Глава 2. Некоторые классические задачи математической физики

1. Уравнение Гельмгольца ($\Delta u + cu = -f$) в неограниченной области

1. **Поведение решения на бесконечности при различных *c*.**

1) $C = -æ^2 < 0$

$$u^{\pm}(M) = \frac{1}{4\pi}\int_D \frac{e^{\pm æ r_{QM}}}{r_{QM}} f(Q)dV_Q, \qquad (1)$$

где ***f(M)*** **– финитная функция,** $\operatorname{supp} f \subset D.$

Теорема 1.

Классическое решение уравнения

$$\Delta u - æ^2 u = -f(M) \qquad (2)$$

равномерно стремящееся к нулю на бесконечности, единственно.

Доказательство:

$$u_1(M) \neq u_2(M) \Rightarrow V(M) = u_1(M) - u_2(M) \Rightarrow$$

$\Delta V - æ^2 V = 0.$ **Так как** $V \to 0$ **равномерно,**

то $\forall \varepsilon > 0,\ \exists R > 0 : \left|V(M)\right| < \varepsilon,\ r \geq R$

Применим к шару K^r **принцип максимума:** $\left|V(M)\right| < \varepsilon,\ M \in K^r.$

В силу произвольности ε **и** r **получим, что**

$$V(M) \equiv 0 \Rightarrow u_1(M) \equiv u_2(M).$$

Единственное решение, равномерно стремящееся к нулю на бесконечности:

$$u(M) = \frac{1}{4\pi}\int_D \frac{e^{-\text{æ}\, r_{QM}}}{r_{QM}} f(Q)dV_Q. \tag{3}$$

2) $C = k^2,\ k = \bar{k} + i\bar{\bar{k}},\ \bar{\bar{k}} > 0$

Единственное решение, равномерно стремящееся к нулю на бесконечности

$$u(M) = \frac{1}{4\pi}\int_D \frac{e^{ik\, r_{QM}}}{r_{QM}} f(Q)dV_Q. \tag{4}$$

При временной зависимости $e^{-i\omega t}$ это решение соответствует расходящейся волне.

3) $C = k^2 > 0$

$$u^{\pm}(M) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_D \frac{e^{\pm ik\, r_{QM}}}{r_{QM}}\, f(Q)dV_Q. \qquad (5)$$

Оба решения $u^{\pm}(M)$ **уравнения Гельмгольца**

$\Delta u + k^2 u = -f(M)$ **одинаково убывают на бесконечности.**

2. Условия излучения Зоммерфельда

Из двух фундаментальных решений

$$v^{\pm}(M) = \frac{e^{\pm ik\, r_{M_0 M}}}{r_{M_0 M}} \qquad (6)$$

нужно выбрать решение, соответствующее расходящейся волне (временная зависимость $e^{-i\omega t}$ **).**

1) $M_0 \equiv 0 \;\Rightarrow r_{M_0 M} = r_M = r$

$$\frac{dv^{\pm}}{dr} = \pm ik\frac{e^{\pm ikr}}{r} - \frac{e^{\pm ikr}}{r^2} = \pm ikv^{\pm} + \overset{=}{o}\left(\frac{1}{r}\right). \qquad (7)$$

Расходящейся сферической волне соответствует $v^{+}(M)$**,**
а сходящейся $v^{-}(M)$**.**

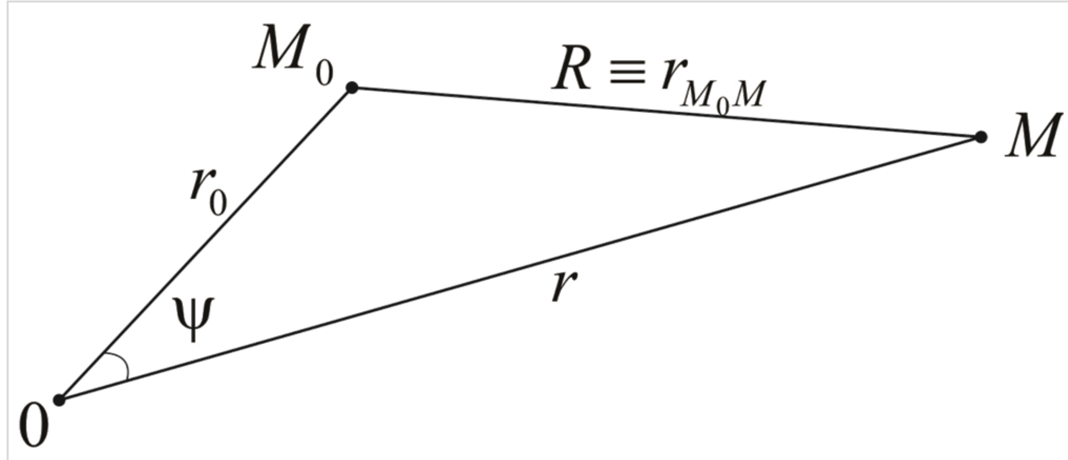
Расходящаяся сферическая волна должна удовлетворять соотношению

$$\frac{\partial u}{\partial r} - iku = \overset{=}{o}\left(\frac{1}{r}\right), \quad u = v^{+}(M)e^{-i\omega t}, \qquad (8)$$

