусть

[11] Давид Гильберт (1862 – 1943) — немецкий математик-универсал, внёс значительный вклад в развитие многих областей математики.

$\Phi_n := \sum_{k=1}^n c_k\psi_k$, $c_k = (\varphi, \psi_k)$ — частичная сумма ряда Фурье элемента φ. Так как в силу неравенства Бесселя ряд $\sum_{k=1}^\infty c_k^2$ сходится, то при $\forall m > n$ имеем

$$\|\Phi_m - \Phi_n\|^2 = \|\sum_{k=n+1}^m c_k\psi_k\|^2 = \left(\sum_{k=n+1}^m c_k\psi_k, \sum_{k=n+1}^m c_k\psi_k\right) =$$
$$= \sum_{k=n+1}^m c_k^2 \to 0, \text{ при } n, m \to \infty, \ m > n.$$

Поэтому Φ_n — фундаментальная последовательность и, в силу полноты пространства $\mathcal{E}$, существует элемент $\varphi_0 \in \mathcal{E}$ такой, что $\|\Phi_n - \varphi_0\| \to 0$, $n \to \infty$.

Остается доказать, что $\varphi_0 = \varphi$, а для этого, в силу теоремы 6.5, достаточно доказать, что коэффициенты Фурье элементов φ_0 и φ совпадают. При любом $n \geqslant k$

$$(\Phi_n, \psi_k) = (\sum_{l=1}^n c_l\psi_l, \psi_k) = \sum_{l=1}^n c_l(\psi_l, \psi_k) = c_k.$$

С другой стороны, в силу неравенства Коши–Буняковского имеем

$$|(\Phi_n, \psi_k) - (\varphi_0, \psi_k)| = |(\Phi_n - \varphi_0, \psi_k)| \leqslant \sqrt{\|\Phi_n - \varphi_0\|} \to 0, \ n \to \infty,$$

откуда вытекает $c_k = (\Phi_n, \psi_k) \to (\varphi_0, \psi_k)$, $n \to \infty$, т.е. $(\varphi, \psi_k) = c_k = (\varphi_0, \psi_k)$. □

Теорема 6.8. *В полном бесконечномерном евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ существует замкнутая или полная система элементов тогда и только тогда, когда оно гильбертово.*

Доказательство. В силу теоремы 6.7 существование полной и замкнутой системы элементов в полном евклидовом пространстве эквивалентно. Проведем поэтому доказательство только для замкнутой системы.

Если в полном евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ есть замкнутая система элементов $\{\psi_i\}_{i=1}^\infty$, то любой элемент пространства $\mathcal{E}$ можно приблизить с точностью $\varepsilon/2$ конечной линейной комбинацией элементов $\{\psi_i\}_{i=1}^\infty$ с вещественными коэффициентами, а ее, в свою очередь, приблизить с точностью $\varepsilon/2$ конечной линейной комбинацией элементов $\{\psi_i\}_{i=1}^\infty$ с рациональными коэффициентами. Тем самым, конечные линейные комбинации элементов $\{\psi_i\}_{i=1}^\infty$ с рациональными коэффициентами образуют счетное всюду плотное множество (его счетность доказана в примере 6.9) в пространстве $\mathcal{E}$, которое поэтому является гильбертовым.

Пусть теперь $\mathcal{E}$ — гильбертово пространство. Возмем в нем счетное всюду плотное подмножество $\{\chi_k\}_{k=1}^{\infty}$ и применим к нему процедуру ортогонализации Грама–Шмидта, удаляя по ходу дела из элементов, еще не затронутых ортогонализацией, те, которые являются линейными комбинациями уже построенных конечных ортонормированных семейств. В результате мы получим замкнутую систему элементов в пространстве $\mathcal{E}$. $\square$

Теорема 6.9. *Любое гильбертово пространство изоморфно пространству ℓ_2.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{H}$ — произвольное гильбертово пространство, а $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — произвольная замкнутая система в $\mathcal{H}$. Из вышесказанного следует, что между элементами пространства $\mathcal{H}$ и сходящимися рядами $\sum_{k=1}^{\infty} c_k\psi_k$ по системе $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ существует взаимно-однозначное соответствие. Но сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} c_k\psi_k$ эквивалентна по критерию Коши сходимости числового ряда $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$. Таким образом, имеется взаимно-однозначное соответствие $\mathcal{F}$ между элементами пространства $\mathcal{H}$ и последовательностями $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ из пространства ℓ_2, сохраняющее в силу тождества Парсеваля нормы, а в силу тождества $(x, y) = \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$ – и скалярные произведения. $\square$

Пусть теперь $\mathcal{F}$: $Q[-\pi, \pi] \mapsto \ell_2$ — отображение, переводящее функцию из пространства $Q[-\pi, \pi]$ в последовательность ее коэффициентов Фурье по нормированной тригонометрической системе $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$, которая, как будет показано ниже, является замкнутой. В силу тождества Парсеваля отображение $\mathcal{F}$ сохраняет нормы элементов, а значит, в силу тождества $(x, y) = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$, справедливого в произвольном евклидовом пространстве, и скалярные произведения. При этом разным функциям f и g из пространства $Q[-\pi, \pi]$ сопоставляются разные последовательности коэффициентов Фурье, поскольку эти ряды Фурье сходятся в среднеквадратичном к функциям f и g, норма разности которых $\|f-g\|_{Q[-\pi,\pi]}$ нулю не равна. Но отображение $\mathcal{F}$ изоморфизмом не является, поскольку $Q[-\pi, \pi]$ — не полное пространство. Его можно превратить в полное пространство, если рассмотреть ряды Фурье $\sum_{k=1}^{\infty} c_k\psi_k$, фундаментальные по норме пространства $Q[-\pi, \pi]$ (т.е. те, для которых сходятся ряды $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$), но не имеющие пределов в пространстве $Q[-\pi, \pi]$, как новые функции.[12] Полученное пополненное пространство $\mathcal{L}^2[-\pi,\pi]$ изоморфно пространству ℓ_2, а потому полно.

6.8 Равномерная сходимость и почленное дифференцирование тригонометрического ряда Фурье

После изучения поточечной сходимости ряда Фурье и сходимости в среднем квадратичном займемся вопросом о равномерной сходимости ряда Фурье и возможности его почленного дифференцирования. В данном параграфе мы установим, какие условия на функцию $f(x)$ обеспечивают равномерную сходимость ее ряда Фурье на $[-\pi,\pi]$ и какие условия позволяют дифференцировать ряд Фурье почленно.

Теорема 6.10. *Пусть*

1. *функция $f(x)$ непрерывна на $[-\pi,\pi]$, и $f(\pi)=f(-\pi)$;*
2. *функция $f(x)$ имеет на $[-\pi,\pi]$ кусочно-непрерывную производную.*

Тогда тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к ней равномерно и абсолютно на $[-\pi,\pi]$.[13]

Доказательство. В силу непрерывности 2π-периодического продолжения функции $f(x)$ на вещественную прямую и ее кусочной гладкости из теоремы 6.1 следует поточечная сходимость ряда Фурье функции $f(x)$ к ней. Поэтому для частичной суммы $S_n(x)$, $n\geqslant 1$ ряда Фурье

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

функции $f(x)$ справедливо следующее соотношение

$$f(x)-S_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

откуда для доказательства теоремы достаточно установить сходимость числового ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|+|b_k|).$$

[12]Более явное описание этих функций дается в теории интеграла Лебега.

[13]Отличие от условий теоремы о поточечной сходимости ряда Фурье состоит в условии 1.

