ГЛАВА 1

Системы линейных уравнений

1. Основные теоремы

1.1. Определение. Алгебраической линейной системой m уравнений с n неизвестными называется система уравнений

$$a_1^1x^1 + a_2^1x^2 + \cdots + a_n^1x^n = b^1, \tag{1.1}$$

$$a_1^2x^1 + a_2^2x^2 + \cdots + a_n^2x^n = b^2, \tag{1.2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{1.3}$$

$$a_1^mx^1 + a_2^mx^2 + \cdots + a_n^mx^n = b^m, \tag{1.4}$$

где $a_j^k, b^s \in \mathbb{K}$ для всех $j \in \overline{1,n}$, $k, s \in \overline{1,m}$, а переменные $x^1, \ldots, x^n$ принимают значения из поля $\mathbb{K}$.

1.2. Из чисел a_j^k можно составить матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix},$$

которая называется матрицей системы (2.1)–(2.4). Числа b^k при $k \in \overline{1,m}$ называются свободными членами системы, а x^j — неизвестными системы (2.1)–(2.4). Тогда *систему уравнений* (2.1)–(2.4) можно переписать в следующем виде:

$$A \cdot X = B, \quad X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^m \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

1.3. Определение. Решением системы (2.1)–(2.4) называется набор чисел

$$x^1, x^2, \ldots, x^n,$$

который, будучи поставленным в систему, обращает все ее уравнения в тождества. Система, имеющая решение, называется **совместной,** а не имеющая решений — **несовместной**.

1.4. Определение. Если не все b^k равны нулю система уравнений (2.1)–(2.4) называется **неоднородной,** если же все $b^k = 0$, система называется **однородной**.

1.5. Определение. Однородную систему уравнений $A \cdot X = O$ с той же матрицей A, что и у неоднородной системы (1.5), называется однородной системой, соответствующей неоднородной системе (1.5).

1.6. Определение. Две линейные системы уравнений

$$A \cdot X = B \quad \text{и} \quad A'X = B'$$

называются эквивалентными, если все решения первой системы являются решениями второй системы и, наоборот, решения второй системы являются решениями первой системы.

1.7. Систему (1.5) можно переписать в следующем виде:

$$x^1 A_1 + x^2 A_2 + \cdots + x^n A_n = B, \tag{1.6}$$

где

$$A = \|A_1, A_2, \ldots, A_n\|,$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ \vdots \\ a_1^m \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ \vdots \\ a_2^m \end{pmatrix}, \ldots, A_n = \begin{pmatrix} a_n^1 \\ a_n^2 \\ \vdots \\ a_n^m \end{pmatrix}.$$

При такой записи системы уравнений (1.5) рассмотрение этой системы уравнений с позиции линейных пространств состоит в построении всевозможных разложений столбца B по столбцам $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

1.8. Определение. Система уравнений (1.5) называется системой Крамера, если $m = n$ и набор столбцов $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \subset \mathbb{K}^{n\times 1}$ является линейно независимым.

1.9. Теорема. Система Крамера. *Система Крамера* (1.5) *для любого столбца $B \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ правой части имеет единственное решение.*

Доказательство. Поскольку набор столбцов $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ является линейно независимым, то они образуют базис в линейном пространстве столбцов $\mathbb{K}^{n\times 1}$ длины n.

□ Действительно, как известно базис пространства столбцов $\mathbb{K}^{n\times 1}$ состоит из n векторов и поэтому размерность этого линейного пространства равна $n \in \mathbb{N}$. Поэтому семейство столбцов $\{B, A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ линейно зависимо, поскольку их число равно $n+1$. Следовательно, найдутся такие числа $\beta, \alpha^1, \ldots, \alpha^n$, не все равные нулю, что справедливо равенство

$$\beta B + \alpha^1 A_1 + \cdots + \alpha^n A_n = O \in \mathbb{K}^{n\times 1}. \tag{1.7}$$

