Лекция 8. Вейвлет – анализ.

1. Вейвлеты.

Слово «вейвлет» (wavelet – маленькая волна или рябь) введено А.Гроссманом и Ж.Морле в 1982 году в работе, посвященной проблеме анализа сейсмических сигналов, в которых требуется выделить и время (положение) всплеска в сигнале и его спектральный состав (масштаб).

К началу 90 – х годов вейвлет – анализ нашел широкое применение в задачах анализа временных сигналов, распознавания образов и синтеза изображений, шифровки и дешифровки информации и многих других областях.

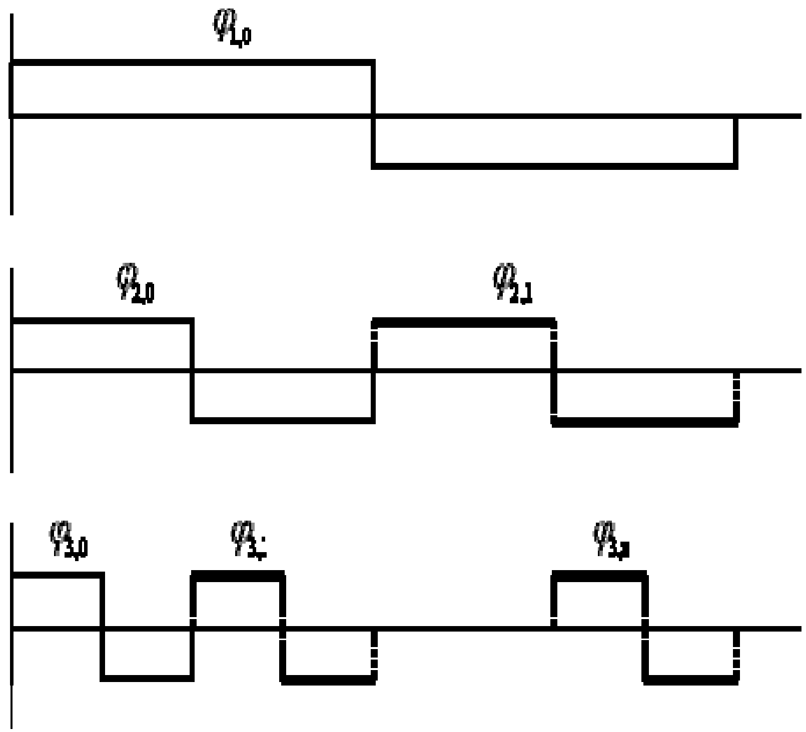
Вейвлет – анализ используется в задачах, связанных с анализом пространственных полей со сложной многомасштабной структурой (турбулентное течение), либо временных сигналов с меняющимся со временем спектральным составом (сейсмические сигналы).

Основная идея: использование базиса, каждая функция которого характеризует как определенную пространственную (временную) частоту, так и место ее локализации в физическом пространстве (во времени).

а) Система Хаара (1909г.)

Совокупность функций Хаара образует полный ортонормированный базис.

Каждая функция строго локализована в физическом пространстве (во времени), но характеризуется медленно спадающим спектром частот (как 1/ν).

