Часть II. Методы математической физики

§ 5. Функция Грина

1. Фундаментальные решения

1) Вспомогательные положения анализа. Обобщенные функции. Обобщенные решения

Пусть E^n - n – мерное вещественное евклидово пространство, в частности, $E^3 \equiv E$. Будем обозначать n – мерные точки через $x = x\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$, а трех и двумерные точки - через $M = M(x, y, z)$ и $M = M(x, y)$.

Носителем кусочно-непрерывной функции $\varphi(x)$ называется замыкание множество тех точек, где $\varphi(x) \neq 0$. Носитель φ обозначается как supp φ.

Если supp φ - ограниченное множество, то функция φ называется **финитной.**

Отнесем к **множеству основных функций** $D = D\left(E^n\right)$ все финитные бесконечно дифференцируемые функции. Введя в D сходимость, превратим множество D в линейное пространство основных функций.

Сходимость в пространстве D определим следующим образом.

Определение. Последовательность функций $\varphi_1, \varphi_2, ...$ из D сходится к функции φ из D, если:

1)Существует такое число $R > 0$, что $\operatorname{supp}\varphi_k \in K^R$,

2)При каждом $\alpha = \left(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k\right)$ равномерно по x последовательность $\mathrm{D}^\alpha \varphi_k(x)$ сходится к $\mathrm{D}^\alpha \varphi(x)$ при $k \to \infty$:

$$\underset{x \in E^n}{\mathrm{D}^\alpha \varphi_k(x) \rightrightarrows \mathrm{D}^\alpha \varphi(x), k \to \infty}$$

В этом случае будем писать: $\varphi_k \to \varphi, k \to \infty$ в D.

Здесь через $\mathrm{D}^{\alpha} f(x)$ обозначена производная порядка $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$, где $\alpha_i,\ i = 1,2,...,n$, принимают неотрицательные целочисленные значения:

$$\mathrm{D}^{\alpha} f(x) \equiv \frac{\partial^{|\alpha|} f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}}, \mathrm{D}^0 f(x) \equiv f(x), \mathrm{D} = \{\mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2, ..., \mathrm{D}_n\}, \text{где}$$

$\mathrm{D}_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}, i = 1,2,...,n.$

Покажем, что операция дифференцирования $\mathrm{D}^{\beta} \varphi(x)$ непрерывна из D в D. Пусть $\varphi_k \to \varphi, k \to \infty$ в D, тогда: а) $\varphi_k(x) = 0,\ |x| > R$ для некоторого $R > 0$ и б) при каждом α $\mathrm{D}^{\alpha} \varphi_k \rightrightarrows \mathrm{D}^{\alpha} \varphi,\ k \to \infty.$ Но тогда:

а) $\operatorname{supp} \mathrm{D}^{\beta} \varphi_k \subset K^R$; б) при каждом значении α

$\mathrm{D}^{\alpha}\left(\mathrm{D}^{\beta} \varphi_k(x)\right) = \mathrm{D}^{\alpha+\beta} \varphi_k(x) \rightrightarrows \mathrm{D}^{\alpha+\beta} \varphi(x) = \mathrm{D}^{\alpha}\left(\mathrm{D}^{\beta} \varphi(x)\right)$ при $k \to \infty$, то есть $\mathrm{D}^{\beta} \varphi_k \to \mathrm{D}^{\beta} \varphi$ в D, что означает непрерывность оператора D^{β} из D в D.

Аналогичны операции неособенной замены переменных $\varphi(ax+b)$ и умножения на функцию $\alpha(x) \in C^{\infty}\left(R^k\right),\ \alpha(x)\varphi(x)$ непрерывны из D в D.

Определение. Обобщенной функцией в смысле Соболева-Шварца называется всякий линейный непрерывный функционал на пространстве основных функций.

Таким образом:

1) обобщенная функция f есть функционал на D, то есть каждой $\varphi \in D$ сопоставляется (комплексное) число (f, φ);
2) обобщенная функция f есть линейный функционал на D, то есть если, $\varphi \in D,\ \ \psi \in D$ и $\lambda,\ \mu$ - комплексные числа, то $(f, \lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda(f, \varphi) + \mu(f, \psi)$;

3) обобщенная функция f есть непрерывный функционал на D, то есть если $\varphi_k \to \varphi, k \to \infty$ в D, то $\left(f, \varphi_k\right) \to \left(f, \varphi\right), k \to \infty.$

Обозначим через $D' = D'\left(E^n\right)$ множество всех обобщенных функций.