Если $\beta = 0$, то получим равенство

$$\alpha^1 A_1 + \cdots + \alpha^n A_n = O \in \mathbb{K}^{n\times 1} \Rightarrow \alpha^1 = \cdots = \alpha^n = 0,$$

поскольку семейство столбцов $A_1, A_2, \ldots, A_n$ линейно независимо. Противоречие. Следовательно, $\beta \neq 0$. Поэтому из (1.7) вытекает равенство

$$B = -\frac{\alpha^1}{\beta} A_1 - \cdots - \frac{\alpha^n}{\beta} A_n = O \in \mathbb{K}^{n\times 1}. \tag{1.8}$$

Отсюда получаем полноту семейства столбцов $A_1, A_2, \ldots, A_n$ в $\mathbb{K}^{n\times 1}$. ⊠

Следовательно, произвольный столбец $B \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ можно единственным образом разложить по базису $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$:

$$B = \xi^1 A_1 + \xi^2 A_2 + \cdots + \xi^n A_n.$$

Следовательно,

$$X := \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix}$$

— есть единственное решение системы уравнений, записанной в форме (1.6). □

1.10. Теорема. Теорема Кронекера–Капелли. *Для того чтобы система уравнений* (1.6) *имела решение, необходимо и достаточно, чтобы столбец правой части* $B \in L(A_1, A_2, \ldots, A_n)$.

Доказательство. Необходимость. Если система уравнений (1.6) имеет решение, то эта система уравнений выполняется при некотором наборе $(x^1, x^2, \ldots, x^n)^T = (\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n)^T$ и поэтому $B \in L(A_1, A_2, \ldots, A_n)$.

Достаточность. Пусть $B \in L(A_1, A_2, \ldots, A_n)$, то найдутся такие числа $\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n \in \mathbb{K}$, что

$$B = \xi^1 A_1 + \xi^2 A_2 + \cdots + \xi^n A_n \in L(A_1, A_2, \ldots, A_n).$$

И, следовательно, столбец $(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n)^T$ является решением системы уравнений (1.6). $\square$

1.11. Следствие. *Для того чтобы система* (1.6) *имела решение, необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство* $\operatorname{rk} L(A_1, A_2, \ldots, A_n) = \operatorname{rk} L(A_1, A_2, \ldots, A_n, B)$.

Доказательство. С одной стороны, совершенно понятно, что $\operatorname{rk} L(A_1, A_2, \ldots, A_n) \subset \operatorname{rk} L(A_1, A_2, \ldots, A_n, B)$. С другой стороны, в силу результата теоремы 1.10 система уравнений (1.6) имеет решение, тогда и только тогда, когда $B \in L(A_1, A_2, \ldots, A_n)$, что равносильно тому что, $\operatorname{rk} L(A_1, A_2, \ldots, A_n, B) \subset L(A_1, A_2, \ldots, A_n)$. Следовательно, $L(A_1, A_2, \ldots, A_n) = L(A_1, A_2, \ldots, A_n, B)$. Таким образом, имеем

$$\operatorname{rk} L(A_1, A_2, \ldots, A_n) = \operatorname{rk} L(A_1, A_2, \ldots, A_n, B).$$

$\square$

1.12. Теорема. Альтернативы Фредгольма 1. *Если квадратная однородная система уравнений, состоящая из n уравнений относительно n переменных*:

$$x^1 A_1 + x^2 A_2 + \cdots + x^n A_n = O, \quad A_k,\ O \in \mathbb{K}^{n \times 1}, \quad k = \overline{1, n}, \tag{1.9}$$

отвечающая неоднородной системе уравнений

$$x^1 A_1 + x^2 A_2 + \cdots + x^n A_n = B, \quad B \in \mathbb{K}^{n \times 1} \tag{1.10}$$

имеет только тривиальное решение, то неоднородная система (1.10) *имеет единственное решение для любого столбца* $B \in \mathbb{K}^{n \times 1}$.

