

## Семинар – Лекция 3

# ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ МЕРЫ

### § 1. Системы множеств

Как вы помните, в лекции 2 построение общей теории меры велось исходя из алгебры измеримых множеств, а прямоугольники, исходя из которых велось построение классической меры на плоскости, алгебры не образуют (почему?). Есть и другие примеры, когда исходное множество задания меры не является алгеброй. В связи с этим имеет смысл рассмотреть другие системы множеств. Дадим несколько определений.

**Определение 1.** Система множеств  $S$  называется полукольцом, если:

- 1)  $\emptyset \in S$ ;
- 2)  $\forall A \in S, \forall B \in S \ A \cap B \in S$ ;
- 3)  $\forall A \in S, \forall A_1 \in S, \ A_1 \subset A, \ \exists n \in \mathbb{N}, \ \exists A_2, \dots, A_n \in S : A_1 \sqcup A_2 \sqcup \dots \sqcup A_n = A$ .

Последнее требование проще всего пояснить на примере прямоугольников. Действительно, прямоугольник с прямоугольным вырезом — уже не прямоугольник, однако его можно разрезать на прямоугольники (следя за тем, какие границы куда входят).

Итак, полукольцо — это наиболее «слабая» система множеств в нашем рассмотрении. Будем постепенно усиливать требования. При этом каждое следующее понятие (кроме  $\sigma$ -кольца) будет частным случаем предыдущего. (См. задачу 1.)

**Определение 2.** *Непустая система множеств  $R$  называется кольцом*, если:

- 1)  $\forall A \in R, \forall B \in R \ A \cap B \in R$ ;
- 2)  $\forall A \in R, \forall B \in R \ A \Delta B \in R$ .

**Следствие 1.** *Всякое кольцо множеств  $R$  содержит  $\emptyset$ . В самом деле, по условию непустоты  $R$  существует некоторое  $A \in R$ . Но тогда по 2) имеем  $\emptyset = A \Delta A \in R$ .*

**Следствие 2.** *Всякое кольцо множеств  $R$  вместе с множествами  $A$  и  $B$  содержит не только их пересечение и симметрическую разность, но и объединение и обе разности. В самом деле,  $A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B)$ ,  $A \setminus B = A \Delta (A \cap B)$ .*

Определение 3. Множество  $X$  называется единицей системы множеств  $T$ , если:

- 1)  $X \in T$ ;
- 2)  $\forall A \in T$  верно  $A \cap X = A$ .

Очевидно, такое название оправдывается ролью множества  $X$  при «умножении» (т. е. пересечении) множеств.

Определение 4. Кольцо множеств с единицей называется алгеброй множеств.

Легко видеть, что не всякое кольцо (или полукольцо) множеств содержит единицу.

В качестве примеров рассмотрим а) семейство всех конечных подмножеств бесконечного множества; б) семейство всех ограниченных подмножеств числовой прямой (или плоскости); в) множество всех промежутков с рациональными концами, содержащихся в отрезке  $[0; \pi]$  (последнее — не кольцо, а полукольцо). (См. задачу 6.)

Однако мы пока ещё ничего не сказали о часто встречающихся счётных объединениях множеств. Дадим соответствующее определение.

Определение 5. Система множеств  $R$  называется  $\sigma$ -кольцом, если:

- 1)  $R$  — кольцо;
- 2)  $\forall A_1, \dots, A_n, \dots \in R \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in R$ .

Определение 6.  $\sigma$ -кольцо множеств с единицей называется  $\sigma$ -алгеброй множеств.

Рассмотрим ещё некоторые примеры.

ПРИМЕР 1. Очевидно, что семейство всех подмножеств данного множества  $A$  (даже пустого, т. к.  $\emptyset \subset \emptyset$ ) является каждой из перечисленных здесь систем множеств.

ПРИМЕР 2. Система всех промежутков на прямой (включая и бесконечные) образует полукольцо с единицей. (Почему не кольцо?)