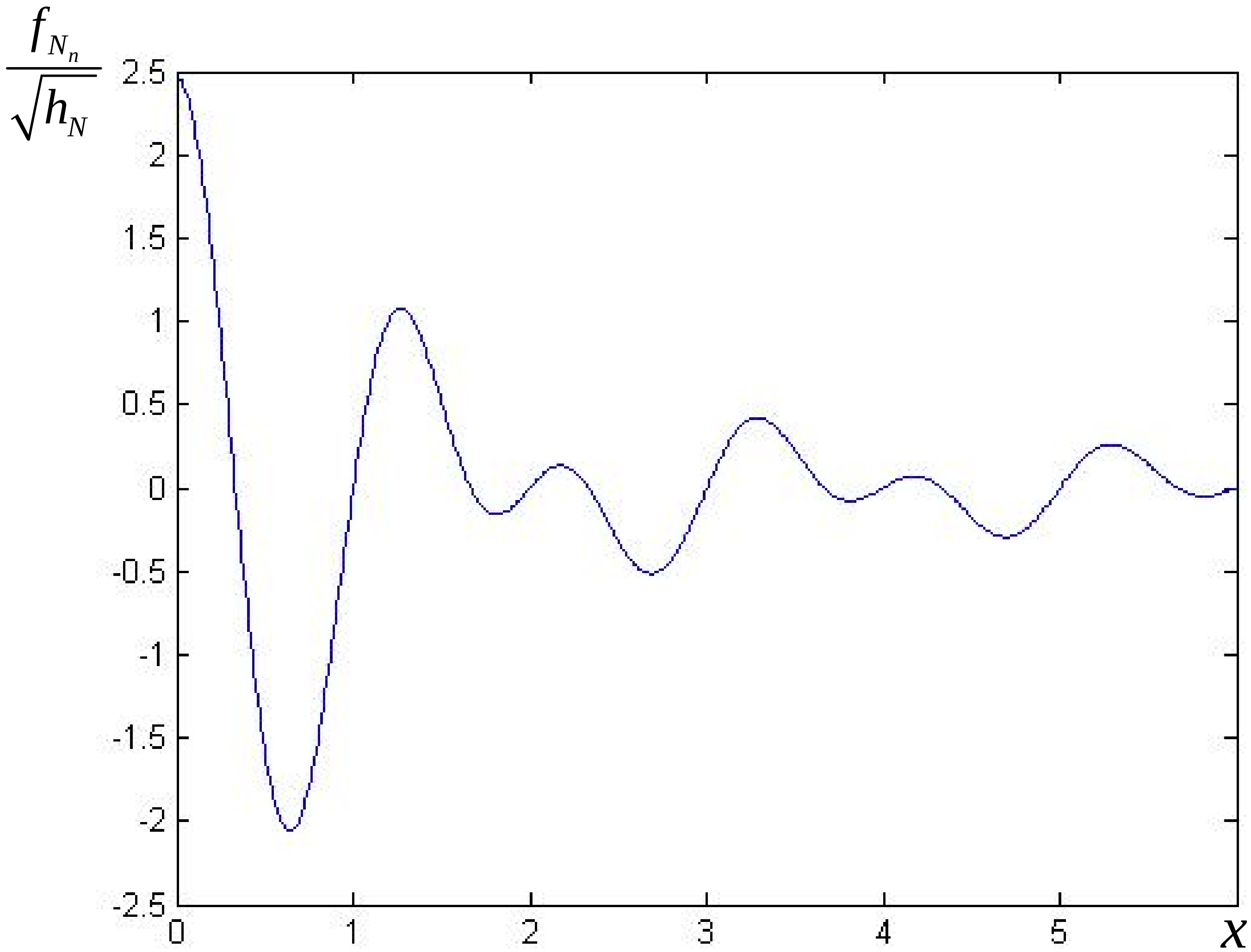


б) Функции Литлвуда – Пелли (1937г.)

Строятся путем вырезания полосы частот в пространстве Фурье.

$$f_{N_n}(x) = \frac{1}{\sqrt{h_N}} \frac{\sin\left[\frac{\pi}{2h_N}\left(x - h_N n\right)\right]}{\frac{\pi}{2}\left(x - h_N n\right)} \cos\left[\frac{3\pi}{2h_N}\left(x - h_N n\right)\right]$$

Каждая функция строго локализована в пространстве частот, но медленно затухает в физическом пространстве (во времени) функции описывают осцилляции, амплитуда которых падает как 1/t.



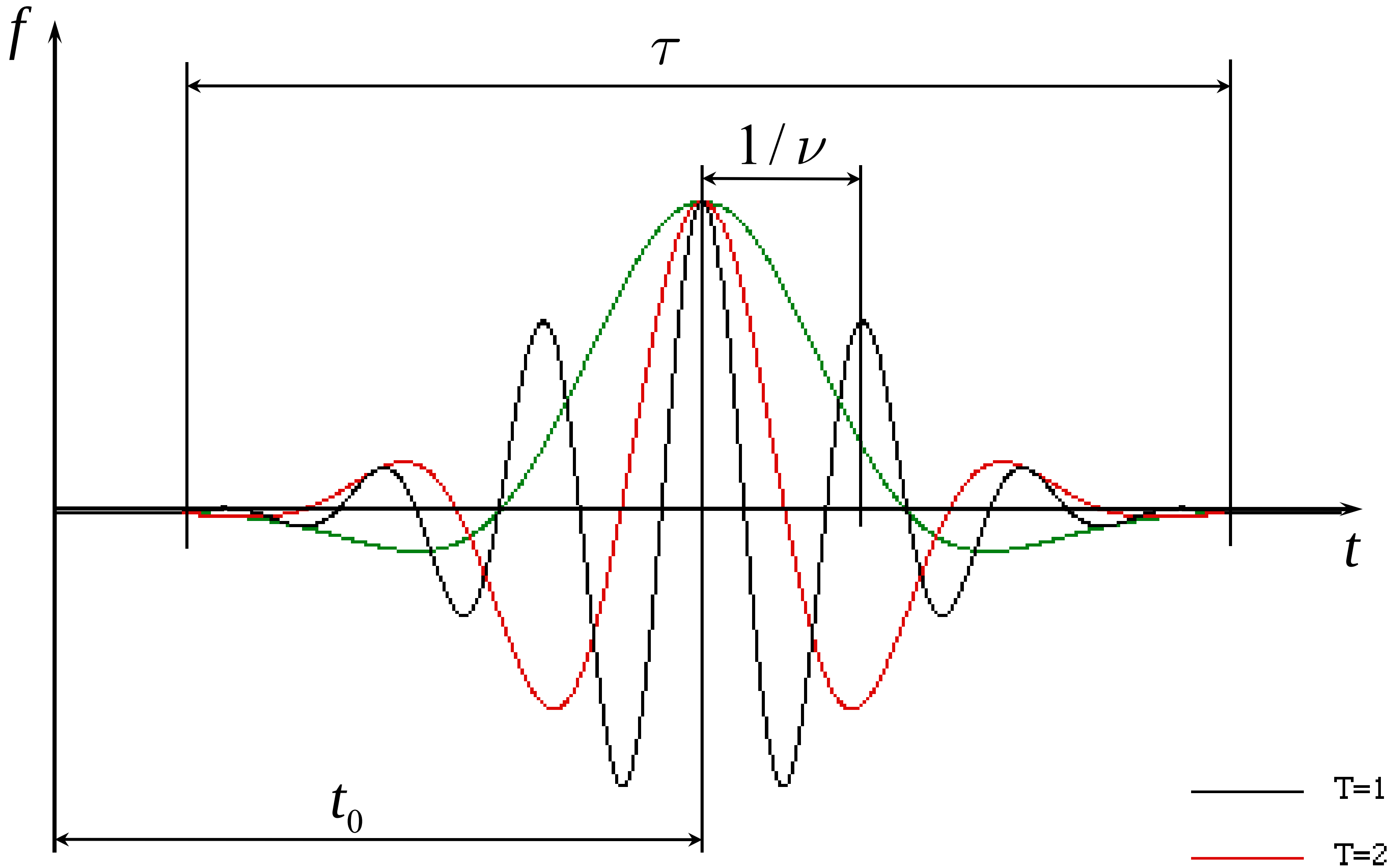
Функция Литлвуда-Пелли для n=0.

