Лекция 3

Базис

Теорема 3.1. Любой вектор $\vec{d}$ единственным образом раскладывается по данному базису $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ в пространстве. Аналогично, любой вектор $\vec{c}$ на плоскости единственным образом раскладывается по данному базису $\vec{a}, \vec{b}$ на этой плоскости.

Доказательство. Докажем для случая базиса в пространстве. Доказывать будем от противного. Предположим, что существуют два различных разложения вектора $\vec{d}$ по базису $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$\vec{d} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c}, \qquad (1)$$

$$\vec{d} = \lambda'\vec{a} + \mu'\vec{b} + \nu'\vec{c}. \qquad (2)$$

Вычтем из первого разложения второе:

$$\vec{0} = (\lambda - \lambda')\vec{a} + (\mu - \mu')\vec{b} + (\nu - \nu')\vec{c}. \qquad (3)$$

Поскольку разложения (1), (2) не совпадают, то должно быть справедливо хотя бы одно из равенств: $\lambda \neq \lambda'$, $\mu \neq \mu'$, $\nu \neq \nu'$. Для определённости пусть $\lambda \neq \lambda'$. Тогда поделим равенство (3) на $\lambda - \lambda' \neq 0$ и выразим вектор $\vec{a}$:

$$\vec{a} = -\frac{\mu - \mu'}{\lambda - \lambda'}\vec{b} - \frac{\nu - \nu'}{\lambda - \lambda'}\vec{c}.$$

По определению операций умножения вектора на число и сложения векторов вектор $\vec{a}$ компланарен векторам $\vec{b}$, $\vec{c}$. Но это невозможно, так как векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют базис. Полученное противоречие доказывает единственность разложения вектора $\vec{d}$ по базису $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Для случая базиса на плоскости доказательство аналогично.

Таким образом, вектор однозначно определяется своими координатами в данном базисе. Вектор $\vec{d}$ с координатами λ, μ, ν относительно данного базиса будем обозначать $\vec{d} = \{\lambda, \mu, \nu\}$. Аналогично для базиса на плоскости: вектор $\vec{c}$ с координатами λ, μ относительно данного базиса будем обозначать $\vec{c} = \{\lambda, \mu\}$.

Теорема 3.2. При сложении (вычитании) двух векторов их соответствующие координаты относительно данного базиса складываются (вычитаются). При умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число.

Доказательство. Докажем для базиса в пространстве (для базиса на плоскости доказательство аналогично). Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — базис в пространстве. Тогда

$\vec{d}_1 = \lambda_1\vec{a} + \mu_1\vec{b} + \nu_1\vec{c}, \qquad \vec{d}_2 = \lambda_2\vec{a} + \mu_2\vec{b} + \nu_2\vec{c},$

$\vec{d}_1 \pm \vec{d}_2 = \left(\lambda_1\vec{a} + \mu_1\vec{b} + \nu_1\vec{c}\right) \pm \left(\lambda_2\vec{a} + \mu_2\vec{b} + \nu_2\vec{c}\right) = (\lambda_1 \pm \lambda_2)\vec{a} + (\mu_1 \pm \mu_2)\vec{b} + (\nu_1 \pm \nu_2)\vec{c},$

$k\vec{d}_1 = k\left(\lambda_1\vec{a} + \mu_1\vec{b} + \nu_1\vec{c}\right) = k(\lambda_1\vec{a}) + k\left(\mu_1\vec{b}\right) + k(\nu_1\vec{c}) = (k\lambda_1)\vec{a} + (k\mu_1)\vec{b} + (k\nu_1)\vec{c},$

ч.т.д.

Замечание. Доказанная теорема позволяет сводить арифметические операции с векторами к операциям с числами — их координатами в данном базисе.

Теорема 3.3 (необходимое и достаточное условие коллинеарности). Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — базис в пространстве, $\vec{d}_1 = \lambda_1\vec{a} + \mu_1\vec{b} + \nu_1\vec{c}$, $\vec{d}_2 = \lambda_2\vec{a} + \mu_2\vec{b} + \nu_2\vec{c}$. Тогда для того чтобы векторы $\vec{d}_1$, $\vec{d}_2$ были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\nu_1}{\nu_2}$. Аналогично для случая векторов на плоскости.