а сходящаяся - соотношению

$$\frac{\partial u}{\partial r} + iku = \overset{=}{o}\left(\frac{1}{r}\right), \quad u = v^{-}(M)e^{-i\omega t}. \qquad (9)$$

2) $M_0 \neq 0$



$$\frac{\partial}{\partial r}\frac{e^{ikR}}{R} = \frac{\partial}{\partial R}\frac{e^{ikR}}{R}\frac{\partial R}{\partial r}, \tag{10}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\psi}} = \frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{1+\left\{(r_0/r)^2 - 2(r_0/r)\cos\psi\right\}}} =$$

$$= \frac{1}{r}\left\{1 - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{r_0}{r}\right)\cos\psi\right] + \ldots\right\} = \frac{1}{r}\left(1 + \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{r}\right)\right) \tag{11}$$

$$\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{r - r_0\cos\psi}{R} = 1 + \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{r}\right) \tag{12}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\frac{e^{ikR}}{R} = ik\frac{e^{ikR}}{R}\frac{\partial R}{\partial r} - \frac{e^{ikR}}{R^2}\frac{\partial R}{\partial r} \tag{13}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\frac{e^{ikR}}{R} - ik\frac{e^{ikR}}{R} = \overset{=}{o}\left(\frac{1}{r}\right).$$

И в этом случае расходящиеся сферические волны удовлетворяют соотношению

$$\frac{\partial u^{+}}{\partial r} - iku^{+} = \overset{=}{o}\left(\frac{1}{r}\right), \quad u^{+} = e^{-i\omega t}\frac{e^{ikR}}{R}, \tag{14}$$

а сходящиеся - соотношению

$$\frac{\partial u}{\partial r} + iku^{-} = \overset{=}{o}\left(\frac{1}{r}\right), \quad u = e^{-i\omega t}\frac{e^{-ikR}}{R}. \tag{15}$$

Замечание 1. **В силу специального выбора ядер введенные выше потенциалы удовлетворяют условиям излучения Зоммерфельда:**

$$u(M) = \underline{\underline{O}}\left(1/r\right), \tag{16}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} - iku = \overset{=}{o}\left(\frac{1}{r}\right). \tag{17}$$

Замечание 2. **Для двумерных задач условия излучения Зоммерфельда имеют вид:**

$$u(M) = \underline{\underline{O}}\left(1/\sqrt{r}\right), \tag{18}$$

$$\lim_{r\to\infty}\sqrt{r}\left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku\right) = 0. \tag{19}$$

Замечание 3. **И.Н. Векуа показал, что условие (16), (18) является следствием условия(19).**

3) Теорема единственности:

Теорема 2.

Классическое решение уравнения Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 u = -f(M), \quad M \in \mathbb{R}^3, \tag{20}$$

где *k* – вещественное, удовлетворяющее условиям излучения Зоммерфельда (16), (17), единственно.

Доказательство.

$$u_1(M) \neq u_2(M) \Rightarrow V(M) = u_1(M) - u_2(M) \Rightarrow \Delta V + k^2 V = 0,$$

$$V(M) = \underline{\underline{O}}(1/r), \quad \frac{\partial V}{\partial r} - ikV = \overset{=}{o}(1/r).$$

Рассмотрим шар K^R и запишем для точки $M \in K^R$ третью формулу Грина:

$$V(M)=\frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma^R}\left\{\frac{e^{ikr_{PM}}}{r_{PM}}\frac{\partial V}{\partial r}-V(P)\frac{\partial}{\partial r_P}\left(\frac{e^{ikr_{PM}}}{r_{PM}}\right)\right\}d\sigma_P=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma^R}\left\{\frac{e^{ikr_{PM}}}{r_{PM}}\frac{\partial V}{\partial r}-ikV\frac{e^{ikr_{PM}}}{r_{PM}}+ikV\frac{e^{ikr_{PM}}}{r_{PM}}-V(P)\frac{\partial}{\partial r_P}\left(\frac{e^{ikr_{PM}}}{r_{PM}}\right)\right\}d\sigma_P=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\left[\int_{\Sigma^R}\left(\frac{\partial V}{\partial r}-ikV\right)\frac{e^{ikr_{PM}}}{r_{PM}}d\sigma_p-\int_{\Sigma^R}V(P)\left(\frac{\partial}{\partial r_P}\left(\frac{e^{ikr_{PM}}}{r_{PM}}\right)-ik\frac{e^{ikr_{PM}}}{r_{PM}}\right)d\sigma_P\right]=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma^R}\left(\frac{e^{ikr_{PM}}}{r_{PM}}\overset{=}{o}\left(\frac{1}{r}\right)-V(P)\,\overset{=}{o}\left(\frac{1}{r}\right)\right)d\sigma_P=\frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma^R}\overset{=}{o}\left(\frac{1}{r^2}\right)d\sigma_P\xrightarrow[R\to\infty]{}0\Rightarrow$$

$$V(M)\equiv 0\Rightarrow u_1(M)\equiv u_2(M).$$

Следствие. Единственным решением уравнения Гельмгольца (20) при вещественном $k^2>0$, удовлетворяющим условиям излучения Зоммерфельда (16),(17), является интеграл

$$u(M)=\frac{1}{4\pi}\int_D \frac{e^{ikr_{QM}}}{r_{QM}}\, f(Q)\,dV_Q, \qquad (21)$$