Если же однородная система (1.9) *имеет решения, отличные от тривиального, то существует такой столбец* $B \in \mathbb{K}^{n \times 1}$, *при котором неоднородная система* (1.10) *не имеет ни одного решения.*

Доказательство. Если однородная система уравнений (1.9) имеет только тривиальное решение $(x^1, x^2, \ldots, x^n)^T = (0, 0, \ldots, 0)^T$, то набор столбцов $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \subset \mathbb{K}^{n \times 1}$ является линейно независимым, а поскольку их число равно n, то они образуют базис в пространстве столбцов $\mathbb{K}^{n \times 1}$. Следовательно, любой столбец $B \in \mathbb{K}^{n \times 1}$ можно разложить единственным образом по базису $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$:

$$B = \xi^1 A_1 + \xi^2 A_2 + \cdots + \xi^n A_n.$$

Стало быть, неоднородная система уравнений (1.10) имеет единственное решение $(x^1, x^2, \ldots, x^n)^T = (\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n)^T$ для любого столбца правой части $B \in \mathbb{K}^{n \times 1}$.

Во втором случае набор столбцов $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ является линейно зависимым и поэтому столбцы этого набора не образуют базиса в $\mathbb{K}^{n\times 1}$. Значит, найдется такой столбец $B \neq O$ из $\mathbb{K}^{n\times 1}$, который нельзя выразить через столбцы $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$, т. е. уравнение

$$B = \xi^1 A_1 + \xi^2 A_2 + \dots + \xi^n A_n$$

невозможно не для какого-либо набора чисел $(\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n)^T \in \mathbb{K}^{n\times 1}$. □

1.13. Теорема. Альтернативы Фредгольма 2. *Если однородная система* (1.9) *имеет решения, отличные от тривиального, то для того чтобы неоднородная система уравнений* (1.10) *имело решение, необходимо и достаточно, чтобы $B^T \cdot Y = 0$ для всех решений Y однородной системы уравнений*

$$A^T \cdot Y = O. \tag{1.11}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть неоднородная система уравнений (1.10) имеет решение $X \in \mathbb{K}^{n\times 1}$. Тогда справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} A \cdot X = B \quad \text{и} \quad A^T \cdot Y = O \Rightarrow Y^T \cdot A \cdot X = Y^T \cdot B \Rightarrow \\ \Rightarrow (Y^T \cdot A \cdot X)^T = (Y^T \cdot B)^T \Rightarrow X^T \cdot (A^T \cdot Y) = B^T \cdot Y \Rightarrow \\ \Rightarrow X^T \cdot O = B^T \cdot Y \Rightarrow B^T \cdot Y = O \end{aligned}$$

для всех решений $Y \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ матричного уравнения (1.11), где мы воспользовались известными равенствами для операции транспонирования матриц

$$Z^{TT} = Z, \quad (Z_1 Z_2)^T = Z_2^T Z_1^T$$

для всех

$$Z \in \mathbb{K}^{l\times p}, \quad Z_1 \in \mathbb{K}^{l\times p}, \quad Z_2 \in \mathbb{K}^{p\times r}.$$

Достаточность. Пусть выполнено равенство

$$Y^T \cdot B = 0 \quad \text{для всех решений уравнения} \quad A^T \cdot Y = O \Leftrightarrow Y^T A = O.$$

Заметим, что

$$A = \left\| \begin{array}{c} A^1 \\ \vdots \\ A^n \end{array} \right\|, \; A^T = \|A^1, \dots, A^n\|, \; Y = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}, \; Y^T = (y^1, \dots, y^n).$$

