§2 . Задача Гурса

Мажорантные оценки

$$z_n(x,y) = -\int_0^y\int_0^x \left\{ a(\xi,\eta)\tfrac{\partial z_{n-1}}{\partial \xi} + b(\xi,\eta)\tfrac{\partial z_{n-1}}{\partial \eta} + c(\xi,\eta) z_{n-1} \right\} d\xi d\eta,$$

$$\tfrac{\partial z_n}{\partial x}(x,y) = -\int_0^y \left\{ a(x,\eta)\tfrac{\partial z_{n-1}}{\partial x} + b(x,\eta)\tfrac{\partial z_{n-1}}{\partial \eta} + c(x,\eta) z_{n-1} \right\} d\eta, \qquad (13)$$

$$\tfrac{\partial z_n}{\partial y}(x,y) = -\int_0^x \left\{ a(\xi,y)\tfrac{\partial z_{n-1}}{\partial \xi} + b(\xi,y)\tfrac{\partial z_{n-1}}{\partial y} + c(\xi,y) z_{n-1} \right\} d\xi.$$

$$|a(x,y)| \le M,\ |b(x,y)| \le M,\ |c(x,y)| \le M,\ |z_0| \le H,\ \left|\tfrac{\partial z_0}{\partial x}\right| \le H,\ \left|\tfrac{\partial z_0}{\partial y}\right| \le H, \qquad (14)$$

Из формулы (13) получаем:

$$z_1 = -\int_0^y\int_0^x \{a\frac{\partial z_0}{\partial \xi} + b\frac{\partial z_0}{\partial \eta} + cz_0\} d\xi d\eta \ \Rightarrow\ |z_1| \le 3MHxy \le 3MH\frac{(x+y)^2}{2!}$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} = -\int_0^y \{a\frac{\partial z_0}{\partial x} + b\frac{\partial z_0}{\partial \eta} + cz_0\} d\eta \ \Rightarrow\ \left|\frac{\partial z_1}{\partial x}\right| \le 3MHy \le 3MH(x+y)$$

Аналогично получаем:

$$\left|\frac{\partial z_1}{\partial y}\right| \le 3MHx \le 3MH(x+y)$$

Далее:

$$|z_2(x,y)| \le \int_0^y\int_0^x \left\{ M3MH(\xi+\eta) + M3MH(\xi+\eta) + M3MH\frac{(\xi+\eta)^2}{2!} \right\} d\xi d\eta =$$

$$= 3HM^2 \int_0^y\int_0^x \left\{ 2(\xi+\eta) + \frac{(\xi+\eta)^2}{2!} \right\} d\xi d\eta = 3HM^2\{I_1 + I_2\},$$

где

$$I_1=\int_0^y\int_0^x(\xi+\eta)d\xi d\eta\le\int_0^y\left(\int_0^x(\xi+\eta)d\xi\right)d\eta=\int_0^y\frac{(x+\eta)^2}{2}d\eta=\frac{1}{2\cdot 3}(x+y)^3,$$

$$I_2=\int_0^y\int_0^x(\xi+\eta)^2d\xi d\eta\le\int_0^y\left(\int_0^x(\xi+\eta)^2d\xi\right)d\eta=\int_0^y\frac{(x+\eta)^3}{3}d\eta=\frac{1}{3\cdot 4}(x+y)^4,$$

$$|z_2(x,y)|\le 3HM^2\left\{2I_1+\frac{1}{2}I_2\right\}=3HM^2\left\{2\frac{1}{2\cdot 3}(x+y)^3+\frac{1}{2}\frac{1}{3\cdot 4}(x+y)^4\right\}=$$

$$=3HM^2\frac{(x+y)^3}{2\cdot 3}\left\{2+\frac{(x+y)}{4}\right\}<3HM^2\frac{(x+y)^3}{3!}\left\{2+\frac{2L}{4}\right\}<$$

$$<3HM^2\frac{(x+y)^3}{3!}\{2+L\}=3HM^2K\frac{(x+y)^3}{3!},$$

$K=2+L.$

Аналогично получаем:

$$\left|\frac{\partial z_2}{\partial x}\right|\le\int_0^y\{M3MH(x+\eta)+M3MH(x+\eta)+M3MH\frac{(x+\eta)^2}{2!}\}d\eta=$$

$$=3HM^2\int_0^y\left\{2(x+\eta)+\frac{(x+\eta)^2}{2!}\right\}d\eta=3HM^2\left\{2\frac{(x+y)^2}{2}+\frac{(x+y)^3}{3!}\right\}=$$

$$=3HM^2\frac{(x+y)^2}{2}\left\{2+\frac{(x+y)}{2}\right\}<3HM^2\frac{(x+y)^2}{2}\left\{2+\frac{2L}{2}\right\}=3HM^2K\frac{(x+y)^2}{2}$$

