МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

Физический факультет

М. О. Корпусов, А. А. Панин

Лекции по линейному и нелинейному функциональному анализу

Том I. Общая теория

Часть II. Лекции–Семинары

Москва
Физический факультет МГУ
2016

К о р п у с о в М. О., П а н и н А. А.
Лекции по линейному и нелинейному функциональному анализу. Том I. Общая теория. Часть II. Лекции–Семинары. — М.: Физический факультет МГУ, 2016. 172 с.
ISBN 978-5-8279-0132-7

В курсе лекций изложены основы общей теории линейных пространств и операторов, действующих в линейных пространствах. Изложены основы теории абстрактной меры Лебега, теория пространств Лебега, теория метрических, топологических, векторных топологических, банаховых и гильбертовых пространств, спектральная теория линейных операторов в банаховых пространствах, а также некоторые результаты теории компактности множеств в метрических пространствах.

Материал книги используется в курсе «Линейный и нелинейный функциональный анализ», который авторы читают на кафедре математики физического факультета МГУ.

Данный курс входит в учебный план кафедры математики физического факультета МГУ и представляет интерес для широкого круга студентов и аспирантов, специализирующихся в области функционального анализа.

Ил. 17. Библиогр. 28 назв.

Р е ц е н з е н т ы:
проф. *В. Ю. Попов,*
проф. *Г. А. Свиридюк,*
проф. *М. В. Фалалеев*

Печатается по решению Учёного совета
физического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова

ISBN 978-5-8279-0132-7

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 7

Семинар–Лекция 1. **Элементы теории множеств** 8
§ 1. Понятие множества 8
§ 2. Операции над множествами 8
§ 3. Взаимно однозначное соответствие 10
§ 4. Счётные множества 13
§ 5. Задачи для самостоятельного решения 15

Семинар–Лекция 2. **Свойства измеримых множеств** 17
§ 1. Тождества теории множеств (продолжение) 17
§ 2. Основные свойства меры Лебега 19
§ 3. Существование неизмеримых множеств 20
§ 4. Некоторые классы измеримых множеств 20
§ 5. Пример множества, измеримого по Лебегу и неизмеримого по Жордану 20
§ 6. Некоторые измеримые множества и их мера. Множество Кантора 21
§ 7. Связь лебеговых мер в евклидовых пространствах разной размерности 22
§ 8. Непрерывность меры Лебега 23
§ 9. Отношение эквивалентности 25
§ 10. Задачи для самостоятельного решения 27

Семинар–Лекция 3. **Элементы общей теории меры** 30
§ 1. Системы множеств 30
§ 2. Аддитивность и счётная аддитивность меры 33
§ 3. Задачи для самостоятельного решения 39

Семинар–Лекция 4. **Интеграл Лебега. Пространства Лебега** . . . 42
§ 1. Типы сходимости функциональных последовательностей 42
§ 2. Теоремы о сходимости и контрпримеры 43
§ 3. Основные свойства интеграла Лебега 44
§ 4. Основные свойства пространств Лебега 48

§ 5. Задачи для самостоятельного решения 51

Семинар–Лекция 5. **Примеры метрических пространств** 54
§ 1. Примеры и контрпримеры 54
§ 2. Свойства открытых и замкнутых множеств 57
§ 3. Пример метрического пространства последовательностей 61
§ 4. Задачи для самостоятельного решения 64

Дополнительная–Лекция 1. **Метрические пространства. Дополнение** 66
§ 1. Простейшие свойства метрических пространств 66
§ 2. Некоторые свойства полных метрических пространств и их приложения 66
§ 3. Теорема о неподвижной точке или принцип сжимающих отображений 67
§ 4. Дальнейшие примеры на сходимости и замыкания 70
§ 5. Задачи для самостоятельного решения 71

Семинар–Лекция 6. **Топологические пространства. Обсуждение** 74
§ 1. Открытые множества и окрестности 74
§ 2. База топологии 74
§ 3. База, локальная база и фундаментальная система окрестностей . . 77
§ 4. Первая аксиома счётности. Контрпример 78
§ 5. Замыкание и внутренность 79
§ 6. Пересечение топологий 79
§ 7. Задачи для самостоятельного решения 80

Семинар–Лекция 7. **Направленности. Обсуждение** 83
§ 1. Частичный порядок 83
§ 2. Примеры 83
§ 3. Направленное множество. Направленность 86
§ 4. Задачи для самостоятельного решения 90

Семинар–Лекция 8. **ВТП. Обсуждение** 91
§ 1. Выпуклые множества 91
§ 2. Непосредственные следствия аксиом. Некоторые ограничения на топологию 92
§ 3. Полунормы. Примеры 94
§ 4. Полунормы и топология 95
§ 5. Функционал Минковского. Примеры 99
§ 6. Задачи для самостоятельного решения 99

Семинар–Лекция 9. **Банаховы пространства: общие сведения** . . 101
§ 1. Общие вопросы теории нормированных пространств 101
§ 2. Ряды в банаховом пространстве. Сходимость абсолютно сходящегося ряда 101
§ 3. Примеры линейных функционалов 103
§ 4. Задачи для самостоятельного решения 108

Семинар–Лекция 10. **Банаховы пространства. Дальнейшие сведения** 111
§ 1. Некоторые общие свойства линейных функционалов в банаховых пространствах 111
§ 2. Конкретные сопряжённые пространства: $(l^p)^* \sim l^q$ 112
§ 3. Случай сходимости на всюду плотном подмножестве 117
§ 4. Нерефлексивность некоторых пространств 120
§ 5. Пример неэквивалентности слабой и $*$-слабой сходимости 122
§ 6. Задачи для самостоятельного решения 124

Семинар–Лекция 11. **Спектральная теория. Обсуждение** 125
§ 1. Некоторые понятия и факты теории аналитических банаховозначных функций 125
§ 2. Теорема об отображении рядов 127
§ 3. Обратимость элементов банаховой алгебры 129
§ 4. Спектральное разложение, соответствующее замкнутым компонентам спектра 130
§ 5. Вычисление операторных норм. Примеры 131
§ 6. Функции от оператора. Примеры 133
§ 7. Задачи для самостоятельного решения 137

Семинар–Лекция 12. **Гильбертовы пространства. Обсуждение** 140
§ 1. Необходимое условие «евклидовости» 140
§ 2. Поляризационное тождество 140
§ 3. Замкнутые и незамкнутые подпространства гильбертова пространства 141
§ 4. Гильбертов сопряжённый оператор. Простейшие свойства и примеры 143
§ 5. Ортогональная проекция на конечномерное подпространство. Ортопроекторы 145
§ 6. Некоторые замечания о слабой сходимости 146
§ 7. Задачи для самостоятельного решения 146

Семинар–Лекция 13. **Компактность. Основные идеи** 149

§ 1. Топологическое определение компактности 149
§ 2. Компактные метрические пространства. Определение 150
§ 3. Компактность и полная ограниченность 151
§ 4. Связь между метрическим и топологическим определениями компактности 154
§ 5. Компактные множества в метрических пространствах. 156
§ 6. Некоторые простые факты 157
§ 7. Эквивалентность норм в конечномерном линейном пространстве 158
§ 8. Теорема Арцела 159
§ 9. Теорема Пеано 161
§ 10. Приложение. 165
§ 11. Задачи для самостоятельного решения 166
Предметный указатель 168

Список литературы 170

Предисловие

Настоящее учебное пособие посвящено изложению основ функционального анализа для студентов кафедры математики физического факультета МГУ. В первом томе «Общая теория» подробно разбираются основы элементарной и абстрактной теории меры Лебега согласно подходу А. Н. Колмогорова. После этого мы рассматриваем теорию интеграла Лебега и пространств Лебега. Подробно рассматриваются такие вопросы линейного функционального анализа, как метрические пространства, топологические и векторные топологические пространства с углубленным изучением сильной, слабой и $*$-слабой топологий и теории направленностей. Затем излагаются основы теории банаховых пространств с доказательством трёх основных принципов функционального анализа — теорем Хана–Банаха, Банаха–Штейнгауза и теоремы об открытом отображении. При этом мы подробно рассматриваем сильную, слабую и $*$-слабую сходимости в банаховых пространствах. Подробно изложена теория транспонированных операторов, действующих в банаховых пространствах. На основе интеграла Данфорда мы рассматриваем спектральное исчисление в банаховых пространствах. Излагаются основы теории гильбертовых пространств и теория самосопряжённых операторов.

Книга состоит из основных лекций, в которых излагаются базовые сведения, из семинаров–лекций, в которых помимо большого количества примеров, иллюстрирующих основные свойства объектов, введённых в лекциях, рассматриваются также тонкие вопросы общей теории и, наконец, из дополнительных лекций, которые предназначены для самостоятельного изучения. В практике нашего преподавания студенты устно защищают решения задач перед преподавателем. (Один из авторов оценил на себе полезность подобной системы, за что очень благодарен своим учителям, и прежде всего А. Шеню.) Основные лекции и лекции–семинары нумеруются независимо. Значительная часть примеров и задач взята из различных учебников и задачников. Мы постарались наиболее полно отразить их список в библиографии.

Мы глубоко признательны А. Г. Свешникову, А. Н. Боголюбову, Е. Е. Букжалёву, Н. Н. Нефёдову и А. Г. Яголе за полезное обсуждение книги, а также рецензентам: В. Ю. Попову, Г. А. Свиридюку и М. В. Фалалееву за ценные замечания, существенно улучшившие книгу. Отдельно хотим выразить благодарность студентам А. А. Белову и В. В. Цепелеву, указавшим нам на ряд опечаток и неточностей.

Авторы

Семинар–Лекция 1

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

§ 1. Понятие множества

Мы не будем здесь формулировать аксиомы теории множеств. Интересующие могут обратиться, например, к 1 тому курса «Математический анализ» В. А. Зорича. Для нас будет важно следующее:
1) множества задаются своими элементами, т. е. множество задано, если указано, какие элементы ему принадлежат; при этом множества считаются равными тогда и только тогда, когда они содержат ровно одни и те же элементы; сами множества могут служить элементами других множеств; определено пустое множество $\varnothing$, не содержащее никаких элементов (в силу вышесказанного оно единственно);
2) если A — множество, $P(x)$ — свойство, то можно построить подмножество

$$B \equiv \{x \in A \mid P(x)\},$$

состоящее ровно из тех элементов множества A, для которых выполнено свойство P;
3) для любого множества X определено множество $P(X)$, состоящее из всех его подмножеств;
4) существуют бесконечные множества.

§ 2. Операции над множествами

Для любых двух множеств A, B можно построить их объединение, пересечение, разность и симметрическую разность соответственно по правилам

$$A \cup B \equiv \{x \mid x \in A \vee x \in B\},$$
$$A \cap B \equiv \{x \mid x \in A \wedge x \in B\},$$
$$A \setminus B \equiv \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\},$$
$$A \Delta B \equiv \{x \mid (x \in A \vee x \in B) \wedge \neg(x \in A \wedge x \in B)\},$$

где $\vee$ — логическое «или» (неисключающее!), $\wedge$ — логическое «и», $\neg$ — логическое «не».

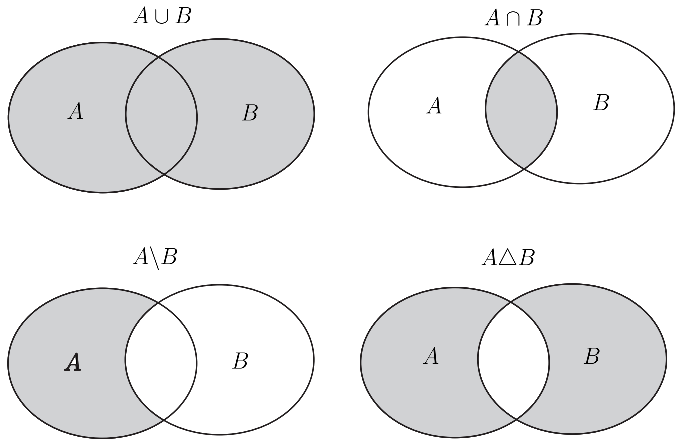

Рис. 1. Множества $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$ и $A \Delta B$.

Для простоты приведём также словесные формулировки:
объединение множеств содержит ровно те элементы, которые принадлежат хотя бы одному из объединяемых множеств,
пересечение множеств содержит ровно те элементы, которые принадлежат всем пересекаемым множествам,
разность множеств A, B содержит ровно те элементы, которые принадлежат A и не принадлежат B,
симметрическая разность множеств A, B содержит ровно те элементы, которые принадлежат ровно одному из множеств A и B.
Отметим, что для симметрической разности возможны такие представления:

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Отметим также, что объединение и пересечение произвольного (не обязательно конечного!) семейства множеств определяются аналогично.