Тогда равенство (1.11) можно переписать в следующем виде:

$$y^1 A^1 + \dots + y^n A^n = O, \tag{1.12}$$

а уравнение $Y^T \cdot B = 0$ можно переписать в следующем виде:

$$y^1 b^1 + \dots + y^n b^n = 0. \tag{1.13}$$

Равенства (1.12) и (1.13) можно переписать в следующем виде:

$$y^1(A^1, b^1) + \dots + y^n(A^n, b^n) = (O, 0) \tag{1.14}$$

или в свернутом матричном виде

$$Y^T \cdot \|A|B\| = \|O|0\|. \tag{1.15}$$

Предположим теперь, что неоднородная система уравнений (1.10) не совместна. Это означает, что методом Гаусса–Жордана расширенную матрицу $\widetilde{A} = \|A|B\|$ методом элементарных преобразований строк можно привести к такому упрощенному виду, что у расширенной матрицы появится строчка следующего вида:

$$(0, \dots, 0, 1),$$

причем эта строчка согласно методу Гаусса–Жордана является линейной комбинацией исходных строк расширенной матрицы $\widetilde{A} = \|A|B\|$. Следовательно, найдутся такие числа $y^1, \dots, y^n \in \mathbb{K}$, что

$$y^1(A^1, b^1) + \dots + y^n(A^n, b^n) = (0, \dots, 0, 1) \Rightarrow \\ \Rightarrow Y^T \cdot \|A|B\| = \|O|1\|. \tag{1.16}$$

Из равенства (1.16) вытекает, что нашлось такое Y, которое одновременно удовлетворяет равенствам (1.15) и (1.16). Противоречие. Значит, система (1.10) совместна. □

2. Фундаментальное семейство решений

1.14. В этом параграфе будет показано, что множество решений однородной системы m линейных уравнений относительно n неизвестных является подпространством линейного пространства $\mathbb{K}^{n\times 1}$, а множество решений неоднородной системы линейных уравнений представляет из себя *линейное многоообразие* — аналог плоскости и прямой в трехмерном пространстве. При этом мы будем использовать векторную форму записи неоднородной системы уравнений:

$$x^1 A_1 + x^2 A_2 + \dots + x^n A_n = B. \tag{1.17}$$

и соответствующей однородной системы уравнений

$$x^1 A_1 + x^2 A_2 + \dots + x^n A_n = O. \tag{1.18}$$

1.15. Теорема. *Множество всех решений однородной системы линейных уравнений* (1.18) *образует линейное подпространство в* $\mathbb{K}^{n\times 1}$.

Доказательство. Пусть $X_1^T = (x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^n)$ и $X_2^T = (x_2^1, x_2^2, \ldots, x_2^n)$ — два решения однородной системы уравнений

$$x^1 A_1 + x^2 A_2 + \cdots + x^n A_n = O \Leftrightarrow A \cdot X = O.$$

Тогда для любых $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{K}$ справедливы следующие равенства:

$$A \cdot (\alpha^1 X_1 + \alpha^2 X_2) = \alpha^1 A \cdot X_1 + \alpha^2 A \cdot X_2 = \alpha^1 O + \alpha^2 O = O.$$

$\square$

1.16. Определение. Множество всех решений линейной однородной системы (1.18) называется подпространством решений и обозначается далее знаком $\mathcal{N}$.

1.17. Определение. Множество всех решений линейной неоднородной системы уравнений (1.17) обозначается знаком $\mathcal{M}$.

1.18. Определение. Плоскостью π в координатном линейном пространстве $\mathbb{K}^{n\times 1}$, проходящую через точку $Y_1 \in \mathbb{K}^{n\times 1}$, и с направляющим r–мерным подпространством $L_r \subset \mathbb{K}^{n\times 1}$ при $r \in [1, n-1]$ называется множество всех точек $Y \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ таких, что

$$Y - Y_1 \subset L_r.$$

При $r = 1$ плоскость называется прямой, а при $r = n-1$ плоскость называется гиперплоскостью. Используется обозначение $\pi = Y_1 + L_r$.