и

$$\left|\frac{\partial z_2}{\partial y}\right|\le 3HM^2K\frac{(x+y)^2}{2}.$$

Метод математической индукции

$$z_n=-\int_0^y\int_0^x\{a\frac{\partial z_{n-1}}{\partial\xi}+b\frac{\partial z_{n-1}}{\partial\eta}+cz_{n-1}\}d\xi d\eta$$

$$|z_{n-1}|\le 3HM^{n-1}K^{n-2}\frac{(x+y)^n}{n!}$$

$$\left|\frac{\partial z_{n-1}}{\partial x}\right|\le 3HM^{n-1}K^{n-2}\frac{(x+y)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\left|\frac{\partial z_{n-1}}{\partial y}\right| \le 3HM^{n-1}K^{n-2}\frac{(x+y)^{n-1}}{(n-1)!},$$

где $K = L + 2.$

$$|z_n| \le 3HM^nK^{n-2}\left\{\frac{2}{(n-1)!}\int_0^y\int_0^x(\xi+\eta)^{n-1}d\xi d\eta + \frac{1}{n!}\int_0^y\int_0^x(\xi+\eta)^n d\xi d\eta\right\},$$

$$\int_0^y\int_0^x(\xi+\eta)^{n-1}d\xi d\eta \le \frac{1}{n}\int_0^y(x+\eta)^n d\eta \le \frac{1}{n(n+1)}(x+y)^{n+1},$$

$$\int_0^y\int_0^x(\xi+\eta)^n d\xi d\eta \le \frac{1}{(n+1)(n+2)}(x+y)^{n+2},$$

$$\{\ldots\} \le \frac{2}{(n-1)!}\frac{1}{n(n+1)}(x+y)^{n+1} + \frac{1}{n!}\frac{1}{(n+1)(n+2)}(x+y)^{n+2} =$$

$$= \frac{2}{(n+1)!}(x+y)^{n+1} + \frac{1}{(n+2)!}(x+y)^{n+2} = \frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!}(2+\frac{x+y}{n+2}) <$$

$$< \frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!}(2+\frac{2L}{n+2}) < \frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!}(2+L) = \frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!}K \Rightarrow$$

$$|z_n| \le 3HM^nK^{n-1}\frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

$$\frac{\partial z_n}{\partial x} = -\int_0^y\{a\frac{\partial z_{n-1}}{\partial x} + b\frac{\partial z_{n-1}}{\partial \eta} + cz_{n-1}\}d\eta,$$

$$\left|\frac{\partial z_n}{\partial x}\right| \le 3HM^nK^{n-2}\left\{\frac{2}{(n-1)!}\int_0^y(x+\eta)^{n-1}d\eta + \frac{1}{n!}\int_0^y(x+\eta)^n d\eta\right\},$$

$$\{\ldots\} = \frac{2}{(n-1)!}\frac{(x+y)^n}{n} + \frac{1}{n!}\frac{(x+y)^{n+1}}{n+1} = 2\frac{(x+y)^n}{n!} + \underbrace{\frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!}}_{<2L},$$

$$\left|\frac{\partial z_n}{\partial x}\right| \le 3HM^nK^{n-2}\frac{(x+y)^n}{n!}(2+\frac{(x+y)}{n+1}) =$$

$$= 3HM^nK^{n-2}\frac{(x+y)^n}{n!}(2+\frac{2}{n+1}L) < 3HM^nK^{n-1}\frac{(x+y)^n}{n!}.$$

Аналогично получаем:

$$\left|\frac{\partial z_n}{\partial y}\right| < 3HM^nK^{n-1}\frac{(x+y)^n}{n!}$$

$$|z_n| \le 3HM^nK^{n-1}\frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!} < 3HM^nK^{n-1}\frac{(2L)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{3H}{K^2M}\frac{(2KLM)^{n+1}}{(n+1)!},$$

$$\left|\frac{\partial z_n}{\partial x}\right| \le 3HM^nK^{n-1}\frac{(x+y)^n}{n!} < 3HM^nK^{n-1}\frac{(2L)^n}{n!} = \frac{3H}{K}\frac{(2KLM)^n}{n!},$$

$$\left|\frac{\partial z_n}{\partial y}\right| \le \frac{3H}{K}\frac{(2KLM)^n}{n!}.$$

Доказательство равномерной сходимости последовательностей

Предполагается, что в квадрате $G=\{0<x,y<L\}$ **выполнены оценки (14)**

$$|a(x,y)| \le M,\ |b(x,y)| \le M,\ |c(x,y)| \le M,\ |z_0| \le H,\ \left|\tfrac{\partial z_0}{\partial x}\right| \le H,\ \left|\tfrac{\partial z_0}{\partial y}\right| \le H,$$

где M>0, N>0.