Также существует понятие *декартова произведения* множеств. Именно, $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$. Это определение легко обобщается на счётную последовательность множеств (как?).

Если каждый элемент множества B является элементом множества A, то говорят, что B — подмножество A (B вложено в A), и пишут: $B \subset A$. Если при этом $B \neq A$, то B называют собственным подмножеством A. При необходимости подчеркнуть, что B — собственное подмножество A, вместо $B \subset A$ пишут $B \subsetneq A$.

На практике часто встречаются семейства множеств, являющихся подножествами некоторого множества P. (Например, некоторые множества точек на плоскости, некоторые множества числовых функций и т. п.) В этом случае бывают полезны *формулы де Моргана*

$$P \setminus \cup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha = \cap_{\alpha \in \Gamma} (P \setminus A_\alpha), \tag{2.1}$$

$$P \setminus \cap_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha = \cup_{\alpha \in \Gamma} (P \setminus A_\alpha). \tag{2.2}$$

Проверим формулу (2.1).

□ Вообще, для доказательства равенства множеств $A = B$ достаточно доказать, что выполняются вложения $A \subset B$ и $B \subset A$. Пусть $x \in P \setminus \cup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha$. Это означает по определению разности множеств, что x входит (синоним слова «принадлежит») в P, но не входит в $\cup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha$. Тогда по определению объединения множеств x не входит ни в одно из множеств A_α. Но тогда $x \in P \setminus A_\alpha$ при всех $\alpha \in \Gamma$ и по определению пересечения $x \in \cap_{\alpha\in\Gamma}(P \setminus A_\alpha)$.

Докажем теперь обратное вложение. Если $x \in \cap_{\alpha\in\Gamma}(P \setminus A_\alpha)$, то x принадлежит всем множествам $P \setminus A_\alpha$, откуда следует, что $x \in P$, но ни при каком $\alpha \in \Gamma$ элемент x не содержится в A_α. Но тогда $x \notin \cup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha$ и $x \in P \setminus \cup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha$. Отметим, что из нашего рассуждения следует, что если одно из множеств в (2.1) пусто, то и другое пусто, т. е. равенство выполняется и в этом случае (выше отмечено, что пустые множества равны друг другу). ⊠

Формулу (2.2) предлагается проверить самостоятельно.

Наибольший интерес представляет понятие бесконечного множества. Дадим определение.

Определение 1. *Множество A называется бесконечным, если, каково бы ни было натуральное число N, найдётся подмножество множества A, содержащее ровно N элементов.*

Замечание 1. Легко видеть, что разность бесконечного и конечного множеств — бесконечное множество. Действительно, предположим, что A бесконечно, B конечно и $A \setminus B$ конечно. Это значит, что существует такое $N \in \mathbb{N}$, что в $A \setminus B$ нет подмножества из N элементов. Положим M равным количеству элементов в B. В A существует подмножество A_1, состоящее из $N + M$ элементов (почему?) Заметим, что $A_1 \setminus B \subset A \setminus B$, откуда следует, что в $A \setminus B$ существует подмножество $A_1 \setminus B$, состоящее не менее чем из N элементов, а следовательно, и подмножество, состоящее ровно из N элементов.

Понятно, что конечные множества можно сравнивать по количеству элементов. Возникает вопрос: как сравнивать бесконечные множества? Заметим, однако, что уже для сравнения конечных множеств процедуры подсчёта числа элементов можно избежать. Например, равенство числа студентов в аудитории числу мест за партами легко проверяется, если попросить студентов занять места. Это приводит нас к понятию, которое будет рассмотрено в следующем параграфе.

§ 3. Взаимно однозначное соответствие

Определение 2. *Будем говорить, что между множествами A и B установлено взаимно однозначное соответствие (далее для краткости — ВОС), если на множестве A определена однозначная функция φ, обладающая следующими свойствами:*

1) $D(\varphi) = A$,

2) $R(\varphi) = B$,

3) $\forall x, y \in A \quad (\varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow x = y)$.
Иными словами, функция φ ставит в соответствие каждому элементу множества A некоторый элемент множества B, при этом каждый элемент множества B оказывается поставленным в соответствие некоторому и ровно одному элементу множества B.

ПРИМЕР 1. Нетрудно установить соответствие между множеством всех натуральных чисел и множеством всех чётных натуральных чисел: $\varphi(n) = 2n$.

$\square$ В самом деле, функция φ определена на всём $\mathbb{N}$, её областью значений является всё множество чётных натуральных чисел, поскольку для каждого чётного положительного числа $2m$ существует натуральное m, которое переводится функцией φ в $2m$, причём при $m_1 \neq m_2$ $2m_1 \neq 2m_2$. $\boxtimes$

ПРИМЕР 2. Можно установить ВОС и между $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$, полагая $\varphi(1) = 0$, $\varphi(2k) = k$, $\varphi(2k+1) = -k$ при всех $k \in \mathbb{N}$. (Проверку условий нетрудно выполнить и для этого случая, что рекомендуется сделать самостоятельно.) Отметим ещё, что мы столкнулись с характерной для бесконечных множеств ситуацией — возможностью установить ВОС между множеством A и собственным (т. е. не совпадающим с A) подмножеством множества A.

Определение 3. *Множества A и B называются равномощными (обозначение: $|A| = |B|$), если между ними можно установить ВОС.*

Как мы увидели, понятие равномощности является обобщением понятия равенства количества элементов (для конечных множеств). Принципиальная разница между конечными и бесконечными множествами состоит уже в том, что первые не могут быть равномощными своему собственному подмножеству, а вторые — могут.

Замечание 2. Отметим важное свойство, доказать которое предлагается самостоятельно: если каждое из множеств A, B равномощно множеству C, то A, B равномощны между собой. Так, теперь мы состоянии установить ВОС между $\mathbb{Z}$ и множеством всех чётных натуральных чисел «через посредство» множества $\mathbb{N}$.

Приведём другие важные примеры ВОС между множествами.

ПРИМЕР 3. Так, между невырожденными отрезками $[a;b]$ и $[c;d]$ можно установить соответствие с помощью линейной функции $\varphi(x) = Ax + B$, где коэффициенты A, B определяются из линейной системы

$$\begin{cases} Aa + B = c, \\ Ab + B = d. \end{cases}$$

ПРИМЕР 4. Очевидно, так же устанавливается соответствие между двумя интервалами или полуинтервалами. ВОС между полуинтервалом $[0;1)$ и лучом $[0;+\infty)$ можно установить с помощью функции $\varphi(x) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x$, взаимная однозначность которой следует из строгой монотонности. Эта же функция (точнее, функция, заданная на $(-1;1)$ той же формулой) осуществляет ВОС $(-1;1)$ и $(-\infty;\infty)$.

Отметим также, что в геометрической интерпретации анализа постоянно используется ВОС между действительными числами (бесконечными десятичными дробями без девятки в периоде) и точками на прямой.

ПРИМЕР 5. Приведём несколько менее тривиальный пример ВОС между числовыми множествами. Интуитивно ясно, что открытый и замкнутый луч равномощны, но как установить ВОС между ними?

□ Рассмотрим множества $[0;+\infty)$ и $(0;+\infty)$. Предлагается следующая идея: отдельно установим соответствие между целыми числами по формуле $\varphi(n) = n+1$, $n \geqslant 0$, после чего остальные точки будут соответствовать сами себе (т. е. все интервалы вида $(n;n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant 0$ «останутся на месте», $\varphi(x) = x$ при $x \in [0;+\infty) \setminus (\mathbb{N} \cup \{0\})$). ⊠

Сформулируем без доказательства следующую важную теорему:

Теорема (Кантора—Бернштейна). *Пусть*

$$A_1 \subset A, \quad B_1 \subset B, \quad |A_1| = |B|, \quad |B_1| = |A|.$$

Тогда $|A| = |B|$.

Замечание 3. Отметим, что отсюда же сразу следует равномощность открытого и замкнутого лучей (как?), доказанная ранее непосредственно, а также равномощность любого промежутка (ненулевой длины) всей числовой прямой. Остановимся на последнем случае подробнее.

□ В самом деле, пусть $A = \mathbb{R}$, $B = \lfloor a;b \rceil$ (такое обозначение не конкретизирует вид промежутка: отрезок, полуинтервал или интервал). Тогда, с одной стороны, $A_1 = B$ и, следовательно, $|A_1| = |B|$, а с другой — существует интервал $B_1 = (a';b') \subset \lfloor a;b \rceil$ и по ранее доказанному $|B_1| = |A|$. ⊠

Определение 4. *Если* $|A| = |\mathbb{R}|$, *то говорят, что* A *имеет мощность континуума.*

Итак, мы установили, что любой промежуток на числовой прямой имеет мощность континуума.

Замечание 4. Сделаем важное предостережение. До сих пор мы пока говорили лишь о равных мощностях и пока не получили ни одного результата вида «мощность множества A больше мощности множества B». Если вдуматься — мы даже не определили, что означает последнее высказывание (равенство мощностей определено, неравенство пока нет). Мы дадим это определение позже, а пока заметим, что одного только наличия в A собственного подмножества, равномощного B, недостаточно: как показывают наши примеры, A и B могут быть при этом равномощны (прямая и интервал, например).

§ 4. Счётные множества

В анализе большую роль играют множества, равномощные множеству натуральных чисел.

Определение 5. *Если $|A| = |\mathbb{N}|$, то множество A называется счётным.*

Иными словами, счётное множество — это такое, элементы которого можно пронумеровать, т. е. установить ВОС между A и множеством натуральных чисел.

Из рассмотренных ранее примеров следует, что счётны $\mathbb{N}$ (ВОС устанавливается тождественной функцией), $\mathbb{Z}$, множество всёх чётных натуральных чисел и т. д.

Установим некоторые важные факты относительно счётных множеств.

Лемма 1. *Всякое бесконечное множество имеет счётное подмножество.*

Доказательство.

Рассмотрим следующую процедуру. Пусть A — бесконечное множество. Тогда в нём существует одноэлементное подмножество $\{x_1\}$. В силу замечания 1 множество $A_1 \equiv A \setminus \{x_1\}$ также бесконечно. Значит, в нём существует одноэлементное подмножество $\{x_2\}$, где, очевидно, $x_2 \neq x_1$. Продолжая эту процедуру бесконечно, мы получим счётное множество $\{x_n\}$. Возможность продолжения такой процедуры следует из того, что на каждом шаге $A_n \equiv A \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$ будет бесконечным множеством в силу замечания 1.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Всякое подмножество счётного множества конечно или счётно.*

Доказательство.

1. Пусть $A = \{a_n\}$ счётно, $B \subset A$. Если B конечно, утверждение доказано. В противном случае мы воспользуемся следующими свойствами множества натуральных чисел:
1) любое подмножество множества $\mathbb{N}$ имеет наименьший элемент;
2) для любого натурального числа m существует лишь конечное множество натуральных чисел k, удовлетворяющих неравенству $k < m$.
(Первое свойство следует из второго, но нам сейчас это не важно.)

2. Теперь мы в состоянии пронумеровать все элементы B. Для этого найдём в B элемент a_{n_1} с наименьшим номером (номер элемента множества A определяется ВОС $\mathbb{N} \leftrightarrow A$) и положим $b_1 = a_{n_1}$. Затем сделаем то же самое для $B \setminus \{b_1\}$ и т. д. Таким образом будет построена бесконечная последовательность $\{a_{n_i}\}$ элементов множества B, причём по построению $n_{i+1} > n_i$ при всех $i \in \mathbb{N}$.

3. Почему она содержит все его элементы? Предположим, что элемент $a_m \equiv b \in B$ не вошёл в последовательность. Но это означает, что на каждом l-м шаге он не был элементом с наименьшим номером в $B \setminus \{a_{n_1}, \ldots, a_{n_{l-1}}\}$, а следовательно, существует бесконечное множе-

ство номеров, меньших номера m элемента $b \equiv a_m$. Это невозможно в силу свойства 2).

Лемма доказана.

Из лемм 1, 2 следует, что счётное множество — это «самый маленький» тип бесконечного множества в том смысле, что всякое бесконечное множество содержит счётное подмножество, но счётное множество содержит лишь конечные и счётные подмножества.