Обозначим через α_k и β_k коэффициенты Фурье кусочно-непрерывной функции $f'(x)$:

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos kx\,dx,\ \ \beta_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin kx\,dx.$$

Из неравенства Бесселя для коэффициентов Фурье кусочно-непрерывной функции (см. пример 6.8) получаем, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k^2+\beta_k^2)$ сходится. Интегрируя по частям, получаем в силу $f(\pi)=f(-\pi)$:

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\cos kx f(x)\Big|_{-\pi}^{\pi} + k\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = kb_k,$$

откуда $|b_k| = \frac{|\alpha_k|}{k}$. Аналогично, $|a_k| = \frac{|\beta_k|}{k}$ и $\forall n\in\mathbb{N}$ мы получим:

$$\sum_{k=1}^{n}(|a_k|+|b_k|) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}(|\alpha_k|+|\beta_k|) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k^2}+\frac{1}{2}(\alpha_k^2+\beta_k^2)\right) \qquad (6.17)$$

в силу очевидных неравенств

$$\frac{1}{k}|\alpha_k| \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2}+\alpha_k^2\right),\ \ \frac{1}{k}|\beta_k| \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2}+\beta_k^2\right).$$

Поскольку правая часть равенства (6.17) сходится при $n\to\infty$ к конечному пределу, то сходится и ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|+|b_k|)$, что достаточно для доказательства теоремы. □

Теорема 6.11. *Пусть*

1. *функция $f(x)$ и ее производные до m-ого порядка непрерывны на $[-\pi,\pi]$ и $f^{(k)}(\pi)=f^{(k)}(-\pi)$, $k=0,1,\dots,m$;*
2. *функция $f^{(m+1)}(x)$ кусочно-непрерывна на $[-\pi,\pi]$.*

Тогда тригонометрический ряд Фурье

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx) \qquad (6.18)$$

функции $f(x)$ можно m раз дифференцировать почленно на $[-\pi,\pi]$, т.е.

$$f^{(l)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k k^l\cos\left(kx+l\frac{\pi}{2}\right)+b_k k^l\sin\left(kx+l\frac{\pi}{2}\right)\right),\ l=1,2,\dots,m. \qquad (6.19)$$

Доказательство. Обозначим через α_k и β_k коэффициенты Фурье кусочно-непрерывной функции $f^{(m+1)}(x)$:

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(m+1)}(x)\cos kx\,dx,\ \beta_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(m+1)}(x)\sin kx\,dx.$$

Интегрируя $m+1$ раз по частям, получаем в силу первого условия теоремы:

$$|\alpha_k| + |\beta_k| = k^{m+1}(|a_k| + |b_k|), \tag{6.20}$$

где a_k и b_k — коэффициенты Фурье функции $f(x)$. Отсюда

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^m(|a_k| + |b_k|) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}(|\alpha_k| + |\beta_k|). \tag{6.21}$$

Сходимость ряда в правой части равенства (6.21) доказывается как в предыдущей теореме. Числовой ряд в левой части (6.21) мажорирует функциональный ряд (6.19) при $l = 1, 2, \ldots, m$, поэтому по признаку Вейерштрасса ряд (6.19) сходится равномерно на $[-\pi, \pi]$ для $l = 1, 2, \ldots, m$. Отсюда по теореме о почленном дифференцировании функционального ряда следует, что ряд (6.18) можно m раз дифференцировать почленно на $[-\pi, \pi]$. □

Следствие 6.2. *В условиях теоремы 6.11 для коэффициентов ряда Фурье функции $f(x)$ справедлива оценка*

$$a_k = o\left(\frac{1}{k^{m+1}}\right),\ b_k = o\left(\frac{1}{k^{m+1}}\right),\ k \to \infty,$$

которая следует из равенства (6.20) и того, что $|\alpha_k|, |\beta_k| \to 0$ при $k \to \infty$.

Пример 6.10. *1. Пусть $f(x) = (x^2 - \pi^2)^2$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$. Тогда*

$$\begin{gathered} f(-\pi) = f(\pi) = 0, \\ f'(x) = 4x(x^2 - \pi^2),\ f'(-\pi) = f'(\pi) = 0, \\ f''(x) = 4(x^2 - \pi^2) + 8x^2,\ f''(-\pi) = f''(\pi) = 8\pi^2, \\ f'''(x) = 24x,\ f'''(-\pi) = -24\pi,\ f'''(\pi) = 24\pi, \end{gathered}$$

и поэтому для третьей производной функции $f(x)$ первое условие теоремы нарушено. Поэтому к данной функции теорема 6.11 *применима при $m = 2$ и ряд Фурье функции $f(x)$ можно два раза дифференцировать почленно на $[-\pi, \pi]$.*

Если вычислить ряд Фурье данной функции, то можно убедиться, что в точках интервала $(-\pi, \pi)$ его можно дифференцировать почленно трижды.

2. $f(x) = \sin(\cos x)$.

Для данной функции условия теоремы 6.11 выполнены $\forall m \in \mathbb{N}$, поэтому соответствующий ряд Фурье можно дифференцировать почленно любое число раз, а для его коэффициентов Фурье справедливы асимптотики

$$a_k, b_k = o\left(\frac{1}{k^l}\right),\ k \to \infty,\ \forall l \in \mathbb{N}.$$

6.9 Равномерная аппроксимация непрерывной функции тригонометрическими и алгебраическими многочленами

Определение 6.10. *Тригонометрическими многочленами будем называть $2l$-периодические функции вида*

$$T_l(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(A_k \cos\frac{\pi}{l}kx + B_k \sin\frac{\pi}{l}kx\right).$$

Лемма 6.4 (об аппроксимации непрерывной на сегменте функции непрерывной кусочно-гладкой функцией)**.** *Если $f \in C[a,b]$, то $\forall \varepsilon > 0$ существует такая кусочно-гладкая функция $\ell \in C[a,b]$, что $\|f - \ell\|_{C[a,b]} < \varepsilon$.*

Доказательство. По теореме Кантора функция f равномерно непрерывна на $[a,b]$, поэтому $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon/2,\ \forall x', x'' \in [a,b],\ |x' - x''| < \delta.$$

Разобьем сегмент $[a,b]$ на частичные сегменты $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$ такие, что $|x_i - x_{i-1}| < \delta$, и построим ломаную $\ell(x)$, проходящую через все точки $(x_i, f(x_i))$. Тогда функция $\ell(x)$ — непрерывная, кусочно-гладкая, $\ell(x_i) = f(x_i)$ и $\forall x \in [x_{i-1}, x_i] \subset [a,b]$ выполнено:

$$|f(x) - \ell(x)| \leqslant |f(x) - f(x_i)| + |\ell(x) - \ell(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

т.к. $|\ell(x) - \ell(x_i)| \leqslant |\ell(x_{i-1}) - \ell(x_i)| = |f(x_{i-1}) - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2}$ при $x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i$. Это и означает, что $\|f - \ell\|_{C[a,b]} < \varepsilon$. $\square$

Теорема 6.12 (Вейерштрасс). *Если $f \in C[-l, l]$, $l > 0$ и $f(l) = f(-l)$, то $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ тригонометрический многочлен $T_l(x)$ такой, что*

$$\|T_l - f\|_{C[-l,l]} < \varepsilon.$$

Доказательство. Предположим, что $l = \pi$. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Согласно лемме 6.4 существует непрерывная кусочно-гладкая функция $\ell(x)$ такая, что

$$\|f - \ell\|_{C[-\pi,\pi]} < \frac{\varepsilon}{2}$$

и, кроме того, $\ell(-\pi) = \ell(\pi)$. По теореме 6.10 ряд Фурье функции $\ell(x)$ равномерно сходится к ней на $[-\pi, \pi]$, поэтому для заданного ε $\exists$ номер n такой, что для частичной суммы $S_n(x)$ ряда Фурье (являющейся тригонометрическим многочленом) функции $\ell(x)$ имеет место

$$\|\ell - S_n\|_{C[-\pi,\pi]} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Из двух полученных неравенств в силу неравенства треугольника следует

$$\|f - S_n\|_{C[-\pi,\pi]} \leqslant \|f - \ell\|_{C[-\pi,\pi]} + \|\ell - S_n\|_{C[-\pi,\pi]} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

что и требуется.