Множество D' - линейное, если линейную комбинацию обобщенных функций f и g : $\lambda f + \mu g$ определить, как функционал, действующий по формуле $\left(\lambda f + \mu g, \varphi\right) = \lambda\left(f, \varphi\right) + \mu\left(g, \varphi\right), \varphi \in D.$

Покажем, что функционал $\lambda f + \mu g$ - линейный и непрерывный, то есть принадлежит D':

а) если $\varphi \in D,\ \psi \in D$ и $\alpha,\ \beta$ - любые комплексные числа, то по определению:

$$\begin{aligned}
&\left(\lambda f + \mu g, \alpha\varphi + \beta\psi\right) = \lambda\left(f, \alpha\varphi + \beta\psi\right) + \mu\left(g, \alpha\varphi + \beta\psi\right) = \\
&= \alpha(\lambda\left(f, \varphi\right) + \mu\left(g, \varphi\right)) + \beta(\lambda\left(f, \psi\right) + \mu\left(g, \psi\right)) = \\
&= \alpha\left(\lambda f + \mu g, \varphi\right) + \beta\left(\lambda f + \mu g, \psi\right)
\end{aligned}$$

и поэтому этот функционал линейный;

б) непрерывность функционала $\lambda f + \mu g$ следует из непрерывности функционалов f и g : пусть $\varphi_k \to \varphi,\ k \to \infty\ \ D$, тогда

$$\left(\lambda f + \mu g, \varphi_k\right) = \lambda\left(f, \varphi_k\right) + \mu\left(g, \varphi_k\right) \to \lambda\left(f, \varphi\right) + \mu\left(g, \varphi\right) = \left(\lambda f + \mu g, \varphi\right),\ k \to \infty.$$

Линейное множество D' с введенной в нем сходимостью называется пространством обобщенных функций.

Сходимость в D' определяется как **слабая сходимость** последовательности функционалов.

Определение. Последовательность обобщенных функций $f_1, f_2 ...$ из D' сходится к обобщенной функции $f \in D'$, если для любой функции $\varphi \in D$ $\left(f_k, \varphi\right) \to \left(f, \varphi\right), k \to \infty$. В этом случае мы будем писать $f_k \to f,\ k \to \infty$.

Пространство обобщенных функций является **полным** пространством [1]:

Теорема. Пусть последовательность обобщенных функций $f_1, f_2 \dots$ из D' такова, что для каждой $\varphi \in D$ числовая последовательность (f_k, φ) сходится при $k \to \infty$. Тогда функция f на D, определяемая равенством: $(f, \varphi) = \lim_{k \to \infty} (f_k, \varphi), \quad \varphi \in D,$ также является линейной и непрерывной на D, то есть $f \in D'$.

Обобщенные функции, определяемые локально интегрируемыми в E^n функциями по формуле $(f, \varphi) = \int f(x)\varphi(x)dx, \varphi \in D,$ называются **регулярными обобщенными функциями**. Остальные обобщенные функции называются **сингулярными обобщенными функциями** (например, δ - функция Дирака).

Совокупность основных функций, носители которых содержатся в данной области G, обозначим через $D(G)$. Таким образом, $D(G) \subset D(E^n) = D$.

Обобщенная функция обращается в нуль в области G, если $(f, \varphi) = 0$ для всех $\varphi \in D(G)$. Этот факт будем записывать так: $f = 0,\ x \in G$ или $f(x) = 0,\ x \in G$.

Имеет место лемма [1]:

Лемма. Если обобщенная функция обращается в нуль в окрестности каждой точки области G, то она обращается в нуль в области G.

Имеет место лемма дю Буа-Реймона [1]:

Лемма. Для того, чтобы локально-интегрируемая в области G функция $f(x)$ обращалась в нуль в смысле обобщенных функций, необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ была равна нулю почти всюду в области G.