где *f(M)* – финитная функция, $\operatorname{supp} f \subset D.$

3. Принцип предельного поглощения

Пусть ***f(M)*** **– финитная функция,** $\operatorname{supp} f \subset D.$

Единственное решение уравнения Гельмгольца с

комплексным коэффициентом $k = \bar{k} + i\bar{\bar{k}},\ \ \bar{\bar{k}} > 0,$

равномерно стремящееся к нулю на бесконечности, имеет

вид:

$$u(M) = \frac{1}{4\pi}\int_D \frac{e^{ikr_{QM}}}{r_{QM}} f(Q)dV_Q = \frac{1}{4\pi}\int_D \frac{e^{i\bar{k}r_{QM}}e^{-\bar{\bar{k}}r_{QM}}}{r_{QM}} f(Q)dV_Q \qquad (22)$$

Функция

$$\bar{u}(M) = \lim_{\bar{\bar{k}}\to 0} u(M) = \frac{1}{4\pi}\int_D \frac{e^{i\bar{k}r_{QM}}}{r_{QM}} f(Q)dV_Q \qquad (23)$$

является решением уравнения Гельмгольца с

положительным вещественным коэффициентом $\bar{k}^2$:

$$\Delta\bar{u} + \bar{k}^2\bar{u} = -f(M) \qquad (24)$$

Дополнительным условием, позволяющим выделить решение уравнения Гельмгольца (24), соответствующее **расходящимся волнам**, является требование, чтобы функция $\bar{u}(M)$ являлась пределом **ограниченного решения** уравнения Гельмгольца с комплексным коэффициентом при $\bar{\bar{k}} \to 0$, где $k = \bar{k} + i\bar{\bar{k}}$.

4. Принцип предельной амплитуды

Рассмотрим уравнение колебаний с периодической правой частью:

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + F(M,t), \quad F(M,t) = f(M) e^{-i\omega t}, \tag{25}$$

$$u(M,0) = 0, \quad u_t(M,0) = 0; \quad M \in \mathbb{R}^3. \tag{26}$$

Со временем в системе установятся колебания с частотой вынуждающей силы:

$$u(M,t) = V(M) e^{-i\omega t}, \tag{27}$$

где *V(M)* – предельная амплитуда колебаний

$$V(M) = \lim_{t\to\infty} u(M,t) e^{i\omega t}, \tag{28}$$

$$\Delta V + k^2 V = -f(M), \quad k = \frac{\omega}{a}. \tag{29}$$

Требование, чтобы *V(M)* было предельной амплитудой колебаний с нулевыми начальными условиями, представляет то дополнительное условие, которое нужно присоединить к волновому уравнению Гельмгольца для выделения единственного решения.

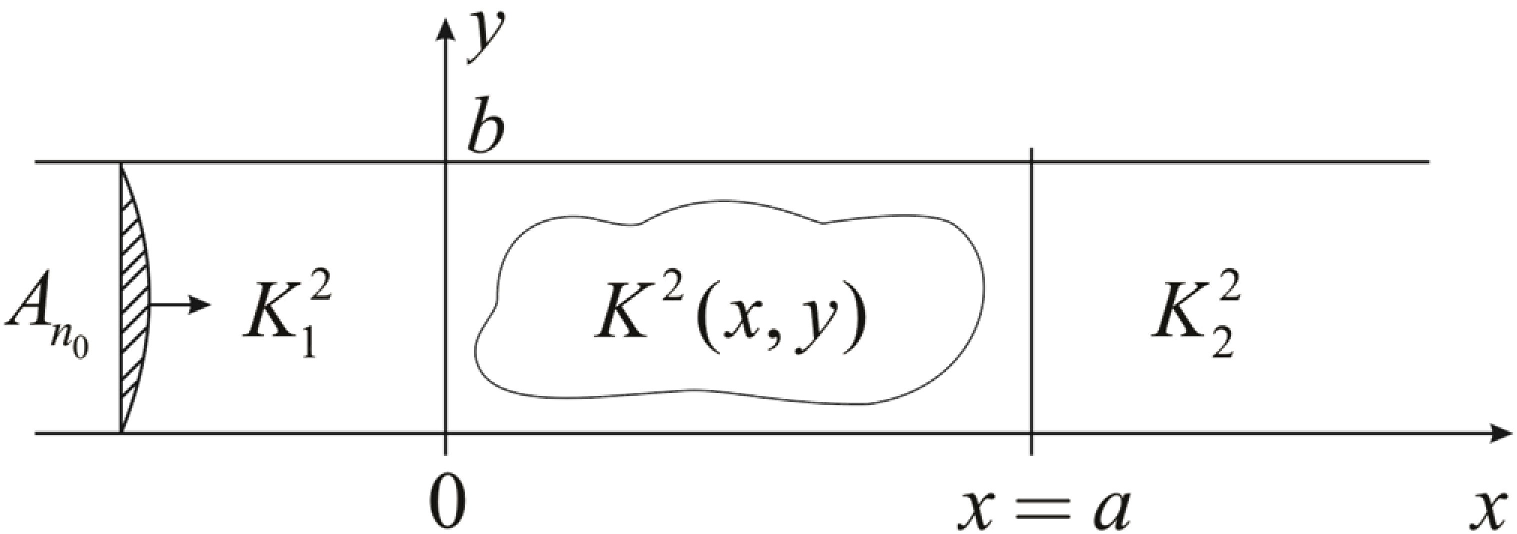
То есть нужно найти решение уравнения Гельмгольца (29), являющееся предельной амплитудой для решения уравнения колебаний (25) с начальными условиями (26):