ПРИМЕР 3. Система всех интервалов на прямой **не** образует даже полукольца. В самом деле, полуинтервал  $(0; 2) \setminus (0; 1) = [1; 2)$  нельзя разбить на конечное семейство непересекающихся интервалов.

ПРИМЕР 4. Семейство всех прямоугольников на плоскости со сторонами, параллельными осям координат (с различными границами, как в лекции 1), образует полукольцо; а если потребовать, чтобы все прямоугольники входили в один фиксированный прямоугольник (стороны которого также должны быть параллельны осям координат), мы получим полукольцо с единицей. (Вопрос: а что образуют прямоугольники, содержащиеся в некотором фиксированном круге?)

Теперь приступим к доказательству некоторых важных свойств этих систем множеств, которые понадобятся в дальнейшем для обоснования различных свойств меры.

Лемма 1 (о конечном разложении). Пусть:

- 1)  $S$  — полукольцо,
- 2)  $A, A_1, A_2, \dots, A_n \in S$ ,
- 3)  $\forall i = \overline{1, n} A_i \subset A$ ,
- 4)  $\forall i, j = \overline{1, n} A_i \cap A_j = \emptyset$ .

Тогда  $\exists A_{n+1}, \dots, A_m \in S$  такие, что  $A = \bigsqcup_{i=1}^m A_i$ .

Доказательство.

Докажем это утверждение по индукции.

1. При  $n = 1$  утверждение леммы составляет часть определения полукольца. Пусть теперь утверждение доказано для  $n = k$ , докажем его для  $n = k + 1$ .

2. Итак, пусть  $A = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \dots \sqcup A_k \sqcup B_1 \sqcup \dots \sqcup B_l$  (здесь мы переобозначили «дополняющие» множества, чтобы не возникло путаницы с  $A_k$ ). Пусть также  $A_{k+1}$  не пересекается с  $A_1, \dots, A_k$ . Для каждого  $B_i$  ( $i = \overline{1, l}$ ) рассмотрим  $B_{i0} \equiv A_{k+1} \cap B_i$  и построим, пользуясь требованием 3 определения полукольца, конечные разложения

$$B_i = \bigsqcup_{j=0}^{J_i} B_{ij}.$$

Тогда исходное множество  $A$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} A &= A_1 \sqcup A_2 \sqcup \dots \sqcup A_k \sqcup B_1 \sqcup \dots \sqcup B_l = \\ &= \left( \bigsqcup_{i=1}^k A_i \right) \sqcup \left( \bigsqcup_{j=0}^{J_1} B_{1j} \right) \sqcup \dots \sqcup \left( \bigsqcup_{j=0}^{J_l} B_{lj} \right). \end{aligned}$$

3. Легко видеть, что построенное разложение действительно дизъюнктное. А теперь заметим, что

$$A_{k+1} = \bigsqcup_{i=1}^l B_{i0},$$

поскольку множества  $B_i$  дают разложение

$$A \setminus \left( \bigsqcup_{i=1}^k A_i \right) \quad \text{и} \quad A_i \cap A_{k+1} = \emptyset, \quad i = \overline{1, k}.$$

Поэтому можно перегруппировать разложение и получить:

$$\begin{aligned} A &= \left( \bigsqcup_{i=1}^k A_i \right) \sqcup \left( \bigsqcup_{i=1}^l B_{i0} \right) \sqcup \left( \bigsqcup_{j=1}^{J_1} B_{1j} \right) \sqcup \dots \sqcup \left( \bigsqcup_{j=1}^{J_l} B_{lj} \right) = \\ &= \left( \bigsqcup_{i=1}^k A_i \right) \sqcup A_{k+1} \sqcup \left( \bigsqcup_{j=1}^{J_1} B_{1j} \right) \sqcup \dots \sqcup \left( \bigsqcup_{j=1}^{J_l} B_{lj} \right). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Замечание 1. Настоятельно рекомендуется при изучении доказательства проиллюстрировать его случаям прямоугольников.

