МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Профессор А.Н.Боголюбов

ПРОГРАММА КУРСА
«МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ»
(2020-2021 уч. г.)

Введение. Предмет математической физики.

Часть I. Специальные функции математической физики

Задача на собственные значения в основных областях. Уравнение специальных функций и свойства его решений.

Цилиндрические функции. Уравнение Бесселя. Функции Бесселя. Функции Ханкеля. Функция Неймана. Общее решение уравнения Бесселя. Метод перевала. Асимптотическое поведение цилиндрических функций. Цилиндрические функции чисто мнимого аргумента.

Классические ортогональные полиномы. Дифференциальное уравнение. Формула Родрига. Производящая функция. Полиномы Лежандра. Присоединенные функции Лежандра. Полиномы Лагерра. Полиномы Эрмита.

Сферические и шаровые функции.

Часть II. Методы математической физики.

Общий вид уравнения в частных производных, линейные и квазилинейные уравнения.

Классификация дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка.

Физические задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям второго порядка. Начально-краевая задача. Внутренние и внешние задачи. Постановка условий на бесконечности. Задача с данными на характеристиках (задача Гурса). Общая задача Коши. Задача с подвижной границей (задача Стефана). Классическое решение. Обобщенное решение.

Метод разделения переменных (метод Фурье). Общая схема метода.

Краевые задачи для уравнения Лапласа. Гармонические функции.

Фундаментальное решение уравнения Лапласа. Формулы Грина. Основные свойства гармонических функций (теорема Гаусса, теорема о среднем, бесконечная дифференцируемость, принцип максимума). Теоремы единственности для внутренних и внешних краевых задач для уравнения Лапласа. Понятие обобщенного решения. Функция Грина для оператора Лапласа. Методы ее построения. Гармонические потенциалы: объемный потенциал, поверхностные и логарифмические потенциалы. Свойства потенциалов простого и двойного слоя. Метод интегральных уравнений для решения краевых задач. Существование решений основных краевых задач для уравнения Лапласа.

Уравнение параболического типа. Внутренние начально-краевые задачи. Принцип максимума. Теоремы единственности. Теорема существования для одномерного случая. Уравнение теплопроводности на бесконечной прямой и в неограниченном пространстве. Теорема единственности. Теорема существования. Фундаментальное решение. Уравнение теплопроводности на полубесконечной прямой. Метод продолжения. Функция Грина. Обобщенные решения. Неоднородные граничные условия.

Уравнение гиперболического типа. Внутренние начально-краевые задачи. Теоремы единственности. Теорема существования в одномерном случае. Уравнение колебаний на бесконечной прямой. Метод распространяющихся волн. Функция источника. Обобщенное решение. Формула Даламбера. Уравнение переноса.

Уравнение колебаний на полубесконечной прямой. Метод продолжения. Метод интегральных преобразований Фурье. Задача Коши для уравнения колебаний в пространстве. Формула Пуассона. Метод спуска.

Краевые задачи для уравнения Гельмгольца. Задача Штурма-Лиувилля для оператора Лапласа. Свойства собственных значений и собственных функций. Собственные функции оператора Лапласа для простейших канонических областей. Фундаментальные решения для уравнения Гельмгольца. Теоремы единственности для уравнения Гельмгольца в ограниченной области. Задачи во внешней области. Постановка условий на бесконечности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В.* Лекции по математической физике. М: Изд-во МГУ; Наука, 2004.

2. *Боголюбов А.Н., Кравцов В.В.* Задачи по математической физике. М: Изд-во МГУ, 1998.

3. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М: Изд-во МГУ, 1999.

4. *Арсенин В.Я.* Методы математической физики и специальные функции. М: «Наука», 1984.

5. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: «Наука», 1988.

6. *Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н.* Сборник задач математической физике. М: «Физматлит», 2003.

7. *А.Н.Боголюбов, Н.Т.Левашева, И.Е.Могилевский, Ю.В.Мухартова, Н.Е.Шапкина.* Функция Грина оператора Лапласа. М.: Физический факультет МГУ, 2018.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Михайлов В.С.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: «Наука»,1983.