Дадим ещё одно определение.

Определение 6. *Множество называется не более чем счётным, если оно конечно или счётно.*

Замечание 5. Отметим, что у нас пока ещё нет общего понятия о сравнении мощностей.

Отметим теперь следующие факты.

1) Объединение конечного семейства конечных множеств конечно.

2) Объединение конечного и счётного множеств счётно.

3) Объединение конечного семейства счётных множеств счётно.

4) Объединение счётного семейства конечных множеств не более чем счётно.

5) Объединение счётного семейства счётных множеств счётно.

Процедуры «счёта» общеизвестны. В каждом случае необходимо пропускать повторяющиеся элементы. В последнем случае «движемся» по диагоналям «низ-лево—верх-право». Аналогичным способом доказывается *счётность множества рациональных чисел*.

Объединяя эти утверждения, получаем теорему:

Теорема 1. *Объединение не более чем счётного семейства не более чем счётных множеств является не более чем счётным множеством.*

Отметим важный в дальнейшем факт: любое семейство непересекающихся интервалов на числовой прямой не более чем счётно, поскольку на каждом интервале найдётся хотя бы одна рациональная точка, причём на различных интервалах будут взяты разные точки (интервалы не пересекаются). Тем самым, указанное семейство интервалов оказывается равномощным не более чем счётному (в силу леммы 2) множеству.

До сих пор мы обсуждали только счётные множества и множества мощности континуума. Возникает вопрос: а не являются ли все бесконечные множества (в том числе и мощности континуума) счётными? Как мы сейчас покажем, нет, и уже $\mathbb{R}$ имеет мощность большую, чем $\mathbb{N}$. Более того, как мы увидим позднее, из одного только существования множества $\mathbb{N}$ следует существование по крайней мере одной бесконечно возрастающей последовательности мощностей бесконечных множеств.

Определение 7. *Говорят, что множество A имеет мощность бо́льшую, чем множество B, если:*

1) *B равномощно некоторому подмножеству множества A;*

2) *неверно, что $|A| = |B|$.*

З а м е ч а н и е 6. Как мы видели выше, пункт 2) важен. (См. замечание 4.)

Докажем, что $\mathbb{R}$ имеет мощность большую, чем $\mathbb{N}$. Пункт 1) в данном случае очевиден. Докажем п. 2). Для этого мы установим, что предположение о возможности установить ВОС между $\mathbb{R}$ и $\mathbb{N}$ приводит к противоречию.

□ 1. Итак, пусть такое соответствие установлено и все действительные числа записаны в виде последовательности $\{a_1, a_2, \ldots\}$. Воспользуемся их десятичными записями. Именно, пусть $a_n = \overline{a_{n1}, a_{n2}, a_{n3} \ldots}$, где a_{n1} — любое целое число, a_{ni}, $i \geqslant 2$, — натуральные числа от 0 до 9, причём 9 в периоде исключается. Положим $b = \overline{b_1, b_2 b_3 \ldots}$, где $b_1 \neq a_{11}$, $b_2 \neq a_{22}$, $b_3 \neq a_{33}$, $\ldots$, причём все цифры, начиная с b_2, отличны от 9.

2. Тогда, как легко видеть, мы получаем действительное число, отличное от всех a_n. В самом деле, число b по построению отлично от a_i, поскольку $b_i \neq a_{ii}$. Итак, мы получили, что, какая бы последовательность действительных чисел ни была построена, найдётся действительное число, не попавшее в эту последовательность. Утверждение доказано. (Если мысленно выписать последовательность действительных чисел, существование которой предполагается в доказательстве, в столбик, становится ясно, почему данный метод называется канторовским диагональным процессом). ⊠

Отметим, что подобное рассуждение показывает, что декартово произведение счётного семейства даже конечных (но не пустых и не одноэлементных) множеств несчётно.

Сформулируем без доказательства ещё одну важную теорему.

Т е о р е м а (К а н т о р а). *Каково бы ни было множество A, множество $P(A)$ всех его подмножеств имеет мощность большую, чем A.*

Отметим, что для пустого множества имеем $|\varnothing| = 0$, $|P(\varnothing)| = |\{\varnothing\}| = 1$.

Из теоремы Кантора сразу следует, что, отправляясь от $\mathbb{N}$, можно построить бесконечную последовательность бесконечных множеств, мощности которых возрастают.

§ 5. Задачи для самостоятельного решения

З а д а ч а 0. Объяснить разницу между $\varnothing$ и $\{\varnothing\}$.

З а д а ч а 1. Установить взаимно однозначное соответствие между
1) интервалом и открытым лучом;
2) окружностью и полуинтервалом;
3) интервалом и полуинтервалом;
4) отрезком и интервалом.

Указание. Можно устанавливать соответствия через «множества-посредники».

З а д а ч а 2. Подробно доказать возможность установить ВОС между A, B, если уже установлены ВОС между A и C и между B и C.

З а д а ч а 3. Доказать счётность:
1) множества рациональных точек на плоскости, т. е. множества $\{(r, q) \mid r, q \in \mathbb{Q}\}$;
2) множества всех интервалов с рациональными концами.

З а д а ч а 4. Доказать счётность множества всех алгебраических чисел (корней многочленов с целыми коэффициентами).

З а д а ч а 5. Почему при доказательстве теоремы Кантора нельзя рассуждать так: «Множество $P(A)$ содержит все одноэлементные подмножества множества A — их уже «столько же», сколько элементов множества A, да ещё оно содержит и другие подмножества, поэтому мощность $P(A)$ больше мощности A»?

З а д а ч а 6. (П р о д о л ж е н и е.) В каком частном случае так всё-таки можно рассуждать?

З а д а ч а 7*. Установить ВОС между всеми бесконечными последовательностями нулей и единиц и всеми подмножествами множества натуральных чисел.

З а д а ч а 8*. Доказать теорему Кантора. Указание. Воспользоваться идеей построения «лишнего» элемента из доказательства несчётности $\mathbb{R}$. Напоминаем, что нужно проверить два условия.

З а д а ч а 9*. Найти формулу, «подсчитывающую» счётное объединение счётных множеств при условии, что они не пересекаются.

З а д а ч а 10. Доказать, что любое семейство непересекающихся кругов на плоскости не более чем счётно. Верно ли аналогичное утверждение для квадратов?

З а д а ч а 11. Пользуясь десятичными записями действительных чисел и правилами их сравнения, доказать существование рационального числа на каждом интервале.

З а д а ч а 12. Показать, что определения 6 и 7 не противоречат друг другу, т. е. если мощность множества B меньше (в смысле определения 7) мощности счётного множества, то B конечно.

З а д а ч а 13. Доказать, что наличие в множестве A собственного подмножества, равномощного A, можно взять за определение бесконечного множества. (Указание. Как мы доказывали равномощность открытого и замкнутого лучей?)

З а д а ч а 14. (П р о д о л ж е н и е.) 1) Доказать, что добавление счётного множества к данному бесконечному множеству не меняет мощность последнего. 2) Можно ли то же самое сказать про удаление счётного подмножества? 3) Как сформулировать утверждение про удаление счётного подмножества так, чтобы оно стало верным?

Семинар–Лекция 2

СВОЙСТВА ИЗМЕРИМЫХ МНОЖЕСТВ

§ 1. Тождества теории множеств (продолжение)

Обсудим ещё некоторые утверждения теории множеств. Пусть $A \subset$ $\subset P$, $B \subset P$. Тогда

$$A \setminus B = A \cap (P \setminus B), \tag{1.1}$$

$$A \triangle B = (P \setminus A) \triangle (P \setminus B), \tag{1.2}$$

$$P \setminus (P \setminus A) = A. \tag{1.3}$$

Также нам понадобится, что

$$A \subset B \quad \Longrightarrow \quad (P \setminus B) \subset (P \setminus A). \tag{1.4}$$

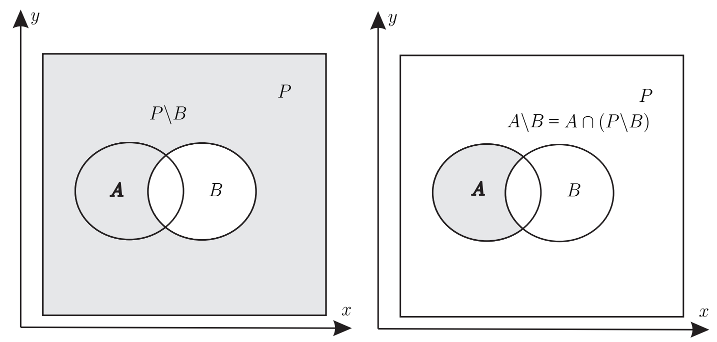

Рис. 2. Построение множества $A\backslash B = A \cap (P\backslash B)$.

Докажем для примера формулы (1.1) и (1.4).

□ Имеем для (1.1): если $x \in A \setminus B$, это означает, что $x \in A$ (и, тем самым, $x \in P$), но $x \notin B$. Следовательно, $x \in A$ и $x \in P \setminus B$, откуда следует вложение $A \setminus B \subset A \cap (P \setminus B)$. Для доказательства обратного вложения заметим, что при $x \in A \cap (P \setminus B)$ имеем, в частности, $x \in A$, $x \notin B$. ⊠

Несложно доказать и (1.4).

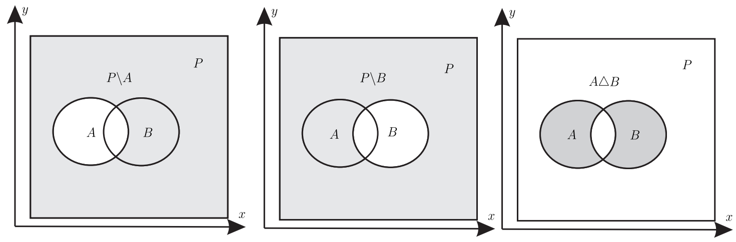

Рис. 3. Построение множества $A \triangle B = (P \setminus A) \triangle (P \setminus B)$.

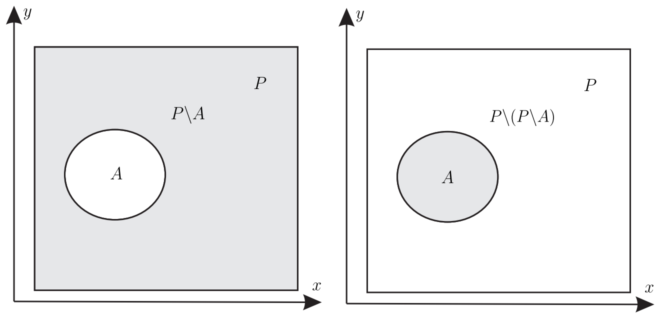

Рис. 4. Построение множества $A = P\backslash(P\backslash A)$.

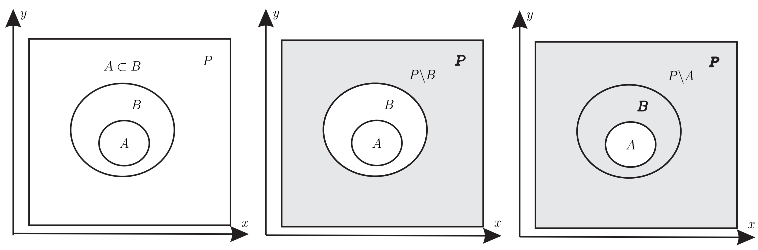

Рис. 5. Вложение множеств $A \subset B \Rightarrow P\backslash B \subset P\backslash A$.

□ Воспользуемся методом «от противного». Пусть

$$x \in P \setminus B, \tag{1.5}$$

но

$$x \notin P \setminus A. \tag{1.6}$$

Из (1.5) получаем, что $x \in P$. Но тогда из (1.6) следует, что $x \in A$, откуда по условию $x \in B$, что противоречит (1.5). ⊠

Верно вложение

$$(A_1 \cup A_2) \triangle (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2). \tag{1.7}$$

□ В самом деле, пусть $x \in (A_1 \cup A_2) \triangle (B_1 \cup B_2)$, т. е. x принадлежит ровно одному из множеств $A_1 \cup A_2$, $B_1 \cup B_2$. Предположим для

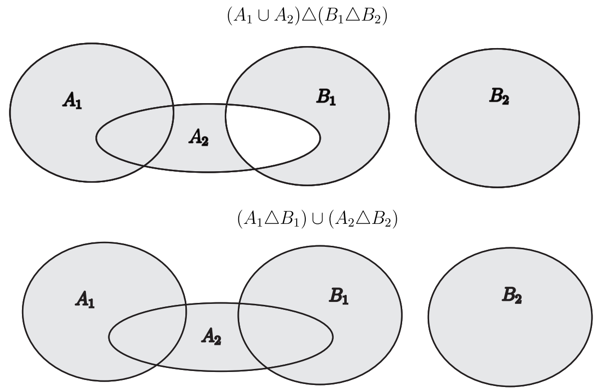

Рис. 6. Вложение множеств $(A_1 \cup A_2)\Delta(B_1 \Delta B_2) \subset (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2)$.

