

Лекция 1

ВОПРОСЫ

1. Фундаментальное решение оператора Лапласа.
2. Теорема о среднем.
3. Сильный принцип максимума для гармонических функций.
4. Принцип максимума модуля гармонической функции.
5. Единственность классического решения задачи Дирихле.
6. Теорема о строгом неравенстве

$$\min_{y \in \partial U} u(y) < u(x) < \max_{y \in \partial U} u(y), \quad x \in U.$$

7. Лемма Олейник–Хопфа о знаке кривизны в точке экстремума на границе шара.
8. Единственность с точностью до постоянной классического решения задачи Неймана.
9. Теорема о бесконечной гладкости гармонической функции.
10. Теорема о локальной оценке производных гармонической функции.
11. Теорема Лиувилля.
12. Следствие теоремы Лиувилля для ограниченных решений уравнения Пуассона.
13. Вывод третьей формулы Грина.
14. Построение функции Грина и корректирующая функция $\varphi^x(y)$ для задачи Дирихле.
15. Симметричность функции Грина.
16. Операторы со слабой особенностью на многообразии меньшей размерности и основная теорема об операторе со слабой особенностью.
17. Определение поверхности Ляпунова.
18. Лемма 1 об оценке косинусов с доказательством:

$$|\cos(n_x, \mathbf{r})| \leq c|\mathbf{r}|^\alpha, \quad \mathbf{r} = \xi - x = \xi - 0,$$

$$|\cos(\nu_\xi, \mathbf{r})| \leq c|\mathbf{r}|^\alpha, \quad \mathbf{r} = \xi - x = \xi - 0,$$

где $c = a/(1 + \alpha)$.

19. Лемма 2 об оценке косинусов с доказательством:

$$\cos(\nu_\xi, \xi_N) \geq \frac{1}{2}, \quad |\cos(\nu_\xi, \xi_k)| \leq a\rho^\alpha \leq ar^\alpha, \quad k = \overline{1, N-1}$$

для всех $\xi \in \Gamma(x)$.

20. Теорема о прямом значении потенциала двойного слоя.
 21. Интеграл Гаусса $W_0(x)$. Основная теорема.
 22. Лемма о непрерывности функции

$$W_1(x) := \int_{\Gamma} [\sigma(\xi) - \sigma(x_0)] \frac{\partial}{\partial \nu_{\xi}} \frac{1}{r^{N-2}} dS_{\xi}.$$

23. Теорема о предельных значениях $W_i(x_0)$ и $W_e(x_0)$ потенциала двойного слоя.

24. Лемма о сходимости интеграла

$$\frac{\partial V[\mu](x_0)}{\partial n_{x_0}} = (N-2) \int_{\Gamma} \mu(\xi) \frac{\cos(\mathbf{r}, n_{x_0})}{|x_0 - \xi|^{N-1}} dS_{\xi}.$$

25. Теорема о предельных свойствах потенциала простого слоя. Непрерывность функции

$$I(x) = \int_{\Gamma} \mu(\xi) \left[\frac{\partial}{\partial n_{x_0}} \frac{1}{r^{N-2}} + \frac{\partial}{\partial \nu_{\xi}} \frac{1}{r^{N-2}} \right] dS_{\xi};$$

26. Теорема о предельных свойствах потенциала простого слоя. Предельные свойства как следствие непрерывности выражения

$$\frac{\partial}{\partial n_{x_0}} V[\mu](x) + W[\mu](x).$$

27. Постановка задач D_i , D_e , N_i и N_e . Теоремы единственности задач D_e и N_e . Однозначная разрешимость задач D_i и N_e .

28. Исследование пары сопряжённых интегральных уравнений D_e и N_i . Лемма о размерности решений соответствующих уравнений.

29. Разрешимость внутренней задачи N_i . Лемма о необходимом и достаточном условии разрешимости задачи N_i . Разрешимость внешней задачи D_e .

30. Слабый принцип максимума для общего эллиптического уравнения с доказательством.

31. Формулировка сильного принципа максимума. Доказательство принципа максимума модуля. Единственность классического решения задачи Дирихле.

32. Формулировка леммы Жиро. Контрпример. Доказательство единственности решения третьей краевой задачи.

33. Определение слабой производной. Пространство Соболева $H_0^1(\Omega)$.

34. Постановка для слабых решений задачи Дирихле для эллиптического уравнения. Постановка галеркинских приближений. Априорная оценка.