2. *Соболев С.Л.* Уравнения математической физики. М.: «Наука», 1966.

3. *Гюнтер Н.М.* Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. М.: Гостехиздат, 1953.

4. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М.: «Наука», 1980.

5. *Никифоров А.Ф., Уваров В.В.* Специальные функции математической физики. М.: «Наука», 1984.

6. *Бейтман Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т.2. М.: «Наука», 1966.

7. *В.И.Агошков, П.Б.Дубовский, В.П.Шутяев.* Методы решения задач математической физики. М.: «Физматлит», 2002.

Курс “Методы математической физики» начал читать на физическом факультете МГУ академиком А.Н.Тихоновым в сороковых годах прошлого века. Содержание его лекций было частично отражено в изданных в 1948-1949 годах конспектах. В 1951 году вышло первое издание знаменитого учебника А.Н.Тихонова и А.А.Самарского «Уравнения математической физики», которое в дальнейшем неоднократно переиздавалось. Книга прошла испытание во многих высших учебных заведений в нашей стране и за рубежом, была переведена на 11 иностранных языков. Она сыграла большую роль в подготовке специалистов по прикладной математике.

В предисловии к первому изданию книги академики А.Н.Тихонов и А.А.Самарский писали: «Круг вопросов математической физики тесно связан с изучением различных физических процессов. Сюда относятся явления, изучаемые в гидродинамике, теории упругости, электродинамике и т.д. Возникающие при этом математические задачи содержат много общих элементов и составляет предмет математической физики.

Метод исследования, характеризующий эту отрасль науки, является математическим по своему существу. Однако постановка задач математической физики, будучи тесно связанной с изучением физических проблем, имеет специфические черты».

В предисловии к шестому изданию книги 1999 года академик А.А.Самарский пишет: «Материал этой книги – классический, устоявшийся, совершенно необходимый для специалистов любого ранга при изучении задач различной сложности. Многолетние испытания в педагогической практике показали, что он «не стареет» и является совершенно необходимой основой современного образования по специальностям «Математическая физика» и «Математическое моделирование» (стр. 12).

За прошедшие с первых лекций А.Н.Тихонова годы в науке и технике произошли большие изменения в связи с необходимостью решения крупных научно-технических проблем. Важнейшей задачей науки стала задача анализа сложных физико-технических процессов и технических систем и управления ими на основе знания.

Создание вычислительной техники колоссально расширило и углубило научные исследования, привело к развитию вычислительных методов, появлению технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента как новой, более высокой ступени изучения явлений.

Академик А.А.Самарский отмечал, что математическое моделирование опирается на триаду «математическая модель – вычислительный алгоритм – программа для компьютера».

С методом математического моделирования, который академик А.Н.Тихонов определял как «третий путь познания», мы подробно познакомимся в следующем семестре в курсе «Основы математического моделирования».

А пока приведем определение, данное академиком А.Н.Тихоновым.

Основным содержанием математической физики является построение и изучения математических моделей физических явлений и процессов.

Курс «Методы математической физики» имеет ряд особенностей.

1) Прежде всего этот курс максимально связан с физикой. Построение и исследование математических задач, составляющих предмет математической физики, а также методов исследования таких задач немыслимо без глубокого знания физических процессов, лежащих в их основе.

Это находит отражение в названиях рассматриваемых задач и методов их исследования. Например, «теория потенциала», «метод распространяющихся волн». «задача о промерзании». «функция влияния мгновенного точечного источника», «метод отражения», «уравнение теплопроводности», « волновое уравнение» и т.д.

2) Курсы «Методы математической физики», и его продолжение - курс «Основы математического моделирования», являются теми курсами, которыми заканчивается общее математическое образование студентов физического факультета МГУ. Отсюда - широкое использование знаний, полученных в математических курса, изученных ранее: математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексной переменной, обыкновенных дифференциальных уравнений и вариационного исчисления, интегральных уравнений.

