Задание 1

1. Составьте таблицы сложения и умножения для колец вычетов $\mathbb{Z}_m$, $2 \leqslant m \leqslant 9$.

2. Докажите, что если для любого элемента a группы G выполняется соотношение $a^2 = e$, то группа абелева.

3. Найдите все подгруппы в аддитивных группах $\mathbb{Z}_m$, $2 \leqslant 9$.

4. Докажите, что $\mathbb{Z}_{pq} = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ тогда и только тогда, когда p и q — взаимно простые числа.

5. Четверная группа Клейна.

(а) Найдите группу самосовмещений ромба; запишите её элементы как перестановки вершин, составьте таблицу Кэли.

(б) Найдите группу вращений правильного тетраэдра вокруг рёберных медиан (т.е. прямых, соединяющих середины скрещивающихся ребер); запишите её элементы как перестановки вершин, составьте таблицу Кэли.

(в) Найдите группу самосовмещений прямоугольника; запишите её элементы как перестановки вершин, составьте таблицу Кэли.

(г) Составьте таблицу Кэли для мультипликативной группы, состоящей из (2×2)-матриц

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(д) Составьте таблицу Кэли для группы, порожденной двумя образующими a и b и тремя соотношениями $a^2 = e$, $b^2 = e$, $(ab)^2 = e$.

(е) Составьте таблицу Кэли для прямого произведения $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Убедитесь, что все найденные группы изоморфны; каждая из них представляет собой четверную группу Клейна V_4.

6. Составьте таблицы Кэли для мультипликативных групп $\mathbb{Z}_m^*$ обратимых элементов колец вычетов $\mathbb{Z}_m$, $1 \leqslant m \leqslant 9$. Докажите, что все эти группы, кроме $\mathbb{Z}_8^*$, являются циклическими, и для каждой из них постройте в явном виде все изоморфизмы на подходящие аддитивные группы $\mathbb{Z}_k$. Какой группе изоморфна группа $\mathbb{Z}_8^*$?

7. Докажите, что следующий список исчерпывает все группы порядка $\leqslant 7$:

(1) если $|G| = 1$, то $G = \{e\}$;
(2) если $|G| = 2$, то $G = \mathbb{Z}_2$;
(3) если $|G| = 3$, то $G = \mathbb{Z}_3$;

(4) если $|G| = 4$, то $G = \mathbb{Z}_4$ или $G = V_4$ (см. задачу 5);
(5) если $|G| = 5$, то $G = \mathbb{Z}_5$;
(6) если $|G| = 6$, то $G = \mathbb{Z}_6$ или $G = S_3$ (симметрическая группа);
(7) если $|G| = 7$, то $G = \mathbb{Z}_7$.