в) **Преобразование Габора (Фурье – преобразование в окнах) (1946г.)**

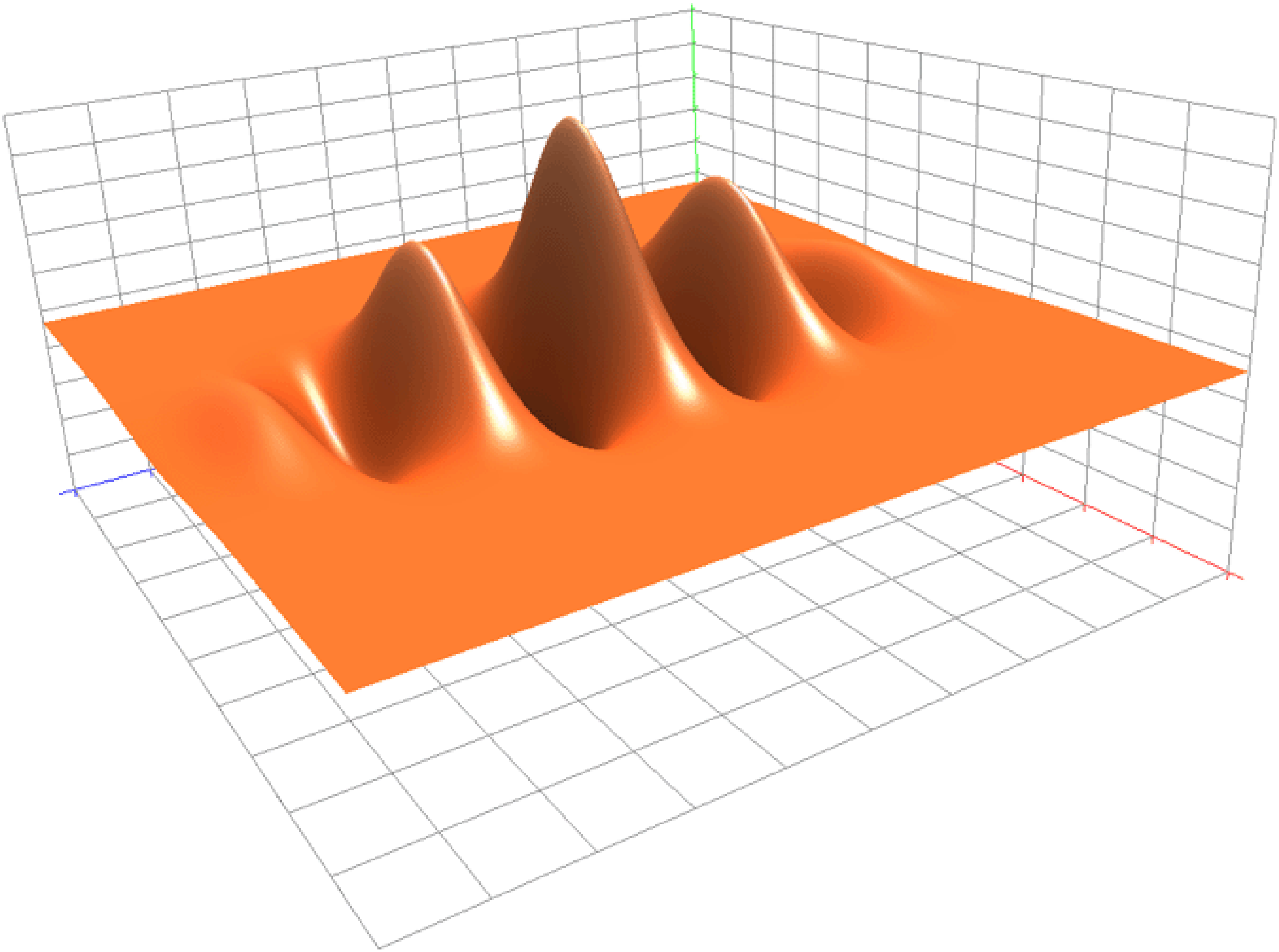
Функция Габора: гармонический сигнал, модулированный функцией Гаусса. Хорошо локализованы и в физическом пространстве (времени) и в пространстве частот. Характеризуются тремя параметрами: положением центра окна t_0, шириной окна τ и частотой осцилляций ν.

Функции различного масштаба не являются подобными – имеют различное число осцилляций.

1-мерный случай



2-мерный случай



г) Вейвлеты

Объединяют в себе два важных свойства подобия и выраженную локализацию в пространстве и времени.

Чтобы быть вейвлетами семейство функций должно удовлетворять следующим требованиям:

1) Допустимость. Анализирующий вейвлет ψ(t), называемый также материнским вейвлетом, должен иметь нулевое среднее значение:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)dt = 0. \tag{1}$$

2) Подобие. Все функции семейства получаются из анализирующего вейвлета путем масштабного преобразования и сдвига:

$$\psi_{a,b}(t) = \psi\left(\frac{t-b}{a}\right). \tag{2}$$

Получается двухпараметрическое семейство функций: параметр *a* – масштаб (растяжение) функции, параметр b – положение (сдвиг) функции.

3) Обратимость. Существование обратного преобразования, однозначно восстанавливающее исходную функцию по ее вейвлет – преобразованию.

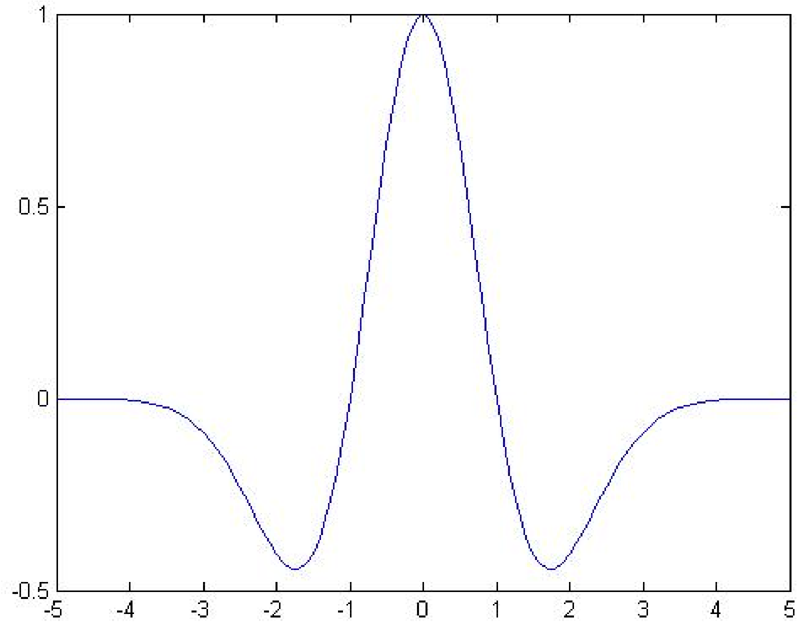
4) Регулярность. Функция ψ(t) должна быть хорошо локализована и в физическом пространстве и в пространстве Фурье.

