

## 2. Математические модели теории нелинейных волн

### 1. Метод характеристик

Рассмотрим уравнение колебания на бесконечной прямой

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \quad (1)$$

решение которого имеет вид:

$$u(x, t) = f_1(x - at) + f_2(x + at), \quad (2)$$

и рассмотрим два уравнения в частных производных первого порядка, решения которых имеют вид (3) и (4):

$$u_t^{(1)} + au_x^{(1)} = 0, \quad u^{(1)}(x, t) = f_1(x - at) \quad (3)$$

$$u_t^{(2)} - au_x^{(2)} = 0, \quad u^{(2)}(x, t) = f_2(x + at) \quad (4)$$

Уравнения (3) и (4) называются линейными уравнениями переноса. Их решения (функции  $f_1(x-at)$  и  $f_2(x+at)$ ) переносят начальные профили  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  вдоль оси  $x$  с постоянной скоростью  $a$  в положительном и отрицательном направлениях.

Если решение уравнений переноса является дважды непрерывно дифференцируемой функцией своего аргумента, то оно удовлетворяет и уравнению колебаний (1).

При распространении волны не происходит искажения ее профиля по времени, то есть отсутствует эффект дисперсии волны. Это связано с постоянством скорости распространения волны, которое определяется постоянством параметров среды.

Однако во многих физических задачах приходится учитывать изменение свойств среды под действием распространяющихся в ней волн, что приводит к зависимости скорости распространения волн от решения. В этом случае необходимо рассматривать квазилинейное уравнение переноса:

$$u_t + F(u)u_x = 0. \quad (5)$$

**Рассмотрим задачу Коши на бесконечной прямой**

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0, & -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & -\infty < x < \infty, \end{cases} \quad (6)$$

**Решение ищем в виде**  $u(x, t) = f(x - u(x, t)t)$ .

**Тогда**

$$\begin{aligned} u_x &= (1 - u_x t) f'(\xi), \\ u_t &= (-u - u_t t) f'(\xi) \end{aligned} \quad \xi = x - ut.$$

**и получаем**

$$-t(u_t + uu_x) f'(\xi) = 0,$$

где  $f(\xi)$  - любая дифференцируемая функция.

**Решение задачи (6), (7) определяется из неявного уравнения**

$$u(x, t) = u_0(x - u(x, t)t) \quad (8)$$

**Рассмотрим на плоскости  $(x, t)$  кривую, определяемую уравнением (9) – характеристику уравнения (6):**

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{u(x, t)} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = u(x, t) \quad (9)$$

**Если  $x = x(t)$  - решение уравнения (9), то**

$$\frac{d}{dt} u(x(t), t) = u_t + u_x \frac{dx}{dt} = u_t + u u_x \Big|_{x=x(t)} = 0$$

**и  $u(x(t), t)$  является константой на кривой  $x = x(t)$  и, следовательно,  $x = x(t)$  – прямая линия на плоскости  $(x, t)$  с наклоном**

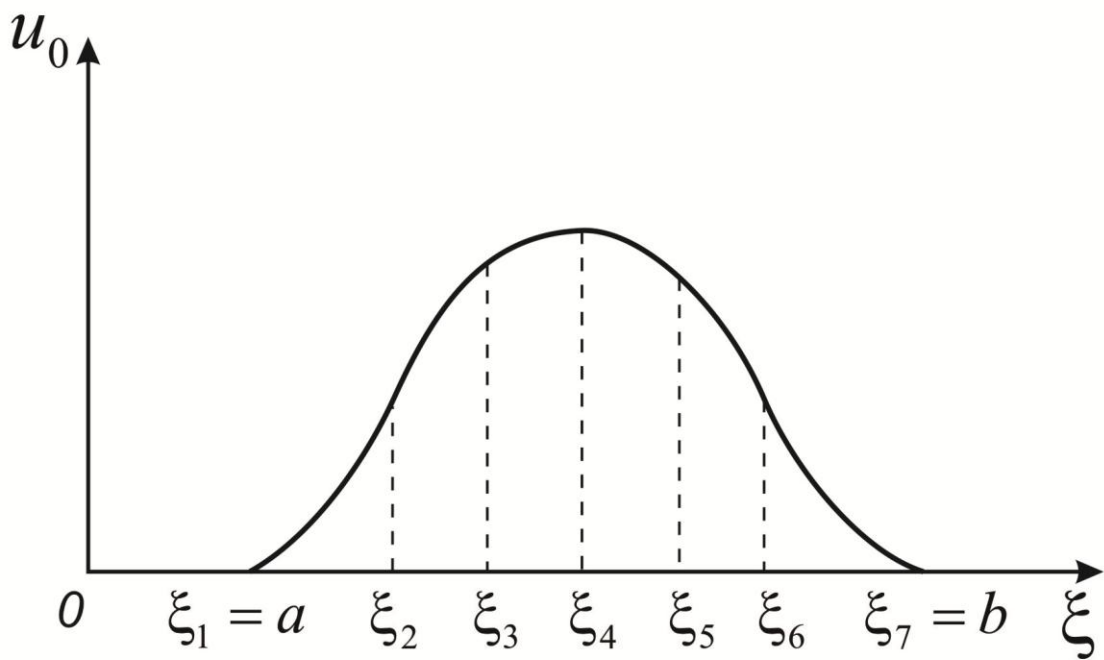
$$u(x(t), t) = u(x(0), 0) = u_0(x(0)),$$