$$u(M,t)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{K_M^{at}}\frac{F\left(Q,t-r_{QM}/a\right)}{r_{QM}}dV_Q=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{K_M^{at}}\frac{f(Q)}{r_{QM}}e^{-i\omega\left(t-r_{QM}/a\right)}dV_Q,$$

f(M) **– финитная функция,** $\operatorname{supp} f\subset D.$

$$V(M)=\lim_{t\to\infty}u(M,t)e^{i\omega t}=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{D}f(Q)\frac{e^{ikr_{QM}}}{r_{QM}}dV_Q.$$

5. Парциальные условия излучения



Рассмотрим плоский волновод с локальной нерегулярностью.

При $x \leq 0,\ x \geq a$ **волновод регулярный: его заполнение однородно и геометрия сечения постоянна.**

Нормальные волны (моды) – **частные решения вида**

$$u(x,y) = e^{i\gamma x}\psi(y), \tag{30}$$

где γ – **постоянная распространения,** $\psi(y)$ **- функция сечения.**

Поле $u(x,y)$ **в волноводе удовлетворяет уравнению Гельмгольца:**

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad (x,y) \in V \equiv \mathbb{R}^1 \times (0,b), \tag{31}$$

где $k^2(x,y) = \bar{k}^2(x,y) + i\bar{\bar{k}}^2(x,y),$

$$k^2(x,y) = \begin{cases} k_1^2 = const, & x < 0, \\ k^2(x,y), & 0 < x < a, \\ k_2^2 = const, & x > a. \end{cases} \tag{32}$$

Электродинамический случай: $k^2(x,y) = k_0^2 \varepsilon(x,y)$, **где**

$k_0 = \frac{\omega}{c}$ **- волновое число,** $\varepsilon(x,y)$ **- диэлектрическая проницаемость.**

$$u(x,0)=0,\ \ u(x,b)=0,\ \ x\in\mathbb{R}^1 - \tag{33}$$

- граничные условия (например, идеально проводящие стенки).

(30), (31), (33) $=>$

$$\begin{cases}\psi''(y)+\lambda\psi(y)=0, \quad 0<y<b, & (34)\\ \psi(0)=0, \quad \psi(b)=0, & (35)\end{cases}$$

где $\lambda=k^2-\gamma^2.$

(34), (35) =>

$$\psi_n(y)=\sqrt{\frac{2}{b}}\sin\frac{\pi n y}{b}, \qquad \lambda_n=\left(\frac{\pi n}{b}\right)^2, \ (n=1,2,\ldots) \tag{36}$$

Существует счетное множество нормальных волн (мод) вида:

$$u_n(x,y)=e^{i\gamma_n x}\psi_n(y), \qquad \gamma_n=\sqrt{k^2-\lambda_n}, \ (n=1,2,\ldots)$$

$$\text{при} \quad (x\le 0,\ x\ge a). \tag{37}$$

Пусть на неоднородность падает слева нормальная волна индекса n_0 с амплитудой A_{n_0}. В сечении $x=0$ **парциальные условия излучения при** **временной зависимости $e^{-i\omega t}$ имеют вид:**

$$\int_0^b \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + i\gamma_n^{(1)} u \right\}_{x=0} \cdot \psi_n(y)dy = 2i\gamma_{n_0}^{(1)} A_{n_0} \cdot \delta_{n,n_0}, \quad (n=1,2,...) \tag{38}$$

Аналогично ставятся условия в сечении $x=a$.

Условия (38) – нелокальные.

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(x)\psi_n(y), \tag{39}$$

$$\mathrm{Z}_n(x) = \int_0^b u(x,y)\psi_n(y)dy \qquad (n=1,2,...) \tag{40}$$

Из (38), (40) следует, что парциальные условия излучения – это условия, которые накладываются на коэффициенты Фурье *Zn(x)* в разложении функции *U(x,y)* по функциям сечения $\psi_n(y)$**:**

$$Z_n'(0) + i\gamma_n^{(1)} Z_n(0) = 2i\gamma_{n_0}^{(1)} A_{n_0} \delta_{n,n_0} \qquad (41)$$

Пусть *D*-область между сечениями *x*=0 и *x*=*a*: $\bar{D} \equiv \{0 \le x \le a, 0 \le y \le b\}$.

Краевая задача имеет вид:

$$\begin{cases} \Delta u + k^2(x,y)u = 0, \quad (x,y) \in D, & (42) \\ u(x,0)=0, \ u(x,b) = 0, \quad 0 \le x \le a, & (43) \\ \int\limits_0^b \left\{ \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\gamma_n^{(1)} u \right\}_{x=0} \psi_n(y)dy = 2i\gamma_{n_0}^{(1)} A_{n_0} \delta_{n,n_0} \ (n = 1, 2, \ldots), & (44) \\ \int\limits_0^b \left\{ \dfrac{\partial u}{\partial x} - i\gamma_n^{(2)} u \right\}_{x=a} \psi_n(y)dy = 0 \ (n = 1, 2, \ldots), & (45) \end{cases}$$

где $\gamma_n^{(l)} = \sqrt{k_l^2 - \lambda_n}$ $(n = 1, 2, \ldots; l = 1, 2)$ $-$ **постоянные распространения нормальных волн.**

Условия (45) означают отсутствие волн приходящих из $+\infty$ (то есть справа).