Выбор конкретного вида вейвлета зависит от целей проведенного анализа.

а) **Вещественный вейвлет «мексиканская шляпа»:**

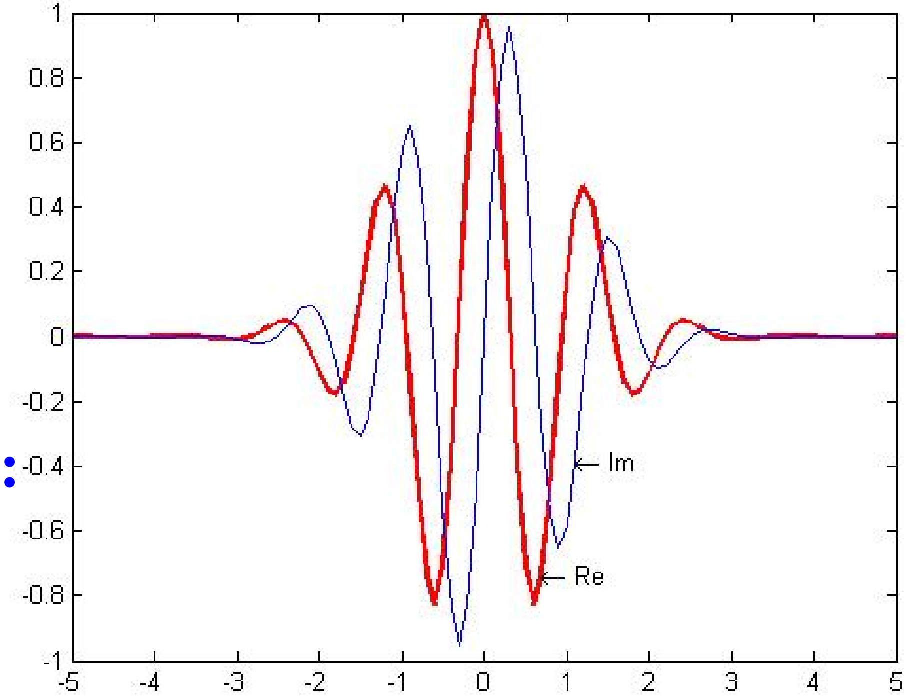
$$\psi(t) = (1 - t^2)e^{-\frac{t^2}{2}} \qquad (3)$$

задачи, требующие хорошего пространственного разрешения и не требовательные к спектральному разрешению.



б) Комплексный вейвлет Морле:

$$\psi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} e^{i\omega t}, \qquad (4)$$



задачи, требующие лучшего спектрального разрешения.

Отличие от функций Габора: выбрав частоту для анализирующего вейвлета (задав число осцилляций), сжимаем или растягиваем функцию как целое, не нарушая подобия отдельных функций семейства.

Преимущество вейвлет – преобразования перед преобразованием Фурье состоит в том, что оно позволяет проследить за изменением спектральных свойств сигнала со временем и указать, какие частоты (масштабы) доминируют в сигнале.

2. Непрерывное вейвлет – преобразование.

Непрерывное вейвлет – преобразование одномерной функции:

$$\omega(a,b) = a^k \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right)dt, \qquad (5)$$

где ψ(t) - вещественная или комплексная функция удовлетворяю-щая условиям 1) – 4).

Если выполняется условие:

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{\psi}(x)}{|\omega|} d\omega < \infty, \qquad (6)$$

где $\psi(x)$ **- фурье – образ анализирующего вейвлета:**

$$\hat{\psi}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(t)e^{-i\omega t}dt, \tag{7}$$

то для преобразования (5) справедлива формула обращения

$$f(t)=\frac{1}{C_{\psi}}\int_{0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)\omega(a,b)\frac{dadb}{a^{3+k}}. \tag{8}$$

Показатель степени масштабного множителя к выбирается в зависимости от целей анализа. При к=-1 равные значения вейвлет - коэффициентов ω(a,b) соответствуют равным амплитудам пульсаций сигнала, независимо от масштаба пульсаций.

На рисунках 1) и 2) показаны два примера вейвлет – разложения простых временных сигналов с помощью вейвлета Морле.

(а) сигнал;

(б) вейвлет преобразование сигнала, полученное с помощью синфазной составляющей вейвлета Морле;