3) Весьма специфической особенностью курса «Методы математической физики» является то, что при решении соответствующих задач уже не хватает того арсенала функций, которым Вы владеете, и необходимо использование аппарата специальных функций математической физики. Изучение специальных функций математической физики – чрезвычайно важный элемент нашего курса, крайне полезный для физиков любых направлений, да и не только для физиков. Поэтому, идя навстречу пожеланий наших коллег-физиков как можно скорее ввести специальные функции, мы провели «мини-реформу» нашего курса, разделив его на две части. В первой части, изучаются специальные функции математической физики, а во второй части – методы математической физики.

И, наконец, приступая к изучению нового предмета, полезно хотя бы несколько слов сказать об истории данной науки. В 1811 году Парижской академией наук был объявлен конкурс на разработку математической теории тепла. Победителем этого конкурса стал француз Жак Батист Жозеф Фурье (1768 – 1830 гг.), которым в 1807 и 1811 годах был создан ряд научных работ – «мемуаров». как тогда называли такие работы. А 1822 году им был написан мемуар «Аналитическая теория тепла». Обычно с этими работами Фурье и связывают начало математической физики как науки.

Следует также отметить работы в области теории электричества, в частности теории потенциала, таких ученых, как Пьер Симон Лаплас (1749- 1827), Симеон Дени Пуассон (1781-1840), Карл Фридрих Гаусс (1777-1855).

Отметим также работу Джорджа Грина (1793-1841) «Исследования по математической теории электричества и магнетизма» (1828 г.).

Работы в области математической физики проводились учеными парижской политехнической школы (Пуассон, Фурье, Огюстен Луи Коши (1789-1857)).

Исследованиями в области математической физики занимались такие ученые петербургской математической школы, как Виктор Яковлевич Буняковский (1804-1889) (неравенство Коши-Буняковского-Шварца 1859 г.) и Михаил Васильевич Остроградский (1801-1861) (формула Остроградского 1828 г., развитие метода Фурье).

В берлинской политехнической школе исследования проводил Иоганн Петер Густав Лежён Дирихле (1805-1859).

В Кеннигсбергском университете работал Франц Эрнст Нейман (1798-1895), в Гетингене – Гаусс.

Очень большое значение для развития математической физики имели работы области математической теории электричества Джемса Кларка Максвелла (1831-1879).

Отметим российских и советских математиков, внесших большой вклад в развитие математической физики: Ляпунов Александр Михайлович (1857-1918), Стеклов Владимир Андреевич (1864-1926), Тихонов Андрей Николаевич (1906-1993).

Часть первая. Специальные функции математической физики

Гл. 1. Задача Штурма-Лиувилля в основных областях

1. Метод разделения переменных (метод Фурье)

Основные идеи метода разделения переменных мы изложим на примере начально-краевой задачи, моделирующей малые продольные колебания упругого свободного стержня с закрепленными концами.

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad x \in (0, l), \quad t \in (0, \infty), \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, l], \\ u_t(x, 0) = \psi(x), \quad x \in [0, l], \\ u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t \in [0, \infty). \end{cases}$$

Предположим, что решение поставленной задачи существует. Будем искать его в виде суперпозиции решений $w(x,t)$ вспомогательных задач:

$$\begin{cases} w_{tt} = a^2 w_{xx}, \quad x \in (0,l), \quad t \in (0,\infty), \\ w(0,t) = 0, \quad w(l,t) = 0, \quad t \in [0,\infty), \\ w(x,t) = X(x)T(t), \\ w(x,t) \neq 0, \quad x \in [0,l], \quad t \in [0,\infty). \end{cases}$$

Заметим, что в полученной постановке нет начальных условий, но решения имеют специальный вид:

$$w(x,t) = X(x)T(t).$$

Подставим решения $w(x,t)$ в исходное уравнение и разделим переменные:

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t) \Rightarrow \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \Rightarrow$$

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad x \in (0,l), \\ X(0) = 0, X(l) = 0. \end{cases}$$

Для функции $X(x)$ мы получили задачу на собственные значения или задачу Штурма-Лиувилля.