Лемма 2 (< кирпичиках >) Пусть:

- 1)  $S$  — полукольцо,
- 2)  $A_1, A_2, \dots, A_n \in S$ .

Тогда существуют такие попарно непересекающиеся множества  $B_1, \dots, B_k \in S$ , что каждое из множеств  $A_i$  является объединением некоторых из  $B_j$ .

(Доказательство провести самостоятельно.)

## § 2. Аддитивность и счётная аддитивность меры

Теперь приступим к рассмотрению меры на системах множеств. Для этого нам придётся дать ещё несколько определений.

Определение 7. Пусть  $S$  — полукольцо множеств, а  $m$  — функция,  $m : S \rightarrow [0; +\infty) \cup \{+\infty\}$ , причём  $m \not\equiv +\infty$ . Назовём её мерой (на полукольце  $S$ ), если для любого конечного представления

$$A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i, \quad \text{где } A, A_1, \dots, A_n \in S,$$

верно равенство

$$m(A) = \sum_{i=1}^n m(A_i). \quad (2.1)$$

При этом если хотя бы одно из слагаемых бесконечно, то сумма полагается равной  $+\infty$ .

Если же, кроме того, для любых таких  $A, A_1, A_2, \dots \in S$ , что

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i,$$

верно равенство

$$m(A) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i) \quad (2.2)$$

(если ряд расходится или если хотя бы одно из слагаемых бесконечно, то его сумма полагается равной  $+\infty$ ), то такая мера называется  $\sigma$ -аддитивной.

Замечание 2. Поскольку кольцо и алгебра (а также  $\sigma$ -кольцо и  $\sigma$ -алгебра) являются частными случаями полукольца, приведённые определения распространяются на них без изменения. (Хотя некоторые требования в условиях становятся излишними. Какие и в каких случаях?)

Заметим, что требование (2.1) нельзя заменить на парное сложение

$$m(A \sqcup B) = m(A) + m(B) \quad \text{при } A, B, A \sqcup B \in S, \quad (2.3)$$

поскольку полукольцо не обязано содержать произвольное объединение множеств — своих элементов и наличие в нём, скажем, множеств  $A, B, C, A \sqcup B \sqcup C$  не гарантирует наличия  $A \sqcup B$ , через которое мы могли бы «пройти» от  $A, B, C$  к  $A \sqcup B \sqcup C$ . Поэтому если мы рассмотрим полукольцо, состоящее из множеств  $[0; 3), [0; 1), [1; 2), [2; 3)$ , то условие (2.3) не помешает положить  $m[0; 3) = 4, m[0; 1) = 1, m[1; 2) = 1, m[2; 3) = 1$  и условие (2.1) будет нарушено.

Обсудим некоторые простые следствия определения меры на полукольце.

**Свойство 1.** Монотонность меры. Пусть  $A, B \in S$  и  $A \subset B$ . Тогда  $m(A) \leq m(B)$ . Для доказательства достаточно воспользоваться конечным разложением  $B$ , включающим  $A$ , и аддитивностью меры.

**Свойство 2.** Мера пустого множества равна 0. Действительно, поскольку  $\emptyset \cap \emptyset = \emptyset$ , имеем из свойства аддитивности меры  $m(\emptyset \sqcup \emptyset) = m(\emptyset)$ , или  $2m(\emptyset) = m(\emptyset)$ , откуда  $m(\emptyset) = 0$ .

**Свойство 3.** Пусть  $A, B, A \cup B \in S$  и  $m(A \cap B) < +\infty$ . Тогда

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B). \quad (2.4)$$

□ Действительно,  $A = (A \setminus B) \sqcup (A \cap B)$  и аналогично для множества  $B$ . Построим конечные разложения

$$A \setminus B = \bigsqcup_{i=1}^n A_i \quad \text{и} \quad B \setminus A = \bigsqcup_{j=1}^m B_j.$$

Тогда  $A \cup B = (A \setminus B) \sqcup (A \cap B) \sqcup (B \setminus A)$  и

$$\begin{aligned} m(A \cup B) &= \left( \sum_{i=1}^n m(A_i) \right) + \left( \sum_{j=1}^m m(B_j) \right) + m(A \cap B) = \\ &= \left( \left( \sum_{i=1}^n m(A_i) \right) + m(A \cap B) \right) + \\ &+ \left( \left( \sum_{j=1}^m m(B_j) \right) + m(A \cap B) \right) - m(A \cap B) = \\ &= m(A) + m(B) - m(A \cap B). \end{aligned}$$

⊠

Вопрос. Почему потребовалось разбивать  $A \setminus B$  и  $B \setminus A$ ?