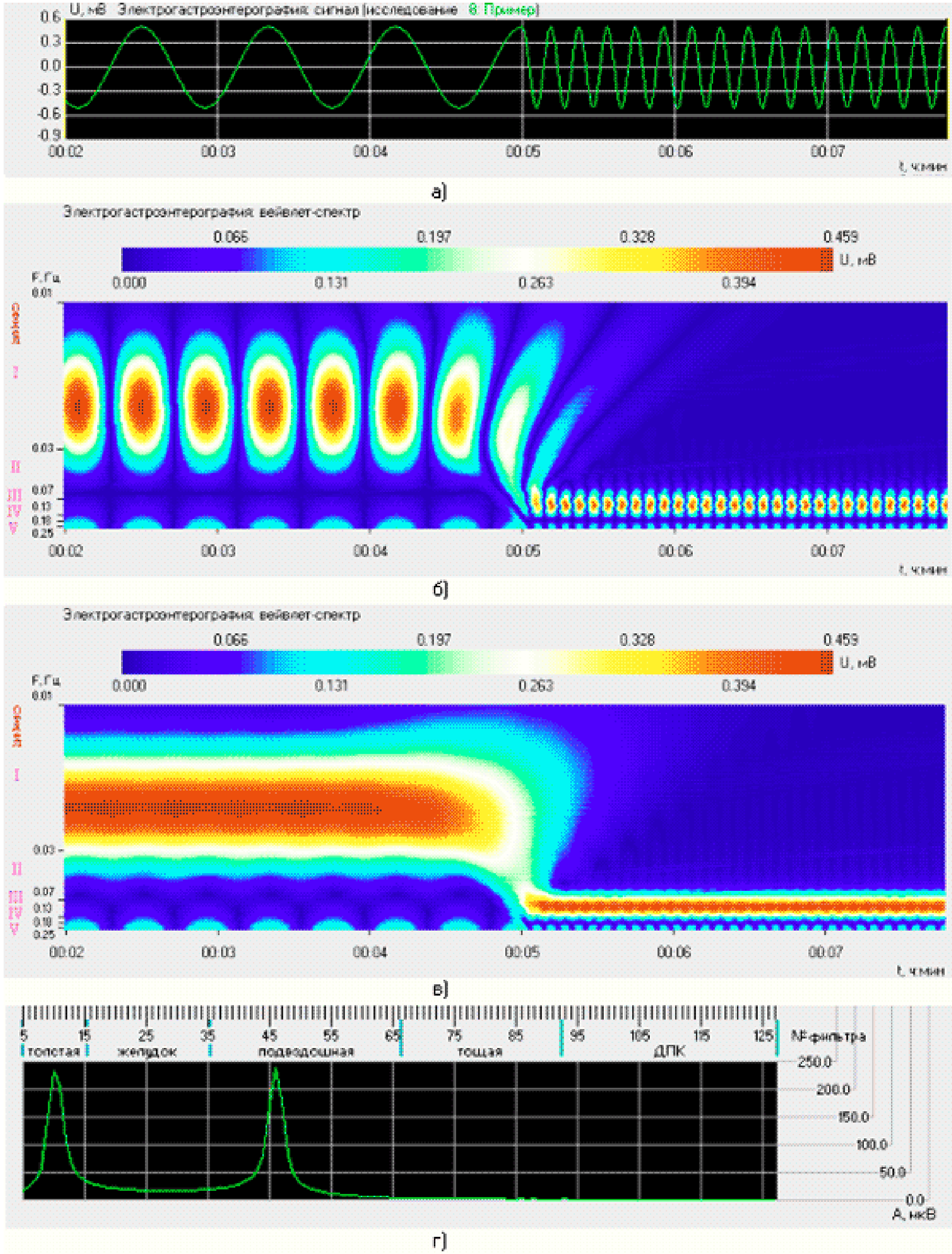
(в) вейвлет преобразование сигнала, полученное с помощью комплексного вейвлета Морле;

(г) спектр сигнала, полученный с помощью ДПФ.

Фурье – преобразование сигналов 1) и 2) практически не отличаются друг от друга, а вейвлет – анализ позволяет восстановить полную эволюцию спектрального сигнала во времени.

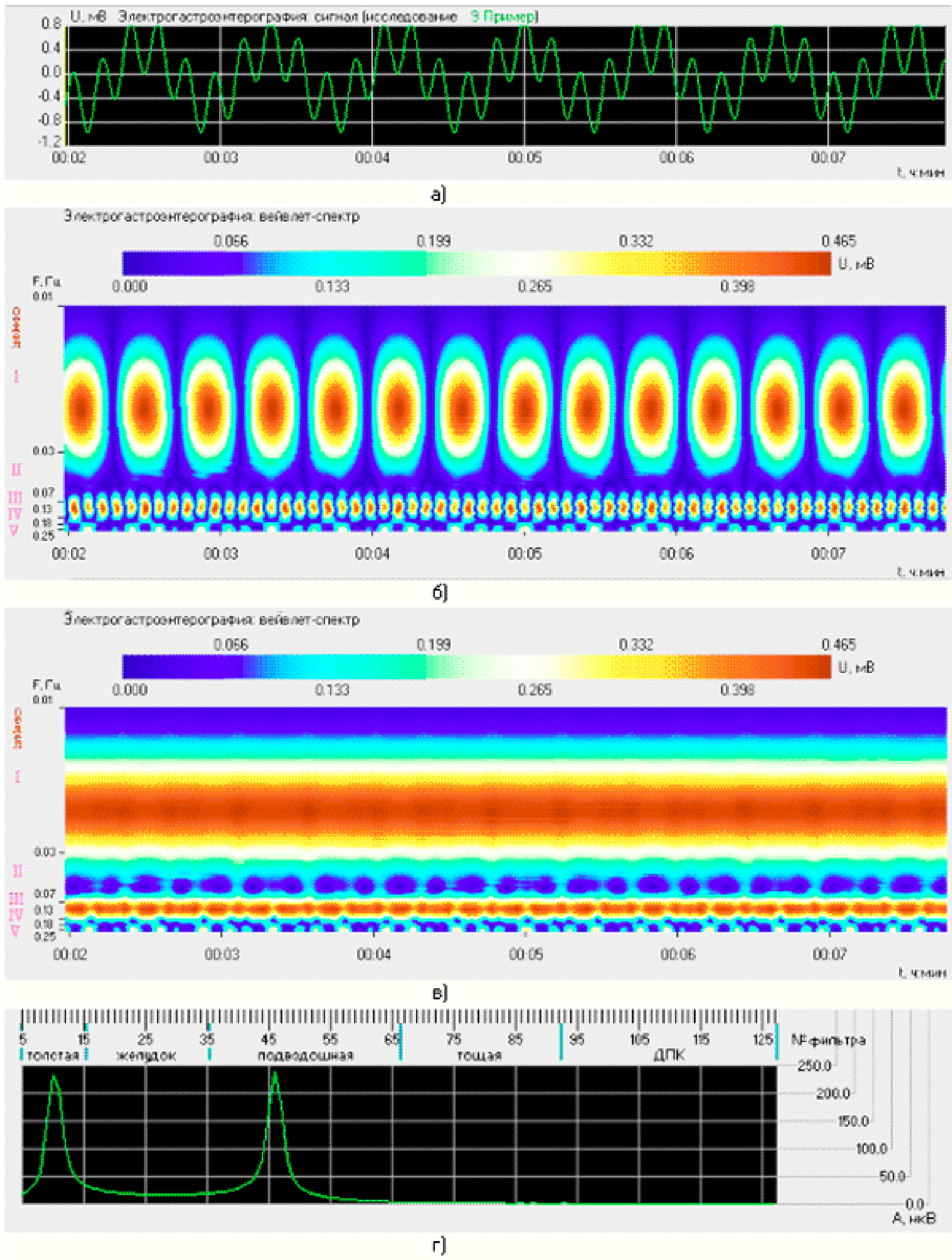
1)

На рисунке показан сигнал, состоящий из двух гармонических составляющих с разными частотами, следующие друг за другом и его спектры.