Замечание. Если среди λ_2, μ_2, ν_2 есть нули, то соответствующие равенства следует перемножить крест накрест, как пропорции. Например, вместо $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$ записать $\lambda_1\mu_2 = \lambda_2\mu_1$.

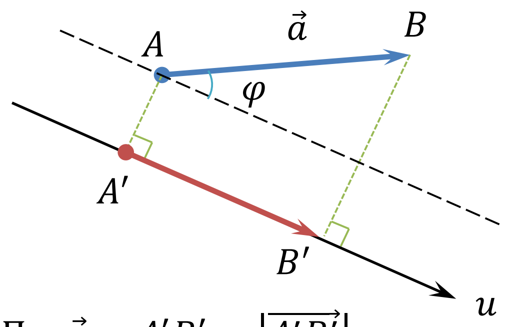
Доказательство.

1. Докажем необходимость. Пусть $\vec{d}_1 \parallel \vec{d}_2$. Если $\vec{d}_2 = \vec{0}$, то $\lambda_2 = \mu_2 = \nu_2 = 0$, и равенства $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\nu_1}{\nu_2}$, записанные в эквивалентном виде $\lambda_1\mu_2 = \lambda_2\mu_1$, $\mu_1\nu_2 = \mu_2\nu_1$, выполняются.
   Теперь пусть $\vec{d}_2 \neq \vec{0}$. Тогда по теореме 2.1 существует число k такое, что $\vec{d}_1 = k\vec{d}_2$.
   Распишем координаты этих векторов:
   $\{\lambda_1, \mu_1, \nu_1\} = \{k\lambda_2, k\mu_2, k\nu_2\}$.
   Поскольку векторы равны, то у них совпадают соответствующие координаты:
   $\lambda_1 = k\lambda_2, \qquad \mu_1 = k\mu_2, \qquad \nu_1 = k\nu_2.$
   Исключив отсюда число k, получим
   $$k = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\nu_1}{\nu_2}, \qquad \text{ч. т. д.}$$
2. Докажем достаточность. Пусть $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\nu_1}{\nu_2}$. Если $\vec{d}_2 = \vec{0}$, то векторы $\vec{d}_1$, $\vec{d}_2$ коллинеарны.
   Теперь пусть $\vec{d}_2 \neq \vec{0}$. Обозначим числовое значение дробей $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \frac{\mu_1}{\mu_2}, \frac{\nu_1}{\nu_2}$ через k. Тогда
   $$k = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\nu_1}{\nu_2},$$
   откуда
   $\lambda_1 = k\lambda_2, \qquad \mu_1 = k\mu_2, \qquad \nu_1 = k\nu_2,$
   откуда
   $\{\lambda_1, \mu_1, \nu_1\} = \{k\lambda_2, k\mu_2, k\nu_2\},$

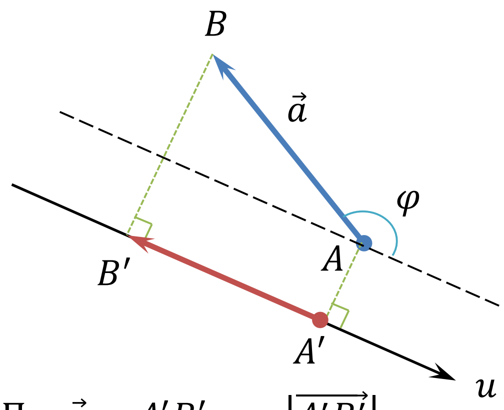
и следовательно, $\vec{d}_1 = k\vec{d}_2$. По определению операции умножения вектора на число, векторы $\vec{d}_1, \vec{d}_2$ коллинеарны, ч.т.д.

Проекция вектора на ось

Определение. *Осью* называется прямая, на которой указано направление (одно из двух возможных).