Замечание. Обобщенная функция, вообще говоря, не имеет значений в отдельных точках.

Носителем обобщенной функции называется множество всех таких точек, что ни в какой окрестности каждой точки этого множества $f \neq 0$. Носитель обозначается как $\operatorname{supp} f$. Очевидно, $\operatorname{supp} f$ - замкнутое множество. Если $\operatorname{supp} f$ - ограниченное множество, то обобщенная функция f называется **финитной**.

Обобщенная производная $\mathrm{D}^{\alpha} f$ обобщенной функции $f \in D'$ определяется следующим соотношением:

$$\left(\mathrm{D}^{\alpha} f, \varphi\right) = (-1)^{|\alpha|}\left(f, \mathrm{D}^{\alpha}\varphi\right), \varphi \in D.$$

Нетрудно показать, что $\mathrm{D}^{\alpha} f \in D'$. Таким образом, **любая обобщенная функция является бесконечно дифференцируемой.** Если обобщенная функция имеет классическую производную, то ее обобщенная производная совпадает с классической.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение порядка m:

$$Lu = f(x), \tag{1}$$

где оператор L определяется следующим образом:

$$Lu = \sum_{|\alpha|=0}^{m} a_{\alpha}(x)\mathrm{D}^{\alpha} u,$$

а коэффициент $a_{\alpha}(x) \in C^{\infty}\left(E^{n}\right)$.

Определение. Обобщенным решением уравнения (1) в области G называется всякая обобщенная функция $u \in D'$, удовлетворяющая этому уравнению в обобщенном смысле, то есть для любой функции $\varphi \in D(G)$

$$\left(Lu,\varphi\right)=\left(f,\varphi\right),\quad \varphi\in D\left(G\right). \tag{2}$$

Учитывая определение обобщенной производной, нетрудно показать, что равенство (2) равносильно равенству

$$\left(u,L^{*}\varphi\right)=\left(f,\varphi\right),\ \varphi\in D\left(G\right),$$

где оператор L^{*} определяется следующим образом:

$$L^{*}\varphi\equiv\sum_{|\alpha|=0}^{m}\left(-1\right)^{|\alpha|}\mathrm{D}^{\alpha}\left(a_{\alpha}\varphi\right).$$

Очевидно, что всякое классическое решение является и его обобщенным решением.

Обратное утверждение формулируется в виде следующей леммы:

Лемма. Если $f\in C\left(G\right)$ и обобщенное решение $u\left(x\right)$ уравнения (1) в области G принадлежит классу $C^{m}\left(G\right)$, то оно является и классическим решением этого уравнения в области G.

Доказательство

Так как $u\in D'\cap C^{(m)}\left(G\right)$, то классические и обобщенные производные функции u до порядка m включительно совпадают в области G (это следует из определения обобщенной производной). Поскольку u - обобщенное решение уравнения (1) в области G, то непрерывная в G функция $Lu-f$ обращается в нуль в области G в смысле обобщенных функций. По лемме дю Буа-Реймона $Lu\left(x\right)-f\left(x\right)=0$ во всех точках области G в классическом смысле [1].

2) Фундаментальные решения

Определение. Фундаментальным решением оператора L называется регулярная обобщенная функция, удовлетворяющая уравнению

$$Lu = -\delta(x, x_0), \tag{3}$$

где $\delta(x, x_0)$ - дельта функция.

Фундаментальное решение определяется не однозначно, а с точностью до решения однородного уравнения $Lu = 0$.

Рассмотрим функцию

$$U_0(M) = \frac{1}{4\pi r_{MM_0}}, \; M = M(x, y, z), \; M_0 = M_0(x_0, y_0, z_0).$$

Нетрудно показать, что при $M \neq M_0 \quad \Delta_M U_0(M) = 0.$

Покажем, что функция $U_0(M)$ как обобщенная функция удовлетворяет уравнению (3) при $L \equiv \Delta$. Пусть $\varphi(M)$- основная функция, носитель которой обозначим через $\mathbf{D_0}$: $\mathbf{D_0} = \operatorname{supp}\varphi.$ Функция $U_0(M)$как регулярная обобщенная функция имеет обобщенные производные всех порядков. Следовательно, ΔU_0 есть обобщенная функция. Покажем, что $\Delta U_0 = -\delta(M, M_0).$