Задача штурма-Лиувилля. Найти те значения параметра λ, при которых существуют нетривиальные решения поставленной задачи, и сами эти решения.

Решение уравнения имеет вид:

$$X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x,$$

где $A, B-$ произвольные постоянные, которые определяются из граничных условий:

$$X(0) = A = 0, \;\; X(l) = B\sin\sqrt{\lambda}l = 0 \Rightarrow \sin\sqrt{\lambda}l = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}l = \pi n \Rightarrow \lambda = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$$

Мы получили дискретный набор собственных значений λ_n и собственных функций $X_n(x)$:

$$X_n(x) = \sin\frac{\pi n x}{l}, \quad \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Для временной функции получим уравнение:

$$T_n''(t) + a^2 \lambda_n T_n(t) = 0,$$

решение которого имеет вид:

$$T_n(t) = a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t, \quad \omega_n = \frac{\pi a n}{l}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

где a_n, b_n – произвольные постоянные.

Частные решения имеют вид:

$$w_n(x,t) = X_n(x) T_n(t) = (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t) \sin \frac{\pi n x}{l}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

а решения исходной задачи- вид

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x,t).$$

Учтем, что

$$\int_0^l \sin\frac{\pi nx}{l}\sin\frac{\pi kx}{l}dx = \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ \dfrac{l}{2}, & n = k. \end{cases}$$

Отсюда получаем при $t = 0$

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi kx}{l}dx = \varphi_k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

где φ_k – коэффициент Фурье в разложении функции $\varphi(x)$ на отрезке от 0 до l по системе синусов $\left\{\sin\frac{\pi kx}{l}\right\}_{k=1,2\ldots}$

Предположим, что ряд для функции $u(x,t)$ можно почленно дифференцировать один раз по времени. Продифференцировав ряд один раз по t и положив $t=0$, получим:

$$b_k = \frac{2}{l\omega_k}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{\pi k x}{l}dx = \frac{1}{\omega_k}\psi_k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Таким образом, мы формально построили решение исходной задачи. Далее будет доказана теорема существования классического решения исходной задачи, то есть показано, при каких условиях, налагаемых на входные данные – функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, построенное методом Фурье решение будет являться классическим решением исходной задачи и будет определено классическое решение.

2. Задача на собственные значения для оператора Лапласа в основных областях

1) Отрезок

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, x\in(0,l), & (1) \\ X(0)=0, X(l)=0. & (2) \end{cases}$$

$$a)\lambda=-\chi^2<0 \Rightarrow X''-\chi^2 X=0 \Rightarrow X(x)=Ae^{\chi x}+Be^{-\chi x}$$

$$X(0)=0 \Rightarrow A+B=0; X(l)=0 \Rightarrow Ae^{\chi l}+Be^{-\chi l}=0 \Rightarrow$$

$$A=0, B=0 \Rightarrow X(x)=0$$

$$b)\quad \lambda=0 \Rightarrow X(x)=Ax+B; \qquad (1),(2)=0 \Rightarrow$$

$$A=0, B=0 \Rightarrow X(x)=0$$

$$c)\lambda > 0: \quad (1) \Rightarrow \quad X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A\cdot 1 + B\cdot 0 = 0, \\ A\cos\sqrt{\lambda}l + B\sin\sqrt{\lambda}l = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos\sqrt{\lambda}l & \sin\sqrt{\lambda}l \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\sin\sqrt{\lambda}l = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} = \pi n \Rightarrow \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, n = 1, 2, \ldots$$

$$A = 0, \forall B \Rightarrow X_n(x) = \sin\frac{\pi n}{l}x, \; n = 1, 2, \ldots$$

2) Прямоугольник

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, (x, y) \in G, & (3) \\ u(x, y) \in \Gamma, & (4) \end{cases}$$

$$G \equiv \{x \in (0, a), y \in (0, b)\}, \bar{G} = G + \Gamma, \Delta u \equiv u_{xx} + u_{yy}.$$