$\text{Пр}_u\vec{a} = A'B' = \left|\overrightarrow{A'B'}\right|$



$\text{Пр}_u\vec{a} = A'B' = -\left|\overrightarrow{A'B'}\right|$

Определение. Пусть A' и B' — проекции точек A и B на ось u соответственно. *Проекцией* вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ на ось u называется *величина направленного отрезка* $A'B'$, т.е. *число*, равное $\left|\overrightarrow{A'B'}\right|$, если направления вектора $\overrightarrow{A'B'}$ и оси u совпадают, и $-\left|\overrightarrow{A'B'}\right|$, если направление вектора $\overrightarrow{A'B'}$ противоположно направлению оси u:

$$\text{Пр}_u\vec{a} \overset{\text{def}}{=} A'B' \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \left|\overrightarrow{A'B'}\right|, & \text{если } \overrightarrow{A'B'} \upuparrows u, \\ -\left|\overrightarrow{A'B'}\right|, & \text{если } \overrightarrow{A'B'} \uparrow\downarrow u, \\ 0, & \text{если } \overrightarrow{A'B'} = \vec{0}. \end{cases}$$

Замечание. Из рисунка видно, что проекция ненулевого вектора $\vec{a}$ на ось u равна длине вектора $\vec{a}$, умноженной на косинус угла φ, который является углом наклона вектора $\vec{a}$ к оси u:

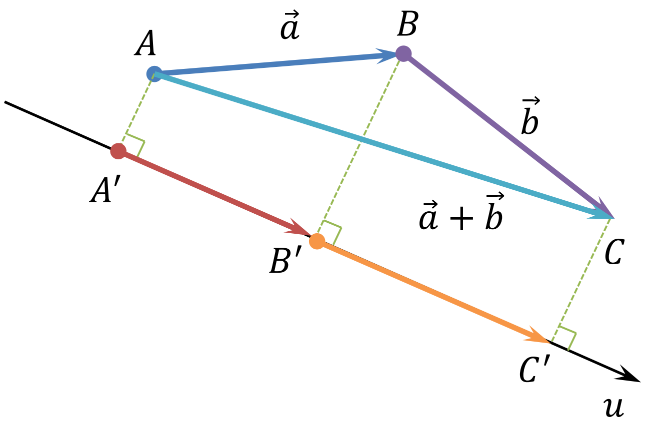
$$\boxed{\text{Пр}_u\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi\,.}$$

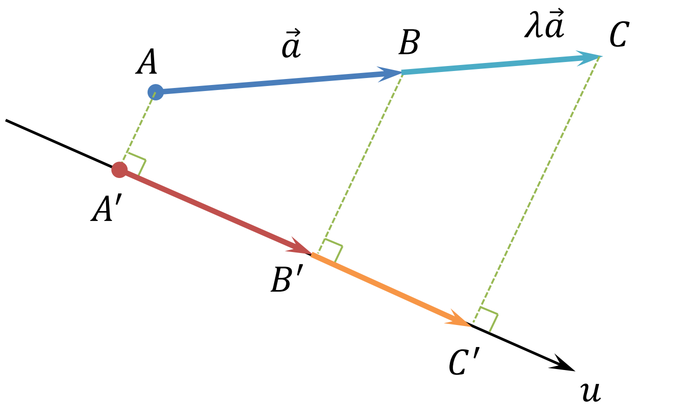
Примечание. Угол наклона вектора к оси определяется как угол между вектором и положительным направлением оси, причём вектор должен быть отложен от точки, лежащей на этой оси.

Свойства проекций векторов:

1°) $\text{Пр}_u(\vec{a} + \vec{b}) = \text{Пр}_u\vec{a} + \text{Пр}_u\vec{b}$,
2°) $\text{Пр}_u(\lambda\vec{a}) = \lambda \cdot \text{Пр}_u\vec{a}$.