определённости, что $x \in A_1 \cup A_2$, $x \notin B_1 \cup B_2$. Тогда x не является элементом ни одного из множеств B_1, B_2, но является элементом хотя бы одного из множеств A_1, A_2. Но в этом случае x содержится хотя бы в одном из множеств $A_1 \triangle B_1$, $A_2 \triangle B_2$, а следовательно, содержится в их объединении. ⊠

Нам требуется и такое утверждение: если $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, то

$$B_1 \cap B_2 \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2). \tag{1.8}$$

□ В самом деле, если $B_1 \cap B_2 = \varnothing$, то вложение (1.8) имеет место просто в силу соглашения о том, что пустое множество считается подмножеством любого множества (в том числе пустого). Ранее и в дальнейшем это замечание опущено. Если же это пересечение непусто, рассмотрим произвольный его элемент x. Возможны два случая: либо x не принадлежит ни одному из множеств A_1, A_2, либо он принадлежит ровно одному из них. В обоих случаях, очевидно, $x \in (A_1 \triangle B_1) \cup \cup (A_2 \triangle B_2)$. Случай $x \in A_1$, $x \in A_2$ невозможен, потому что эти множества по условию не пересекаются. ⊠

Кроме того,

$$A \subset B \cup (A \triangle B),$$

что предлагается доказать читателю.

§ 2. Основные свойства меры Лебега

Мера Лебега обладает следующими важнейшими свойствами, которыми мы будем пользоваться:

1) семейство измеримых множеств замкнуто относительно операций разности, симметрической разности, счётного объединения, счётного пересечения и дополнения (допускается мера, равная $+\infty$);

2) мера Лебега является счётно-аддитивной на этом множестве;

3) мера Лебега полна, т. е. всякое множество, внешняя мера которого равна 0, измеримо, и его мера Лебега равна 0;

4) мера Лебега непрерывна относительно монотонного предельного перехода (это утверждение, не доказанное на основной лекции, будет доказано здесь).

§ 3. Существование неизмеримых множеств

Как показывает пример (см. Колмогоров, Фомин «Элементы теории функций и функционального анализа», гл. V, § 1, окончание, или Гелбаум, Олмстед «Контрпримеры в анализе», гл. 8, § 11), существуют множества, предположение об измеримости которых противоречит требованию 2) из предыдущего параграфа. Значит, внешняя мера, будучи определена для всех множеств, не является счётно-аддитивной, и её необходимо «ограничить» на семейство измеримых по Лебегу множеств.

§ 4. Некоторые классы измеримых множеств

0. Любое конечное или счётное множество точек (на плоскости, прямой, в пространстве...) измеримо и имеет меру 0. В самом деле, конечное или счётное множество точек на плоскости $\{x_n\}$ может быть покрыто системой квадратов (отрезков, кубов...) $\{Q_n\}$, где

$$m(Q_n) = \frac{1}{2^n}\varepsilon.$$

Таким образом, с учётом произвольности ε, $\mu^*(\{A_n\}) = 0$, откуда в силу полноты меры Лебега и вытекает сформулированное утверждение. Следствие: множество с положительной (ненулевой) лебеговой мерой несчётно (ВНИМАНИЕ! обратное неверно: см. задачи 7, 8).

1. Все открытые и замкнутые множества измеримы. (См. задачу 9.)

2. Назовём борелевскими множествами (на прямой или плоскости) все множества, которые можно получить из открытых и замкнутых множеств конечными или счётными применениями операций объединения, пересечения, разности. Очевидно, борелевские множества измеримы. (Можно доказать, что ими все измеримые множества не исчерпываются.)

§ 5. Пример множества, измеримого по Лебегу и неизмеримого по Жордану

Приведём лишь одну из многочисленных возможных иллюстраций того факта, что мера Лебега — понятие гораздо более общее, чем мера Жордана. Мера Жордана — это обычное «школьное» понятие площади, которое аккуратно вводится так.

1. Сначала вводится площадь прямоугольника, затем — с помощью «разрезаний», т. е. понятия равносоставленности, — треугольника и любого многоугольника (с помощью разрезания на треугольники). Рассмотрим для множества A все многоугольники, вписанные в A (т. е. такие, внутренность которых вместе с границей вложена в A), и описанные вокруг A (т. е. такие, что их внутренность вместе с границей содержит A). Если точная верхняя грань площадей вписанных многоугольников равна точной нижней грани площадей описанных, то это общее значение и считается площадью, или мерой Жордана, множества A.

2. Положим теперь A равным множеству всех рациональных точек единичного квадрата Q. Тогда в силу результатов семинара-лекции 1 множество A счётно и имеет меру Лебега, равную нулю (см. § 3 данной лекции). С другой стороны, оно всюду плотно заполняет квадрат (это означает, что любой круг, вложенный в Q, пересекается с A). Следовательно, все описанные многоугольники содержат квадрат Q. С другой стороны, в A можно вписать лишь пустой многоугольник (т. к. все прочие содержат хотя бы одну точку, не являющуюся рациональной). Следовательно, упомянутые точные грани равны 0 и 1 и мера Жордана множества A не определена.

§ 6. Некоторые измеримые множества и их мера. Множество Кантора

ПРИМЕР 1. Множество Кантора замкнуто, имеет меру 0, равномощно отрезку. (См. задачи 7, 8.) Таким образом, любое счётное множество точек имеет лебегову меру 0, но обратное неверно.

2. Отрезок и прямая имеет плоскую меру 0. (См. § 7.)

3. Доказать, что A борелево, и вычислить его меру, если

а) $A = \cup_{n=1}^{\infty}(n - \frac{1}{3^n}; n + \frac{1}{3^n}]$;

б) $A = \cup_{n=1}^{\infty}[n^n; n^n + \frac{1}{\ln(n+1)}]$;

в) $A = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{R}$;

г) $A = ((0;3] \otimes [1;2)) \setminus (\mathbb{Q} \otimes \mathbb{Q})$;

д) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos x \in \mathbb{Q}\} \otimes (0; +\infty)$.

Рассмотрим сначала пункты а) и б). Тот факт, что рассмотренные в них множества суть борелевы, очевидным образом следует из их конструкции: в обоих случаях речь идёт о счётных объединениях промежутков.

Для вычисления меры достаточно воспользоваться счётной аддитивностью меры и значением меры (длины) промежутка:

$$\mu([a;b]) = b - a \quad \text{при} \quad a \leqslant b$$

(аналогично для остальных типов промежутков). Поскольку в каждом случае промежутки не пересекаются, достаточно найти сумму их мер (длин). В п. а) получаем:

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} = 1,$$

во втором же случае имеет расходящийся ряд и $\mu(A) = +\infty$. В следующем примере рассматриваемое множество получается исключением из плоскости объединения счётного числа прямых.

Поскольку каждая прямая имеет плоскую меру 0 (см. ниже раздел 6), а в силу счётной аддитивности то же можно сказать об их объединении, получаем, что $\mu(A) = \mu(\mathbb{R}^2) - 0 = +\infty$. По аналогичным причинам мера множества, рассмотренного в п. г), равна 3. В самом деле, из прямоугольника удаляются все рациональные пары чисел, а таких пар счётное множество (оно получается как счётное объединение счётных множеств: при любом $r_1 \in \mathbb{Q}$ множество пар вида (r_1, r_2) счётно).

Осталось лишь учесть, что счётное множество имеет лебегову меру 0, как указано выше в § 4. Для решения п. д) достаточно заметить, что рассматриваемое множество представляет собой счётное объединение полупрямых. В самом деле, при каждом $r \in \mathbb{Q}$ множество $\{x \in \mathbb{R} \mid \cos x = r\}$ счётно, а поэтому $\{x \in \mathbb{R} \mid \cos x \in \mathbb{Q}\}$ счётно как объединение счётного семейства счётных множеств. Следовательно, искомая мера равна 0.

ПРИМЕР 2. Доказать, что множество A измеримо, и найти его меру, если

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0, 0 < y < e^{-x}|\sin x|\}.$$

Для решения этой задачи достаточно учесть счётную аддитивность меры и результат задачи 4 (ниже, в задачах для самостоятельного решения). Тогда имеем:

$$\mu(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{\pi k}^{\pi(k+1)} e^{-x}|\sin x|\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\pi k} \int\limits_{0}^{\pi} e^{-x} \sin x\,dx =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\pi k} \frac{1 + e^{-\pi}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}}.$$

§ 7. Связь лебеговых мер в евклидовых пространствах разной размерности

ПРИМЕР 3. Пусть P — $(n-1)$-мерная координатная плоскость в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Тогда любое её подмножество имеет нулевую μ_n-меру.

В самом деле, рассмотрим координатную плоскость $P = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_n = c\}$. Оценим внешнюю меру множества P. В качестве покрытия возьмём «слои», представляющие собой параллелепипеды

$$\Pi_k = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid |x_i| \leqslant k, i = 1, 2, \ldots, n-1, |x_n - c| \leqslant \frac{\varepsilon}{(2k)^{n-1}2^k}\right\}.$$

Легко видеть, что мера (объём) каждого такого параллелепипеда равна $\varepsilon/2^k$, откуда

$$\mu^*(P) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m(\Pi_k) = \varepsilon.$$

В силу произвольности ε заключаем, что $\mu^*(P) = 0$. А тогда в силу полноты меры Лебега (см. замечание 5 предыдущей лекции) P измеримо и (по определению меры измеримого множества) $\mu(P) = 0$.

Отсюда следует, что и любое подмножество P' указанной плоскости имеет меру 0. В самом деле, любое покрытие плоскости есть покрытие любого её подмножества, поэтому рассуждение применимо и к P'. Так, например, плоская мера Лебега отрезка равна 0.

ПРИМЕР 4. Доказать, что существует μ_2-измеримое подмножество $\mathbb{R}^2$, проекции которого на координатные оси μ_1-неизмеримы.

□ Ранее было указано, что неизмеримые множества существуют. В частности, существует хотя бы одно неизмеримое множество на прямой. Обозначим одно из таких множеств символом A и построим множества $B_1 = \{(x, y) \mid x \in A, y = 0\}$ и $B_2 = \{(x, y) \mid y \in A, x = 0\}$. Тогда множество $B = B_1 \cup B_2$ удовлетворяет условию. В самом деле, само множество B измеримо как множество на плоскости, т. к. представляет собой объединение двух подмножеств координатных «плоскостей». В то же время, каждая из проекций, имеющая вид $A \cup \{0\}$, представляет собой, очевидно, неизмеримое (линейной мерой Лебега) множество. ⊠

§ 8. Непрерывность меры Лебега

Теорема 1. *Пусть A_1, A_2, A_3 — измеримые множества, причём*

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots \quad \text{и} \quad A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Тогда A измеримо и

$$\mu(A) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n). \tag{8.1}$$

Доказательство.

1. Измеримость множества A (где допускается $\mu(A) = +\infty$) следует из п. 1) § 2. Осталось проверить равенство (8.1).

2. Поскольку до сих пор у нас не было никакой теоремы про недизъюнктное объединение, попытаемся свести ситуацию к дизъюнктному объединению. (Более того, это нередко применяемый подход.) Положим $A_0 = \varnothing$ и введём в рассмотрение множества

$$\widetilde{A_k} = A_k \setminus A_{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{8.2}$$

3. Докажем следующие 3 факта:
1) $\widetilde{A_n} \cap \widetilde{A_{n+p}} = \varnothing$, $n, p \in \mathbb{N}$;
2) $A_n = \sqcup_{k=1}^{n} \widetilde{A_k}$, $n \in \mathbb{N}$;
3) $A = \sqcup_{k=1}^{\infty} \widetilde{A_k}$.