Теорема 3. Пусть $k^2=\bar{k}^2+i\bar{\bar{k}}^2, \bar{\bar{k}}\neq 0, \gamma_n^{(l)}=\bar{\gamma}_n^{(l)}+i\bar{\bar{\gamma}}_n^{(l)}, \bar{\gamma}_n^{(l)}>0 (n=1,\ldots;l=1,2).$

Тогда классическое решение задачи (42)-(45) единственно.

Доказательство

Предположим существование двух решений: $u_1(x,y)\neq u_2(x,y)\Rightarrow$
$\Rightarrow u(x,y)=u_1(x,y)-u_2(x,y)\Rightarrow(42)-(45),\ A_{n_0}=0.$

Умножим (42) на u^* **и проинтегрируем по области** D **(интегрирование по частям):**

$$\int_0^a\int_0^b\left(\Delta u\ u^*+k^2u\ u^*\right)dxdy=\int_0^b u_x u^*\Big|_{x=a}dy-\int_0^b u_x u^*\Big|_{x=0}dy-$$

$$-\int_0^a\int_0^b\left(|u_x|^2+|u_y|^2\right)dxdy+\int_0^a\int_0^b k^2|u|^2\,dxdy=0, \qquad (46)$$

$$u^*(a,y)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n^*\psi_n(y),\quad C_n^*=\int_0^b u^*(a,y)\psi_n(y)dy\quad (n=1,2,\ldots)\quad (47)$$

$$\int_0^b u_x\,u^*\Big|_{x=a}dy=\sum_{n=1}^{\infty}C_n^*\int_0^b u_x(a,y)\psi_n(y)dy=$$

$$=i\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n^{(2)}C_n^*\int_0^b u(a,y)\psi_n(y)dy=i\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n^{(2)}C_n^*C_n=$$

$$=i\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n^{(2)}\left|C_n\right|^2.\qquad (48)$$

Аналогично получаем:

$$\int_0^b u_x\,u^*\Big|_{x=0}dy=-i\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n^{(1)}\left|B_n\right|^2,\qquad (49)$$

где

$$u^*(0,y)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n^*\psi_n(y),\quad B_n^*=\int_0^b u^*(0,y)\psi_n(y)dy\quad (n=1,2,\ldots)\quad (50)$$

(46), (48), (49) $\Rightarrow$

$$i\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n^{(2)}\left|C_n\right|^2+i\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n^{(1)}\left|B_n\right|^2-$$

$$-\int_0^a\int_0^b\left|grad\ u\right|^2dxdy+\int_0^a\int_0^b k^2\left|u\right|^2dxdy=0\qquad (51)$$

Возьмём в (51) мнимую часть:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\gamma}_n^{(2)}\left|C_n\right|^2+\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\gamma}_n^{(1)}\left|B_n\right|^2+\int_0^a\int_0^b\overline{\overline{k}}^2\left|u\right|^2dxdy=0\qquad (52)$$

$(52)\Rightarrow u=0,\ \ (x,y)\in D;\ \ C_n=0\ \ (n=1,2,\ldots)\Rightarrow u(a,y)=0;$

$B_n=0\ \ (n=1,2,\ldots)\Rightarrow u(0,y)=0\Rightarrow u(x,y)=0\Rightarrow u_1(x,y)=u_2(x,y),$

$(x,y)\in\overline{D}.$

Замечание. Пользуясь принципом предельного поглощения, можно показать, что единственность имеет место и в случае вещественного коэффициента $k^2(x, y)$.

6. Излучение волн. Квадрупольный излучатель

Поверхность шара радиуса *a* колеблется так, что радиальная составляющая скорости $\tilde{V}_r$ на поверхности $r = a$ равна

$$\tilde{V}_a = \frac{V_0}{4}\left(1 + 3\cos 2\theta\right)e^{-i\omega t} \tag{53}$$

Вычислить интенсивность и мощность такого излучателя второго порядка – квадрупольного излучателя.

Звуковое давление $\tilde{p}(M, t)$ удовлетворяет уравнению колебаний:

$$\frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial t^2} = c^2 \Delta \tilde{p}, \qquad \text{где} \qquad c^2 = \gamma \frac{p_0}{\rho_0}, \tag{54}$$

C – скорость звука, p_0 и ρ_0 -давление и плотность среды в невозмущенном состоянии, γ -показатель адиабаты.