Метод разделения переменных:

$$u(x, y) = X(x)Y(y); (3) \Rightarrow X''Y + XY'' + \lambda XY = 0, XY \neq 0 \Rightarrow$$

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \lambda = 0 \Rightarrow -\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} + \lambda = \mu, \mu = \mathrm{const} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} X'' + \mu X = 0, x \in (0, a), \\ X(0) = 0, X(a) = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} Y'' + (\lambda - \mu)Y = 0, y \in (0, b), \\ Y(0) = 0, Y(b) = 0. \end{cases}$$

$$\nu = \lambda - \mu \Rightarrow$$

$$\mu_n = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2, X_n(x) = \sin\frac{\pi n}{a}, n = 1, 2... \qquad \Rightarrow$$

$$\nu_m = \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2, Y_m(y) = \sin\frac{\pi m}{b}, m = 1, 2...$$

$$\lambda_{n,m} = \mu_n + \nu_m \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2,$$

$$u_{n,m}(x, y) = \sin\frac{\pi n}{a}x \cdot \sin\frac{\pi m}{b}y, \quad n, m = 1, 2...$$

3) Прямой прямоугольный параллелепипед

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, \ (x, y, z) \in D, \\ u(x, y, z) = 0, \ (x, y, z) \in S, \end{cases}$$

$$D \equiv \{x \in (0, a), y \in (0, b), z \in (0, c)\}, \ \overline{D} = D + S, \ \Delta u = u$$

Полностью аналогично случаю прямоугольника получаем:

$$\lambda_{n,m,l} = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi l}{c}\right)^2,$$

$$u_{n,m,l}(x, y, z) = \sin\frac{\pi n}{a} x \cdot \sin\frac{\pi m}{b} y \cdot \sin\frac{\pi l}{c} z, \quad n, m, l = 1, 2, \ldots$$

4) Круг

В рассмотренных трех примерах собственные функции выражались через элементарные функции. В последующих примерах собственные функции выражаются через специальные функции математической физики.

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, (r, \varphi) \in U_0^{r_0}, \\ u(r, \varphi) = 0, (r, \varphi) \in C_0^{r_0}, \end{cases}$$

$U_0^{r_0}$ – круг радиуса r_0 с центром в точке 0, $C_0^{r_0}$ – окружность радиуса r_0 с центром в точке 0, $\bar{U}_0^{r_0} = U_0^{r_0} + C_0^{r_0}$.

Разделение переменных:

$$u(r, \varphi) = R(r) \cdot \Phi(\varphi) \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{d}{dr}\left(r \frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{r^2} \frac{\Phi''}{\Phi} + \lambda R = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = -\mu \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dR}{dr}\right)+\left(\lambda-\dfrac{\mu}{r^2}\right)R=0, r\in\left(0,r_0\right), \\ R\left(r_0\right)=0. \end{cases}$$

Общее решение этой задачи на собственные значения уже невозможно получить в элементарных функциях. Таким образом, мы получили первый пример задачи, для решения которой необходимо использовать специальные функции математической физики. Этими функциями являются цилиндрические функции: функции Бесселя, функции Неймана, функции Ханкеля первого и второго рода.

5) Шар

Введем сферическую систему координат:

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, \ (r,\theta,\varphi) \in K_0^{r_0}, \\ u(r,\theta,\varphi) = 0, \ (r,\theta,\varphi) \in \Sigma_0^{r_0}. \end{cases}$$

$K_0^{r_0}$ – шар радиуса r_0 с центром в точке 0, $\Sigma_0^{r_0}$ – сфера радиуса r_0 с центром в точке 0; $\bar{K}_0^{r_0} = K_0^{r_0} + \Sigma_0^{r_0}$.