□ Первый факт следует из того, что

$$\widetilde{A_{n+p}} = A_{n+p} \setminus A_{n+p-1} \quad \text{и} \quad A_{n+p-1} \supset A_n \supset \widetilde{A_n},$$

где при $p = 1$ первое вложение после слова «и» обращается в равенство. Рассмотрим второй факт. Сразу заметим, что дизъюнктность объединения следует из 1). Далее, вложение «справа налево» следует из цепочки

$$\widetilde{A_k} \subset A_k \subset A_n, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Осталось доказать, что

$$A_n \subset \sqcup_{k=1}^{n} \widetilde{A_k}. \tag{8.3}$$

Но при $x \in A_n$ существует такое $k \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, что $x \in A_k$, $x \notin A_{k-1}$. (Действительно, в этом случае среди множеств $A_1, \ldots, A_n$ найдётся хотя бы одно, содержащее x, а значит, найдётся и множество с наименьшим номером, содержащее x. Здесь возможно $k - 1 = 0$.) Тогда $x \in \widetilde{A_k}$ и поэтому выполнено (9.5). ⊠

4. Теперь легко видеть, что 3) следует из соотношений $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ и 2) (а дизъюнктность по-прежнему следует из 1)). Тогда из 2) и 3) с использованием конечной и счётной аддитивности меры Лебега имеем

$$\mu(A_n) = \sum_{k=1}^{n} \mu(\widetilde{A_k}), \quad \mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\widetilde{A_k}),$$

и требуемый результат вытекает из определения суммы ряда.

Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть B_1, B_2, B_3 — измеримые множества, причём*

$$P \supset B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \ldots, \quad B = \cap_{n=1}^{\infty} B_n \quad \text{и} \quad \mu(P) < +\infty.$$

Тогда B измеримо и

$$\mu(B) = \lim_{n \to \infty} \mu(B_n). \tag{8.4}$$

Доказательство.

1. Перейдём к дополнениям, положив $A = B^c \equiv P \setminus B$, $A_n = B_n^c$. Тогда, как следует из (1.4) и формул де Моргана, для множеств

$$A_1, \ldots, A$$

выполняются условия теоремы 1. Следовательно, имеем

$$\mu(B^c) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n^c), \tag{8.5}$$

причём в силу конечной аддитивности меры <u>при условии $\mu(P) < +\infty$</u> имеем

$$\mu(B) = \mu(P) - \mu(B^c), \quad \mu(B_n) = \mu(P) - \mu(B_n^c). \tag{8.6}$$

2. Тогда из (8.5), (8.6) и теорем о пределах получаем

$$\begin{aligned} \mu(B) = \mu(P) - \mu(B^c) = \\ = \mu(P) - (\lim_{n\to\infty} \mu(B_n^c)) = \mu(P) - (\lim_{n\to\infty}(\mu(P) - \mu(B_n))) = \\ = \mu(P) - \mu(P) + \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n). \end{aligned} \tag{8.7}$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Отметим, что в доказательстве теоремы 2 использовалось условие $\mu(P) < +\infty$ (в отличие от теоремы 1!). Это условие здесь существенно. В самом деле, рассмотрим пример $B_n = [n; +\infty)$ с мерой Лебега на прямой («убегающие лучи»). Тогда $B = \varnothing$, но $\mu(B_n) = +\infty$ и соотношение (8.4) не выполняется.

§ 9. Отношение эквивалентности

Пусть дано некоторое множество X.

Определение 1. *Говорят, что на множестве X задано <u>отношение</u>, если в декартовом произведении $X \times X \equiv \{(a, b) \mid a \in X, b \in X\}$ выбрано некоторое подмножество упорядоченных пар $Q \subset X \times X$.*

Определение 2. *Говорят, что на множестве X задано <u>отношение эквивалентности</u>, если в декартовом произведении $X \times X \equiv \{(a, b) \mid a \in X, b \in X\}$ выбрано некоторое подмножество упорядоченных пар $R \subset X \times X$, удовлетворяющее следующим условиям:*
1) *для любого $a \in X$ верно: $(a, a) \in R$ (иными словами, любой элемент эквивалентен самому себе);*
2) *для любых $a \in X$, $b \in X$ из условия $(a, b) \in R$ следует $(b, a) \in R$ (эквивалентность не зависит от порядка);*
3) *для любых $a \in X$, $b \in X$, $c \in X$ из $(a, b) \in R$, $(b, c) \in R$ следует $(a, c) \in R$ (транзитивность эквивалентности).*

Если теперь записать $(a, b) \in R$ в более привычном виде $a \sim b$, то только что сформулированные условия могут быть кратко записаны в

виде
1) $\forall a \in X\ a \sim a$;
2) $\forall a \in X$, $\forall b \in X\ a \sim b \Rightarrow b \sim a$;
3) $\forall a \in X$, $\forall b \in X$, $\forall c \in X\ a \sim b$, $b \sim c \Rightarrow a \sim c$.

В качестве «крайних» примеров можно привести следующие: а) будем считать каждый элемент множества X эквивалентным лишь самому себе (например, равенство чисел), б) будем считать все его элементы эквивалентными друг другу. В качестве более осмысленного примера можно предложить в) отношение эквивалентности на множестве натуральных чисел, при котором эквивалентными считаются любые два числа одинаковой чётности.

Подчеркнём, что любое отношение, удовлетворяющее условиям 1)—3), называется отношением эквивалентности, вне зависимости от того, соответствует ли оно некоторой «эквивалентности» в обычном понимании или нет. Однако сама по себе конструкция отношения и, в частности, отношения эквивалентности не интересна. Смысл в таком общем понятии, как и, пожалуй, во всех общих и абстрактных понятиях математики, — в возможности доказать разом, «автоматически» различные факты. В данном случае очень важен факт, указанный в задаче 14, — разбиение множества X на непересекающиеся классы эквивалентности.

Легко привести примеры отношений, удовлетворяющих лишь свойству транзитивности, — это отношение «меньше» для чисел или «вложено и не совпадает» для множеств. Если допустить равенство, то отношения становятся рефлексивными.

Наша ближайшая цель — изучить структуру открытых множеств на прямой. С помощью отношения эквивалентности мы сейчас докажем теорему, из которой будет легко следовать измеримость любого открытого множества на прямой.

Теорема 3. *Любое открытое множество O на прямой представимо в виде конечного или счётного объединения непересекающихся интервалов (среди которых могут быть бесконечные).*

Доказательство.

1. Тот факт, что подобное объединение является не более чем счётным, следует из доказанного ранее факта существования на любом интервале (и тем более — на бесконечном промежутке) хотя бы одной рациональной точки. Тем самым мы можем (см. предыдущую лекцию-семинар) установить ВОС между подмножеством множества рациональных чисел и рассматриваемым интервалом, поставив в соответствие каждому интервалу некоторую рациональную точку на нём [1]. Тогда, поскольку интервалы не пересекаются, соответствие действительно будет взаимно однозначным.

---

[1] Здесь, как и в некоторых местах ранее, мы пользуемся т. н. аксимой выбора, но не будем заострять на этом внимания.

2. Осталось, собственно, доказать, что любое открытое множество на прямой является объединением некоторого семейства непересекающихся интервалов.

Для этого построим на $X \equiv O$ отношение эквивалентности и воспользуемся результатом задачи 14 о разбиении X на непересекающиеся подмножества. Именно, будем считать, что $x \sim y$ (где $x, y \in O$) тогда и только тогда, когда отрезок $[x; y]$, где $x \leqslant y$, или $[y; x]$, где $x \geqslant y$, целиком содержится в O. (Вырожденный в точку отрезок допускается, «отрезок» вроде $[2; 1] = \varnothing$ — нет, иначе все числа из O пришлось бы считать эквивалентными.)

Условия 1), 2) проверяются элементарно. Несложно проверить и условие 3), разобрав все 6 возможных случаев взаимного расположения точек (каждый случай допускает нестрогие неравенства). Итак, в силу задачи 14, множество O оказалось разбитым на непересекающиеся подмножества — классы эквивалентности.

3. Докажем, что каждый такой класс представляет собой связное открытое множество (и, тем самым, является интервалом, открытым лучом или всей прямой).

Действительно, связность автоматически вытекает из самого введённого нами отношения. Тем самым, у произвольно взятого класса (выберем некоторый класс O_α) есть не более двух границ: $\inf O_\alpha$ и $\sup O_\alpha$. Рассмотрим для определённости точную нижнюю грань. Если $\inf O_\alpha = -\infty$, утверждение об открытости O_α «снизу» доказано. Пусть теперь $\inf O_\alpha = a > -\infty$. Надо доказать, что $a \notin O_\alpha$. Действительно, в противном случае имели бы, что a входит в O вместе с некоторой окрестностью $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ (т. к. множество O открыто). Но тогда $a - \varepsilon/2 \in O$ и, в силу нашего определения эквивалентности, $a - \varepsilon/2 \sim a$ и, тем самым, $a - \varepsilon/2 \in O_\alpha$. Но $a - \varepsilon/2 < \inf O_\alpha$. Полученное противоречие доказывает, что $a \notin O_\alpha$. Проведя аналогичное рассуждение для точной верхней грани, получаем, что O_α — открытый промежуток.

Теорема доказана.

Из данной теоремы в силу п. 1 § 2 следует, что любое открытое множество на прямой измеримо. В более общем случае открытых множеств в $\mathbb{R}^N$ это тоже верно. (См. задачу 11.)

§ 10. Задачи для самостоятельного решения

При решении задач можно пользоваться утверждениями, сформулированными в лекции, кроме того, которое, собственно, требуется доказать.

Задача 1. Доказать тождества и вложения, сформулированные в § 1 и не доказанные в тексте. Доказать также следующие утверждения, где $A, B, \ldots$ — произвольные подмножества некоторого множества P:

1) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$, причём если объединение в левой части дизъюнктно, то тем же свойством обладает и объединение в правой части (верно ли обратное?);

2) $A \triangle B = (A \setminus B) \sqcup (B \setminus A)$ (таким образом, здесь требуется доказать и тот факт, что объединение в правой части всегда дизъюнктно);

3) $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$;

4) $A \cup B = (A \setminus B) \sqcup (A \cap B) \sqcup (B \setminus A)$.

Задача 2. Доказать, что если $A \subset C$, $B \subset C$, то и $A \cup B \subset C$. Верно ли аналогично утверждение для произвольных объединений?

Задача 3. Завершить формулу и доказать получившееся утверждение:

1) $A = (A \setminus B) \cup \ldots$;

2) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup \ldots$.

Задача 4. Назовём подграфиком функции $f(x)$ множество $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in D(f), 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$, где $D(f)$ — область определения функции $f(x)$. Доказать, что подграфик неотрицательной функции, определённой на отрезке $[a; b]$ и интегрируемой по Риману, измерим по Лебегу и его мера равна $\int_a^b f(x)\,dx$. (Указание. Можно воспользоваться суммами Дарбу.)

Задача 5. (Продолжение.) Обобщить это утверждение на случай функций, интегрируемых по Риману в несобственном смысле (для интегралов первого и второго рода).

Задача 6. Доказать, что множество A измеримо, и найти его меру, если

а) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}, 0 \leqslant y < \frac{a^2}{a^2 + x^2}\}$, $a = \mathrm{const} > 0$;

б) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < 1, 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\}$;

в) $A = \cup_{n=1}^{\infty} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [n; n + 1), 0 \leqslant y \leqslant \frac{(x-n)^n}{n}\}$.

Задача 7. Рассмотрим множество Кантора. Оно строится следующим образом. Берётся отрезок $[0; 1]$. На первом шаге из него исключается интервал — средняя треть. На втором шаге из двух оставшихся отрезков $\left[0; \frac{1}{3}\right]$ и $\left[\frac{2}{3}; 1\right]$ также исключаются средние трети, и так далее. То, что останется, и называется множеством Кантора.

1*) Записать явную формулу для множества Кантора.

2) Доказать, что множество Кантора непусто.

3) Найти меру множества Кантора.

Задача 8*. (Продолжение.) Доказать, что множество Кантора равномощно отрезку. (Указание. Можно воспользоваться троичной записью действительных чисел.)

Замечание. Ранее мы показали, что всякое счётное множество точек на прямой (на плоскости, в пространстве...) имеет лебегову меру 0. Данная задача показывает, что **счётность множества A — достаточное, но вовсе не необходимое условие того, что $\mu(A) = 0$.**

Задача 9*. (Продолжение.) Найти меру множества всех тех чисел отрезка $[0;1]$, в стандартном десятичном разложении которых отсутствует цифра 5.