Установившийся процесс: $\tilde{p}(M,t) = p(M)e^{-i\omega t}.$

Радиальная составляющая скорости:

$$\frac{\partial \tilde{V}_r}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} \Rightarrow V_r = \frac{1}{i\omega\rho_0}\frac{\partial p}{\partial r}, \qquad (55)$$

где $\tilde{V}_r = V_r e^{-i\omega t}.$ Для полинома Лежандра $P_2(x)$ имеет место формула:

$$P_2(x) = \frac{3x^2-1}{2} \Rightarrow \frac{1+3\cos 2\theta}{4} = P_2(\cos\theta) \Rightarrow \qquad (56)$$

$$\begin{cases} \Delta p + k^2 p = 0, \quad r > a, & (57) \\ \dfrac{\partial p}{\partial r} = i\omega\rho_0 V_0 P_2(\cos\theta), \quad r = a, & (58) \\ p = \underline{\underline{O}}(\frac{1}{r}), & (59) \\ \dfrac{\partial p}{\partial r} - ikp = \overline{\overline{o}}(\frac{1}{r}), \qquad k = \dfrac{\omega}{c}. & (60) \end{cases}$$

Симметрия по $\varphi \Rightarrow p(M) = p(r,\theta) \Rightarrow$

$$p(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \zeta_n^{(1)}(kr) P_n(\cos\theta), \qquad (61)$$

где

$$\zeta_n^{(1)}(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(kr). \qquad (62)$$

$$(58),(61) \Rightarrow \quad C_2 = ic\rho_0 V_0 \frac{1}{\zeta_2^{(1)\prime}(ka)} \Rightarrow \qquad (63)$$

$$p(r,\theta) = ic\rho_0 V_0 \frac{\zeta_2^{(1)}(kr)}{\zeta_2^{(1)\prime}(ka)} P_2(\cos\theta), \qquad (64)$$

$$V_r(r,\theta) = V_0 \frac{\zeta_2^{(1)\prime}(kr)}{\zeta_2^{(1)\prime}(ka)} P_2(\cos\theta). \qquad (65)$$

Рассмотрим длинноволновый случай $(ka \ll 1)$ **и дальнюю (волновую) зону** $(kr \gg 1)$ **:**

$$x \to 0 \qquad \zeta_2^{(1)}(x) \simeq -i\frac{3}{x^3}, \quad \zeta_2^{(1)'}(x) \simeq i\frac{9}{x^4},$$

$$x \to \infty \qquad \zeta_2^{(1)}(x) \simeq -\frac{1}{x}e^{ix}e^{-i\frac{\pi}{2}}, \tag{66}$$

$$\zeta_2^{(1)'}(x) \simeq -\frac{i}{x}e^{ix}e^{-i\frac{\pi}{2}}.$$

$$p(r,\theta) = ic\rho_0 V_0 \frac{-\frac{1}{kr}e^{ikr}e^{-i\frac{\pi}{2}}}{i\frac{9}{(ka)^4}} P_2(\cos\theta) = -\frac{c\rho_0 V_0 k^3 a^4}{9r}e^{ikr}e^{-i\frac{\pi}{2}} P_2(\cos\theta), \tag{67}$$

$$V_r(r,\theta) = -\frac{V_0 k^3 a^4}{9r}e^{ikr}e^{-i\frac{\pi}{2}} P_2(\cos\theta), \tag{68}$$

$$\bar{P}(r,\theta,t) = \mathrm{Re}\left(p(r,\theta)e^{-i\omega t}\right) =$$

$$= -\frac{c\rho_0 V_0 k^3 a^4}{9r} P_2(\cos\theta)\ \cos(\omega t - kr + \frac{\pi}{2}), \tag{69}$$

$$\bar{V}_r(r,\theta,t) = \mathrm{Re}\left(V_r(r,\theta)e^{-i\omega t}\right) =$$

$$= -\frac{V_0 k^3 a^4}{9r} P_2(\cos\theta)\ \cos(\omega t - kr + \frac{\pi}{2}). \tag{70}$$

Интенсивность излучения квадруполя $\bar{Y}$ **:**

$$\bar{Y} = \frac{1}{T}\int_0^T \bar{P}(r,\theta,t)\bar{V}_r(r,\theta,t)dt, \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}, \tag{71}$$

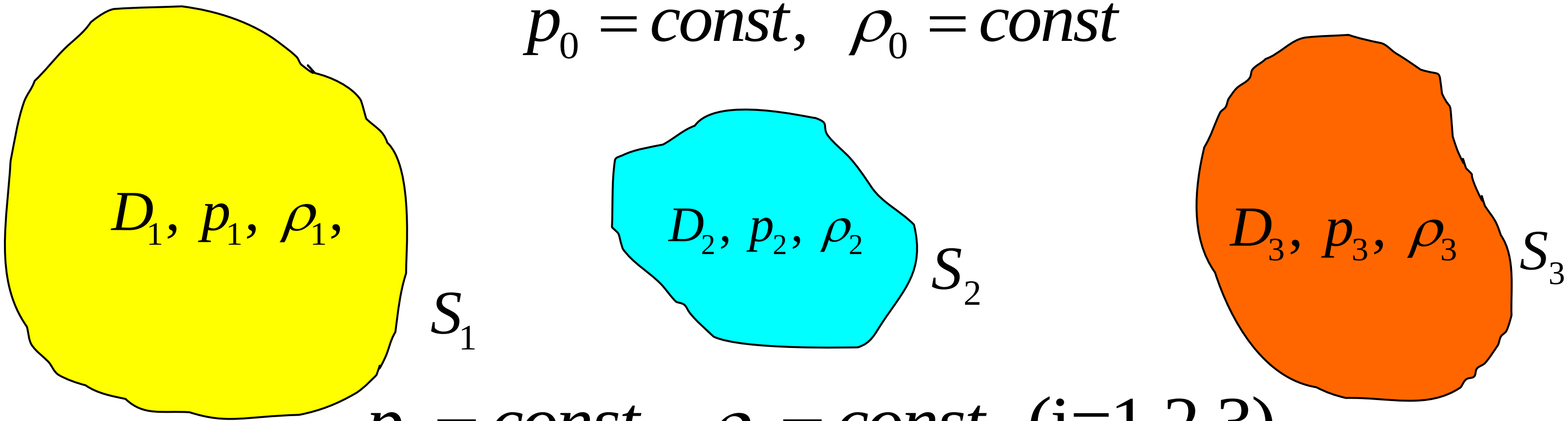
$$\bar{Y} = \frac{c\rho_0 V_0^2 k^6 a^8 P_2^2(\cos\theta)}{162 r^2} \tag{72}$$

