

План лекций по курсу «Основы математического моделирования»

(третий курс, шестой семестр)

Введение.

1. Что такое модель?
2. Классификация моделей
3. Когнитивные, концептуальные и формальные модели
4. Математическое моделирование
5. Выводы

Глава 1. Основные этапы математического моделирования

1. Создание качественно модели
2. Создание математической модели – постановка математической задачи
 - 1) Выделение существенных факторов
 - 2) Выделение дополнительных условий (начальных, граничных, условий сопряжения и др.)
3. Изучение математической модели
 - 1) Математическое обоснование модели
 - 2) Качественное исследование задачи
 - а) Разработка алгоритма
 - б) Разработка численных методов исследования модели
 - в) Создание и реализация программы. Компьютерный эксперимент
 - г) Получение результатов и их интерпретация
 - д) Использование полученных результатов
4. Прямые и обратные задачи математического моделирования
 - 1) Прямые задачи математического моделирования
 - 2) Обратные задачи математического моделирования

- а) Задачи распознавания. Типичные примеры обратных задач распознавания.
Задачи электроразведки. Задачи магнитной дефектоскопии
 - б) Задачи синтеза (задачи математического проектирования)
 - в) Задачи проектирования управляющих систем
5. Универсальность математических моделей
- 1) Колебательный электрический контур, состоящий из конденсатора и катушки индуктивности
 - 2) Малые колебания при взаимодействии двух биологических систем
 - 3) Простейшая модель зарплаты и занятости
6. Иерархия моделей. Модель многоступенчатой ракеты
- 1) Одноступенчатая ракета
 - 2) Многоступенчатая ракета

Глава 2. Некоторые классические задачи математической физики

1. Уравнение Гельмгольца ($\Delta u + cu = -f$) в неограниченной области
- 1) Поведение решения на бесконечности при различных значениях C
 - 2) Условия излучения Зоммерфельда
 - а) Вывод условий излучения Зоммерфельда
 - б) Теорема единственности
 - 3) Принцип предельного поглощения
 - 4) Принцип предельной амплитуды
 - 5) Парциальные условия излучения
 - 6) Излучения волн. Квадрупольный излучатель
 - 7) Задачи математической теории дифракции
 - а) Постановка задачи математической теории дифракции
 - б) Дифракция звуковой волны на бесконечном жестком цилиндре
2. Задача с данными на характеристиках (задача Гурса)
- 1) Простейшая задача Гурса
 - 2) Общая задача Гурса
3. Общая задача Коши. Функция Римана

- 1) Функция Римана
- 2) Физический смысл функции Римана
- 3) Уравнения с постоянными коэффициентами
 - а) Функция Римана для уравнения $u_{xy} + cu = 0$
 - б) Задача Коши для уравнения колебаний
4. Динамика сорбции газа
5. Задача о промерзании (задача о фазовом переходе, задача Стефана)
 - 1) Постановка задачи
 - 2) Метод подобия

Глава 3. Математическое моделирование нелинейных объектов и процессов

1. Математические модели процессов нелинейной теплопроводности и горения
 - 1) Краевые задачи для квазилинейного уравнения теплопроводности
 - 2) Режимы с обострением
2. Математические модели теории нелинейных волн
 - 1) Метод характеристик
 - 2) Обобщенное решение. Условие на разрыве
 - 3) Уравнение Кортевега – де Фриза и законы сохранения
 - а) Нахождение квантовомеханических уровней энергии связанных состояний
 - б) Задача рассеяния плоской волны единичной амплитуды на потенциале $u(x, t)$. Схема решения обратной задачи рассеяния
 - в) Решение задачи Коши. Схема построения быстроубывающих решений задачи Коши
3. Уравнение Буссинеска. Задача о наводнении

Глава 4. Методы исследования математических моделей

1. Вариационные методы решения краевых задач и определения собственных значений

- 1) Принцип Дирихле
- 2) Задача о собственных значениях

2. Некоторые алгоритмы проекционного метода

- 1) Общая схема алгоритмов
- 2) Метод Рунге
- 3) Метод Галёркина
- 4) Обобщенный метод моментов
- 5) Метод наименьших квадратов

3. Метод конечных разностей

- 1) Основные понятия
- 2) Разностная задача для уравнения теплопроводности на отрезке
- 3) Метод прогонки
- 4) Экономичные разностные схемы
 - а) Схема переменных направлений
 - б) Локально-одномерные схемы (ЛОС). Понятие суммарной

аппроксимации

- 5) Консервативные однородные разностные схемы
 - а) Интегро-интерполяционный метод (ИИМ) – метод баланса

построения консервативных разностных схем

- б) Метод конечных элементов (МКЭ) – проекционно-сеточный метод
- в) Пример схемы, расходящейся в случае разрывных коэффициентов

6) Спектральный анализ разностной задачи Коши

- а) Необходимое спектральное условие устойчивости Неймана
- б) Примеры

4. Асимптотические методы

- 1) Метод малого параметра
 - а) Регулярные возмущения
 - б) Сингулярные возмущения
- 2) Метод ВКБ (Венцеля, Крамерса, Бриллюэна)
- 3) Метод усреднения Крылова-Боголюбова

Глава 5. Некоторые объекты и методы математического моделирования

1. Фракталы и фрактальные структуры. Применение фракталов
2. Самоорганизация и образование структур. Синергетика
 - 1) Диссипативные структуры
 - 2) Модель брюсселятора
3. Вейвлет – анализ
 - 1) Вейвлеты
 - а) Система Хаара (1909 г.)
 - б) Функции Литлвуда - Пелли (1937 г.)
 - в) Преобразование Габора - Фурье преобразование в окнах (1946 г.)
 - г) Вейвлеты
 - 2) Непрерывное вейвлет-преобразование
 - 3) Вейвлет-анализ временных колебаний