Задача 10*. Можно ли указать замкнутое подмножество A замкнутого единичного квадрата, мера μ_2 которого равна 1 и которое не совпадает со всем квадратом? (Указание. Рассмотрите квадрат как метрическое пространство и воспользуйтесь тем, что разность квадрат минус A будет непустым открытым множеством.)

Задача 11*. Докажем, что любое непустое открытое множество на плоскости представимо в виде счётного (не более чем счётного) объединения открытых прямоугольников и, следовательно, измеримо. Будем в этой задаче под открытыми прямоугольниками понимать только те непустые открытые прямоугольники, стороны которых параллельны осям координат. Назовём прямоугольник рациональным, если его стороны лежат на вертикальных прямых с рациональными абсциссами и на горизонтальных прямых с рациональными ординатами.
а) Докажите, что любой открытый прямоугольник можно представить в виде счётного объединения рациональных прямоугольников (не обязательно попарно непересекающихся).
б) Докажите, что любое открытое множество можно представить в виде объединения открытых прямоугольников. (Указание. Представьте его сначала в виде объединения открытых кругов.)
в) Докажите, что любое открытое множество можно представить в виде объединения рациональных прямоугольников.
г) Докажите, что любое открытое множество можно представить в виде счётного объединения рациональных прямоугольников.

Задача 12. Показать, что отношение равенства на множестве действительных чисел является отношением эквивалентности. Как задать отношение равенства в терминах подмножеств декартова произведения?

Задача 13. а) Проверить, что приведённые три примера отношений эквивалентности действительно являются отношениями эквивалентности. б) «Перевести» описания трёх примеров отношений эквивалентности на язык подмножеств декартова произведения.

Задача 14. Доказать, что любое отношение эквивалентности разбивает множество, на котором оно задано, на непересекающиеся подмножества.

Задача 15. (Продолжение.) Предположим, некоторое множество A разбито на непересекающиеся подмножества A_α. Верно ли, что отношение «элемент x находится в одном подмножестве с элементом y» является отношением эквивалентности?

Задача 16*. Показать, что мера Лебега на плоскости не зависит от поворотов системы координат.

Задача 17. Пусть имеется некоторое семейство множеств $\mathcal{S}$. Доказать, что отношение $|A| > |B|$ (заданное на $\mathcal{S}$) транзитивно, но не рефлексивно и не симметрично.

Семинар–Лекция 3

ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ МЕРЫ

§ 1. Системы множеств

Как вы помните, в лекции 2 построение общей теории меры велось исходя из алгебры измеримых множеств, а прямоугольники, исходя из которых велось построение классической меры на плоскости, алгебры не образуют (почему?). Есть и другие примеры, когда исходное множество задания меры не является алгеброй. В связи с этим имеет смысл рассмотреть другие системы множеств. Дадим несколько определений.

Определение 1. *Система множеств S называется полукольцом, если*:
1) $\varnothing \in S$;
2) $\forall A \in S, \forall B \in S\ A \cap B \in S$;
3) $\forall A \in S, \quad \forall A_1 \in S, \quad A_1 \subset A, \quad \exists n \in \mathbb{N}, \quad \exists A_2, \ldots A_n \in S:$ $A_1 \sqcup A_2 \sqcup \ldots \sqcup A_n = A$.

Последнее требование проще всего пояснить на примере прямоугольников. Действительно, прямоугольник с прямоугольным вырезом — уже не прямоугольник, однако его можно разрезать на прямоугольники (следя за тем, какие границы куда входят).

Итак, полукольцо — это наиболее «слабая» система множеств в нашем рассмотрении. Будем постепенно усиливать требования. При этом каждое следующее понятие (кроме σ-кольца) будет частным случаем предыдущего. (См. задачу 1.)

Определение 2. *Непустая система множеств R называется кольцом, если*:
1) $\forall A \in R, \forall B \in R\ A \cap B \in R$;
2) $\forall A \in R, \forall B \in R\ A \Delta B \in R$.

Следствие 1. *Всякое кольцо множеств R содержит $\varnothing$. В самом деле, по условию непустоты R существует некоторое $A \in R$. Но тогда по 2) имеем $\varnothing = A \Delta A \in R$.*

Следствие 2. *Всякое кольцо множеств R вместе с множествами A и B содержит не только их пересечение и симметрическую разность, но и объединение и обе разности. В самом деле, $A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B)$, $A \setminus B = A \Delta (A \cap B)$.*

Определение 3. *Множество X называется единицей системы множеств T, если*:

1) $X \in T$;
2) $\forall A \in T$ *верно* $A \cap X = A$.
Очевидно, такое название оправдывается ролью множества X при «умножении» (т. е. пересечении) множеств.

Определение 4. *Кольцо множеств с единицей называется алгеброй множеств.*

Легко видеть, что не всякое кольцо (или полукольцо) множеств содержит единицу.

В качестве примеров рассмотрим а) семейство всех конечных подмножеств бесконечного множества; б) семейство всех ограниченных подмножеств числовой прямой (или плоскости); в) множество всех промежутков с рациональными концами, содержащихся в отрезке $[0;\pi]$ (последнее — не кольцо, а полукольцо). (См. задачу 6.)

Однако мы пока ещё ничего не сказали о часто встречающихся счётных объединениях множеств. Дадим соответствующее определение.

Определение 5. *Система множеств R называется σ-кольцом, если:*
1) R — *кольцо*;
2) $\forall A_1, \dots, A_n, \dots \in R$ $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in R$.

Определение 6. *σ-кольцо множеств с единицей называется σ-алгеброй множеств.*

Рассмотрим ещё некоторые примеры.

ПРИМЕР 1. Очевидно, что семейство всех подмножеств данного множества A (даже пустого, т. к. $\varnothing \subset \varnothing$) является каждой из перечисленных здесь систем множеств.

ПРИМЕР 2. Система всех промежутков на прямой (включая и бесконечные) образует полукольцо с единицей. (Почему не кольцо?)

ПРИМЕР 3. Система всех интервалов на прямой **не** образует даже полукольца. В самом деле, полуинтервал $(0;2) \setminus (0;1) = [1;2)$ нельзя разбить на конечное семейство непересекающихся интервалов.

ПРИМЕР 4. Семейство всех прямоугольников на плоскости со сторонами, параллельными осям координат (с различными границами, как в лекции 1), образует полукольцо; а если потребовать, чтобы все прямоугольники входили в один фиксированный прямоугольник (стороны которого также должны быть параллельны осям координат), мы получим полукольцо с единицей. (Вопрос: а что образуют прямоугольники, содержащиеся в некотором фиксированном круге?)

Теперь приступим к доказательству некоторых важных свойств этих систем множеств, которые понадобятся в дальнейшем для обоснования различных свойств меры.

Лемма 1 (о конечном разложении). *Пусть*:
1) S — *полукольцо*,

2) $A, A_1, A_2, \ldots, A_n \in S$,
3) $\forall i = \overline{1,n}\ A_i \subset A$,
4) $\forall i, j = \overline{1,n}\ A_i \cap A_j = \varnothing$.
Тогда $\exists A_{n+1}, \ldots, A_m \in S$ *такие, что* $A = \bigsqcup_{i=1}^{m} A_i$.

Доказательство.

Докажем это утверждения по индукции.

1. При $n = 1$ утверждение леммы составляет часть определения полукольца. Пусть теперь утверждение доказано для $n = k$, докажем его для $n = k + 1$.

2. Итак, пусть $A = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \ldots \sqcup A_k \sqcup B_1 \sqcup \ldots \sqcup B_l$ (здесь мы переобозначили «дополняющие» множества, чтобы не возникло путаницы с A_k). Пусть также A_{k+1} не пересекается с $A_1, \ldots A_k$. Для каждого B_i $(i = \overline{1,l})$ рассмотрим $B_{i0} \equiv A_{k+1} \cap B_i$ и построим, пользуясь требованием 3 определения полукольца, конечные разложения

$$B_i = \bigsqcup_{j=0}^{J_i} B_{ij}.$$

Тогда исходное множество A можно представить в виде

$$A = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \ldots \sqcup A_k \sqcup B_1 \sqcup \ldots \sqcup B_l = \\ = \left(\bigsqcup_{i=1}^{k} A_i\right) \sqcup \left(\bigsqcup_{j=0}^{J_1} B_{1j}\right) \sqcup \ldots \sqcup \left(\bigsqcup_{j=0}^{J_l} B_{lj}\right).$$

3. Легко видеть, что построенное разложение действительно дизъюнктное. А теперь заметим, что

$$A_{k+1} = \bigsqcup_{i=1}^{l} B_{i0},$$

поскольку множества B_i дают разложение

$$A \setminus \left(\bigsqcup_{i=1}^{k} A_i\right) \quad \text{и} \quad A_i \cap A_{k+1} = \varnothing, \quad i = \overline{1,k}.$$

Поэтому можно перегруппировать разложение и получить:

$$A = \left(\bigsqcup_{i=1}^{k} A_i\right) \sqcup \left(\bigsqcup_{i=1}^{l} B_{i0}\right) \sqcup \left(\bigsqcup_{j=1}^{J_1} B_{1j}\right) \sqcup \ldots \sqcup \left(\bigsqcup_{j=1}^{J_l} B_{lj}\right) = \\ = \left(\bigsqcup_{i=1}^{k} A_i\right) \sqcup A_{k+1} \sqcup \left(\bigsqcup_{j=1}^{J_1} B_{1j}\right) \sqcup \ldots \sqcup \left(\bigsqcup_{j=1}^{J_l} B_{lj}\right).$$

Лемма доказана.

Замечание 1. Настоятельно рекомендуется при изучении доказательства проиллюстрировать его случаем прямоугольников.

Лемма 2 (< кирпичиках>) *Пусть*:
1) S — *полукольцо*,
2) $A_1, A_2, \ldots, A_n \in S$.
Тогда существуют такие попарно непересекающиеся множества $B_1, \ldots, B_k \in S$, *что каждое из множеств* A_i *является объединением некоторых из* B_j.

(Доказательство провести самостоятельно.)

§ 2. Аддитивность и счётная аддитивность меры

Теперь приступим к рассмотрению меры на системах множеств. Для этого нам придётся дать ещё несколько определений.

Определение 7. *Пусть* S — *полукольцо множеств, а* m — *функция*, $m : S \to [0; +\infty) \cup \{+\infty\}$, *причём* $m \not\equiv +\infty$. *Назовём её* *мерой* *(на полукольце* S*), если для любого конечного представления*

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i, \quad \textit{где} \quad A, A_1, \ldots, A_n \in S,$$

верно равенство

$$m(A) = \sum_{i=1}^{n} m(A_i). \tag{2.1}$$

При этом если хотя бы одно из слагаемых бесконечно, то сумма полагается равной $+\infty$.

Если же, кроме того, для любых таких $A, A_1, A_2, \ldots \in S$, *что*

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i,$$

верно равенство

$$m(A) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i) \tag{2.2}$$

(если ряд расходится или если хотя бы одно из слагаемых бесконечно, то его сумма полагается равной $+\infty$*), то такая мера называется* σ*-аддитивной.*

Замечание 2. Поскольку кольцо и алгебра (а также σ-кольцо и σ-алгебра) являются частными случаями полукольца, приведённые определения распространяются на них без изменения. (Хотя некоторые требования в условиях становятся излишними. Какие и в каких случаях?)

Заметим, что требование (2.1) нельзя заменить на парное сложение

$$m(A \sqcup B) = m(A) + m(B) \quad \text{при} \quad A, B, A \sqcup B \in S, \tag{2.3}$$

поскольку полукольцо не обязано содержать произвольное объединение множеств — своих элементов и наличие в нём, скажем, множеств $A, B, C, A \sqcup B \sqcup C$ не гарантирует наличия $A \sqcup B$, через которое мы могли бы «пройти» от A, B, C к $A \sqcup B \sqcup C$. Поэтому если мы рассмотрим полукольцо, состоящее из множеств $[0;3)$, $[0;1)$, $[1;2)$, $[2;3)$, то условие (2.3) не помешает положить $m[0;3) = 4$, $m[0;1) = 1$, $m[1;2) = 1$, $m[2;3) = 1$ и условие (2.1) будет нарушено.

Обсудим некоторые простые следствия определения меры на полукольце.

Свойство 1. Монотонность меры. Пусть $A, B \in S$ и $A \subset B$. Тогда $m(A) \leqslant m(B)$. Для доказательства достаточно воспользоваться конечным разложением B, включающим A, и аддитивностью меры.