1.19. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r\}$ — это базис линейного r–мерного подпространства $L_r \subset \mathbb{K}^{n\times 1}$. Тогда для любого столбца $X \in L_r$ найдутся такие числа $t_1, \ldots, t_r \in \mathbb{K}$, что справедливо равенство

$$X = t_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + t_r \mathbf{e}_r.$$

Тогда уравнение r–мерной плоскости π из определения 1.18 можно записать в векторной параметрической форме

$$\pi = \left\{ Y \in \mathbb{K}^{n\times 1} : \; Y = Y_1 + t_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + t_r \mathbf{e}_r, \; t_1, \ldots, t_r \in \mathbb{K} \right\}.$$

1.20. Геометрическая интерпретация решений неоднородных линейных уравнений. Множество $Y_1 + L_r$ с геометрической точки зрения называется r–мерной плоскостью, а с алгебраической точки зрения называется линейным многообразием.

1.21. Теорема. *Множество всех решений неоднородной системы линейных уравнений* (1.17) *образует линейное многообразие в* $\mathbb{K}^{n\times 1}$, *т.е. плоскость.*

Доказательство. Пусть $Y_1^T = (y_1^1, y_1^2, \ldots, y_1^n)$, $Y^T = (y^1, y^2, \ldots, y^n)$ — два решения неоднородной системы линейных уравнений (1.17).

Образуем их разность $X = Y - Y_1$. Тогда справедливы следующие равенства:

$$A \cdot X = A \cdot (Y - Y_1) = A \cdot Y - A \cdot Y_1 = B - B = O.$$

Отсюда, с одной стороны, получаем, что $Y - Y_1 \in \mathcal{N}$ для всех $Y \in \mathcal{M}$ и некоторого $Y_1 \in \mathcal{M}$. Но тогда имеем

$$\mathcal{M} \subset Y_1 + \mathcal{N}. \tag{1.19}$$

С другой стороны, если $X \in \mathcal{N}$ — произвольное решение соответствующей однородной системы уравнений (1.18), а $Y_1 \in \mathcal{M}$ — какое–то решение неоднородной системы линейных уравнений, то справедливы равенства

$$A \cdot (Y_1 + X) = A \cdot Y_1 + A \cdot X = B + O = B.$$

Следовательно,

$$Y_1 + \mathcal{N} \subset \mathcal{M}. \tag{1.20}$$

Итак, из (1.19) и (1.20) получаем равенство $\mathcal{M} = Y_1 + \mathcal{N}$, из которого вытекает, что $\mathcal{M}$ есть плоскость, проходящая через точку $Y_1 \in \mathbb{K}^{n \times 1}$ с направляющим подпространством $\mathcal{N}$. $\square$

1.22. Определение. Базис в пространстве решений $\mathcal{N}$ однородной системы уравнений (1.17) называется Фундаментальной Системой Решений или ФСР.

1.23. Построение ФСР. Рассмотрим матрицу линейной однородной системы уравнений:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix}. \tag{1.21}$$

Предположим, что матрица $A \neq O$ и поэтому у матрицы A существует базисный минор порядка $r \in [1, \min\{m, n\}]$. Без ограничения общности будем считать, что базисный минор этой матрицы расположен в левом верхнем углу:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 & a_{r+1}^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r & a_{r+1}^r & \cdots & a_n^r \\ a_1^{r+1} & \cdots & a_r^{r+1} & a_{r+1}^{r+1} & \cdots & a_n^{r+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_r^m & a_{r+1}^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix}.$$

При этом исходная система однородных линейных уравнений имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 & a_{r+1}^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r & a_{r+1}^r & \cdots & a_n^r \\ a_1^{r+1} & \cdots & a_r^{r+1} & a_{r+1}^{r+1} & \cdots & a_n^{r+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_r^m & a_{r+1}^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^r \\ x^{r+1} \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{1.22}$$

Тогда в силу теоремы о базисном миноре строчки этой матрицы с номерами от $r+1$ до m линейно выражаются через первые r строк. Поэтому эквивалентная однородная система линейных уравнений имеет матрицу следующего вида:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 & a_{r+1}^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r & a_{r+1}^r & \cdots & a_n^r \end{pmatrix},$$