Разделение переменных проведем в два этапа. Сначала отделим радиальную часть от угловой:

$$u(r,\theta,\varphi) = R(r)Y(\theta,\varphi); \quad \Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du}{dr}\right) + \frac{1}{r^2}\Delta_{\theta,\varphi}u,$$

где

$$\Delta_{\theta,\varphi}u = \frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{du}{d\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{d^2u}{d\varphi^2} \Rightarrow$$

$$\frac{\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)}{R} + \frac{1}{r^2}\frac{\Delta_{\theta,\varphi}Y}{Y} + \lambda = 0, \quad \frac{\Delta_{\theta,\varphi}Y}{Y} = -\mu \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \left(\lambda - \frac{\mu}{r^2}\right)R = 0, r \in \left(0, r_0\right), \\ R\left(r_0\right) = 0. \end{cases}$$

Для решения данной задачи на собственные функции также нужно использовать цилиндрические функции.

Для определения функции $Y(\theta,\varphi)$, удовлетворяющей уравнению

$\Delta_{\theta,\varphi}Y+\mu Y=0,$ также разделим переменные: $Y(\theta,\varphi)=\Theta(\theta)\Phi(\varphi)\Rightarrow$

$$\frac{\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\dfrac{d\Theta}{d\theta}\right)}{\Theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\Phi''}{\Phi}+\mu=0,\quad \frac{\Phi''}{\Phi}=-\nu^2\Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\left(\mu-\frac{\nu^2}{\sin^2\theta}\right)\Theta=0.$$

Для решения последнего уравнения необходимо введение специальных функций: полиномов Лежандра, которые являются частным случаем классических ортогональных полиномов, и присоединенных функций Лежандра.

Таким образом мы получили еще два примера задач, для решения которых необходимо введение специальных функций.

Замечание. Совершенно аналогично тому, как это было проделано для оператора Лапласа, мы могли бы рассмотреть задачу на собственные функции и собственные значения для более общего оператора $\boldsymbol{L}$:

$$L[u] = \operatorname{div}\left(k(M)\operatorname{grad}u\right) - q(M)u.$$

При этом мы получили бы задачи, для решения которых также необходимо введение специальных функций математической физики.

Гл.2. Уравнение специальных функций и свойства его решений

Рассмотрим уравнение

$$L[u]=0, \quad x\in(a,b), \qquad (1)$$

$$u=u(x), \ L[u]\equiv\left(k(x)u'(x)\right)'-q(x)u.$$

Предполагаем, что:

$$a) \ k(x)>0, \ x\in(a,b),$$

$$b) \ k(x)=(x-a)\varphi(x), \ \varphi(x)\in C[a,b], \ \varphi(a)\neq 0.$$

Т.е. $k(x)$ имеет в точке $x=a$ нуль первого порядка.

Лемма 1. Пусть $u_1(x)$ и $u_2(x)$ - два линейно-независимых решения уравнения (1). Тогда, если $u_1(x)$ - ограниченное решение, представимое в виде

$$u_1(x)=(x-a)^n w(x),\ n\geq 0,\ w(x)\in C[a,b],\ w(a)\neq 0,$$

то есть функция $u_1(x)$ имеет в точке $x=a$ нуль $n-$ го порядка, то второе решение $u_2(x)$ при $x\to a$ является неограниченным.

Доказательство

Представим функцию $u_2(x)$ в виде квадратуры через линейно-независимое решение $u_1(x)$.

$$u_1 L[u_2] - u_2 L[u_1] = \left(k(x)\left(u_1 u_2' - u_2 u_1'\right)\right)' = 0 \Rightarrow$$

$$W[u_1, u_2] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix} = u_1 u_2' - u_2 u_1' = \frac{C}{k(x)}, C \neq 0$$

поскольку $u_1(x)$, $u_2(x)$ – линейно-независимые решения.
Здесь W - определитель Вронского.