**определяемым начальной функцией  $u_0(\xi)$ ,  $\xi = x(0)$ .**

**Уравнение для этой прямой имеет вид:**

$$\frac{t}{1} = \frac{x - \xi}{u_0(\xi)} \quad \Rightarrow \quad x = \xi + u_0(\xi) \cdot t$$

**Мы получили однопараметрическое семейство прямых, зависящих от параметра  $\xi$ , на которых решение  $u(x,t)$  уравнения (6) оказывается постоянным. Это позволяет по начальной функции  $u_0(\xi)$  определить функцию  $u(x,t)$  в любой момент времени  $t$ . Покажем, как это можно сделать практически.**



**Выберем точку**

$$\xi_k \in [a, b]$$

**и построим**

**соответствующую ей  
характеристику  $\Gamma_{\xi_k}$ :**

$$t = \frac{1}{u_0(\xi_k)} x - \frac{\xi_k}{u_0(\xi_k)}$$

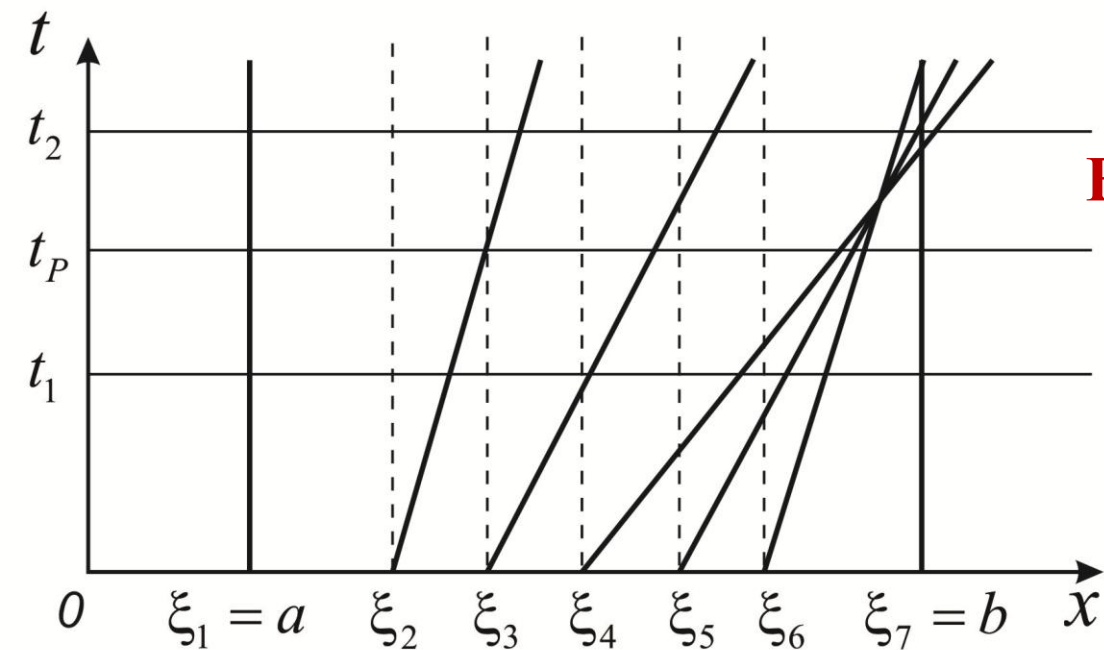
**с углом наклона**

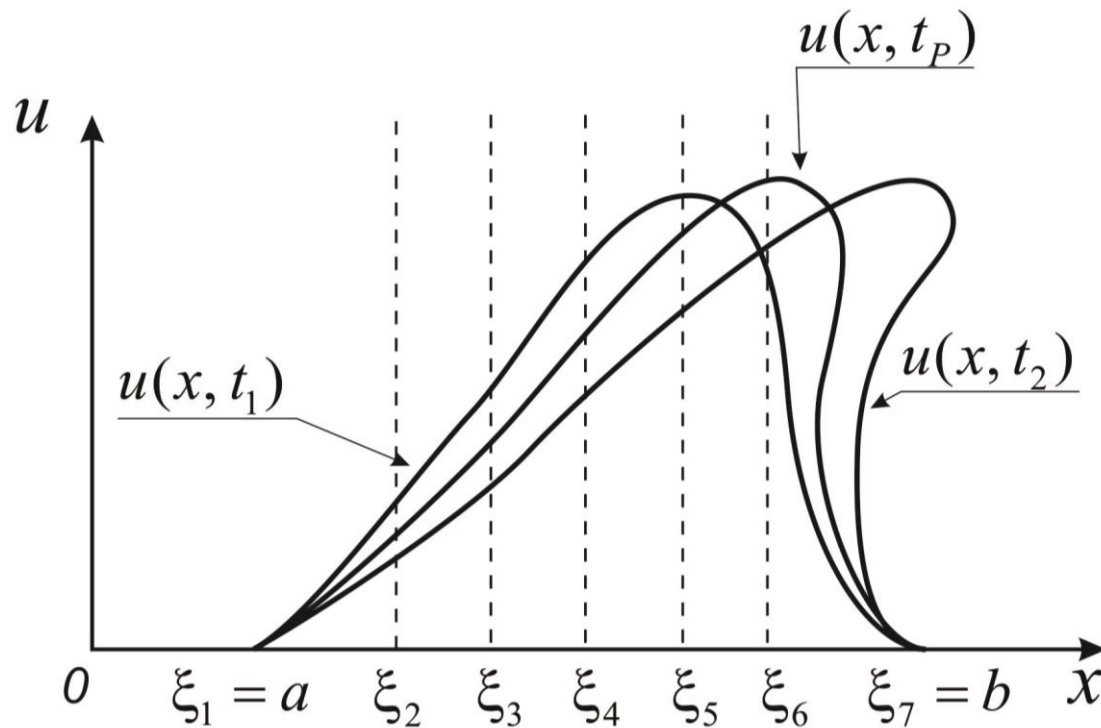
$$\operatorname{tg} \varphi = 1/u_0(\xi_k).$$

**Всюду на характеристике**

$$u_{\Gamma_{\xi_k}} = u_0(\xi_k).$$

**Точка  $(x_k, t_1)$  – точка  
пересечения прямой  $t=t_1$   
с характеристикой  $\Gamma_{\xi_k}$ .**





Скорость переноса начального значения  $u_0(\xi_k)$  вдоль характеристики  $\Gamma_{\xi_k}$  зависит от решения, **профиль  $u_0(x)$  искажается – дисперсия бегущей волны. При  $t \geq t_p$  характеристики пересекаются, профиль неоднозначный – опрокидывание волн.**

**Причина явления опрокидывания волны заключается в том, что, согласно формуле (8)**

$$u(x, t) = u_0(x - u(x, t) \cdot t) \quad (8)$$