**Свойство 4.** Пусть  $A, B, A \Delta B \in S$  и  $m(A \Delta B) = 0$ . Тогда  $m(A) = m(B)$ .

□ Действительно,

$$A = (A \setminus B) \sqcup (A \cap B), \quad B = (B \setminus A) \sqcup (A \cap B). \quad (2.5)$$

При этом  $(A \setminus B) \subset A \Delta B$  и поэтому в силу неотрицательности и монотонности меры имеем (в использованных выше обозначениях)

$$0 \leq \sum_{i=1}^n m(A_i) \leq m(A \Delta B) = 0,$$

поэтому

$$\sum_{i=1}^n m(A_i) = 0, \quad \text{и аналогично} \quad \sum_{i=1}^m m(B_i) = 0. \quad (2.6)$$

Тогда из аддитивности меры и (2.5) и (2.6) получаем:

$$\begin{aligned} m(A) &= \sum_{i=1}^n m(A_i) + m(A \cap B) = m(A \cap B), \\ m(B) &= \sum_{i=1}^m m(B_i) + m(A \cap B) = m(A \cap B), \end{aligned}$$

или  $m(A) = m(B)$ .  $\square$

Заметим, что интуитивно это утверждение было очевидно с самого начала: если мера того, чем множества различаются, равна нулю, то и меры этих множеств равны.

Теперь приступим к рассмотрению чуть менее легко доказываемых, но не менее важных свойств меры. Ниже предполагаем, что  $m$  — мера на полукольце  $S$ , а множества  $A, A_1, \dots, A_n$  (или  $A, A_1, \dots, A_n, \dots$ ) принадлежат полукольцу  $S$ .

Свойство 5. (Свойство, в каком-то смысле обратное конечной полуаддитивности.) Пусть при сформулированных выше условиях ещё

$$\bigsqcup_{i=1}^n A_i \subset A.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^n m(A_i) \leq m(A).$$

Это совершенно очевидно, если воспользоваться леммой о конечном разложении, неотрицательностью и аддитивностью меры. Действительно, по лемме 1 имеем

$$A = \bigsqcup_{i=1}^m A_i, \quad m \geq n.$$

Но тогда

$$\sum_{i=1}^n m(A_i) \leq \sum_{i=1}^m m(A_i) = m(A).$$

Свойство 6. (Конечная полуаддитивность.) Пусть теперь

$$A \subset \bigcup_{i=1}^n A_i.$$

Тогда

$$m(A) \leq \sum_{i=1}^n m(A_i). \quad (2.7)$$

Для доказательства достаточно применить к семейству множеств  $A, A_1, \dots, A_n$  «лемму о кирпичиках» и заметить, что в левую часть (2.7) мера (а она неотрицательна!) каждого «кирпичика» войдёт не более одного одного раза, тогда как в правую — не менее одного (а может быть, и несколько раз). (Возможен и несколько другой ход доказательства. Например, Вы рассматриваете вместо  $A_i$  множества  $A \cap A_i$  — они тоже принадлежат полукольцу — и пользуетесь не только аддитивностью, но и монотонностью меры.)

А можно ли обобщить свойства 5 и 6 меры на счётный случай? Оказывается, для обобщения свойства 5 достаточно рассматривать меру, удовлетворяющую всего лишь требованию (2.1), тогда как для обобщения свойства 6 (получится счётная полуаддитивность) требуется счётная аддитивность (2.2). Проведём соответствующие рассуждения.