Поделим последнюю формулу на $u_1^2(x)$:

$$\left(\frac{u_2}{u_1}\right)' = \frac{u_1 u_2' - u_1' u_2}{u_1^2} = \frac{C}{k(x) u_1^2}$$

проинтегрируем последнее уравнение по x от x_0 до x:

$$u_2(x) = u_1(x)\left(\int_{x_0}^{x} \frac{C dz}{k(z) u_1^2(z)} + \bar{C}\right).$$

Так как $u_1(x)$, $u_2(x)$ - линейно-независимые функции, то можно положить $\bar{C} = 0$. Далее можно положить $C = 1$, поскольку решение однородного уравнения определяется с точностью до постоянного множителя. В результате получим

$$\tilde{u}_2(x) = u_1(x) \int_{x_0}^{x} \frac{dz}{k(z) u_1^2(z)}.$$

Выберем x_0 так, чтобы $w(z)$ не обращалось нуль при $z \in (x, x_0)$.

Это возможно, поскольку функция $w(a) \neq 0, \quad w(z) \in C[a,b]$.

Используя выражения для $k(x), \quad u_1(x)$ и обозначая через

$\psi(x) = \varphi(x) w^2(x),$ получим:

$$u_2(x) = u_1(x) \int_{x_0}^{x} \frac{dz}{k(z) u_1^2(z)} = (x-a)^n w(x) \int_{x_0}^{x} \frac{dz}{(z-a)^{2n+1} \varphi(z) w^2(z)} =$$

$$= \frac{(x-a)^n w(x)}{\psi(x^*)} \int_{x_0}^{x} \frac{dz}{(z-a)^{2n+1}} = \frac{(x-a)^n w(x)}{\psi(x^*)} \begin{cases} \left. \dfrac{-1}{2n(z-a)^{2n}} \right|_{x_0}^{x}, & n > 0, \\ \left. \ln(z-a) \right|_{x_0}^{x}, & n = 0, \end{cases}$$

$x^* \in [x, x_0]$.

Таким образом получаем:

$$u_2(x) = f_1(x) + f_2(x, x_0),$$

$$f_1(x) = \frac{w(x)}{\psi(x^*)} \begin{cases} \dfrac{-1}{2n(x-a)^n}, n > 0, \\ \ln(x-a), n = 0, \end{cases}$$

$$f_2(x, x_0) = \frac{(x-a)^n w(x)}{\psi(x^*)} \begin{cases} \dfrac{1}{2n(x_0-a)^{2n}}, n > 0, \\ -\ln(x_0-a), n = 0. \end{cases}$$

Из полученных формул следует, что $f_2(x, x_0)$ при $x \to a$ остается ограниченной, а $\left|f_1(x)\right| \to \infty$ при $x \to a$ либо как $\dfrac{1}{(x-a)^n}$, либо как $\left|\ln(x-a)\right|$. **Ч.т.д.**

Лемма 2. Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда, если $u_1(a) \neq 0$, то $u_2(x)$ при $x=a$ имеет логарифмическую особенность. Если $u_1(x)$ имеет при $x=a$ нуль $n-$го порядка, то $u_2(x)$ имеет полюс $n-$го порядка.

Итак:

$$u_1(a) \neq 0 \;\Rightarrow\; u_2(x) \sim \ln(x-a),$$

$$u_1(x) \sim (x-a)^n \;\Rightarrow\; u_2(x) \sim (x-a)^{-n}.$$

Лемма 3. Пусть выполнены условия леммы 1 и коэффициент $q(x)$ либо ограничен, либо стремится к ∞ при $x \to a$ так, что

$$q(x) = \frac{q_0(x)}{(x-a)^{\sigma}}, \sigma \geq 0, q_0(a) \neq 0, q_0(x) \in C[a,b].$$

Тогда для ограниченного решения

$$u_1(x) = (x-a)^n w(x), \quad n \geq 0$$

Выполняется равенство

$$\lim_{x \to a} k(x) \frac{du_1(x)}{dx} = 0,$$

Если, кроме того, имеет место неравенство $n > \sigma - 1$.

Замечание. Все сформулированные для уравнения (1) результаты будут справедливы и для уравнения вида

$$L[u] + \lambda\rho(x)u = 0,$$

если в уравнении (1) заменить $q(x)$ на $q(x) - \lambda\rho(x)$.