**чем выше амплитуда точки, тем с большей скоростью волна распространяется. Поэтому точки вершины волны обгоняют в своем движении точки ее подошвы.**

**Замечание.** Возникновение неоднозначного профиля решения достаточно часто оказывается противоречащим сути физической модели, описываемой уравнением (6)

$$u_t + uu_x = 0, \quad (6)$$

**согласно которой функция  $U(x, t)$  является однозначной функцией.**



**Например, при рассмотрении волн в сплошных средах в одной точке физические параметры не могут иметь различные значения.**

**Для того, чтобы исключить неоднозначные решения необходимо расширить понятие решения уравнения (6)**

$$u_t + uu_x = 0 \quad (6)$$

**и вместо непрерывно дифференцируемых решения рассматривать разрывные.**

**При этом нужно придать новый смысл выражению «функция  $u(x, t)$  удовлетворяет уравнению (6)».**

**Естественным является введение обобщенных решений так, как они вводятся в теории обобщенных функций.**

## 2. Обобщенное решение . Условие на разрыве

**Определение.** Функция  $u(x,t)$  удовлетворяет уравнению (6) **в обобщенном смысле**, если для любого прямоугольника

$$\Pi_{xt} = \{(x,t) : x_1 < x < x_2, 0 < t_1 < t < t_2\}$$

и любой бесконечно дифференцированной и финитной в

$\Pi_{xt}$  функции  $\psi(x,t)$  справедливо интегральное тождество:

$$\int_{\Pi_{xt}} \left\{ u\psi_t + \frac{1}{2}u^2\psi_x \right\} dxdt = 0. \quad (10)$$

**Замечание.** Если  $u \in C^{(1)}$ , то **обобщенное решение (10) удовлетворяет уравнению (6) в обычном смысле:** проинтегрируем (10) по частям

$$\int_{\Pi_{xt}} \{u_t + uu_x\} \psi dxdt = 0. \quad (11)$$

В силу произвольности  $\Pi_{xt}$  и  $\psi$  из (11) получим (6).