Если теперь $l \neq \pi$, то функция $\varphi(x) = f(\frac{l}{\pi}x)$, $x \in [-\pi, \pi]$ является непрерывной и $\varphi(-\pi) = \varphi(\pi)$. По уже доказанному получаем, что существует такой тригонометрический многочлен $T_\pi(x)$, что

$$\|\varphi - T_\pi\|_{C[-\pi,\pi]} < \varepsilon.$$

Тогда $f(x) = \varphi(\frac{\pi}{l}x)$ и для $T_l(x) := T_\pi(\frac{\pi}{l}x)$ получаем

$$\|f(x) - T_l(x)\|_{C[-l,l]} = \|\varphi - T_\pi\|_{C[-\pi,\pi]} < \varepsilon.$$

$\square$

Замечание 6.7. *На первый взгляд может показаться, что мы доказали равномерную сходимость последовательности $S_n(x)$ к непрерывной периодической функции $f(x)$, не являющейся кусочно-гладкой. Однако это не так, поскольку для разных ε функции $\ell(x)$ разные, а значит, разные и их ряды Фурье.*

Теорема 6.13 (Вейерштрасс)**.** *Если* $f \in C[a,b]$, *то* $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ *алгебраический многочлен* $P_n(x)$ *степени* n *такой, что*

$$\|P_n - f\|_{C[a,b]} < \varepsilon.$$

Доказательство. 1. Пусть сначала $f(x) \in C[-l,l]$, причем $f(-l) = f(l)$. По теореме 6.12 $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ тригонометрический многочлен

$$T_l(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{m} \left(A_k \cos \frac{\pi}{l} kx + B_k \sin \frac{\pi}{l} kx \right)$$

такой, что

$$\|T_l - f\|_{C[-l,l]} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Разложим каждую функцию $A_k \cos \dfrac{\pi}{l} kx$, $B_k \sin \dfrac{\pi}{l} kx$ по формуле Маклорена и возмем в разложении каждой функции многочлены Тейлора такой степени, чтобы остаточный член на всем сегменте $[-l,l]$ был по модулю меньше $\frac{\varepsilon}{4m}$. Объединяя полученные многочлены Тейлора, получим многочлен $P_n(x)$ такой, что

$$\|T_l - P_n\|_{C[-l,l]} < 2m \frac{\varepsilon}{4m} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Из двух полученных неравенств в силу неравенства треугольника следует

$$\|f - P_n\|_{C[-l,l]} \leqslant \|f - T_l\|_{C[-l,l]} + \|T_l - P_n\|_{C[-l,l]} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2. Пусть теперь $f \in C[a,b]$. Возмем l таким, чтобы имело место строгое вложение $[a,b] \subset [-l,l]$, $[-l,l] \neq [a,b]$, и продолжим функцию $f(x)$ непрерывным образом на $[-l,l]$ до функции $F(x)$ так, чтобы выполнялось условие $F(-l) = F(l)$. По уже доказанному существует алгебраический многочлен $P_n(x)$ такой, что $\|P_n - F\|_{C[-l,l]} < \varepsilon$. Тогда, тем более, $\|P_n - f\|_{C[a,b]} < \varepsilon$.

□

6.10 Замкнутость тригонометрической системы

Теорема 6.14. *Тригонометрическая система* $\{1, \cos nx, \sin nx,\ n = 1, 2, \ldots\}$ *является замкнутой в пространстве* $Q[-\pi, \pi]$, *т.е. для любой* *кусочно-непрерывной функции* $f(x)$ *и* $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ *тригонометрический многочлен* $T(x)$ *такой, что*

$$\|f - T\|_2 < \varepsilon.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную кусочно-непрерывную на $[-\pi, \pi]$ функцию $f(x)$. Ясно, что существует непрерывная функция $g(x)$, совпадающая с $f(x)$ всюду, за исключением малых окрестностей точек разрыва функции $f(x)$ и, возможно, точки π, линейная в этих окрестностях и такая, что $g(-\pi) = g(\pi)$. Поскольку функция $f(x)$ ограничена, а количество точек ее разрыва конечно, то эти окрестности можно выбрать столь малыми, что

$$\|f - g\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Далее, по теореме 6.12, примененной к непрерывной функции g, найдется тригонометрический многочлен $T(x)$ такой, что $\|g - T\|_C < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2\pi}}$, и поэтому

$$\|g - T\|_2 = \sqrt{\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(g(x) - T(x)\right)^2 \, dx} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому

$$\|f - T\|_2 \leqslant \|f - g\|_2 + \|g - T\|_2 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\square$

Следствие 6.3. *Для любой кусочно-непрерывной на* $[-\pi, \pi]$ *функции:*

1. *ее тригонометрический ряд Фурье сходится к ней по норме пространства* $Q[-\pi, \pi]$, *т.е. в среднеквадратичном;*

2. *справедливо равенство Парсеваля*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \, dx,$$

где a_n, b_n *— коэффициенты Фурье функции* $f(x)$ *по тригонометрической системе;*

3. *ее тригонометрический ряд Фурье можно интегрировать почленно на этом сегменте. Действительно, из сходимости ряда Фурье функции $f(x)$ в среднеквадратичном к функции $f(x)$ и теоремы 3.13 следует равномерная по $x, x_0 \in [-\pi, \pi]$ сходимость*

$$\int\limits_{x_0}^{x} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \right) dt \rightrightarrows \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\, dt.$$

Глава 7

Обобщенные функции

Понятия обобщенной функции (по английски «distribution») позволяет единообразно рассматривать дискретные и непрерывные распределения физических величин (масс, зарядов и т.п.). Теория обобщенных функций в ее различных вариантах позволила сильно продвинуть теорию дифференциальных уравнений.

7.1 Пространство $\mathcal{D}$ финитных основных функций. Пространство обобщенных функций на пространстве $\mathcal{D}$

Назовем функцию $\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$ *финитной*, если она равна нулю вне некоторого конечного интервала. Обозначим через $\operatorname{supp}\varphi(x)$ замыкание множества точек, в которых $\varphi(x) \neq 0$. Множество всех бесконечное число раз дифференцируемых финитных функций назовем *пространством основных функций* и обозначим символом $\mathcal{D}$. Ясно, что это линейное пространство относительно обычных операций сложения функций и умножения их на вещественные числа.

Как показывает следующий пример, ненулевые основные функции существуют.

Пример 7.1 («шапочка» Соболева[1]).

$$\omega_a(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{a^2}{a^2-x^2}\right), \ |x| < a, \\ 0, \ |x| \geqslant a. \end{cases} \qquad \operatorname{supp}\omega_a(x) = [-a, a].$$

[1]Соболев Сергей Львович (1908–1989) — советский математик. Автор теории обобщенных функций на основе пространства $\mathcal{D}$.

Финитность и бесконечная дифференцируемость при $x \neq \pm a$ «шапочки Соболева» очевидны. Пользуясь тем, что $\exp\left(-\frac{a^2}{a^2-x^2}\right)$ стремится к нулю при $x \to a-0$ или $x \to -a+0$ быстрее любой степени $x \pm a$, нетрудно проверить, что «шапочка Соболева» бесконечно дифференцируема и в точках $x = \pm a$.

Ясно, что $\omega_{\frac{1}{3}}(x-n)$, $n \in \mathbb{Z}$ — последовательность «шапочек» Соболева с непересекающимися носителями, поэтому любая конечная подсистема такой системы линейно независима. Значит, $\mathcal{D}$ — линейное бесконечномерное пространство.

Положим $\Delta_\varepsilon(x) = \frac{c}{\varepsilon}\omega_\varepsilon(x)$, где $c := \left[2\int_0^1 \exp\left(-\frac{1}{1-t^2}\right)dt\right]^{-1}$. Ясно, что $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\Delta_\varepsilon(x)\,dx = 1$.

С помощью «шапочки Соболева» можно построить другие полезные основные функции. Для любого подмножества A вещественной прямой обозначим

$$\mathcal{D}(A) := \{\varphi \in \mathcal{D} \,|\, \operatorname{supp}\varphi \subset A\}\,.$$

Лемма 7.1. *Для любых $b > a$, $\varepsilon > 0, \exists$ функция $\eta \in \mathcal{D}([a-3\varepsilon, b+3\varepsilon])$ такая, что $\eta(x) \equiv 1$ при $x \in [a-\varepsilon, b+\varepsilon]$ и $\eta(x) \in [0,1]$ при $x \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Пусть

$$\chi(x) := \begin{cases} 1, \ x \in [a-2\varepsilon, b+2\varepsilon], \\ 0, \ x \in \mathbb{R}\backslash[a-2\varepsilon, b+2\varepsilon]. \end{cases}$$

– характеристическая функция отрезка $[a-2\varepsilon, b+2\varepsilon]$.