Методом математической индукции получены мажорантные оценки (15):

$$|z_n| \le \frac{3H}{K^2M}\frac{(2KLM)^{n+1}}{(n+1)!},\quad \left|\frac{\partial z_n}{\partial x}\right| \le \frac{3H}{K}\frac{(2KLM)^n}{n!},\quad \left|\frac{\partial z_n}{\partial y}\right| \le \frac{3H}{K}\frac{(2KLM)^n}{n!},$$

где K=L+2.

В правой части (15) с точностью до множителей пропорциональности стоят общие члены разложения *exp(2KLM*). По признаку сходимости функционального ряда, мажорируемого сходящимся числовым рядом, последовательности функций

$$u_n = u_1 + z_1 + \ldots + z_{n-1},$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial z_1}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial y} = \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial z_1}{\partial y} + \ldots + \frac{\partial z_{n-1}}{\partial y}$$

равномерно сходятся предельным функциям $u(x,y)$, $V(x,y)$, $W(x,y)$.

$$u(x,y) = \lim_{n\to\infty} u_n(x,y),\ V(x,y) = \lim_{n\to\infty} \frac{\partial u_n}{\partial x},\ W(x,y) = \lim_{n\to\infty} \frac{\partial u_n}{\partial y}.$$

Перейдем в формулах (11), (12) к пределу при $n\to\infty$ **:**

$$u(x,y) = u_1(x,y) - \int_0^y\int_0^x \{a(\xi,\eta)V + b(\xi,\eta)W + c(\xi,\eta)u\} d\xi d\eta,$$

$$V = \frac{\partial u_1}{\partial x} - \int_0^y \{a(x,\eta)V + b(x,\eta)W + c(x,\eta)u\} d\eta, \qquad (16)$$

$$W = \frac{\partial u_1}{\partial y} - \int_0^x \{a(\xi,y)V + b(\xi,y)W + c(\xi,y)u\}\, d\xi,$$

$$u_1(x,y) = \int_0^y\int_0^x f(\xi,\eta) d\xi d\eta + \Phi(x,y),$$

Таким образом,

$$u(x,y)=u_1(x,y)-\int_0^y\int_0^x\{a(\xi,\eta)V+b(\xi,\eta)W+c(\xi,\eta)u\}d\xi d\eta=$$

$$=\int_0^y\int_0^x f(\xi,\eta)d\xi d\eta+\Phi(x,y)-\int_0^y\int_0^x\left(aV+bW+cu\right)d\xi d\eta,$$

откуда следует, что $V=u_x$, $W=u_y$ и $u(x,y)$ удовлетворяют уравнению (8)

$$u(x,y)=\varphi_1(x)+\varphi_2(y)-\varphi_1(0)+\int_{\Re}Fd\xi d\eta=\int_0^y\int_0^x Fd\xi d\eta+\Phi(x,y), \quad (8)$$

$$F(x,y,u,u_x,u_y)=f-au_x-bu_y-cu,$$

$$\Phi(x,y)=\varphi_1(x)+\varphi_2(y)-\varphi_1(0).$$

Удовлетворение условиям (6)

$$u(x,0)=\varphi_1(x), \quad u(0,y)=\varphi_2(y) \qquad (6)$$

следует из формул (16), условий сопряжения (7)

$$\varphi_1(0)=\varphi_2(0)=u(0,0), \qquad (7)$$

и вида функций $u_1(x,y)$ **и** $\Phi(x,y)$.

Из формулы (8) следует , что

$$u(0,y)=\varphi_1(0)+\varphi_2(y)-\varphi_1(0)+\int_0^y\int_0^0 Fd\xi d\eta=\varphi_2(y),$$

$$u(x,0)=\varphi_1(x)+\varphi_2(0)-\varphi_1(0)+\int_0^0\int_0^x Fd\xi d\eta=$$

$$=\varphi_1(x)+u\left(0,0\right)-u\left(0,0\right)=\varphi_1(x).$$

Единственность решения краевой задачи (5)-(7) (от противного)

Пусть существуют два решения

$$u_1(x,y) \neq u_2(x,y)$$

Рассмотрим их разность

$$U\left(x,y\right) = u_1(x,y) - u_2(x,y).$$

Из формулы (8) следует, что

$$U(x,y) = -\int_0^x \int_0^y \left\{ aU_\xi + bU_\eta + cU \right\} d\xi d\eta,$$

а из формулы (14) следуют оценки

$$\left|U\right| \le H_1, \quad \left|U_x\right| \le H_1, \quad \left|U_y\right| \le H_1.$$

При $(x,y) \in G$ **для любого** n **будем иметь**

$$,\left|U\right| \le \frac{3H_1}{K^2 M} \frac{(2KLM)^{n+1}}{(n+1)!},$$

откуда следует, что $U\left(x,y\right) = 0,$ **то есть** $u_1(x,y) = u_2(x,y)$ **- противоречие.**