а сама эквивалентная система однородных линейных уравнений к (1.22) примет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 & a_{r+1}^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r & a_{r+1}^r & \cdots & a_n^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^r \\ x^{r+1} \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{1.23}$$

При этом используя свойства произведения матриц эквивалентную систему линейных уравнений (1.23) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^r \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a_{r+1}^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r+1}^r & \cdots & a_n^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{r+1} \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}.$$

Таким образом, исходная однородная система линейных уравнений (1.22) эквивалентна следующей, вообще говоря, неоднородной линейной системе уравнений:

$$\widetilde{A}_r X_r = \widetilde{B}_r, \quad X_r^T = (x^1, \ldots, x^r), \tag{1.24}$$

$$\widetilde{A}_r = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r \end{pmatrix}, \quad \widetilde{B}_r = -\begin{pmatrix} a_{r+1}^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r+1}^r & \cdots & a_n^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{r+1} \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix},$$

причем система линейных уравнений (1.24) относительно переменных $X_r^T = (x^1, \ldots, x^r)$ является Крамеровской (см. 1.8), поскольку $\det \widetilde{A}_r \neq 0$.

1.24. Определение. В эквивалентной системе линейных уравнений (1.24) переменные $x^1, \ldots, x^r$ называются *независимыми*, а переменные $x^{r+1}, \ldots, x^n$ называются *свободными*.

1.25. Построение ФСР. Продолжение. Для построения всех линейно независимых решений однородной системы уравнений

$$A \cdot X = O, \quad X^T = (x^1, \ldots, x^r, x^{r+1}, \ldots, x^n) \tag{1.25}$$

с матрицей A, определенной равенством (1.21), воспользуемся полученной эквивалентной системой уравнений (1.24). Для этого сначала построим так называемое *нормальное семейство решений* рассматриваемой однородной линейной системы уравнений.

Шаг 1. Сначала положим в системе уравнений (1.24) свободные переменные равными $x^{r+1} = 1$, $x^{r+2} = \cdots = x^n = 0$ и получим из (1.24) следующую неоднородную, вообще говоря, линейную систему уравнений:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^r \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a_{r+1}^1 \\ \vdots \\ a_{r+1}^r \end{pmatrix}, \tag{1.26}$$

которая имеет единственное решение $X_{1r}^T = (x_1^1, \ldots, x_1^r)$. Таким образом, нами построено нетривиальное решение

$$X_1^T = (x_1^1, \ldots, x_1^r, 1, 0, \ldots, 0) \tag{1.27}$$

однородной системы уравнений (1.25).

Шаг 2. Теперь положим в системе уравнений (1.24) свободные переменные равными $x^{r+1} = 0$, $x^{r+2} = 1$, $x^{r+3} = \cdots = x^n = 0$ и получим из (1.24) следующую неоднородную, вообще говоря, линейную систему уравнений:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^r \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a_{r+2}^1 \\ \vdots \\ a_{r+2}^r \end{pmatrix}, \tag{1.28}$$

которая имеет единственное решение $X_{2r}^T = (x_2^1, \dots, x_2^r)$. Таким образом, нами построено нетривиальное решение

$$X_2^T = (x_2^1, \dots, x_2^r, 0, 1, \dots, 0) \tag{1.29}$$

однородной системы уравнений (1.25).

Шаг $n - r$. На этом завершающем шаге построения нормального семейства решений положим свободные переменные равными $x^{r+1} = \dots = x^{n-1} = 0$ и $x^n = 1$ и получим из (1.24) следующую неоднородную, вообще говоря, линейную систему уравнений:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^r \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a_n^1 \\ \vdots \\ a_n^r \end{pmatrix}, \tag{1.30}$$

которая имеет единственное решение $X_{n-rr}^T = (x_n^1, \dots, x_n^r)$. Таким образом, нами построено нетривиальное решение

$$X_{n-r}^T = (x_{n-r}^1, \dots, x_{n-r}^r, 0, 0, \dots, 1) \tag{1.31}$$

однородной системы уравнений (1.25).