Мощность излучения квадруполя Π **:**

$$\Pi = r^2 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \bar{Y}\sin\theta d\theta d\varphi = \frac{2\pi c\rho_0 V_0^2 k^6 a^8}{405} \tag{73}$$

7. Задачи математической теории дифракции

$$p_0 = const, \quad \rho_0 = const$$



$$p_i = const, \quad \rho_i = const \quad \text{(i=1,2,3)}$$

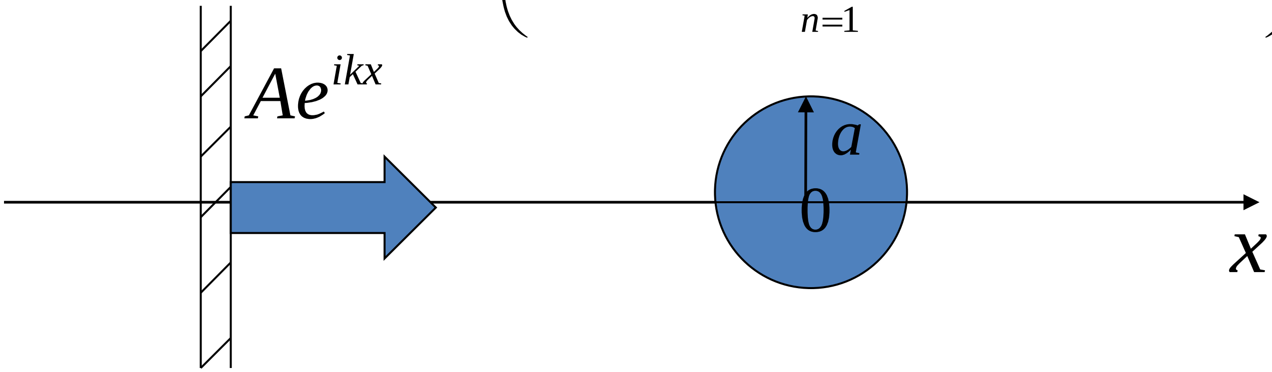
$$\begin{cases} \Delta V_i + k_i^2 V_i = -f_i, \quad M \in D_i \quad (i = 0,1,2,3) & (74) \\ V_i = V_0, \quad M \in S_i, & (75) \\ p_i \dfrac{\partial V_i}{\partial n} = p_0 \dfrac{\partial V_0}{\partial n}, \quad M \in S_i \quad (i = 1,2,3), & (76) \\ V_0(M) = \underline{\underline{O}}\left(\dfrac{1}{r}\right), & (77) \\ \dfrac{\partial V_0}{\partial r} - ik_0 V_0 = \overline{\overline{o}}\left(\dfrac{1}{r}\right), \quad k_i^2 = \dfrac{\rho_i}{p_i}\omega^2 \quad \text{(i=0,1,2,3)} & (78) \end{cases}$$

Дифракция звуковой волны на бесконечном жёстком цилиндре

На цилиндр радиуса *a* падает плоская звуковая волна, давление $p_0(x)$

в которой можно представить в виде:

$$p_0 = Ae^{ikx} = Ae^{ikr\cos\varphi} = A\left(J_0(kr) + 2\sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(kr)\cos n\varphi \right) \quad (79)$$



Обозначим: $p(r,\varphi) = p_0(r,\varphi) + p_s(r,\varphi) -$ **- полное давление,** $p_0(r,\varphi) -$ **давление в падающей волне,** $p_s(r,\varphi) -$ **давление в отраженной волне.**

Для давления в отраженной волне получим краевую задачу:

$$\begin{cases} \Delta p_s + k^2 p_s = 0, \quad r > a, & (80) \\ \dfrac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial p_s}{\partial r} = -\dfrac{\partial p_0}{\partial r}, \quad r = a, & (81) \\ p_s = \underline{\underline{O}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{r}}\right), & (82) \\ \dfrac{\partial p_s}{\partial r} - ikp_s = \overline{\overline{o}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{r}}\right). & (83) \end{cases}$$

$$p_s(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n H_n^{(1)}(kr)\cos n\varphi. \qquad (84)$$

(79), (81), (84) $\Rightarrow$

$$C_0 = \frac{J_1(ka)}{H_0^{(1)\prime}(ka)} A, \quad C_n = -\frac{2i^n J_n'(ka)}{H_n^{(1)\prime}(ka)} A, \qquad (85)$$

(n=1,2,...).