Положим

$$\eta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}\chi(t)\Delta_\varepsilon(x-t)\,dt = \int_{a-2\varepsilon}^{b+2\varepsilon}\Delta_\varepsilon(x-t)\,dt = \int_{x-b-2\varepsilon}^{x-a+2\varepsilon}\Delta_\varepsilon(\xi)\,d\xi.$$

Ввиду $\Delta_\varepsilon(x) \in \mathcal{D}$ получаем $\eta(x) \in \mathcal{D}$, а т.к. $\Delta_\varepsilon(x-t) = 0$ при $x \notin [a-3\varepsilon, b+3\varepsilon], t \in [a-2\varepsilon, b+2\varepsilon]$, то $\operatorname{supp}\eta \in [a-3\varepsilon, b+3\varepsilon]$, т.е. $\eta \in \mathcal{D}([a-3\varepsilon, b+3\varepsilon])$. При $x \in [a-\varepsilon, b+\varepsilon]$ справедливы неравенства $x-b-2\varepsilon \leqslant -\varepsilon$, $x-a+2\varepsilon \geqslant \varepsilon$, поэтому $\eta(x) = \int_{\operatorname{supp}\Delta_\varepsilon}\Delta_\varepsilon(\xi)\,d\xi = 1$, что завершает доказательство. □

Определение 7.1. *Последовательность $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ основных функций сходится к основной функции $\varphi(x)$ (обозначим этот факт: $\varphi_n(x) \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi(x)$, $n \to \infty$), если*

1. *$\exists$ интервал $(-a, a)$ такой, что $\forall n$: $\operatorname{supp}\varphi_n(x) \subset (-a, a)$;*

2. $\varphi_n^{(k)}(x) \overset{[-a,a]}{\rightrightarrows} \varphi^{(k)}(x)$, $n \to \infty$, $\forall k = 0, 1, 2, \ldots$.

Данная сходимость не является метрической.[2]

Определение 7.2. *Правило $\hat{u}$, ставящее в соответствие каждой функции $\varphi(x) \in \mathcal{D}$ некоторое вещественное число $\hat{u}[\varphi]$ и удовлетворяющее условию линейности*

$$\hat{u}[\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2] = \alpha\hat{u}[\varphi_1] + \beta\hat{u}[\varphi_2], \; \varphi_i \in \mathcal{D}, \; i = 1, 2; \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

называется линейным функционалом на пространстве $\mathcal{D}$.

Альтернативное обозначение для линейного функционала $\hat{u}[\varphi]$, подчеркивающее его линейность, есть $(\hat{u}, \varphi)$.

Определение 7.3. *Линейный функционал $\hat{u}[\varphi]$, $\varphi \in \mathcal{D}$ на пространстве $\mathcal{D}$ называется непрерывным, если $\forall \varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$, $n \to \infty$ имеет место сходимость числовой последовательности $\hat{u}[\varphi_n] \to \hat{u}[\varphi]$, $n \to \infty$.*

Легко видеть, что непрерывность линейного функционала (или оператора) эквивалентна его непрерывности в одной точке, например нуле.

Определение 7.4. *Линейный непрерывный функционал на пространстве $\mathcal{D}$ называется обобщенной функцией.*

Пусть функция $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ интегрируема на любом отрезке числовой прямой (в таком случае она называется локально интегрируемой). Положим

$$\hat{f}[\varphi] := \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,dx, \; \forall \varphi \in \mathcal{D}. \tag{7.1}$$

Ввиду финитности основных функций интеграл, очевидно, сходится. Очевидно, что $\hat{f}[\varphi]$ – линейный непрерывный функционал. Данная обобщенная функция называется регулярной. Заметим, что если бы мы определили сходимость в пространстве $\mathcal{D}$ последовательности $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}$ к функции φ при $n \to \infty$ как

$$\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi \Longleftrightarrow \varphi_n^{(k)}(x) \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} \varphi^{(k)}(x), \; \forall k = 0, 1, 2, \ldots,$$

отказавшись от условия принадлежности носителей всех функций последовательности некоторому фиксированному отрезку, то выражение (7.1)

[2]Условие сходимость в пространстве $\mathcal{D}$ можно переформулировать как сходимость по каждой норме из некоторого счетного множества норм. Такие пространства называются счетно-нормированными.

было бы непрерывным по φ не для всех локально интегрируемых функций $f(x)$. Например, последовательность $\varphi_n := \frac{1}{n}\omega_1(x-n)$ сходилась бы тогда к нулю в $\mathcal{D}$, но поскольку для $f(x) = x$ имеем

$$\hat{f}[\varphi_n] = \int_{-1}^{1} (\frac{t}{n} + 1)\omega_1(t)\,dt \to \int_{-1}^{1} \omega_1(t)\,dt > 0,\; n \to +\infty,$$

функционал $\hat{f}$ не был бы непрерывным.

Пример 7.2. *В частности, локально интегрируемая функция Хевисайда*

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0,\; x < 0 \\ 1,\; x \geqslant 0 \end{cases}$$

порождает регулярную обобщенную функцию

$$\hat{\Theta}[\varphi] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Theta(x)\varphi(x)\,dx = \int\limits_{0}^{+\infty} \varphi(x)\,dx.$$

Обобщенные функции, не являющиеся регулярными, называются *сингулярными.* Их тоже условно записывают в виде:

$$\hat{u}[\varphi] \equiv (\hat{u}, \varphi) \equiv \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x)\varphi(x)\,dx,$$

имея в виду под $u(x)$ некоторую неклассическую (обобщенную) функцию.

Определение 7.5. *Обобщенные функции образуют линейное пространство $\mathcal{D}'$ (= пространство, сопряженное к пространству $\mathcal{D}$) относительно операции*

$$(\alpha\hat{u}_1 + \beta\hat{u}_2)[\varphi] = \alpha\hat{u}_1[\varphi] + \beta\hat{u}_2[\varphi],\; \forall\varphi \in \mathcal{D},\; \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Определим в этом пространстве сходимость:

$$\hat{u}_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} \hat{u},\; n \to \infty \;\Leftrightarrow\; \hat{u}_n[\varphi] \to \hat{u}[\varphi],\; n \to \infty,\; \forall\varphi \in \mathcal{D}.$$

Эта сходимость называется слабой. Она аналогична поточечной сходимости последовательности функций.

Аналогично, можно определить слабую сходимость в пространстве основных функций:

$$\mathcal{D} \ni \varphi_n \xrightarrow{w} \varphi \in \mathcal{D},\; n \to \infty \;\Leftrightarrow\; \hat{u}[\varphi_n] \to \hat{u}[\varphi],\; n \to \infty,\; \forall\hat{u} \in \mathcal{D}'.$$

Пример 7.3. *Наиболее известной сингулярной обобщенной функцией является $\hat{\delta}_{x_0}$-функция, определяемая равенством*

$$\hat{\delta}_{x_0}[\varphi] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta_{x_0}(x)\varphi(x)\,dx := \varphi(x_0),\ \forall\varphi \in \mathcal{D}.$$

Очевидно, что $\hat{\delta}_{x_0}$-функция — линейный непрерывный функционал.

Докажем, что $\hat{\delta}_{x_0}$-функция действительно сингулярна. Предположим, что $\hat{\delta}_{x_0}$ – регулярная обобщенная функция, т.е. существует такая локально интегрируемая (а значит, ограниченная на любом отрезке) функция $f(x)$, что

$$\varphi(x_0) = \hat{\delta}_{x_0}[\varphi] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx,\ \varphi \in \mathcal{D}.$$

Положим $\varphi(x) = \omega_\varepsilon(x - x_0)$, $\varepsilon > 0$ (см. пример 7.1). Тогда

$$0 \leqslant \omega_\varepsilon(x - x_0) \leqslant \omega_\varepsilon(0) = 1/e \text{ и}$$

$$\frac{1}{e} = \omega_\varepsilon(0) = \left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\omega_\varepsilon(x - x_0)\,dx\right| = \left|\int\limits_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f(x)\omega_\varepsilon(x - x_0)\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} |f(x)\omega_\varepsilon(x - x_0)|\,dx \leqslant \frac{1}{e}\int\limits_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} |f(x)|\,dx \to 0,\ \varepsilon \to +0.$$

Полученное противоречие доказывает сингулярность δ_{x_0}-функции.