**Замечание.** Для получения формулы (10) запишем уравнение (6) в следующем виде:

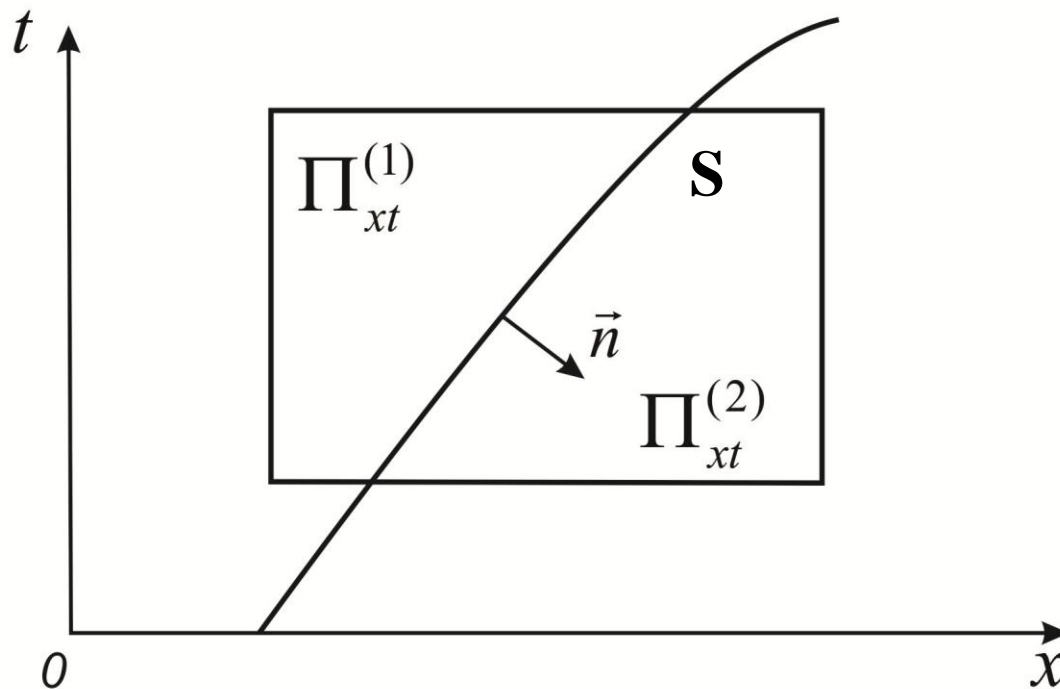
$$u_t + uu_x = u_t + \left( \frac{u^2}{2} \right)_x = 0.$$

Умножим это уравнение на функцию  $\psi$  и проинтегрируем по прямоугольнику  $\Pi_{x,t}$  по частям, учитывая финитность функции  $\psi$  :

$$\int_{\Pi_{x,t}} \left\{ u_t + \left( \frac{u^2}{2} \right)_x \right\} \psi dxdt = \int_{\Pi_{x,t}} \left\{ u\psi_t + \frac{1}{2} u^2 \psi_x \right\} dxdt = 0.$$

Пусть  $u(x,t)$  – **разрывное решение**, имеющее **единственный разрыв** на кривой  $S = \{(x,t) : x = s(t)\}$ :

Пусть  $u(x,t) \in C^{(1)}$  при  $(x,t) \in \Pi_{x,t}^{(\ell)}$ ,  $\ell = 1, 2$



Функция  $u(x,t)$  в областях  $\Pi_{x,t}^{(\ell)}$ ,  $\ell = 1, 2$  удовлетворяет уравнению (6) в классическом смысле.