Рассмотрим функционал

$$(\Delta U_0, \varphi) = \int_{\mathbf{D}} \varphi(M) \Delta U_0(M) dV_M, \quad \varphi \in D(E).$$

По определению производных обобщенных функций

$$\int_{\mathbf{D}} \varphi \, \Delta_M \frac{1}{4\pi r_{MM_0}} dV_M \equiv \int_{\mathbf{D}} \frac{1}{4\pi r_{MM_0}} \Delta_M \varphi \, dV_M \tag{4}$$

Используя третью формулу Грина, получим

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbf{D}}\frac{\Delta\varphi}{r_{MM_0}}dV_M=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbf{S}}\left(\frac{1}{r_{PM_0}}\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{r_{PM_0}}\right)d\sigma_P-\varphi\left(M_0\right),\ M_0\in\mathbf{D}.$$

Область $\mathbf{D}$ можно выбрать достаточно большой, так что $\mathbf{D_0}\subset\mathbf{D}$. Тогда

$\varphi\left(P\right)=0, \dfrac{\partial\varphi\left(P\right)}{\partial n}=0$ при $P\in\mathbf{S}$.

Поэтому

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbf{D}}\frac{\Delta\varphi}{r_{MM_0}}dV_M=-\varphi\left(M_0\right),\ M_0\in\mathbf{D}. \qquad (5)$$

Из (4) и (5) получаем

$$\int\limits_{\mathbf{D}}\varphi\left(M\right)\Delta_M\frac{1}{4\pi r_{MM_M}}dV_M=-\varphi\left(M_0\right),\ M_0\in\mathbf{D}.$$

С другой стороны, по основному свойству δ - функции

$$\int\limits_{\mathbf{D}}\varphi\left(M\right)\delta\left(M,M_0\right)dV_M=\varphi\left(M_0\right),\ M_0\in\mathbf{D}.$$

Складывая два последних равенства, получим

$$\left(\Delta_M\frac{1}{4\pi r_{MM_0}},\varphi\right)=\left(-\delta,\varphi\right),\ \varphi\in D\left(E\right),$$

то есть, как обобщенная функция $U_0\left(M\right)=\dfrac{1}{4\pi r_{MM_0}}$ удовлетворяет

уравнению $\Delta_M\dfrac{1}{4\pi r_{MM_0}}=-\delta\left(M,M_0\right)$.

Определение. Функция $U_0\left(M\right)=\dfrac{1}{4\pi r_{MM_0}}$ называется фундаментальным

решением уравнения Лапласа в трехмерном случае.

Замечание 1. Аналогично можно показать, что в двумерном случае

$$\Delta_M\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{2\pi}=-\delta\left(M,M_0\right),M=M\left(x,y\right),M_0=M_0\left(x_0,y_0\right).$$

Определение. Функция $V_0\left(M\right)=\dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{r_{MM_0}}$ называется фундаментальным

решением уравнения Лапласа в двумерном случае.

Замечание 2. Функции $\frac{1}{r_{MM_0}}$ и $\ln\frac{1}{r_{MM_0}}$ также обычно называют фундаментальными решениями уравнения Лапласа соответственно в трехмерном и двумерном случаях. Они удовлетворяют уравнениям

$$\Delta_M \frac{1}{r_{MM_0}} = -4\pi\delta\left(M, M_0\right), M = M\left(x, y, z\right),$$

$$\Delta_M \ln\frac{1}{r_{MM_0}} = -2\pi\delta\left(M, M_0\right), M = M\left(x, y\right).$$

Замечание 3. Согласно формуле (3), фундаментальное решение определено не однозначно, а с точностью до решения однородного уравнения $Lu = 0$. Поэтому, строго говоря, фундаментальным решением уравнения Лапласа в трехмерном случае является любая функция $W_0\left(M\right)$ вида

$W_0\left(M\right) = \frac{1}{4\pi r_{MM_0}} + u\left(M\right)$, где $u\left(M\right)$ - гармоническая функция.

Литература

1. В.С.Владимиров. Уравнения математической физики. М.: «Наука», 1988.