Доказательство:

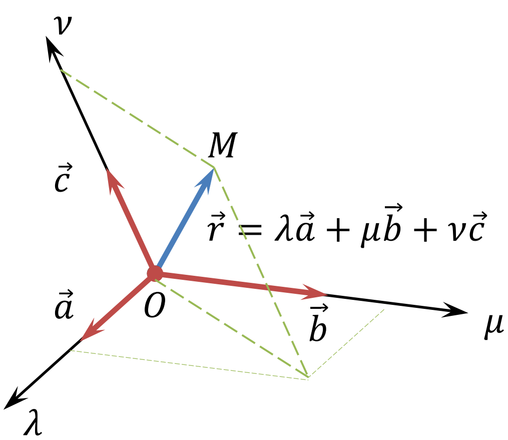




$\text{Пр}_u(\lambda\vec{a}) = A'C' = \lambda\cdot A'B' = \lambda\cdot\text{Пр}_u\vec{a}$

$\text{Пр}_u\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = A'C' = A'B' + B'C' = \text{Пр}_u\vec{a} + \text{Пр}_u\vec{b}$

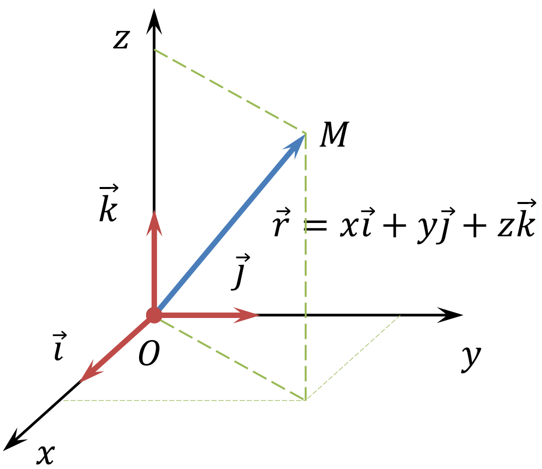
Системы координат



Косоугольная система координат. Задаются: т. O, которая называется *началом отсчёта*, и базис $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, состоящий из произвольных некомпланарных векторов, отложенных от начала отсчёта. Через каждый из этих векторов проводится координатная ось.

Пусть M — произвольная точка в пространстве. Вектор $\overrightarrow{OM}$ называется *радиус-вектором* точки M и обозначается $\vec{r}$. Его можно разложить по базису: $\vec{r} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c}$.

Координатами точки M называются координаты её радиус-вектора. Обозначение: $M(\lambda, \mu, \nu)$.

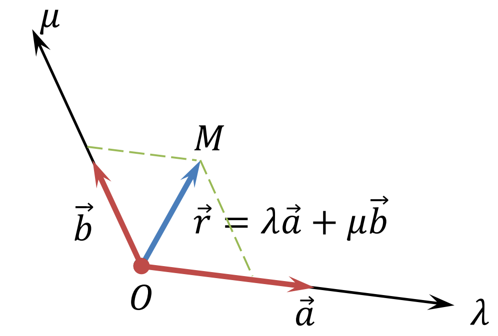


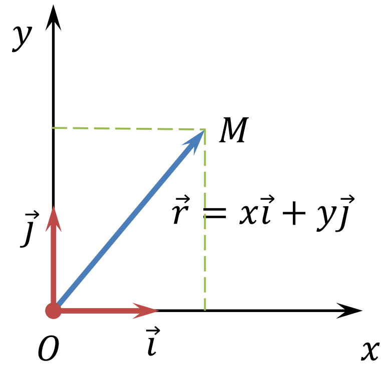
Определение. Базис $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется *ортогональным* базисом (ОБ), если векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ попарно ортогональны.

Определение. Базис $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется *ортонормированным* базисом (ОНБ), если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ попарно ортогональны и имеют длину 1, т.е. являются единичными векторами.

Декартовой прямоугольной системой координат называется косоугольная система координат с ортонормированным базисом, который мы будем обозначать $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$, а соответствующие ему координаты — x, y, z.