Сингулярную обобщенную δ_{x_0}-функцию можно представить различными способами в виде предела в $\mathcal{D}'$ регулярных обобщенных функций.

По формуле среднего значения $\forall\varphi(x) \in \mathcal{D}$ имеем

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Delta_\varepsilon(x - x_0)\varphi(x)\,dx - \varphi(x_0)\right| = \left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Delta_\varepsilon(x - x_0)\left(\varphi(x) - \varphi(x_0)\right)\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \Delta_\varepsilon(t)\,|\varphi(x_0 + t) - \varphi(x_0)|\,dt = |\varphi(x_\varepsilon) - \varphi(x_0)|\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \Delta_\varepsilon(t)\,dt =$$

$$= |\varphi(x_\varepsilon) - \varphi(x_0)| \to 0,\ \varepsilon \to +0,\ \text{где } x_0 - \varepsilon \leqslant x_\varepsilon \leqslant x_0 + \varepsilon.$$

Это означает, что

$$\Delta_\varepsilon\widehat{(x-x_0)} \xrightarrow{\mathcal{D}'} \hat{\delta}_{x_0},\ \varepsilon\to+0.$$

Заметим, что поточечный предел

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\Delta_\varepsilon(x-x_0)=\begin{cases}+\infty,\ x=x_0,\\ 0,\ x\neq x_0\end{cases}$$

классической функцией не является.

Задача 7.1. *Доказать, что следующие регулярные обобщенные функции, соответствующие локально интегрируемым функциям*

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}}\exp\left(-\frac{x^2}{4\varepsilon}\right),\ \frac{1}{\pi x}\sin\frac{x}{\varepsilon},\ \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2},$$

сходятся в $\mathcal{D}'$ к $\hat{\delta}$-функции при $\varepsilon\to+0$.

Доказательство. Докажем, что если $f(x)\geqslant 0$, $x\in\mathbb{R}$ и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=1$, то $\forall\varphi\in\mathcal{D}$ справедливо соотношение

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\varepsilon}f(\frac{x}{\varepsilon})\varphi(x)\,dx-\varphi(0)\right]=0, \tag{7.2}$$

т.е. $\frac{1}{\varepsilon}f(\frac{x}{\varepsilon})\xrightarrow{\mathcal{D}'}\hat{\delta}$, $\varepsilon\to+0$. Тогда требуемое утверждение для функций

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}}\exp\left(-\frac{x^2}{4\varepsilon}\right),\ \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}$$

из условия задачи получится как частный случай.

Действительно, пусть $\varphi\in\mathcal{D}$. Тогда $\forall R>0$ имеем

$$\varphi(\varepsilon t)\overset{t\in[-R,R]}{\rightrightarrows}\varphi(0),\ \varepsilon\to+0.$$

Зафиксируем произвольное $\delta>0$ и выберем $R>0$ так, что

$$2\sup_{t\in\mathbb{R}}|\varphi(t)|\int\limits_{\mathbb{R}\setminus(-R,R)} f(t)\,dt<\frac{\delta}{2}.$$

Тогда для всех достаточно малых ε имеем:

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\varepsilon}f(\frac{x}{\varepsilon})\varphi(x)\,dx-\varphi(0)\right|=\left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\left(\varphi(\varepsilon t)-\varphi(0)\right)\,dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant \left|\int_{-R}^{R} f(t)\left(\varphi(\varepsilon t)-\varphi(0)\right)\,dt\right| + \left|\int_{\mathbb{R}\setminus(-R,R)} f(t)\left(\varphi(\varepsilon t)-\varphi(0)\right)\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-R}^{R} f(t)\left|\varphi(\varepsilon t)-\varphi(0)\right|\,dt + 2\sup_{t\in\mathbb{R}}|\varphi(t)| \int_{\mathbb{R}\setminus(-R,R)} f(t)\,dt \leqslant \frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2}=\delta,$$

что и влечет (7.2).

Для функции

$$\frac{1}{\pi x}\sin\frac{x}{\varepsilon}$$

нужно другое доказательство. Аналогично (7.2) нам нужно показать, что

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\pi x}\sin\frac{x}{\varepsilon}\left(\varphi(x)-\varphi(0)\right)\,dx = 0. \tag{7.3}$$

Но это непосредственно следует из рассуждений, проведенных при доказательстве теоремы 6.2 о представимости функции интегралом Фурье, поскольку интеграл в (7.3) лишь обозначениями отличается от суммы $\mathcal{J}^+(x,\Lambda)+\mathcal{J}^-(x,\Lambda)\to 0,\ \Lambda\to\infty$ в том доказательстве. □

Обобщенная функция не имеет значения в отдельных точках. Тем не менее можно говорить об обращении в нуль обобщенной функции на каком-то интервале и о носителе обобщенной функции.

Определение 7.6. *Говорят, что обобщенная функция $\hat f$ обращается в нуль на интервале $I\subset\mathbb{R}$, если $\forall\varphi\in\mathcal{D}$ такой, что $\operatorname{supp}\varphi\subset I$, выполняется равенство $\hat f[\varphi]=0$. Будем записывать этот факт следующим образом: $\hat f|_I=0$.*

Определение 7.7. *Обобщенные функции $\hat f$ и $\hat g$ называются равными на интервале I, если $(\hat f-\hat g)|_I=0$.*

Определение 7.8. *Объединение всех интервалов I, на которых $\hat f_I=0$ называется нулевым множеством обобщенной функции $\hat f$ и обозначается $\mathcal{O}_{\hat f}$. Замкнутое множество $\operatorname{supp}\hat f:=\mathbb{R}\setminus\mathcal{O}_{\hat f}$ называется носителем обобщенной функции $\hat f$. Если $\operatorname{supp}\hat f$ — ограниченное множество, то функция $\hat f$ называется финитной.*

Пример 7.4. *1.* $\operatorname{supp}\hat\delta=\{0\}$.

2. Если $f(x)=\mathrm{const}\neq 0$, то $\operatorname{supp}\hat f=\mathbb{R}$.

7.2 Действия над обобщенными функциями

7.2.1 Произведение обобщенной функции на бесконечно дифференцируемую функцию

Определение 7.9. *Произведение обобщенной функции $\hat{f}$ на бесконечное число раз дифференцируемую функцию $a(x)$ — это функционал $\widehat{af}$, действующий по правилу $\widehat{af}[\varphi] = \hat{f}[a\varphi]$.*

В случае регулярных обобщенных функций это определение переходит в обычное умножение функций. Для δ-функции мы получим $a(x)\,\widehat{\delta} = a(0)\,\widehat{\delta}$.

Произведение двух обобщенных функций, вообще говоря, не определено. Например, обобщенная функция $\hat{\delta}^2(x)$ не имеет смысла.

7.2.2 Замена переменной в обобщенной функции

Пусть $\psi(x)$, $x \in \mathbb{R}$ — монотонная бесконечно дифференцируемая функция, производная которой имеет постоянный знак, и $\psi(x) \to \pm\infty$ при $x \to \pm\infty$. Ясно, что в этом случае аналогичными свойствами обладает и обратная функция $\psi^{-1}(y)$, $y \in \mathbb{R}$.