Свойство 2. Мера пустого множества равна 0. Действительно, поскольку $\varnothing \cap \varnothing = \varnothing$, имеем из свойства аддитивности меры $m(\varnothing \sqcup \varnothing) = m(\varnothing)$, или $2m(\varnothing) = m(\varnothing)$, откуда $m(\varnothing) = 0$.

Свойство 3. Пусть $A, B, A \cup B \in S$ и $m(A \cap B) < +\infty$. Тогда

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B). \tag{2.4}$$

$\square$ Действительно, $A = (A \setminus B) \sqcup (A \cap B)$ и аналогично для множества B. Построим конечные разложения

$$A \setminus B = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i \quad \text{и} \quad B \setminus A = \bigsqcup_{j=1}^{m} B_j.$$

Тогда $A \cup B = (A \setminus B) \sqcup (A \cap B) \sqcup (B \setminus A)$ и

$$\begin{aligned} m(A \cup B) = \left(\sum_{i=1}^{n} m(A_i)\right) + \left(\sum_{j=1}^{m} m(B_j)\right) + m(A \cap B) = \\ = \left(\left(\sum_{i=1}^{n} m(A_i)\right) + m(A \cap B)\right) + \\ + \left(\left(\sum_{j=1}^{m} m(B_j)\right) + m(A \cap B)\right) - m(A \cap B) = \\ = m(A) + m(B) - m(A \cap B). \end{aligned}$$

$\boxtimes$

Вопрос. Почему потребовалось разбивать $A \setminus B$ и $B \setminus A$?

Свойство 4. Пусть $A, B, A \Delta B \in S$ и $m(A \Delta B) = 0$. Тогда $m(A) = m(B)$.

□ Действительно,

$$A = (A \setminus B) \sqcup (A \cap B), \quad B = (B \setminus A) \sqcup (A \cap B). \tag{2.5}$$

При этом $(A \setminus B) \subset A\Delta B$ и поэтому в силу неотрицательности и монотонности меры имеем (в использованных выше обозначениях)

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{n} m(A_i) \leqslant m(A\Delta B) = 0,$$

поэтому

$$\sum_{i=1}^{n} m(A_i) = 0, \quad \text{и аналогично} \quad \sum_{i=1}^{m} m(B_i) = 0. \tag{2.6}$$

Тогда из аддитивности меры и (2.5) и (9.3) получаем:

$$m(A) = \sum_{i=1}^{n} m(A_i) + m(A \cap B) = m(A \cap B),$$
$$m(B) = \sum_{i=1}^{m} m(B_i) + m(A \cap B) = m(A \cap B),$$

или $m(A) = m(B)$. ⊠

Заметим, что интуитивно это утверждение было очевидно с самого начала: если мера того, чем множества различаются, равна нулю, то и меры этих множеств равны.

Теперь приступим к рассмотрению чуть менее легко доказываемых, но не менее важных свойств меры. Ниже предполагаем, что m — мера на полукольце S, а множества $A, A_1, \ldots, A_n$ (или $A, A_1, \ldots, A_n, \ldots$) принадлежат полукольцу S.

Свойство 5. (Свойство, в каком-то смысле обратное конечной полуаддитивности.) Пусть при сформулированных выше условиях ещё

$$\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i \subset A.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} m(A_i) \leqslant m(A).$$

Это совершенно очевидно, если воспользоваться леммой о конечном разложении, неотрицательностью и аддивностью меры. Действительно, по лемме 1 имеем

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{m} A_i, \quad m \geqslant n.$$

Но тогда
$$\sum_{i=1}^{n} m(A_i) \leqslant \sum_{i=1}^{m} m(A_i) = m(A).$$

С в о й с т в о 6. (Конечная полуаддитивность.) Пусть теперь
$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

Тогда
$$m(A) \leqslant \sum_{i=1}^{n} m(A_i). \tag{2.7}$$

Для доказательства достаточно применить к семейству множеств $A, A_1, \ldots, A_n$ «лемму о кирпичиках» и заметить, что в левую часть (2.7) мера (а она неотрицательна!) каждого «кирпичика» войдёт не более одного одного раза, тогда как в правую — не менее одного (а может быть, и несколько раз). (Возможен и несколько другой ход доказательства. Например, Вы рассматриваете вместо A_i множества $A \cap A_i$ — они тоже принадлежат полукольцу — и пользуетесь не только аддитивностью, но и монотонностью меры.)

А можно ли обобщить свойства 5 и 6 меры на счётный случай? Оказывается, для обобщения свойства 5 достаточно рассматривать меру, удовлетворяющую всего лишь требованию (2.1), тогда как для обобщения свойства 6 (получится счётная полуаддитивность) требуется счётная аддитивность (2.2). Проведём соответствующие рассуждения.

С в о й с т в о 7. Пусть
$$\bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset A.$$

Тогда
$$\sum_{i=1}^{\infty} m(A_i) \leqslant m(A). \tag{2.8}$$

□ Действительно, для любой конечной подсистемы $A_1, \ldots, A_k$ имеем
$$\bigsqcup_{i=1}^{k} A_i \subset A.$$

Поэтому применимо свойство 5, в силу которого
$$\sum_{i=1}^{k} m(A_i) \leqslant m(A). \tag{2.9}$$

Но тогда, во-первых, ряд в левой части сходится (если $m(A) < < +\infty$), а во-вторых, для его суммы после перехода к пределу в неравенстве (2.9) имеем (2.8). ⊠

Свойство 8. (Равносильность счётной полуаддитивности и счётной аддивности.) *Мера является σ-аддитивной тогда и только тогда, когда для любых таких множеств $A, A_1, A_2, \ldots \in S$, что*

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,$$

верно неравенство

$$m(A) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i). \tag{2.10}$$

□

1. Докажем сначала необходимость. Именно, пусть для любых таких множеств $A, A_1, A_2, \ldots \in S$, что

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,$$

верно неравенство

$$m(A) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i).$$

Тогда мера является σ-аддитивной. Рассмотрим такие множества $B, B_1, B_2, \ldots \in S$, что

$$B = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} B_i.$$

Тогда, с одной стороны, для них выполнено

$$B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i,$$

и поэтому

$$m(B) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} m(B_i). \tag{2.11}$$

С другой же стороны, верно обратное вложение

$$B \supset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i,$$

и поэтому в силу свойства 7 (для доказательства которого счётная аддитивность меры не требовалась) имеем

$$m(B) \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} m(B_i). \tag{2.12}$$

Объединяя (2.11) и (2.12), имеем

$$m(B) = \sum_{i=1}^{\infty} m(B_i),$$

что и доказывает счётную аддитивность меры.

2. Теперь докажем достаточность. Для этого положим

$$B_1 = A_1, \quad B_i = A_i \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} A_k \quad \text{при} \quad i \geqslant 1, B_{ij} \in S,$$

$$B_i = \bigsqcup_{j=1}^{J_i} B_{ij}, \quad C_{ij} = B_{ij} \cap A.$$

Имеем $C_{ij} \in S$,

$$A = B_1 \sqcup \bigsqcup_{i=2}^{\infty} \bigsqcup_{j=1}^{J_i} C_{ij}.$$

Поэтому в силу счётной аддитивности меры

$$m(A) = m(B_1) + \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{j=1}^{J_i} C_{ij}, \quad \text{но} \quad \sum_{j=1}^{J_i} C_{ij} \leqslant m(A_i),$$

поскольку $B_i \subset A_i$. Утверждение доказано. ⊠

Замечание 3. Использованный в лекции термин «субаддитивность» является синонимом термина «полуаддитивность».

Приведём пример, показывающий, что для меры, не являющейся σ-аддитивной, неравенство (2.10) может нарушаться.

ПРИМЕР 5. В самом деле, рассмотрим полукольцо множеств, состоящих из всех рациональных точек промежутков $\lfloor \alpha; \beta \rceil$, где $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1$. Положим $m(\lfloor \alpha; \beta \rceil) = \beta - \alpha$. Тогда, с одной стороны, $m([0;1] \cap \mathbb{Q}) = 1$, а с другой, оно является счётным объединением одноточечных множеств, и поэтому неравенство (2.10) нарушается: мы имеем

$$1 = m([0;1] \cap \mathbb{Q}) > \sum_{i=1}^{\infty} m(\{r_i\}) = \sum_{i=1}^{\infty} 0 = 0,$$

где последовательность $\{r_i\}_{i=1}^{\infty}$ перечисляет все рациональные числа отрезка $[0;1]$.

§ 3. Задачи для самостоятельного решения

Задача 0. Ответить на все вопросы по ходу текста.

Задача 1. Доказать, что всякое кольцо есть полукольцо, всякая алгебра есть кольцо, всякая σ-алгебра есть σ-кольцо и алгебра, всякое σ-кольцо есть кольцо.

Задача 2. Доказать, что множество X является единицей для данного кольца R (полукольца S) тогда и только тогда, когда $X = \bigcup_{A \in R} A$ ($X = \bigcup_{A \in S} A$).

Задача 3. Доказать, что σ-алгебра замкнута относительно операции счётного пересечения.

Задача 4. Образуют ли полукольцо все прямоугольники, стороны которых параллельны осям координат и вложенные в некоторый фиксированный круг? Имеет ли это полукольцо единицу?

Задача 5. Доказать аналоги формулы (2.4) для конечных множеств. Именно, если $|X|$ — число элементов множества X, то для любых конечных множеств X, Y верно равенство $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$.

Задача 6. Доказать, что:
1) семейство всех конечных подмножеств бесконечного множества образует кольцо, но не образует алгебры;
2) семейство всех ограниченных подмножеств прямой или плоскости образует кольцо, но не образует алгебры;
3) семейство всех промежутков с рациональными концами, содержащихся в отрезке $[0; \pi]$, образует полукольцо (почему не кольцо?);
4) семейство всех промежутков (конечных и бесконечных) числовой прямой образует полукольцо с единицей.
5) Пусть A — бесконечное множество, Y — система всех его не более чем счётных подмножеств. Доказать, что Y — σ-кольцо.
6) Какое условие нужно наложить, чтобы Y было σ-алгеброй?

Задача 7. Доказать, что следующие множества являются полукольцами с единицей, и указать соответствующие единицы:
1) $\{[\alpha; \beta) \mid a \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant b\}$ (включая пустой промежуток);
2) система всех промежутков, вложенных в отрезок $[a; b]$.

Задача 8. Доказать «лемму о кирпичиках».

Задача 9. Пусть $X = \mathbb{N}$, $A = P(\mathbb{N})$ (где $P(X)$ — множество, элементами которого являются все подмножества множества X).
1) Является ли A σ-алгеброй?
2) Построить на A счётно-аддитивную меру, принимающую положительные значения на любом непустом множестве из $P(\mathbb{N})$.
3) Тот же вопрос, если мера должна быть конечной.

Задача 10*. Доказать, что семейство множеств, введённое в контрпримере в конце семинара, — действительно полукольцо, а функция m — действительно мера на нём.

Задача 11*. Пусть m — σ-аддитивная мера на полукольце S, принимающая только конечные значения, множества $A, A_1, A_2, \ldots$ принадлежат S, причём $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ и

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Доказать, что

$$m(A) = \lim_{i\to\infty} m(A_i).$$

Это свойство меры называется непрерывностью.

Задача 12*. Пусть m — мера на кольце R и для любых таких множеств $A, A_1, A_2, \ldots$ из R, что $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ и

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i,$$

выполнено равенство

$$m(A) = \lim_{i\to\infty} m(A_i).$$

Доказать, что m является σ-аддитивной мерой на R.

Задача 13*. Указать пример меры на кольце, которая не является σ-аддитивной.

Дальнейшие задачи (**кроме обязательной задачи 16**) предназначены лишь для особо интересующихся и не включаются в общий счёт. При решении следует иметь в виду, что они распадаются на 2 цикла. Один из них (14—20) описывает продолжение меры с полукольца на минимальное порождённое им кольцо, а второй (21—22) — конструирует меры Лебега—Стилтьеса, находящие применение в спектральной теории линейных операторов и в теории вероятностей.

Задача 14*. Пусть S — полукольцо. Доказать, что система

$$R = \left\{ \bigcup_{i=1}^{n} A_i \mid A_i \in S, i = \overline{1,n} \right\}$$

является кольцом.

Задача 15*. Пусть S — полукольцо. Доказать, что система

$$R = \left\{ \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i \mid A_i \in S, i = \overline{1,n} \right\}$$

совпадает с кольцом R, введённым в предыдущей задаче.