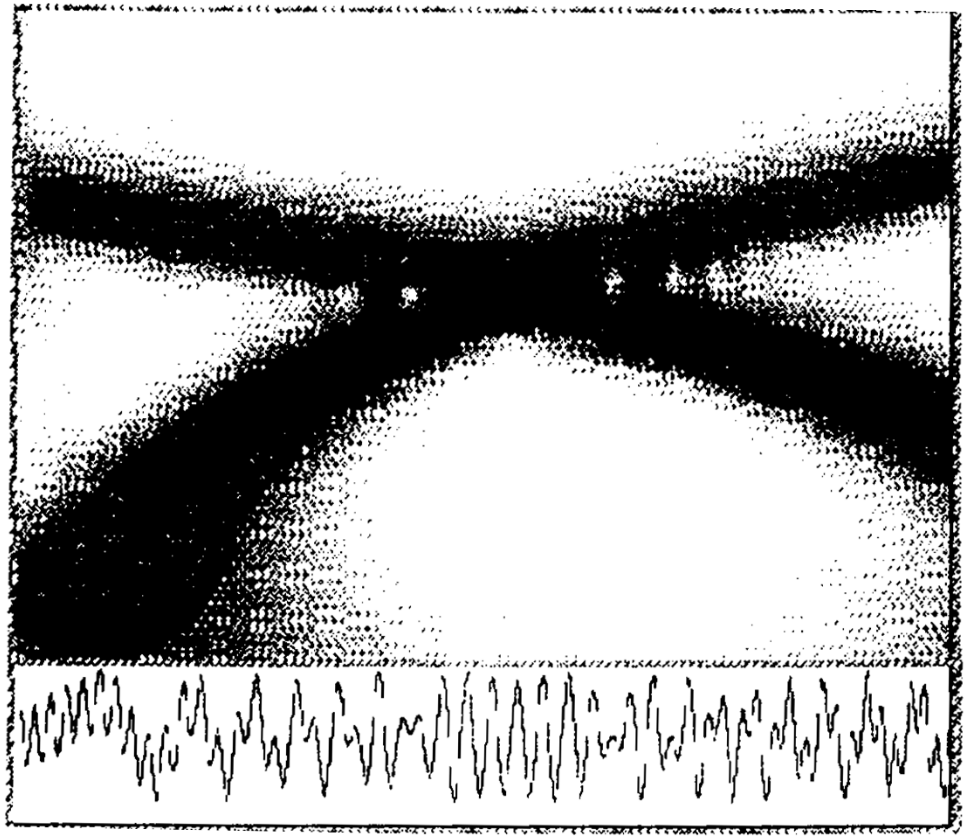


2)

На рисунке показан сигнал, состоящий из суммы двух гармонических составляющих тех же частот, что и сигнал, представленный на рис. 1), и его аналогичные вейвлеты и спектр.



На рисунке 3) показан результат вейвлет – разложения сигнала, представляющего собой суперпозицию двух гармонических составляющих с непрерывно меняющимися частотами (использовался вейвлет Морле). Вейвлет – представление позволяет получить точный вид эволюции частоты каждого из двух сигналов.



Важное свойство вейвлет – представления функций: на этапе разложения сигнала по вейвлетам и на этапе восстановления исходного сигнала по его вейвлет образу **можно использовать различные свойства вейвлетов.** Условие (6) заменяется на более мягкое условие (9):

$$C_{\phi\psi} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left|\hat{\psi}(\omega)\hat{\phi}^*(\omega)\right|}{\left|\omega\right|} d\omega \tag{9}$$

поскольку теперь один из двух вейвлетов может не удовлетворять (6), при условии, что второй вейвлет компенсирует его «недостатки». В этом случае вместо одного из вейвлетов можно использовать **сингулярную функцию** (например, δ – функцию), **не являющуюся вейвлетом.**