Пусть также $f(x)$ — локально интегрируемая функция. Рассмотрим локально интегрируемую функцию $f(\psi(x))$ и порожденную ею обобщенную функцию $\widehat{f(\psi(x))}$. Тогда

$$\widehat{f(\psi(x))}[\varphi(x)] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\psi(x))\varphi(x)\,dx \underset{\psi(x)=:y}{=}$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y)\varphi\left(\psi^{-1}(y)\right)\left|\frac{\psi^{-1}(y)}{dy}\right| dy = \hat{f}(x)\left[\left|\frac{\psi^{-1}(x)}{dx}\right|\varphi\left(\psi^{-1}(x)\right)\right],$$

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}.$$

Это равенство мотивирует следующее определение:

Определение 7.10. *Для любой обобщенной функции $\hat{f}(x)$ обобщенная функция $\hat{f}(\psi(x))$ действует по правилу:*

$$\hat{f}(\psi(x))[\varphi(x)] = \hat{f}(x)\left[\left|\frac{\psi^{-1}(x)}{dx}\right|\varphi\left(\psi^{-1}(x)\right)\right],\ \forall\varphi \in \mathcal{D}.$$

В частности, для линейной замены независимой переменной x получаем:

$$\hat{f}(ax+b)[\varphi(x)] = \frac{1}{|a|}\hat{f}(x)\left[\varphi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right],\ \forall\varphi\in\mathcal{D};$$

при $a = 1$, $b = -c$ получаем формулу сдвига аргумента обобщенной функции:

$$\hat{f}(x-c)[\varphi(x)] = \hat{f}(x)[\varphi(x+c)],\ \forall\varphi\in\mathcal{D};$$

а при $b = 0$, $a \neq 0$ — формулу растяжения аргумента обобщенной функции:

$$\hat{f}(ax)\,[\varphi(x)] = \frac{1}{|a|}\hat{f}(x)\left[\varphi\left(\frac{x}{a}\right)\right],\ \forall\varphi\in\mathcal{D}.$$

Из второй формулы при $a = -1$ получаем четность $\hat{\delta}$-функции:

$$\hat{\delta}(-x)[\varphi(x)] = \hat{\delta}(x)[\varphi(-x)] = \varphi(0) = \hat{\delta}[\varphi(x)],$$

т.е. $\hat{\delta}(-x) = \hat{\delta}(x)$.

7.2.3 Дифференцирование обобщенных функций

Пусть $f(x)$, $x\in\mathbb{R}$ — бесконечно дифференцируемая (и потому локально интегрируемая) функция. Ее производная $f'(x)$ порождает обобщенную функцию, которую мы обозначим $D\hat{f}$. С помощью интегрирования по частям и с учетом финитности функции $\varphi\in\mathcal{D}$ мы получаем равенство

$$D\hat{f}[\varphi] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx = -\hat{f}[\varphi'].$$

Итерируя это равенство, получаем

$$D^{(k)}\hat{f}[\varphi] = (-1)^k\hat{f}[\varphi^{(k)}],\ \forall\varphi\in\mathcal{D}.$$

Это равенство мотивирует следующее определение.

Определение 7.11. *Для любой обобщенной функции $\hat{f}$ обобщенная функция $D^{(k)}\hat{f}$ действует по правилу:*

$$D^{(k)}\hat{f}[\varphi] = (-1)^k\hat{f}[\varphi^{(k)}],\ \forall\varphi\in\mathcal{D}.$$

Таким образом, любая обобщенная функция бесконечно дифференцируема.

Пример 7.5. *Для $\hat{\delta}_{x_0}$-функции получаем:*

$$\forall k \in \mathbb{N}: \left(D^{(k)}\delta_{x_0}\right)[\varphi] = (-1)^k \delta_{x_0}[\varphi^{(k)}] = (-1)^k \varphi^{(k)}(x_0).$$

Пусть $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ — кусочно-гладкая функция, имеющая единственную точку разрыва первого рода x_0, а в остальных точках у функции $f(x)$ имеется непрерывная производная. Тогда в пространстве $\mathcal{D}'$ справедлива следующая формула:

$$D\hat{f} = \hat{f}' + [f]_{x_0}\delta_{x_0}, \tag{7.4}$$

где $\hat{f}'$ — регулярная обобщенная функция, порожденная кусочно-непрерывной функцией $f'(x)$, а $[f]_{x_0} := f(x_0+0) - f(x_0-0)$ — скачок функции $f(x)$ в точке x_0.

Действительно, $\forall \varphi \in \mathcal{D}$ интегрированием по частям получаем:

$$D\hat{f}[\varphi] = -\hat{f}[\varphi'] = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx = -\int\limits_{-\infty}^{x_0} f(x)\varphi'(x)\,dx -$$

$$-\int\limits_{x_0}^{-\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx = -\left. f(x)\varphi(x)\right|_{-\infty}^{x_0-0} + \int\limits_{-\infty}^{x_0} f'(x)\varphi(x)\,dx -$$

$$-\left. f(x)\varphi(x)\right|_{x_0+0}^{+\infty} + \int\limits_{x_0}^{-\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx = -f(x_0-0)\varphi(x_0) +$$

$$+f(x_0+0)\varphi(x_0) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx = [f]_{x_0}\delta_{x_0}[\varphi] + \hat{f}'[\varphi],$$

что и требуется.

В частности, для обобщенной функции Хевисайда из примера 7.2 получаем $D\widehat{\Theta} = \hat{\delta}_0$.

7.3 Пространство быстороубывающих функций и обобщенные функции на этом пространстве

Пространство $\mathcal{D}$ основных функций является лишь одним возможным базисом для построения теории обобщенных функций. Оно не удобно для определения преобразования Фурье, поскольку Фурье-образ ненулевой функции из этого пространства не является функцией из $\mathcal{D}$. Поэтому для определения преобразования Фурье основных и обобщенных функций нам нужно изменить пространство основных функций. При этом автоматически изменится и сопряженное к нему пространство обобщенных функций.

Пусть $\mathcal{S}$ — линейное пространство бесконечно дифференцируемых функций, убывающих вместе со всеми своими производными при $|x| \to \infty$ быстрее любой отрицательной степени $|x|$, т.е. $\forall f \in \mathcal{S}$ и $\forall l \in \mathbb{N}$ имеем $\lim\limits_{|x|\to\infty} x^l f(x) = 0$. Пространство $\mathcal{S}$ называется *пространством быстро убывающих функций*. Очевидно, что $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$, но пространство $\mathcal{S}$ шире пространства $\mathcal{D}$. Например, оно содержит функцию e^{-x^2}, не являющуюся финитной.[3]

В пространстве $\mathcal{S}$ вводится сходимость, аналогичная сходимости в пространстве $\mathcal{D}$. Последовательность $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}$ сходится к функции $\varphi(x) \in \mathcal{S}$ $(\varphi_k(x) \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi(x),\ k \to \infty)$, если $\forall m, l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ имеет место

$$x^m \varphi_k^{(l)}(x) \overset{x\in\mathbb{R}}{\rightrightarrows} x^m \varphi^{(l)}(x),\ k \to \infty.$$

Ясно, что из сходимости последовательности в пространстве $\mathcal{D}$ следует ее сходимость в пространстве $\mathcal{S}$.

Линейное пространство линейных непрерывных функционалов на пространстве $\mathcal{S}$ обозначается $\mathcal{S}'$ и называется *пространством обобщенных функций медленного роста.* Для функций из $\hat{f} \in \mathcal{S}'$ можно определить производные всех порядков так, как это было сделано для пространства $\mathcal{D}'$ формулой

$$\left(D^{(k)}\hat{f}\right)[\varphi] = (-1)^k \hat{f}[\varphi^{(k)}],\ \forall \varphi \in \mathcal{S}.$$

Пространство $\mathcal{S}'$ содержит и $\hat{\delta}_{x_0}$-функцию, определяемую, как и ранее, равенством

$$\hat{\delta}_{x_0}[\varphi] := \varphi(x_0).$$

Для обобщенных функций из пространства $\mathcal{S}'$ определяется и замена переменных так, как это было сделано выше для функций из пространства $\mathcal{D}'$.

[3]Автором теории обобщенных функций на основе пространства $\mathcal{S}$ является французский математик Лоран-Моиз Шварц (Laurent-Moïse Schwartz 1915–2002). Его не следует путать с немецким математиком Карлом Германом Амандусом Шварцем (Karl Hermann Amandus Schwarz 1843–1921), внесшим существенный вклад в комплексный анализ (принцип симметрии Шварца, интеграл Шварца — Кристоффеля, формула Шварца, производная Шварца, лемма Шварца) и автором конструкции, известной как «сапог» Шварца, показывающей, что один из кажущихся естественным подходов к определению площади поверхности не ведет к цели.