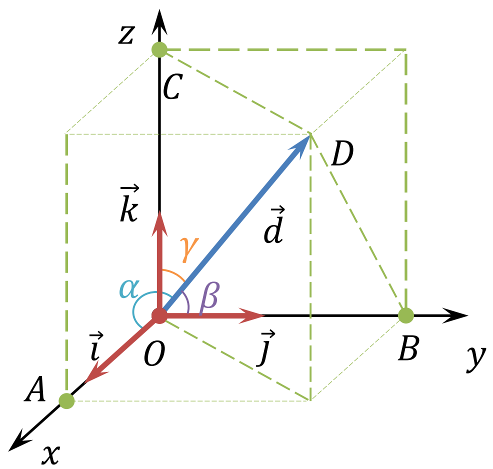
Аналогично вводятся косоугольная и прямоугольная системы координат на плоскости:





Теорема 3.4. Декартовы прямоугольные координаты x, y, z вектора $\vec{d}$ равны проекциям этого вектора на оси Ox, Oy, Oz соответственно. (Аналогично на плоскости.)

Доказательство.



Отложим вектор $\overrightarrow{OD} = \vec{d}$ от начала отсчёта O. Спроецировав точку M на оси Ox, Oy, Oz, получим точки A, B, C соответственно. По определению проекции вектора

$OA = \text{Пр}_{Ox}\vec{d}, \qquad OB = \text{Пр}_{Oy}\vec{d}, \qquad OC = \text{Пр}_{Oz}\vec{d}.$

Согласно правилу сложения векторов, справедливо равенство

$\vec{d} = \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$

Поскольку вектор $\overrightarrow{OA}$ коллинеарен вектору $\vec{\imath}$, то, согласно теореме 2.3, существует число x такое, что $\overrightarrow{OA} = x\vec{\imath}$. Аналогично, $\overrightarrow{OB} = y\vec{j}$, $\overrightarrow{OC} = z\vec{k}$. Тогда

$$\vec{d} = x\vec{\imath} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

т.е. x, y, z — это координаты вектора $\vec{d}$ относительно базиса $\vec{\imath}, \vec{j}, \vec{k}$.

С другой стороны, поскольку векторы $\vec{\imath}, \vec{j}, \vec{k}$ — единичные, то

$$\left|\overrightarrow{OA}\right| = |x| \cdot |\vec{\imath}| = |x|, \qquad \left|\overrightarrow{OB}\right| = |y| \cdot |\vec{j}| = |y|, \qquad \left|\overrightarrow{OC}\right| = |z| \cdot \left|\vec{k}\right| = |z|,$$

откуда с учётом направления векторов $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ получим

$$OA = x, \qquad OB = y, \qquad OC = z, \qquad \text{ч. т. д.}$$

Направляющие косинусы

Пусть α, β, γ — углы наклона ненулевого вектора $\vec{d}$ к координатным осям Ox, Oy, Oz соответственно. Тогда

$$x = \text{Пр}_{Ox}\vec{d} = \left|\vec{d}\right| \cos\alpha\,, \qquad y = \text{Пр}_{Oy}\vec{d} = \left|\vec{d}\right| \cos\beta\,, \qquad z = \text{Пр}_{Oz}\vec{d} = \left|\vec{d}\right| \cos\gamma.$$

Согласно теореме Пифагора,

$$|\vec{d}| = |\overrightarrow{OD}| = \sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OC}|^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

откуда

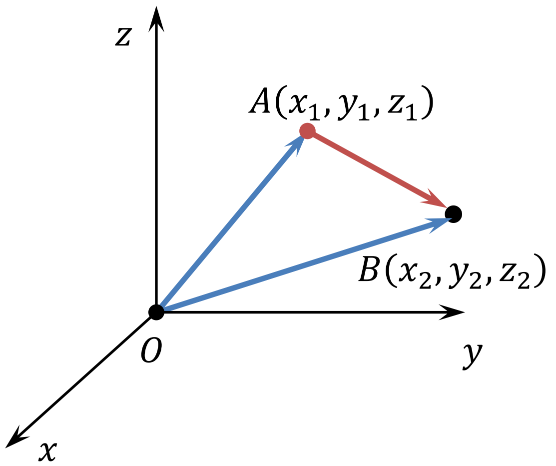
$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \qquad \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \qquad \cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Эти величины называются *направляющими косинусами* вектора $\vec{d}$.