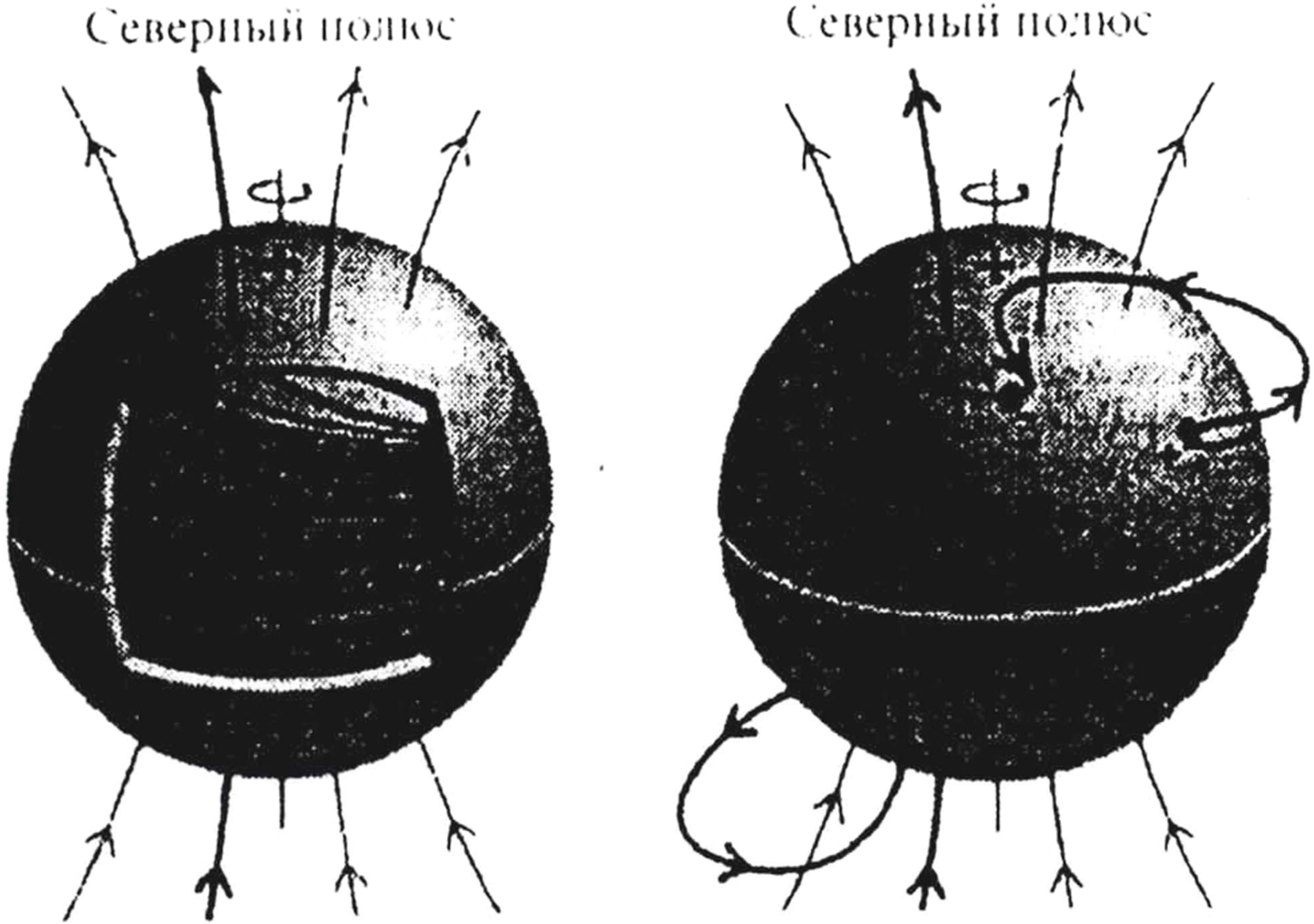
3 . Вейвлет – анализ временных колебаний.

Рассмотрим вейвлет – анализ солнечной активности.

Долговременная запись среднемесячных чисел солнечных пятен начинается с наблюдений Галилея в феврале 1610 года, а с октября 1611 года наблюдения становятся довольно регулярны-ми. Существующий в настоящее время ряд данных не имеет в астрономии аналогов по регулярности и продолжительности наблюдений.

Число пятен связано с интенсивностью магнитного поля Солнца, которое имеет полоидальную компоненту и более мощную азимутальную, образующие замкнутые кольца силовых

линий внутри конвективной оболочки Солнца. Когда напряженность магнитного поля растет, на этих магнитных линиях возникают гигантские петли, выходящие за пределы конвективной оболочки. В местах выхода магнитное поле направлено вертикально и подавляет конвективное течение, приносящее горячую плазму из недр Солнца. В результате температура оказывается ниже, чем на остальной поверхности, и область видна как темное пятно. Чем сильнее магнитное поле, тем больше петель и тем больше пятен видно на поверхности.



Компоненты силовых линий магнитного поля Солнца

График изменения числа пятен – это череда пиков, каждый из которых охватывает приблизительно 11 лет. Одиннадцатилетний солнечный цикл характеризует работу солнечного динамо – магнитогидродинамического генератора поля.

Амплитуда циклов непрерывно меняется, а временами возникают сбои. Самый заметный сбой – минимум Маундера – имел место в конце 17 – начале 18 веков. Другое заметное ослабление солнечной активности было отмечено в начале 19 века – минимум Дальтона.