Проинтегрируем (10) по частям в области  $\Pi_{x,t}^{(1)}$  :

$$\int_{\Pi_{xt}^{(1)}} \left\{ u\psi_t + (1/2)u^2\psi_x \right\} dxdt =$$

$$= \int_{\mathbf{S}} \left\{ \psi \cos(\hat{nt})u^- + (1/2)\psi \cos(\hat{nx})(u^-)^2 \right\} ds$$
(12)

и в области  $\Pi_{x,t}^{(2)}$ :

$$\int_{\Pi_{xt}^{(2)}} \left\{ u\psi_t + (1/2)u^2\psi_x \right\} dxdt =$$

$$= - \int_{\mathbf{S}} \left\{ \psi \cos(\hat{nt})u^+ + (1/2)\psi \cos(\hat{nx})(u^+)^2 \right\} ds,$$
(13)

где  $\vec{n} = \left\{ \cos(\hat{nx}), \cos(\hat{nt}) \right\}$ ,  $u^+$ ,  $u^-$  - предельные значения  $u(x,t)$  на кривой  $\mathbf{S}$  при стремлении к ней справа и слева.

**Замечание.** При получении формул (12) и (13) была использована **формула интегрирования по частям:**

$$\int_D u \frac{\partial v}{\partial x_k} dx = \oint_{\Gamma} uv \cos \varphi_k ds - \int_D v \frac{\partial u}{\partial x_k} dx,$$

где  $D \in R^m$  - область с гладкой (или хотя бы кусочно-гладкой границей)  $\Gamma$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ ,  $\varphi_k$  - угол между осью  $Ox_k$  и внешней нормалью к поверхности  $\Gamma$ .

Формула справедлива для функций  $u, v \in C^{(1)}(\bar{D})$ .

**Сложим (12) и (13):**

$$\int_{\hat{s}} \psi \left\{ \cos(\hat{nt}) [u] + \cos(\hat{nx}) \left[ \frac{u^2}{2} \right] \right\} ds = 0, \quad (14)$$

где  $[u] = u^+ - u^-$ . В силу произвольности  $\psi(x, y)$  из (14)  $\Rightarrow$

$$\cos(\hat{nt}) [u] + \cos(\hat{nx}) \left[ \frac{u^2}{2} \right] \Big|_{\hat{s}} = 0. \quad (15)$$

**Так как**

$$\cos(\hat{nt}) = \frac{-\dot{s}(t)}{\sqrt{1 + \dot{s}^2(t)}}, \quad \cos(\hat{nx}) = \frac{1}{\sqrt{1 + \dot{s}^2(t)}}, \quad (16)$$

то (15), (16)  $\Rightarrow$

$$\dot{s}(t) = \frac{u^+ + u^-}{2}, \quad (17)$$

где  $V_p = \dot{s}(t)$  - скорость распространения разрыва.

**Формула (17) называется формулой Гюгонио – Ренкина или формулой условий на разрыве.**

**Формула (17) позволяет определить скорость распространения разрыва по значениям  $u^\pm$ , но не дает ответа на вопрос о положении разрыва  $x=s(t)$ .**



Рассмотрим уравнение (6), записанное в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} u + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{2} \right) = 0 \quad \Rightarrow$$

одномерного уравнения непрерывности или закона сохранения. Интегрируя по  $x$ , получим:

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} u dx = 0, \quad I = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x) dx,$$

предполагая, что  $u \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \pm\infty$ .

**Площадь  $I$  под кривой  $u=u(x, t)$  оказывается инвариантной во времени, то есть является интегралом движения.**

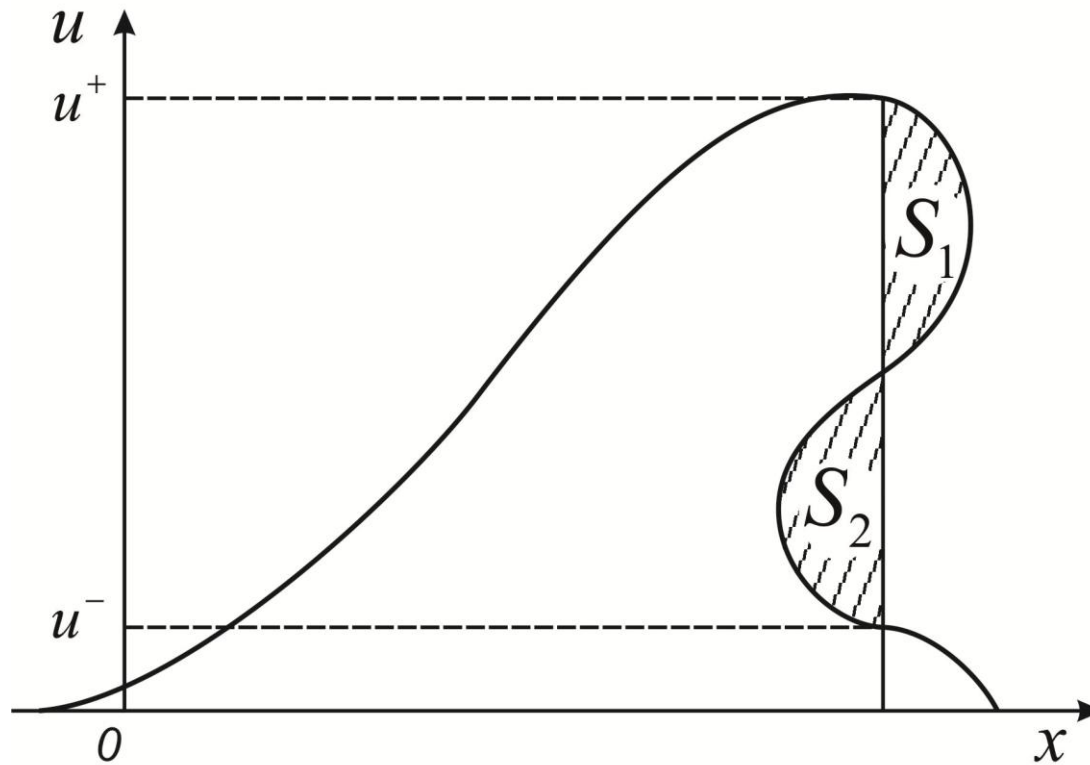
**Основная идея при проведении разрыва состоит в том, чтобы при построении разрыва сохранить этот интеграл движения для разрывного решения.**