Очевидно, справедливо следующее равенство:

$$\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.}$$

Построение вектора с заданным началом и концом



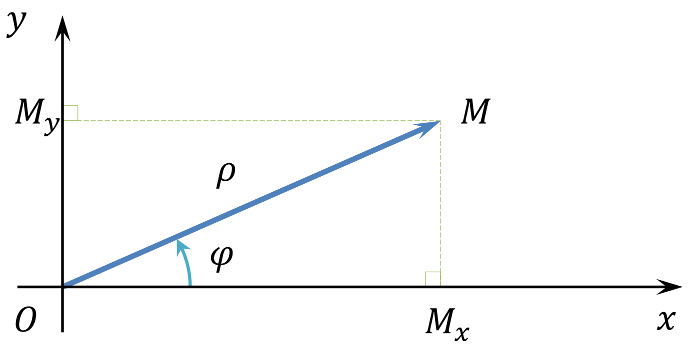
Пусть даны декартовы координаты двух точек $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$. Запишем координаты радиус-векторов этих точек:
$\overrightarrow{OA} = \{x_1, y_1, z_1\}$,
$\overrightarrow{OB} = \{x_2, y_2, z_2\}$.
Тогда координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ равны разности соответствующих координат его конца и его начала:
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$.

Расстояние между точками A и B находится по формуле

$$\rho(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Аналогично на плоскости.

Полярная система координат



Пусть на плоскости заданы точка O, которая называется *полюсом*, и луч Ox.
Тогда положение произвольной точки M на плоскости однозначно характеризуется её полярными координатами (ρ, φ), где ρ — расстояние между точками M и O, φ — угол наклона вектора $\overrightarrow{OM}$ к лучу Ox (отложенный от луча Ox против часовой стрелки):

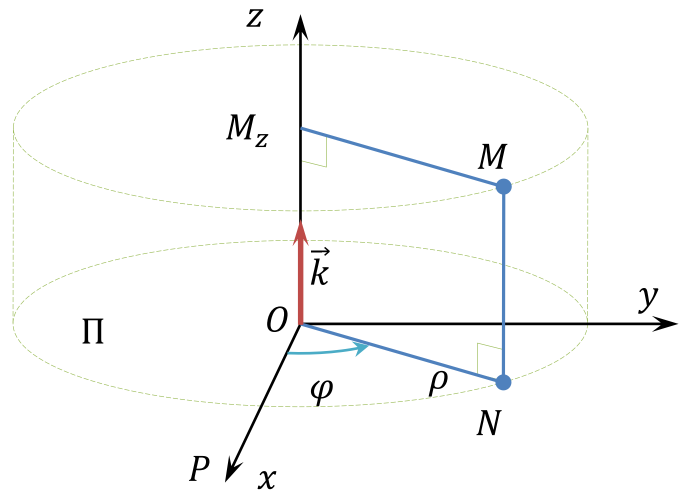
$$\rho \in [0, +\infty), \qquad \varphi \in [0, 2\pi).$$

Каждой точке M на плоскости соответствует единственная упорядоченная пара чисел (ρ, φ), и наоборот, каждой упорядоченной паре чисел (ρ, φ) соответствует единственная точка M на плоскости (за исключением точки O, для которой $\rho = 0$, а угол φ не определён).

Если оси прямоугольной системы координат расположить так, как указано на рисунке, то справедлива следующая связь между полярными и декартовыми координатами точки M:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \end{cases} \quad \text{а также} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}. \end{cases}$$

Цилиндрическая система координат



Пусть в пространстве задана плоскость П, на которой введена полярная система координат с полюсом O и лучом Ox, и перпендикулярный этой плоскости ненулевой вектор $\vec{k}$, причём если смотреть из конца вектора $\vec{k}$, то полярный угол φ откладывается от луча Ox против часовой стрелки.