Свойство 7. Пусть

$$\bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset A.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(A_i) \leq m(A). \quad (2.8)$$

□ Действительно, для любой конечной подсистемы  $A_1, \dots, A_k$  имеем

$$\bigsqcup_{i=1}^k A_i \subset A.$$

Поэтому применимо свойство 5, в силу которого

$$\sum_{i=1}^k m(A_i) \leq m(A). \quad (2.9)$$

Но тогда, во-первых, ряд в левой части сходится (если  $m(A) < +\infty$ ), а во-вторых, для его суммы после перехода к пределу в неравенстве (2.9) имеем (2.8).  $\square$

Свойство 8. (Равносильность счётной полуаддитивности и счётной аддитивности.) Мера является  $\sigma$ -аддитивной тогда и только тогда, когда для любых таких множеств  $A, A_1, A_2, \dots \in S$ , что

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,$$

верно неравенство

$$m(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i). \quad (2.10)$$

□

1. Докажем сначала необходимость. Именно, пусть для любых таких множеств  $A, A_1, A_2, \dots \in S$ , что

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,$$

верно неравенство

$$m(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i).$$

Тогда мера является  $\sigma$ -аддитивной. Рассмотрим такие множества  $B, B_1, B_2, \dots \in S$ , что

$$B = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} B_i.$$

Тогда, с одной стороны, для них выполнено

$$B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i,$$

и поэтому

$$m(B) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(B_i). \quad (2.11)$$

С другой же стороны, верно обратное вложение

$$B \supset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i,$$

и поэтому в силу свойства 7 (для доказательства которого счётная аддитивность меры не требовалась) имеем

$$m(B) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m(B_i). \quad (2.12)$$



Объединяя (2.11) и (2.12), имеем

$$m(B) = \sum_{i=1}^{\infty} m(B_i),$$

что и доказывает счётную аддитивность меры.

2. Теперь докажем достаточность. Для этого положим

$$B_1 = A_1, \quad B_i = A_i \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} A_k \quad \text{при} \quad i \geq 1, B_{ij} \in S,$$

$$B_i = \bigsqcup_{j=1}^{J_i} B_{ij}, \quad C_{ij} = B_{ij} \cap A.$$

Имеем  $C_{ij} \in S$ ,

$$A = B_1 \sqcup \bigsqcup_{i=2}^{\infty} \bigsqcup_{j=1}^{J_i} C_{ij}.$$

Поэтому в силу счётной аддитивности меры

$$m(A) = m(B_1) + \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{j=1}^{J_i} C_{ij}, \quad \text{но} \quad \sum_{j=1}^{J_i} C_{ij} \leq m(A_i),$$

поскольку  $B_i \subset A_i$ . Утверждение доказано.  $\square$

**З а м е ч а н и е 3.** Использованный в лекции термин «субаддитивность» является синонимом термина «полуаддитивность».

Приведём пример, показывающий, что для меры, не являющейся  $\sigma$ -аддитивной, неравенство (2.10) может нарушаться.

**П Р И М Е Р 5.** В самом деле, рассмотрим полукольцо множеств, состоящих из всех рациональных точек промежутков  $[\alpha; \beta]$ , где  $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$ . Положим  $m([\alpha; \beta]) = \beta - \alpha$ . Тогда, с одной стороны,  $m([0; 1] \cap \mathbb{Q}) = 1$ , а с другой, оно является счётным объединением одноточечных множеств, и поэтому неравенство (2.10) нарушается: мы имеем

$$1 = m([0; 1] \cap \mathbb{Q}) > \sum_{i=1}^{\infty} m(\{r_i\}) = \sum_{i=1}^{\infty} 0 = 0,$$

где последовательность  $\{r_i\}_{i=1}^{\infty}$  перечисляет все рациональные числа отрезка  $[0; 1]$ .

### § 3. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 0.** Ответить на все вопросы по ходу текста.

**Задача 1.** Доказать, что всякое кольцо есть полукольцо, всякая алгебра есть кольцо, всякая  $\sigma$ -алгебра есть  $\sigma$ -кольцо и алгебра, всякое  $\sigma$ -кольцо есть кольцо.