**Разрыв  $x = s(t)$  нужно провести так, чтобы интеграл  $I(u)$ , отвечающий разрывному решению, был равен интегралу  $I(u_0)$  для начальной функции.**

**Разрыв  $x = s(t)$  проводится таким образом, чтобы площади  $S_1$  и  $S_2$  заштрихованных на рисунке областей совпадали.**

**В результате из непрерывного неоднозначного решения получается разрывное, но уже однозначное решение, являющееся обобщенным решением уравнения (6).**

**Условие на разрыве (17) выполняется при этом автоматически.**



**Разрыв  $x=s(t)$  нужно построить так, чтобы  $I(u)$ , отвечающий разрывному решению, был равен  $I(u_0)$  для начальной функции  $u_0$ .**

### 3. Уравнение Кортевега – де Фриза и законы сохранения

Функция  $\eta(x, t)$ , описывающая процесс распространения длинных волн на поверхности воды, приближенно удовлетворяет уравнению

$$\eta_t + c_0 \left( 1 + \frac{3}{2h_0} \eta \right) \eta_x + \frac{h_0^2}{6} c_0 \eta_{xxx} = 0, \quad (18a)$$

где  $h_0$  - глубина жидкости,  $c_0 = \sqrt{gh_0}$  - скорость длинных волн на мелкой воде.

Уравнение (18a) называется уравнением Кортевега - де

**Фриза.**

Из (18a) с помощью линейной замены переменных получим:

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad (18б)$$

(18б) – канонический вид уравнения Кортевега - де Фриза.

**Уравнение (18б) обладает бесконечным числом интегралов движения (законов сохранения):**

$$I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) dx, \quad I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2(x, t) dx,$$

и т.д. Это означает, что данное уравнение обладает **глубокой внутренней симметрией**, которая выделяет его среди других нелинейных уравнений и позволяет построить чрезвычайно изящный метод построения точного решения, основанный на обратной задаче рассеяния для одномерного стационарного уравнения Шредингера.

**Фредерик Иоханнес Кортевег 1848-1941 гг.**

**Нидерландский математик.**

**Густав де Фриз. Студент Кортевега.**

**В 1881-1918 гг. Кортевег был профессором математики, механики и астрономии**

**Амстердамского университета.**

**Korteweg D.J., de Vries G. On the Change of Form of Long Waves advancing in a Rectangular Canal and on a New Type of Long Stationary Waves // Philosophical Magazine. 1895. V. 39. P.422-443.**

## 4. Схема метода обратной задачи

### 1) Прямая и обратная задачи рассеяния

**Определение.** Функция  $f(x, t)$  называется **быстроубывающей**, если

$$\max_{0 \leq t \leq T} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |x|) |f(x, t)| dx < \infty. \quad (19)$$

С уравнением Кортвега–де Фриза тесно связано **стационарное уравнение Шредингера (20):**

$$\psi_{xx} + (\lambda - u(x, t))\psi = 0 \quad (20)$$

с потенциалом  $u(x, t)$ , зависящим от  $t$  как от параметра.