1.26. Лемма. Нормальное семейство решений линейной однородной системы уравнений (1.25)

$$X_1^T = (x_1^1, \dots, x_1^r, 1, 0, \dots, 0), \tag{1.32}$$

$$X_2^T = (x_2^1, \dots, x_2^r, 0, 1, \dots, 0), \tag{1.33}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \tag{1.34}$$

$$X_{n-r}^T = (x_{n-r}^1, \dots, x_{n-r}^r, 0, 0, \dots, 1) \tag{1.35}$$

линейно независимое.

Доказательство. Предположим, что столбцы нормального семейства решений однородной системы уравнений (1.25) линейно зависимы. Тогда найдутся такие числа $\alpha^1, \dots, \alpha^{n-r} \in \mathbb{K}$, не равные одновременно нулю, что справедливо равенство

$$\alpha^1 X_1 + \dots + \alpha^{n-r} X_{n-r} = O, \tag{1.36}$$

но тогда согласно свойствам операций сложения столбцов и умножения столбцов на числа приходим к равенству следующего вида:

$$\begin{pmatrix} z^1 \\ \vdots \\ z^r \\ \alpha^1 \\ \alpha^2 \\ \vdots \\ \alpha^{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha^1 = \alpha^2 = \dots = \alpha^{n-r} = 0.$$

Таким образом, равенство (1.36) возможно тогда и только тогда, когда $\alpha^1 = \alpha^2 = \dots = \alpha^{n-r} = 0$. Следовательно, построенное нормальное семейство решений (1.32)–(1.35) линейно независимо. $\square$

1.27. Лемма. Нормальное семейство решений (1.32)–(1.35) линейной однородной системы уравнений (1.25) полно в линейном подпространстве $\mathcal{N}$ решений линейной однородной системы уравнений (1.25).

Доказательство. Шаг 1. Рассмотрим эквивалентную систему линейных уравнений (1.24). Поскольку $\det \widetilde{A}_r \neq 0$, то при заданной правой части $\widetilde{B}_r$ эта система имеет единственное решение $X_r^T = (x^1, \dots, x^r)$. Но в силу явного вида столбца $\widetilde{B}_r$ правой части видно, что он однозначно определяется заданием свободных переменных $x^{r+1}, \dots, x^n$. Отсюда приходим к важному выводу о том, что задание свободных переменных $x^{r+1}, \dots, x^n$ однозначно определяет решение $X^T = (x^1, \dots, x^r, x^{r+1}, \dots, x^n)$ исходной однородной системы уравнений (1.25). Этим результатом мы воспользуемся на следующем шаге доказательства леммы.

Шаг 2. Пусть $X_0^T = (x_0^1, \dots, x_0^r, x_0^{r+1}, \dots, x_0^n)$ — произвольное решение однородной линейной системы уравнений (1.25). Тогда это решение можно представить в виде следующей линейной комбинации нормального семейства решений:

$$X_0 = x_0^{r+1} X_1 + \dots + x_0^n X_{n-r}. \tag{1.37}$$

$\triangle$ Действительно, с одной стороны, заметим, что правая часть равенства (1.37) в силу теоремы 1.15 является решением линейной однородной системы уравнений (1.25). С другой стороны, используя свойства сложения столбцов и умножения столбца на числа правая часть равенства (1.37) представима в следующем виде:

$$x_0^{r+1}X_1+\dots+x_0^nX_{n-r}=\begin{pmatrix} z_0^1\\ \vdots\\ z_0^r\\ x_0^{r+1}\\ \vdots\\ x_0^n\end{pmatrix}:=Y_0, \tag{1.38}$$

причем в силу результата шага 1 решение Y_0 однозначно определяется числами $x_0^{r+1},\dots,x_0^n$ как и решение X_0. Следовательно, $Y_0=X_0$. □

1.28. Следствие. $\dim\mathcal{N}=n-r$, *где* $r=\operatorname{rk}A$.