Задача 2. Доказать, что множество  $X$  является единицей для данного кольца  $R$  (полукольца  $S$ ) тогда и только тогда, когда  $X = \bigcup_{A \in R} A$  ( $X = \bigcup_{A \in S} A$ ).

Задача 3. Доказать, что  $\sigma$ -алгебра замкнута относительно операции счётного пересечения.

Задача 4. Образуют ли полукольцо все прямоугольники, стороны которых параллельны осям координат и вложенные в некоторый фиксированный круг? Имеет ли это полукольцо единицу?

Задача 5. Доказать аналоги формулы (2.4) для конечных множеств. Именно, если  $|X|$  — число элементов множества  $X$ , то для любых конечных множеств  $X, Y$  верно равенство  $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$ .

Задача 6. Доказать, что:

- 1) семейство всех конечных подмножеств бесконечного множества образует кольцо, но не образует алгебры;
- 2) семейство всех ограниченных подмножеств прямой или плоскости образует кольцо, но не образует алгебры;
- 3) семейство всех промежутков с рациональными концами, содержащихся в отрезке  $[0; \pi]$ , образует полукольцо (почему не кольцо?);
- 4) семейство всех промежутков (конечных и бесконечных) числовой прямой образует полукольцо с единицей.
- 5) Пусть  $A$  — бесконечное множество,  $Y$  — система всех его не более чем счётных подмножеств. Доказать, что  $Y$  —  $\sigma$ -кольцо.
- 6) Какое условие нужно наложить, чтобы  $Y$  было  $\sigma$ -алгеброй?

Задача 7. Доказать, что следующие множества являются полукольцами с единицей, и указать соответствующие единицы:

- 1)  $\{[\alpha; \beta] \mid a \leq \alpha \leq \beta \leq b\}$  (включая пустой промежуток);
- 2) система всех промежутков, вложенных в отрезок  $[a; b]$ .

Задача 8. Доказать «лемму о кирпичиках».

Задача 9. Пусть  $X = \mathbb{N}$ ,  $A = P(\mathbb{N})$  (где  $P(X)$  — множество, элементами которого являются все подмножества множества  $X$ ).

- 1) Является ли  $A$   $\sigma$ -алгеброй?
- 2) Построить на  $A$  счётно-аддитивную меру, принимающую положительные значения на любом непустом множестве из  $P(\mathbb{N})$ .
- 3) Тот же вопрос, если мера должна быть конечной.

Задача 10\*. Доказать, что семейство множеств, введённое в контрпримере в конце семинара, — действительно полукольцо, а функция  $m$  — действительно мера на нём.

Задача 11\*. Пусть  $m$  —  $\sigma$ -аддитивная мера на полукольце  $S$ , принимающая только конечные значения, множества  $A, A_1, A_2, \dots$  принадлежат  $S$ , причём  $A_1 \supset A_2 \supset \dots$  и

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Доказать, что

$$m(A) = \lim_{i \rightarrow \infty} m(A_i).$$

Это свойство меры называется непрерывностью.

**Задача 12\***. Пусть  $m$  — мера на кольце  $R$  и для любых таких множеств  $A, A_1, A_2, \dots$  из  $R$ , что  $A_1 \supset A_2 \supset \dots$  и

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i,$$

выполнено равенство

$$m(A) = \lim_{i \rightarrow \infty} m(A_i).$$

Доказать, что  $m$  является  $\sigma$ -аддитивной мерой на  $R$ .

**Задача 13\***. Указать пример меры на кольце, которая не является  $\sigma$ -аддитивной.

Дальнейшие задачи (**кроме обязательной задачи 16**) предназначены лишь для особо интересующихся и не включаются в общий счёт. При решении следует иметь в виду, что они распадаются на 2 цикла. Один из них (14—20) описывает продолжение меры с полукольца на минимальное порождённое им кольцо, а второй (21—22) — конструирует меры Лебега—Стилтьеса, находящие применение в спектральной теории линейных операторов и в теории вероятностей.