**Рассмотрим для уравнения (20) две задачи:**

**а) Нахождение квантовомеханических уровней энергии связанных состояний.**

**Найти такие значения  $\lambda$ , при которых уравнение (20) имеет нетривиальные решения  $\psi(x, t) \in L_2(\mathbb{R}^1)$ . Здесь  $\psi(x, t)$  — **-нормированные на единицу волновые функции.****

**Эта задача имеет решение только при  $\lambda < 0$ .**

**При  $x \rightarrow \infty$  решения имеют асимптотику:**

$$\psi_m(x, t) \sim C_m(t) e^{-\alpha_m x},$$

**где  $\psi_m(x, t)$  - собственная функция, нормированная на 1,  $\lambda_m = -\alpha_m^2$  — собственное значение,**

$$C_m(t) = \lim_{x \rightarrow \infty} \psi_m(x, t) e^{\alpha_m x} \quad (21)$$



**б) Задача рассеяния плоской волны единичной амплитуды на потенциале  $u(x,t)$ .**

**Найти при  $\lambda \geq 0$  ограниченные решения уравнения (20) с заданным характером асимптотического поведения при  $x \rightarrow \pm\infty$  (временная зависимость  $e^{-i\omega t}$  волна движется справа налево):**

$$\psi(x,t) \sim e^{-ikx} + b(k,t)e^{ikx}, \quad x \rightarrow +\infty,$$

$$\psi(x,t) \sim a(k,t)e^{-ikx}, \quad x \rightarrow -\infty,$$

**где  $k^2 = \lambda$ , а подлежащие определению функции  $a(k,t)$  и  $b(k,t)$  - коэффициенты прохождения и отражения, причем**

$$|a(k,t)|^2 + |b(k,t)|^2 = 1.$$

**Совокупность решений задач а) и б)  $\{\alpha_m, C_m\}$ ,  $\{a(k,t), b(k,t)\}$**

**называются данными рассеяния.**

**Прямая задача рассеяния:** определение для заданного потенциала данных рассеяния.

**Обратная задача рассеяния:** определение по заданным данным рассеяния соответствующего потенциала.

Данных рассеяния достаточно для однозначного определения потенциала.

**Схема решения обратной задачи рассеяния.**

а) По данным рассеяния строится функция  $V(x;t)$  – **ядро уравнения Гельфанда – Левитана:**

$$V(x;t) = \sum_{m=1}^n C_m^2(t) e^{-\varkappa_m x} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} b(k,t) e^{ikx} dk \quad (22)$$

**б) Ищется решение **линейного интегрального уравнения Гельфанда – Левитана:****

$$K(x, y; t) + B(x + y; t) + \int_x^\infty B(y + z; t) K(x, z; t) dz = 0 \quad (23)$$

**в) Решив уравнение (23) и найдя  $K(x, y; t)$ , по формуле (24)**

$$u(x, t) = -2 \frac{d}{dx} K(x, x; t) \quad (24)$$

**определяем функцию  $u(x, t)$ , которая и является искомым потенциалом, то есть **решением обратной задачи рассеяния.****

## 2) Решение задачи Коши

Рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{cases} u_t - buu_x + u_{xxx} = 0, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad (25)$$

Решение  $u(x, t)$  задачи Коши (25) назовём **быстроубывающим**, если функция  $u(x, t)$  и все её производные по  $x$  до третьего порядка являются быстроубывающими функциями.

### Теорема 1

Если потенциал  $u(x, t)$  в (20) является **быстроубывающим решением** уравнения Кортевега – де Фриза, то собственные значения  $\lambda_m = -\alpha_m^2$  **не зависят от времени  $t$ .**

## Теорема 2

Если потенциал  $u(x,t)$  в (20) является **быстроубывающим** решением уравнения Кортвега – де Фриза, то данные рассеяния  $C_m(t), b(k,t)$  и  $a(k,t)$  зависят от времени следующим образом:

$$\begin{aligned} C_m(t) &= C_m(0) \exp(4 \varkappa_m^3 t), \quad \varkappa_m^2 = -\lambda_m, \\ b(k,t) &= b(k,0) \exp(i 8 k^3 t), \quad k^2 = \lambda > 0, \\ a(k,t) &= a(k,0) \end{aligned} \quad (26)$$

**Зная данные рассеяния для  $u_0(x) \equiv u(x,0)$ , можно по формулам (26) найти данные рассеяния для  $u(x,t)$  и затем, построив и решив уравнение Гельфанда – Левитана, определить функцию  $u(x,t)$ .**

## Схема построения быстроубывающих решений задачи Коши:

а) Рассматриваем стационарное уравнение Шредингера с потенциалом  $u_0(x)$ :

$$\psi_{xx} + (\lambda - u_0(x))\psi = 0 \quad (27)$$

и определяем данные рассеяния  $\{\varkappa_m, C_m(0)\}$  и  $\{a(k,0), b(k,0)\}$ .