Тогда положение произвольной точки M в пространстве однозначно характеризуется её цилиндрическими координатами (ρ, φ, z):

$$\rho \in [0, +\infty), \qquad \varphi \in [0, 2\pi), \qquad z \in (-\infty, +\infty),$$

где (ρ, φ) — полярные координаты точки N, которая является проекцией точки M на плоскость П, а z — проекция вектора $\overrightarrow{OM}$ на ось Oz, образованную вектором $\vec{k}$.

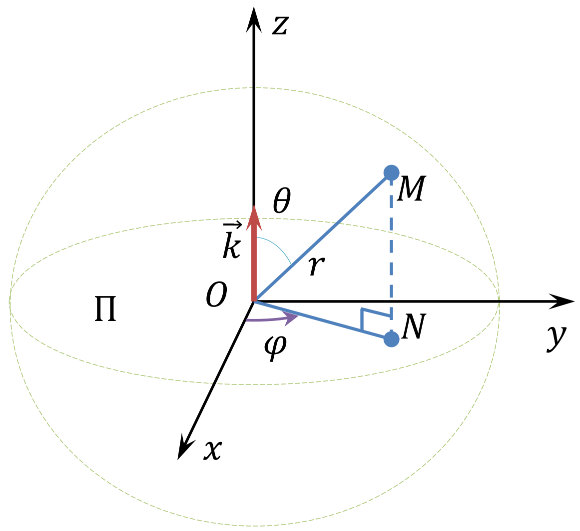
Каждой точке M в пространстве соответствует единственная упорядоченная тройка чисел (ρ, φ, z), и наоборот, каждой упорядоченной тройке чисел (ρ, φ, z) соответствует единственная точка M в пространстве (за исключением точек оси Oz, для которых $\rho = 0$, а угол φ не определён).

Поверхности $\rho = \text{const}$ являются цилиндрическими поверхностями, поэтому такая система координат называется цилиндрической.

Если оси прямоугольной системы координат расположить так, как указано на рисунке, то справедлива следующая связь между цилиндрическими и декартовыми координатами точки M:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\,, \\ y = \rho\sin\varphi\,, \\ z = z. \end{cases}$$

Сферическая система координат



Пусть в пространстве задана плоскость П, на которой введена полярная система координат с полюсом O и лучом Ox, и перпендикулярный этой плоскости ненулевой вектор $\vec{k}$, причём если смотреть из конца вектора $\vec{k}$, то полярный угол φ откладывается от луча Ox против часовой стрелки.

Тогда положение произвольной точки M в пространстве однозначно характеризуется сферическими координатами (r, θ, φ):

$r \in [0, +\infty)$, $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$,

где r — расстояние от точки M до точки O, θ — угол между векторами $\overrightarrow{OM}$ и $\vec{k}$, φ — полярный угол точки N, которая является проекцией точки M на плоскость П.

Каждой точке M в пространстве соответствует единственная упорядоченная тройка чисел (r, θ, φ), и наоборот, каждой упорядоченной тройке чисел (r, θ, φ) соответствует единственная точка M в пространстве (за исключением точек оси Oz, образованной вектором $\vec{k}$, для которых угол φ не определён).

Поверхности $r = \text{const}$ являются сферами, поэтому такая система координат называется сферической.

Если оси декартовой системы координат расположить так, как указано на рисунке, то справедлива следующая связь между сферическими и декартовыми координатами точки M:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi\,, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi\,, \\ z = r\cos\theta\,. \end{cases}$$

Сферические координаты удобны для описания положения точки на поверхности Земли. При этом $r \approx 6400$ км — радиус Земли, угол $\varphi - \pi$ называется долготой ($\varphi = \pi$ — Гринвичский или нулевой меридиан, $\varphi - \pi > 0$ — восточная долгота, $\varphi - \pi < 0$ — западная долгота), угол $\frac{\pi}{2} - \theta$ называется широтой ($\theta = \frac{\pi}{2}$ — экватор, $\frac{\pi}{2} - \theta > 0$ — северная широта, $\frac{\pi}{2} - \theta < 0$ — южная широта).