Ясно, что раз $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$, то для сопряженных пространств справедливо обратное включение $\mathcal{D}' \supset \mathcal{S}'$. Действительно, если $\hat{f} \in \mathcal{S}'$, то ограничение функционала $\hat{f}$ на пространство $\mathcal{D}$ дает элемент из $\mathcal{D}'$. Не всякая локально интегрируемая функция f порождает функционал $\hat{f} \in \mathcal{S}'$, например, локально интегрируемая функция e^{x^2} не порождает элемент $\mathcal{S}'$, поскольку $e^{-x^2} \in \mathcal{S}$ и

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{x^2} e^{-x^2}\,dx = +\infty.$$

Происхождение термина «функция медленного роста» таково. Локально интегрируемая функция $f(x)$ называется функцией медленного роста, если $\exists C \in \mathbb{R}$ и $N \in \mathbb{N}$ такие, что

$$|f(x)| \leqslant C(1+|x|)^N,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Можно доказать,[4] что пространство $\mathcal{S}'$ состоит из производных произвольных порядков от локально интегрируемых функций медленного роста.

Следующая лемма Л. Шварца выделяет обобщенные функции на $\mathcal{S}$ из пространства всех линейных функционалов на $\mathcal{S}$.

Лемма 7.2. *Для того, чтобы линейный функционал f на пространстве $\mathcal{S}$ был непрерывным (т.е. $f \in \mathcal{S}'$), необходимо и достаточно, чтобы существовали постоянные $C > 0$, $p \in \mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N}$ такие, что*

$$|f[\varphi]| \leqslant C\|\varphi\|_p,\ \forall \varphi \in \mathcal{S},$$
$$\text{где } \|\varphi\|_p := \sup_{\substack{k\in\{0,1,\ldots,p\}\\ x\in\mathbb{R}}} (1+|x|)^p |\varphi^{(k)}(x)|.$$

Доказательство. Достаточность очевидна. Докажем необходимость. Предположим противное: f – линейный непрерывный функционал на $\mathcal{S}$, но неравенство из формулировки леммы не выполняется ни при каких $C > 0$ и $p \in \mathbb{N}_0$. Тогда существует последовательность $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}$ такая, что

$$|f[\varphi_k]| \geqslant k\|\varphi_k\|_k,\ k \in \mathbb{N}. \tag{7.5}$$

Тогда $\psi_k := \dfrac{\varphi_k}{\sqrt{k}\|\varphi_k\|_k} \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$, $k \to +\infty$ поскольку при $m, n \leqslant k$ имеем

$$\left|x^n \psi_k^{(m)}(x)\right| = \frac{|x^n \varphi_k^{(m)}(x)|}{\sqrt{k}\|\varphi_k\|_k} \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

[4] см. М.С. Агранович, Обобщенные функции, М.: МЦНМО, 2008, с. 47–49.

В силу непрерывности f на $\mathcal{S}$ должно быть $f[\psi_k] \to 0$, $k \to +\infty$, однако неравенство (7.5) дает

$$|f[\psi_k]| = \frac{|f[\varphi_k]|}{\sqrt{k}\|\varphi_k\|_k} \geqslant \sqrt{k}.$$

Полученное противоречие завершает доказательство. □

Замечание 7.1. *Для пространства $\mathcal{D}$ аналог данной леммы не справедлив. Действительно, для регулярной обобщенной функции $\hat{u}$, соответствующей функции $u(x) = e^{x^2}$, и последовательности $\varphi_n(x) := e^{-n}\omega_1(x-n) \subset \mathcal{D}$, $n \in \mathbb{N}$ имеем:*

$$\hat{u}[\varphi_n] = \int\limits_0^\infty \exp(x^2 - n)\omega_1(x-n)\,dx \overset{x=\xi+n}{=} \int\limits_{-1}^1 \exp\left((n+\xi)^2 - n\right)\omega_1(\xi)\,d\xi >$$

$$> \exp\left((n-1)^2 - n\right)\int\limits_{-1}^1 \omega_1(\xi)\,d\xi \to +\infty \text{ } \textit{при } n \to +\infty \quad \textit{и}$$

$$\forall m \in \mathbb{N}_0 \quad \|\varphi_n\|_m = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R} \\ k\in\{0,1,\dots,m\}}} (1+|x|)^m |\varphi_n^{(k)}(x)| =$$

$$= \max_{\substack{|\xi|\leqslant 1 \\ k\in\{0,1,\dots,m\}}} (1+n+\xi)^m e^{-n}|\omega_1^{(k)}(\xi)| \to 0 \text{ } \textit{при } n \to +\infty.$$

Лемма 7.3. *Пусть $f \in \mathcal{D}'$ и $\operatorname{supp} f$ – ограниченное множество, т.е. f – финитная обобщенная функция на пространстве $\mathcal{D}$. Тогда f продолжается до непрерывного функционала $\tilde{f}$ на пространстве $\mathcal{S}$ по формуле*

$$\tilde{f}[\varphi] := f[\eta\varphi],\ \forall\varphi \in \mathcal{S},$$

где $\eta \in \mathcal{D}$ и $\eta \equiv 1$ на некоторой окрестности множества $\operatorname{supp} f$. Функционал $\tilde{f}$ не зависит от выбора функции η.

Доказательство. Функция η, удовлетворяющая указанным условиям, существует в силу леммы 7.1. Линейность функционала $\tilde{f}$ очевидна. Его независимость от выбора функции η следует из того, что разность $\eta_1 - \eta_2$ двух таких функций равна нулю на $\operatorname{supp} f$. Остается доказать непрерывность функционала $\tilde{f}$ в точке 0. Пусть $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{S}$ и $\varphi_k \overset{\mathcal{S}}{\to} 0$ при $k \to \infty$. Тогда $\eta\varphi_k \in \mathcal{D}$ и $\eta\varphi_k \overset{\mathcal{D}}{\to} 0$, $k \to \infty$, следовательно $f[\eta\varphi_k] \to 0$, $k \to \infty$. □

Оказывается, что если носитель обобщенной функции состоит из одной точки x_0, то такая обобщенная функция представима единственным способом в виде линейной комбинации δ-функции и ее производных.[5]

Теорема 7.1 (О структуре множества обобщенных функций из $\mathcal{D}'$ и $\mathcal{S}'$ с точечным носителем.)**.** *Пусть $f \in \mathcal{D}'$ (или $f \in \mathcal{S}'$) и* $\operatorname{supp} f = x_0 \in \mathbb{R}$. *Тогда*

$$f = \sum_{\ell=0}^{m} c_\ell D^\ell \delta_{x_0} \tag{7.6}$$

для некоторых $m \in \mathbb{N}_0$ и $c_\ell \in \mathbb{R}$ и такое представление единственно.