Решение задачи (80)-(83) имеет следующий вид:

$$p_s(r,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n H_n^{(1)}(kr)\cos n\varphi =$$

$$= A\left(\frac{J_1(ka)}{H_0^{(1)\prime}(ka)} H_0^{(1)}\left(kr\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2i^n J_n'(ka)}{H_n^{(1)\prime}(ka)} H_n^{(1)}(kr)\cos n\varphi \right), \qquad (86)$$

Радиальная составляющая отраженной волны выражается через давление в отраженной волне следующим образом:

$$V_{sr}(r,\varphi) = \frac{1}{i\omega\rho_0}\frac{\partial p_s\left(r,\varphi\right)}{\partial r} = \frac{1}{ic\rho_0}\sum_{n=0}^{\infty} C_n H_n^{(1)\prime}(kr)\cos n\varphi \qquad (87)$$

$$= \frac{1}{ic\rho} A\left(\frac{J_1(ka)}{H_0^{(1)\prime}(ka)} H_0^{(1)}\left(kr\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2i^n J_n'(ka)}{H_n^{(1)\prime}(ka)} H_n^{(1)}(kr)\cos n\varphi \right).$$

Рассмотрим волновую (дальнюю) зону $(kr \gg 1)$**:**

$$H_n^{(1)}(kr) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{i\left(kr - \frac{\pi}{2}n - \frac{\pi}{4}\right)}; \tag{88}$$

$$p_s(r,\varphi) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{i\left(kr - \frac{\pi}{4}\right)} \sum_{n=0}^{\infty} C_n i^{-n} \cos n\varphi$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{i\left(kr - \frac{\pi}{4}\right)} A\left(\frac{J_1(ka)}{H_0^{(1)'}(ka)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_n'(ka)}{H_n^{(1)'}(ka)} \cos n\varphi \right); \tag{89}$$

$$V_{sr}(r,\varphi) = \frac{1}{i\omega\rho_0} \frac{\partial p_s(r,\varphi)}{\partial r} = \frac{1}{ic\rho_0} \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{i\left(kr - \frac{\pi}{4}\right)} \sum_{n=0}^{\infty} C_n i^{-n} \cos n\varphi$$

$$= \frac{1}{ic\rho} A\left(\frac{J_1(ka)}{H_0^{(1)'}(ka)} H_0^{(1)'}(kr) + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n'(ka)}{H_n^{(1)'}(ka)} H_n^{(1)'}(kr) \cos n\varphi \right). \tag{90}$$

Вывод формулы (79)

Воспользуемся разложением экспоненты в ряд Фурье:

$$e^{ikr\cos\varphi} = a_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n(r)\cos n\varphi + b_n(r)\sin n\varphi\right),$$

где

$$a_0(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikr\cos\varphi}d\varphi,$$

$$a_n(r) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikr\cos\varphi}\cos n\varphi d\varphi,$$

$$b_n(r) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikr\cos\varphi}\sin n\varphi d\varphi \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

Преобразуем выражение для $a_n(r)$**:**

$$a_n(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikr\cos\varphi}\left(e^{ik\varphi} + e^{-ik\varphi}\right)d\varphi.$$

Воспользуемся интегральным представлением функции Бесселя

$$J_n(kr) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikr\sin\alpha + in\alpha}d\alpha.$$

Сделаем замену переменных $\alpha = \varphi - \frac{\pi}{2}$. **При этом** $\sin\alpha = -\cos\alpha$.

Заметим, что функция $f(r,\alpha) = e^{-ikr\sin\alpha + in\alpha}$ **при любом r**

является $2\pi-$ **периодической функцией параметра** α **. Поэтому в**

выражении для $J_n(kr)$ **нтегрирование можно проводить по любому**

отрезку длиной 2π. **В самом деле**

$$I(r,\beta) = \int\limits_{\beta}^{\beta+2\pi} f(r,\alpha)\,d\alpha,$$

откуда

$$\frac{\partial I(r,\beta)}{\partial \beta} = f(r,\beta+2\pi) - f(r,\beta) = 0,$$

то есть $I(r,\beta)$ **от параметра** β **не зависит. Следовательно, для** $J_n(kr)$

имеет место интегральное представление

$$J_n(kr) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{ikr\cos\varphi + in\varphi} e^{-i\frac{\pi}{2}n}\,d\varphi = \frac{(-1)^n}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{ikr\cos\varphi + in\varphi}\,d\varphi.$$

Таким образом получаем, что

$$a_n(r) = i^n J_n(kr) + i^{-n} J_{-n}(kr) = i^n \left(J_n(kr) + i^{-2n} J_{-n}(kr) \right) =$$

$$= i^n \left(J_n(kr) + (-1)^n J_{-n}(kr) \right) = 2i^n J_n(kr).$$

Аналогично получаем (сравнить с формулой для $a_n(r)$ **:**

$$b_n(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikr\cos\varphi} \left(e^{ik\varphi} - e^{-ik\varphi} \right) d\varphi =$$

$$= i^{-1} \left(i^n J_n(kr) - i^{-n} J_{-n}(kr) \right) = i^{-1} i^{-n} \left(i^{2n} J_n(kr) - i J_{-n}(kr) \right) =$$

$$= i^{-(n+1)} \left((-1)^n J_n(kr) - i J_{-n}(kr) \right) = 0.$$

Таким образом, для разложения плоской волны по цилиндрическим функциям имеет место формула

$$e^{ikr\cos\varphi} = J_0(kr) + 2\sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(kr)\cos n\varphi,$$

откуда следует формула (79).