**Задача 14\***. Пусть  $S$  — полукольцо. Доказать, что система

$$R = \left\{ \bigcup_{i=1}^n A_i \mid A_i \in S, i = \overline{1, n} \right\}$$

является кольцом.

**Задача 15\***. Пусть  $S$  — полукольцо. Доказать, что система

$$R = \left\{ \bigsqcup_{i=1}^n A_i \mid A_i \in S, i = \overline{1, n} \right\}$$

совпадает с кольцом  $R$ , введённым в предыдущей задаче.

**Задача 16**. Доказать, что:

- 1) пересечение произвольной непустой системы колец является кольцом (возможно, состоящим лишь из пустого множества);
- 2) пересечение произвольной непустой системы  $\sigma$ -колец является  $\sigma$ -кольцом;
- 3) пересечение непустой системы алгебр с одной и той же единицей является алгеброй.

(Указание. Почему пересечение линейных подпространств фиксированного линейного пространства — снова линейное подпространство?)

**Задача 17\***. Пусть  $T$  — система множеств. Доказать, что существует такое кольцо  $R(T)$ , что

- 1)  $T \subset R(T)$  и
- 2) для любого кольца  $R_1$ , содержащего  $T$ , верно  $R(T) \subset R_1$ .

(Такое кольцо называется минимальным кольцом, содержащим систему  $T$ , или кольцом, порождённым системой  $T$ .)

**Задача 18\***. (Продолжение.) Доказать, что если система  $T$  содержит единицу, то  $R(T)$  является алгеброй.

**Задача 19\***. (Продолжение.) Пусть  $S$  — полукольцо. Доказать, что  $R(S)$  совпадает с кольцом, построенным в задачах 13 и 14.

**Задача 20\***. (Продолжение.) Пусть  $S$  — полукольцо. Построить продолжение меры  $m$  с полукольца  $S$  на порождённое им кольцо  $R(S)$ . (Для простоты рассмотреть ситуацию, когда полукольцо содержит единицу, а мера принимает только конечные значения.)

1) Дать определение продолжения меры с полукольца на содержащее его кольцо.

2) Построить продолжение меры с  $S$  на  $T(S)$  и доказать его корректность.

3) Доказать единственность возможного продолжения меры с полукольца на порождённое им кольцо.

4) Доказать, что если исходная мера на полукольце  $S$  была  $\sigma$ -аддитивной, то её продолжение на кольцо  $R(S)$  тоже будет таковой.

Итак, мы рассмотрели продолжение меры с полукольца на кольцо. Дальнейшим продолжением этого процесса (если кольцо обладает единицей) будет то, что описано в лекции 2.

**Задача 21\***. Пусть  $[A; B] \subset \mathbb{R}$ ,  $S$  — полукольцо всех промежутков, вложенных в  $[A; B]$  (включая пустой). Доказать, что функция  $m : S \rightarrow [0; +\infty)$ , где  $m([a; b]) = b - a$ , является  $\sigma$ -аддитивной мерой на  $S$ . (Она называется классической мерой на  $[A; B]$ .) (Указание. Для доказательства  $\sigma$ -аддитивности воспользоваться леммой Гейне–Бореля.) При продолжении этой меры по Лебегу получается классическая мера Лебега на прямой.

**Задача 22\***. Пусть дано полукольцо  $S = \{[a; b] \mid -\infty < a < b < +\infty\} \cup \{\emptyset\}$ ,  $g(x)$  — неубывающая непрерывная слева функция на  $\mathbb{R}$ , а функция  $m_g : S \rightarrow [0; +\infty)$  определена формулой  $m_g([a; b]) = g(b) - g(a)$ . Доказать, что  $m_g$  —  $\sigma$ -аддитивная мера на  $S$ . (Такая мера называется мерой Стильеса.) При продолжении этой меры по Лебегу получается мера Лебега–Стилтьеса на прямой.