Доказательство. Пусть $f \in \mathcal{D}'$ и $\tilde{f}$ – продолжение f на $\mathcal{S}$ в соответствии с леммой 7.3. Пусть $\eta \in \mathcal{D}([-1,1])$, $\eta(x) \equiv 1$ при $x \in [-1/2, 1/2]$, тогда

$$f = \eta(k(x - x_0))f, \ \forall k \in \mathbb{N}. \tag{7.7}$$

По лемме 7.2 $\exists C > 0, m \in \mathbb{N}_0$ такие, что $|\tilde{f}[\varphi]| \leqslant C\|\varphi\|_m$, $\forall \varphi \in \mathcal{S}$ и тогда

$$|f[\varphi]| \leqslant C\|\varphi\|_m, \ \forall \varphi \in \mathcal{D}. \tag{7.8}$$

Для произвольного $\varphi \in \mathcal{D}$ положим

$$\psi_k(x) := \eta(k(x - x_0))\varphi_m(x), \ k \in \mathbb{N},$$
$$\text{где } \varphi_m(x) := \eta(x - x_0)\left(\varphi(x) - \sum_{\ell=0}^{m} \frac{1}{\ell!}\varphi^{(\ell)}(x_0)(x - x_0)^\ell\right).$$

Поскольку при $\ell = 0, 1, \ldots, m$

$$\varphi_m^{(\ell)}(x) = O\left(|x|^{m+1-\ell}\right) \text{ при } x \to 0,$$
$$\frac{d^\ell}{dx^\ell}\eta(k(x - x_0)) = O\left(k^\ell\right) \text{ при } k \to \infty,$$

в силу (7.8) получим

$$|f[\psi_k]| \leqslant C \sup_{\substack{\ell=0,1,\ldots,m,\\ |x|\leqslant 1/k}} (1 + |x|)^m \left|\frac{d^\ell}{dx^\ell}\left(\eta(k(x - x_0))\varphi_m(x)\right)\right| \leqslant$$
$$\leqslant C_1 \sup_{\substack{\ell=0,1,\ldots,m,\\ |x|\leqslant 1/k}} \sum_{j=0}^{\ell} \left|\frac{d^{\ell-j}}{dx^{\ell-j}}\left(\eta(k(x - x_0))\right)\right| \left|\frac{d^j}{dx^j}\varphi_m(x)\right| \leqslant$$

[5] см. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981, с. 153–155. В гл. II этой книги можно найти и многие другие сведения о обобщенных функциях.

$$\leqslant C_2 \sup_{\ell=0,1,\ldots,m} \sum_{j=0}^{\ell} k^{-m-1+j} k^{\ell-j} \leqslant \frac{C_3}{k},\ k \to \infty.$$

Но в силу (7.7) $f[\psi_k] = f[\eta(k(x-x_0))\varphi_m] = (\eta(k(x-x_0))f)\,[\varphi_m] = f[\varphi_m]$ – не зависит от k, что возможно лишь при $f[\psi_k(x)] = f[\varphi_m] = 0$ и тогда

$$f[\varphi] = (\eta(x-x_0)f)\,[\varphi(x)] = f[\eta(x-x_0)\varphi(x)] =$$
$$= f\left[\varphi_m(x) + \eta(x-x_0)\sum_{\ell=0}^{m} \frac{1}{\ell!}\varphi^{(\ell)}(x_0)(x-x_0)^{\ell}\right] =$$
$$= \sum_{\ell=0}^{m} \frac{1}{\ell!}\varphi^{(\ell)}(x_0) f\left[\eta(x-x_0)(x-x_0)^{\ell}\right] = \sum_{\ell=0}^{m} c_\ell \left(D^{\ell}\delta_{x_0}\right)[\varphi],$$
$$\text{где } c_\ell = (-1)^{\ell} f\left[\eta(x-x_0)(x-x_0)^{\ell}\right]/\ell!,$$

что и влечет (7.6). Пусть теперь $f \in \mathcal{S}'$. Тогда по доказанному имеем равенство

$$f|_{\mathcal{D}'} = \sum_{\ell=0}^{m} c_\ell D^{\ell}\hat{\delta}_{x_0}$$

в $\mathcal{D}'$, что ввиду $\operatorname{supp} f = x_0$ и $f = \eta(x) f$ дает (7.6).

Коэффициенты представления (7.6) однозначно определяются следующим из (7.6) очевидным равенством

$$f\left[\eta(x-x_0)(x-x_0)^{j}\right] = (-1)^{j} c_j j!.$$

$\square$

7.3.1 Преобразование Фурье на пространствах $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}'$

В теории обобщенных функций мы будем использовать следующее обозначение для преобразования Фурье

$$F_f(\lambda) := \mathcal{F}[f](\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t}\, dt,\ f \in \mathcal{S},$$

т.к. символ « $\hat{}$ » используется для обозначения обобщенных функций. Поскольку

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \left|f(t)t^{k}\right| \leqslant \frac{C_1(k)}{1+t^2},\ C_1(k) > 0,$$

то интеграл

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)(-it)^k e^{-i\lambda t}\,dt$$

абсолютно и равномерно по $\lambda \in \mathbb{R}$ сходится. Значит, функция $F_f(\lambda)$ бесконечно дифференцируема и

$$\frac{d^k}{d\lambda^k}F_f(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)(-it)^k e^{-i\lambda t}\,dt.$$

С другой стороны, $\forall m \in \mathbb{N}$ с помощью интегрирования по частям имеем:

$$|\lambda^m F_f(\lambda)| = \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(-i\lambda)^m f(t)e^{-i\lambda t}\,dt\right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{d^m}{dt^m}\left(e^{-i\lambda t}\right)\,dt\right| = \left|\frac{(-1)^m}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^{(m)}(t)e^{-i\lambda t}\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|f^{(m)}(t)\right|\,dt =: C_2(m),\ C_2(m) > 0.$$

Тем самым, $F_f(\lambda)$ — быстро убывающая функция, и поэтому $F_f(\lambda) \in \mathcal{S}$. Ввиду того что формула обратного преобразования Фурье очень похожа на формулу прямого преобразования Фурье, то и из $f \in \mathcal{S}$ следует $\mathcal{F}^{-1}[f] \in \mathcal{S}$. Тем самым, $\mathcal{F}\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ — взаимно-однозначное преобразование. В этом и состоит смысл расширения пространства основных функций $\mathcal{D}$ до пространства $\mathcal{S}$, поскольку преобразование Фурье ненулевой функции из пространства $\mathcal{D}$ финитной функцией не является.

Пусть теперь $f \in \mathcal{D}$. Тогда

$$|F_f(\lambda)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,dt,$$

поэтому $\widehat{F_f} \in \mathcal{S}'$, и $\forall \varphi \in \mathcal{S}$ имеем

$$\widehat{F_f}\,[\varphi] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_f(\lambda)\varphi(\lambda)\,d\lambda = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}\,dt\right)\varphi(\lambda)\,d\lambda =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda) e^{-i\lambda t} \, d\lambda \right) \, dt = \hat{f}[F_\varphi].$$

В этой выкладке мы изменили порядок интегрирования, поскольку интеграл по t фактически берется по конечному сегменту, а интеграл по λ сходится равномерно по t.

Полученное равенство мотивирует следующее определение преобразования Фурье функции $\hat{f} \in \mathcal{S}'$:

$$F_{\hat{f}}\,[\varphi] := \hat{f}[F_\varphi],\ \forall \varphi \in \mathcal{S}. \tag{7.9}$$

Пример 7.6. *Вычислим преобразование Фурье для $\hat{\delta}$-функции.*

$$F_{\hat{\delta}_{x_0}}\,[\varphi] = \hat{\delta}_{x_0}\,[F_\varphi(x)] = F_\varphi(x_0) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda) e^{-ix_0\lambda} \, d\lambda = \widehat{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ix_0\lambda}}\,[\varphi(\lambda)]\,.$$

Таким образом, получаем равенство в пространстве $\mathcal{S}'$:

$$F_{\hat{\delta}_{x_0}} = \widehat{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ix_0\lambda}}.$$

Литература

[1] Агранович М.С. Обобщенные функции. М.: МЦНМО, 2008, 128 с.

[2] Будак Б.М., Фомин С.В. Кратные интегралы и ряды. Изд. 3-е, М. Физматлит, 2002. 512 с.

[3] Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Медведев Г.Н., Шишкин А.А. Математический анализ в вопросах и задачах. 4-е изд., 2001.

[4] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. Гл. II: обобщенные функции, с. 82–189.

[5] Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Астрель, 2002.

[6] Зорич В.А., Математический анализ, часть II, М.: Наука, 1984.

[7] Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Часть II. 5-е изд. М. Физматлит, 2004. 464 с.

[8] Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ, часть II, М.: ТК Велби, изд-во Проспект, 2004, 368 с.

[9] Постников М.М. Гладкие многообразия, М.: Наука, 1987, лекции 3–5.

[10] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х томах. 8-е изд. М.: Физматлит, 2003. 864 с.

[11] Щербаков Р.Н., Пичурин Л.Ф. Дифференциалы помогают геометрии. М. Просвещение, 1982; УРСС, 2010.