1.29. Теорема. *Общее решение совместной неоднородной системы уравнений $A\cdot X=B$ можно представить в следующем виде:*

$$X=Y+\sum_{k=1}^{n-r}c^kX_k, \tag{1.39}$$

где Y — какое–либо частное решение неоднородной системы линейных уравнений, а $\{X_1,\dots,X_{n-r}\}$ — ФСР соответствующей линейной однородной системы уравнений $A\cdot X=O$.

Доказательство. Результат теоремы является следствием теоремы 1.21 и следствия 1.28. □

1.30. Теорема. *Пусть матрица B состоит из столбцов, образующих ФСР линейной однородной системы уравнений*

$$AX=O. \tag{1.40}$$

Тогда линейная система

$$B^TY=O \tag{1.41}$$

задает линейную оболочку строк матрицы A и только ее.

Доказательство. Пусть $\operatorname{rk}A=r\geqslant 1$. Тогда ФСР линейной однородной системы уравнений (1.40) состоит из $n-r$ вектор–столбцов $X_1,\dots,X_{n-r}$. Составим из этих столбцов матрицу B

$$B=\|X_1,\dots,X_{n-r}\|, \tag{1.42}$$

причем

$$AX_j=O,\quad j=\overline{1,n-r}. \tag{1.43}$$

Поэтому из (1.42) и (1.43) вытекают следующие равенства:

$$O = \|AX_1, \ldots, AX_{n-r}\| = A\|X_1, \ldots, X_{n-r}\| = AB \tag{1.44}$$

Используя операцию транспонирования матриц с учетом ранее доказанных свойств транспонирования получим из (1.44) равенство

$$B^T A^T = O. \tag{1.45}$$

Рассмотрим следующую линейную однородную систему уравнений:

$$B^T Y = O. \tag{1.46}$$

Из сравнения (1.45) и (1.46) приходим к выводу о том, что все столбцы матрицы A^T являются решениями системы уравнений (1.46). Поскольку $\operatorname{rk} A^T = \operatorname{rk} A = r$ и в силу теоремы о базисном миноре число линейно независимых столбцов матрицы A^T совпадает с числом линейно независимых строк матрицы A и равно r. Теперь выясним число вектор столбцов в ФСР системы уравнений (1.46). Заметим, что по построению $\operatorname{rk} B^T = \operatorname{rk} B = n - r$. Следовательно, ФСР состоит из $n-(n-r) = r$. Таким образом, решениями системы уравнений (1.46) только линейная оболочка столбцов матрицы A^T или линейная оболочка вектор-строчек матрицы A. □

1.31. Пример. Составить систему линейных уравнений, задающую линейную оболочку системы векторов

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}, \ v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{1.47}$$

Запишем координаты векторов–столбцов v_1, v_2, v_3, v_4 по строкам в матрицу A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{1.48}$$

и рассмотрим соответствующую линейную однородную систему уравнений

$$AX = O, \quad X = (x^1, x^2, x^3, x^4, x^5)^T. \tag{1.49}$$

ФСР этой системы уравнений находится методом Гаусса–Жордана и имеет следующий вид:

$$X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{1.50}$$

Запишем матрицу B в следующем виде:

$$B = \|X_1, X_2, X_3\| = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.51}$$

Тогда имеем

$$B^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.52}$$

Рассмотрим следующую линейную однородную систему уравнений:

$$B^T Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Y^T = (y^1, y^2, y^3, y^4, y^5), \tag{1.53}$$

которую можно переписать в развернутой форме

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \\ y^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{1.54}$$

из которой получаем искомую систему уравнений

$$-y^1 + y^2 + 2y^3 = 0, \tag{1.55}$$

$$y^1 - y^2 + 2y^4 = 0, \tag{1.56}$$

$$-2y^1 - y^2 + y^5 = 0. \tag{1.57}$$