б) По формулам (26) определяем  $C_m(t)$  и  $b(k,t)$  и строим ядро уравнения Гельфанда - Левитана (23):

$$B(x;t) = \sum_{m=1}^n C_m^2(0) \exp(8\varkappa_m^3 t - \varkappa_m x) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} b(k,0) \exp(i8k^3 t + ikx) dk \quad (28)$$

в) Решив уравнение Гельфанда – Левитана (23) с ядром (28), по формуле (24) определяем решение  $u(x,t)$  задачи Коши (25) для уравнения Кортевега – де Фриза.

## 5. Солитонные решения

Рассмотрим решение задачи Коши (25) при

$$u_0(x) = -\frac{2}{ch^2 x} \quad (29)$$

**Данные рассеяния** для уравнения (20) с потенциалом (29)

$$\psi_{xx} + \left( \lambda + \frac{2}{ch^2 x} \right) \psi = 0 \quad (30)$$

имеют вид:  $b(k, 0) = 0$ , существует только одно собственное значение  $\lambda_1 = -1 = -\alpha_1^2$ ,  $C_1(0) = \sqrt{2}$ .

**Ядро уравнения Гельфанда – Левитана** имеет вид

$$B(x; t) = 2e^{8t - x} \quad (31)$$

Рассмотрим **уравнение Гельфанда – Левитана с ядром (31)**:

$$K(x, y; t) + 2e^{8t - x - y} + 2e^{8t - y} \int_x^\infty K(x, z; t) e^{-z} dz = 0 \quad (32)$$

и будем искать его решение в виде

Получим 
$$K(x, y; t) = L(x; t) e^{-y}. \quad (33)$$

$$L(x; t) = -\frac{2e^x}{1 + e^{2x - 8t}} \quad (34)$$

Следовательно,

$$K(x, y; t) = -\frac{2e^{x - y}}{1 + e^{2x - 8t}} \quad (35)$$

и по формуле (24) получим решение задачи Коши (25) с начальной функцией (29):

$$u(x, t) = -2 \frac{d}{dx} \left\{ -\frac{2}{1 + e^{2x - 8t}} \right\} = -\frac{2}{ch^2(x - 4t)}. \quad (36)$$



Решение (36) является частным случаем более общего решения уравнения Кортевега – де Фриза

$$u(x, t) = -\frac{1}{2} \alpha^2 \frac{1}{ch^2 \left\{ \frac{1}{2} \alpha (x - x_0) - \frac{\alpha^3}{2} t \right\}}, \quad (37)$$

соответствующее значение параметров  $\alpha = 2$ ,  $x_0 = 0$ .

Решения уравнения Кортевега – де Фриза вида (37) получили название **СОЛИТОНОВ**. Они описывают бегущие волны неизменной формы, имеющие скорость, прямо пропорциональную амплитуде решения.

Пусть имеется два решения  $u_j(x, t, \alpha_j, x_{0j})$ ,  $j = 1, 2$ , вида (37), находящиеся на большом расстоянии друг от друга (то есть разность  $x_{02} - x_{01}$  велика) и пусть  $\alpha_1 > \alpha_2$ . Тогда эти решения **практически не взаимодействуют** и распространяются независимо друг от друга. Однако со временем солитон  $u_1$ , имеющий большую скорость  $\alpha_1$  распространения, догонит солитон  $u_2$  и **произойдет их нелинейное взаимодействие**.

Замечательным оказывается то, что после этого взаимодействия солитоны  $u_1$  и  $u_2$  **разойдутся («пройдя через друг друга»)**, не изменив своей формы, причем теперь **солитон  $u_1$  будет двигаться впереди солитона  $u_2$** . Единственным результатом взаимодействия будет то, что **солитоны приобретают «скачки фаз»**: величины  $x_{0j}$  получают приращение  $\Delta x_{0j}$ , причем  $\Delta x_1 > 0$ , а  $\Delta x_2 < 0$ .

Тем самым солитон  $u_1$  «прыгает» вперед (вправо) на  $\Delta x_{01}$ , а солитон  $u_2$  получает «отдачу» назад (влево) на величину  $\Delta x_{02}$ .

Эти частицеподобные свойства, проявляющиеся во взаимодействии, обусловили название солитонов и тот огромный интерес, который проявляется к их изучению.

Можно дать следующее определение солитонов, как решений нелинейных уравнений:

**Определение.** Будем называть солитонами такие решения нелинейных уравнений, которые имеют вид бегущих уединенных волн, взаимодействующих таким образом, что после взаимодействия они сохраняют неизменной свою форму, получая лишь приращения в фазах.