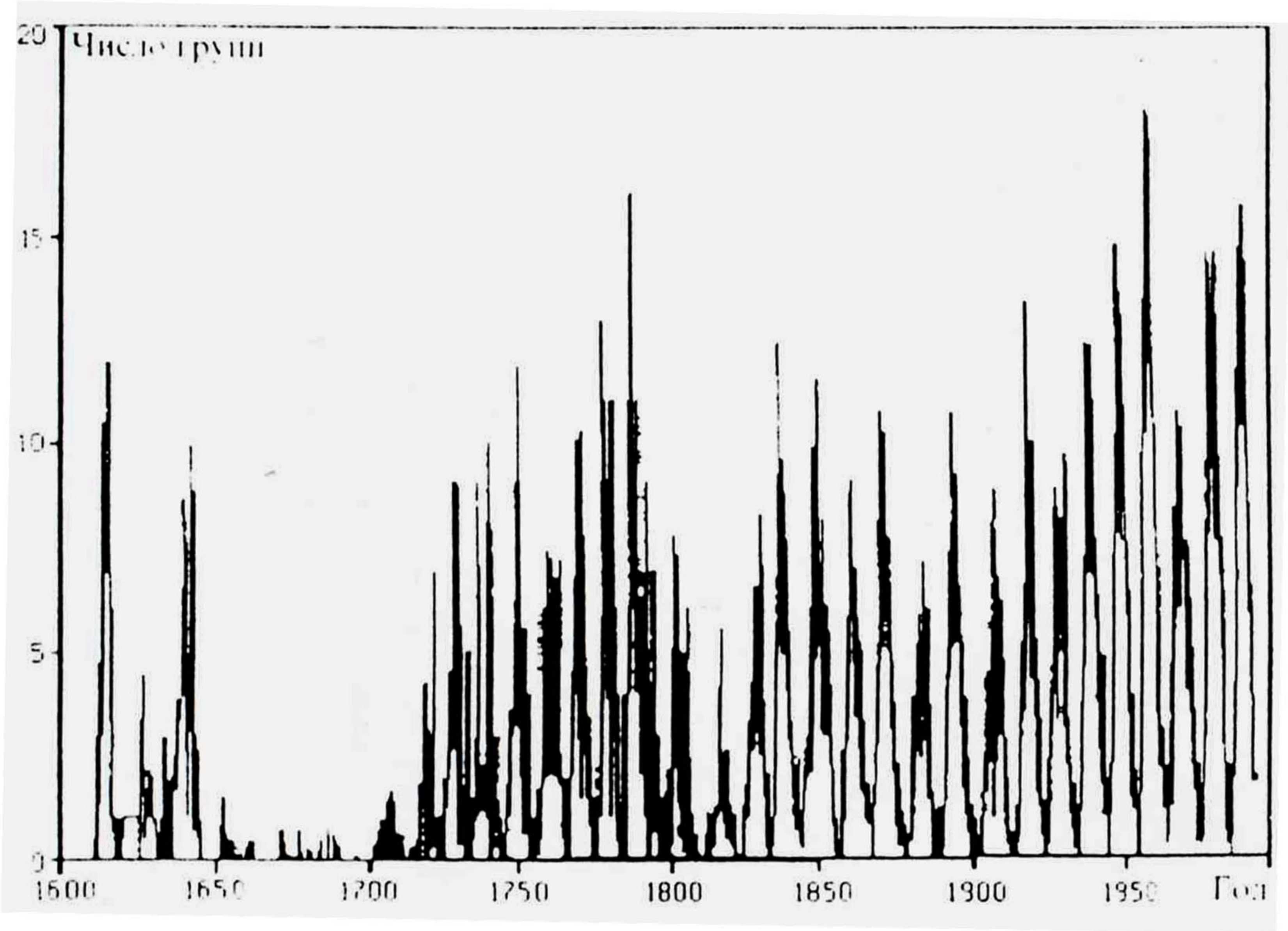
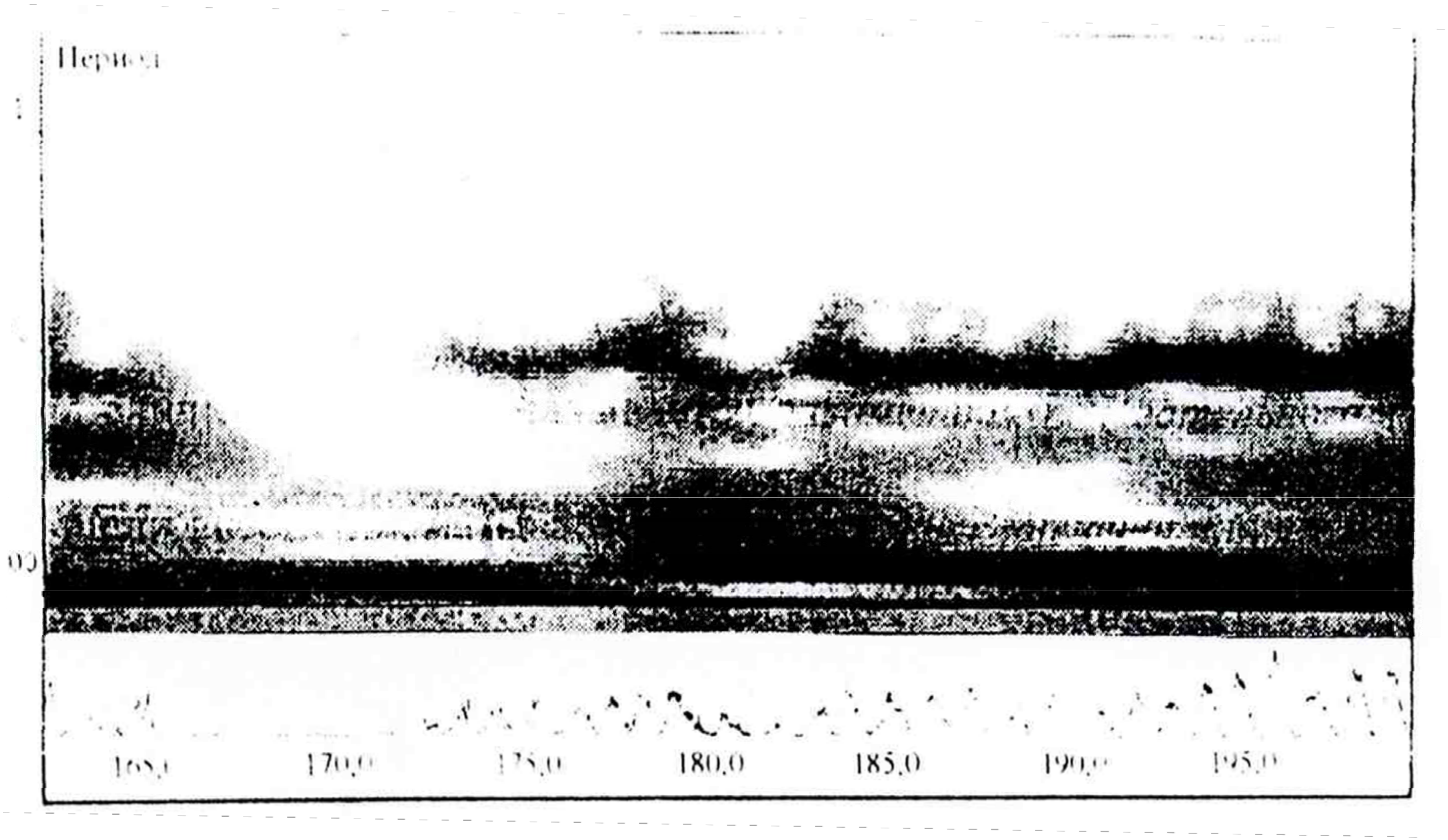


График изменения числа солнечных пятен во времени

Вейвлет – представление проектирует одномерный сигнал (который был функцией только времени) на плоскость время – частота и позволяет увидеть изменение во времени спектральных свойств сигнала. На вейвлет – плоскости одиннадцатилетнему циклу соответствует темная горизонтальная полоса (идеально ровная горизонтальная полоса соответствовала бы чисто гармоническому колебанию). Кроме основного цикла, длительностью около одиннадцати лет, отмечен еще один – приблизительно со столетней периодичностью.



Модуль вейвлет - преобразования Морле данных графика

изменения числа солнечных пятен