Задача 16. Доказать, что:

1) пересечение произвольной непустой системы колец является кольцом (возможно, состоящим лишь из пустого множества);

2) пересечение произвольной непустой системы σ-колец является σ-кольцом;

3) пересечение непустой системы алгебр с одной и той же единицей

является алгеброй.
(Указание. Почему пересечение линейных подпространств фиксированного линейного пространства — снова линейное подпространство?)

Задача 17*. Пусть T — система множеств. Доказать, что существует такое кольцо $R(T)$, что
1) $T \subset R(T)$ и
2) для любого кольца R_1, содержащего T, верно $R(T) \subset R_1$.
(Такое кольцо называется минимальным кольцом, содержащим систему T, или кольцом, порождённым системой T.)

Задача 18*. (Продолжение.) Доказать, что если система T содержит единицу, то $R(T)$ является алгеброй.

Задача 19*. (Продолжение.) Пусть S — полукольцо. Доказать, что $R(S)$ совпадает с кольцом, построенным в задачах 13 и 14.

Задача 20*. (Продолжение.) Пусть S — полукольцо. Построить продолжение меры m с полукольца S на порождённое им кольцо $R(S)$. (Для простоты рассмотреть ситуацию, когда полукольцо содержит единицу, а мера принимает только конечные значения.)
1) Дать определение продолжения меры с полукольца на содержащее его кольцо.
2) Построить продолжение меры с S на $T(S)$ и доказать его корректность.
3) Доказать единственность возможного продолжения меры с полукольца на порождённое им кольцо.
4) Доказать, что если исходная мера на полукольце S была σ-аддитивной, то её продолжение на кольцо $R(S)$ тоже будет таковой.

Итак, мы рассмотрели продолжение меры с полукольца на кольцо. Дальнейшим продолжением этого процесса (если кольцо обладает единицей) будет то, что описано в лекции 2.

Задача 21*. Пусть $[A; B] \subset \mathbb{R}$, S — полукольцо всех промежутков, вложенных в $[A; B]$ (включая пустой). Доказать, что функция $m : S \to [0; +\infty)$, где $m(\lfloor a; b \rceil) = b - a$, является σ-аддитивной мерой на S. (Она называется классической мерой на $[A; B]$.) (Указание. Для доказательства σ-аддитивности воспользоваться леммой Гейне—Бореля.) При продолжении этой меры по Лебегу получается классическая мера Лебега на прямой.

Задача 22*. Пусть дано полукольцо $S = \{[a; b) \mid -\infty < a < b < +\infty\} \cup \{\varnothing\}$, $g(x)$ — неубывающая непрерывная слева функция на $\mathbb{R}$, а функция $m_g : S \to [0; +\infty)$ определена формулой $m_g([a; b)) = g(b) - g(a)$. Доказать, что m_g — σ-аддитивная мера на S. (Такая мера называется мерой Стилтьеса.) При продолжении этой меры по Лебегу получается мера Лебега—Стилтьеса на прямой.

Семинар–Лекция 4

ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА. ПРОСТРАНСТВА ЛЕБЕГА

§ 1. Типы сходимости функциональных последовательностей

На лекции 3 было отмечено, что имеются следующие виды сходимости функциональных последовательностей: равномерная, поточечная, почти всюду, по мере. При этом каждая последующая из указанных следует из предыдущей. Обратные следствия места не имеют, но верны некоторые их «ослабленные» варианты.

Так, для пространства конечной меры верна теорема Егорова, утверждающая, что как только на пространстве X имеет место поточечная сходимость $f_n(x) \to f(x)$ (или даже почти всюду), то из X можно выбросить такое множество B сколь угодно малой наперёд заданной меры, что на $X \setminus B$ имеет место равномерная сходимость f_n к f.

Далее, можно утверждать, что любая последовательность, сходящаяся по мере, содержит подпоследовательность, сходящуюся почти всюду.

Покажем на примере, что на большее надеяться нельзя. Для этого рассмотрим последовательность кусочно постоянных функций, заданных на отрезке $[0;1]$, которую будем для себя называть «бегущий столб». Построим её следующим образом. Сначала введём на отрезке $[0;1]$ функции f_{nk}, где $n \in \mathbb{N}$, $k = \overline{1, 2^n}$:

$$f_{nk} = \begin{cases} 1, & x \in \left[\frac{k-1}{2^n}; \frac{k}{2^n}\right]; \\ 0, & x \notin \left[\frac{k-1}{2^n}; \frac{k}{2^n}\right]. \end{cases}$$

Теперь занумеруем построенные функции в «словарном порядке», начиная с f_{11}: за f_{nk} следует $f_{n,k+1}$, если $k < 2^n$, и $f_{n+1,1}$ в противном случае.

Замечание 1. Рекомендуется построить графики первых 7-и функций. В других примерах также рекомендуется строить графики нескольких первых функций каждой последовательности.

Теперь ясно, что рассматриваемая последовательность не сходится ни в одной точке, поскольку при любом $x \in [0;1]$ последовательность значений $f_l(x)$ представляет собой последовательность нулей и единиц, причём как нули, так и единицы встречаются среди членов со сколь угодно большими номерами (почему?). Такая последовательность не может сходиться ни поточечно, ни почти всюду. Однако она сходится по мере к $f(x) \equiv 0$. В самом деле, мера множества, где функция $f_l(x)$ отлична от 0, стремится к нулю при $l \to \infty$. Однако легко построить подпоследовательность, сходящуюся к нулю почти всюду: для этого достаточно взять $\{f_{n1}\}$.

§ 2. Теоремы о сходимости и контрпримеры

Рассмотрим теоремы Лебега, Беппо Леви и Фату. Проиллюстрируем на некоторых примерах существенность их условий.

В теореме Лебега (которую иногда также называют теоремой об ограниченной сходимости) наименее очевидно, что существенно условие $|f_n| \leqslant \varphi$ (где φ интегрируема). Однако нетрудно привести пример, показывающий, что нарушение этого условия приводит к невыполнению заключения теоремы: положим на $x \in [0;1]$

$$f_n = \begin{cases} n^2, & x \in \left(0; \frac{1}{n}\right]; \\ 0, & x \notin \left(0; \frac{1}{n}\right]. \end{cases}$$

Легко видеть, что $f_n(x) \to 0$ (поточечно, всюду), однако

$$\int\limits_{[0;1]} f_n(x) d\mu \to +\infty$$

(и вообще, подходящим образом выбирая ненулевые значения функций, можно добиться, чтобы этот предел был равен любой заданной величине).

Можно привести и другой пример, на этот раз — на множестве $[0;+\infty)$ бесконечной меры. Положим

$$f_n = \begin{cases} 1, & x \in [0;n]; \\ 0, & x > n. \end{cases}$$

Здесь $f_n(x)$ равномерно ограничены функцией $\varphi(x) = 1$, но она не является интегрируемой на $[0;+\infty)$, и условия теоремы Лебега снова не выполнены. Поэтому неудивительно, что $f_n(x) \to 1$, т. е. последовательность сходится к неинтегрируемой на $[0;+\infty)$ функции.

В теореме Беппо–Леви, пожалуй, все условия кажутся естественными: первое гарантирует существование поточечного предела (конечного или бесконечного), второе обеспечивает конечность этого предела почти всюду, а без последнего вообще нельзя было бы говорить об интегралах.

Поэтому перейдём к л е м м е Ф а т у и покажем, что существенно условие $f_n(x) \geqslant 0$ (о котором нередко забывают). Для этого положим на $[0;1]$
$$f_n = \begin{cases} -n, & x \in \left(0; \frac{1}{n}\right]; \\ \frac{1}{1-\frac{1}{n}}, & x \notin \left(0; \frac{1}{n}\right]. \end{cases}$$
Легко видеть, что при всех $n \in \mathbb{N}$
$$\int\limits_{[0;1]} f_n(x)d\mu = 0 \leqslant 0 \quad \text{всюду на} \quad [0;1],$$
$f_n(x) \to 1$ и, таким образом,
$$\int\limits_{[0;1]} (\lim_{n\to\infty} f_n(x))d\mu = 1 > 0.$$
Более того, даже в условиях теоремы Фату последовательность интегралов $\int_{[0;1]} f_n\, d\mu$ может не иметь предела, а в случае существования такого предела значение $\int_{[0;1]} f\, d\mu$ может с ним не совпадать.

□ В самом деле, в первом случае можно положить
$$f_{2k} = \begin{cases} 2k, & x \in \left(0; \frac{1}{2k}\right]; \\ 0, & x \notin \left(0; \frac{1}{2k}\right], \end{cases} \quad f_{2k+1} = 0.$$
Тогда $\int_{[0;1]} f_n\, d\mu = 1$ при чётном n и нулю при нечётном. Во втором случае возьмём
$$f_n = \begin{cases} n, & x \in \left(0; \frac{1}{n}\right]; \\ 0, & x \notin \left(0; \frac{1}{n}\right]. \end{cases}$$
Теперь $\int_{[0;1]} f_n\, d\mu = 1 \to 1$, но $\int_{[0;1]} f\, d\mu = 0$. ⊠

§ 3. Основные свойства интеграла Лебега

Перечислим основные свойства интеграла Лебега и сравним их со свойствами интеграла Римана. Здесь и далее под $L(X)$ будем понимать функции, интегрируемые по Лебегу на пространстве X с введённой на нём мерой Лебега. В случае сравнения с интегралом Римана под X будем понимать измеримое по Жордану множество в $\mathbb{R}^n$, в частности промежуток.

С в о й с т в о 0. Если $f(x)$ интегрируема по Риману в собственном смысле, то она интегрируема и по Лебегу. Обратное, как показывает хорошо известный пример функции Дирихле, неверно.

С в о й с т в о 1. Линейность. (И для интеграла Римана.)

С в о й с т в о 2. Аддитивность. (И для интеграла Римана.)

Свойство 3. Монотонность (интеграл от неотрицательной функции неотрицателен). (И для интеграла Римана.)

Свойство 4. $f \in L(X) \Leftrightarrow |f| \in L(X)$. (Легко видеть, что для интеграла Римана следствие имеет место лишь «слева направо».) При этом

$$\left|\int\limits_X f(x)\,d\mu\right| \leqslant \int\limits_X |f(x)|d\mu.$$

Свойство 5. Если $f \geqslant 0$ и $\int_X f\,d\mu = 0$, то $f = 0$ почти всюду. Аналогичное можно утверждать и для интеграла Римана.

Свойство 6. Эквивалентные функции принадлежат или не принадлежат $L(X)$ одновременно, и их интегралы равны.

Свойство 7. Если $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ (всюду или почти всюду) на X и $g(x)$ интегрируема на X, то $f(x)$ интегрируема на X. **(В частности, любая ограниченная измеримая функция интегрируема по Лебегу на пространстве конечной меры!)** 1) При этом в силу свойства 3 аналогичным неравенством связаны интегралы от этих функций. 2) В силу свойства 4 условие $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ можно заменить на $|f(x)| \leqslant g(x)$.)

Свойство 8. Неравенство Чебышёва.

Свойство 9. σ-аддитивность интеграла Лебега. (Поэтому интеграл от неотрицательной функции сам порождает меру.)

Свойство 10. Абсолютная непрерывность. (Поэтому мера, о которой говорится в предыдущем пункте, абсолютно непрерывна относительно классической меры Лебега.)

Нашей ближайшей целью будет доказать свойство 0. Заметим прежде лишь, что слова «в собственном смысле» существенны: условно сходящийся (не сходящийся абсолютно) несобственной интеграл Римана не существует в смысле Лебега (см., например, свойство 4).

Итак, пусть функция $f(x)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a;b]$:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = I.$$

Теорема 1. *Функция $f(x)$, интегрируемая по Риману на $[a;b]$, интегрируема и по Лебегу на $[a;b]$.*

Доказательство.

1. Известно, что необходимым и достаточным условием интегрируемости данной функции по Риману является стремление верхних и нижних сумм Дарбу к общему пределу I при стремлении диаметра разбиения к нулю. Мы воспользуемся этим условием как необходимым и построим определённую последовательность сумм.

2. Для этого, как в примере из самого начала лекции, будем делить отрезок $[a;b]$ пополам, получившиеся отрезки — ещё раз пополам и т. д.

На каждом n-ом шаге мы получим 2^n частичных отрезков $[a^n_{k-1}, a^n_k]$, где $k = \overline{1, 2^n}$. Определим теперь функции

$$\underline{f}_n(x) = \inf_{t\in[a^n_{k-1};a^n_k]\ni x} f(t), \quad \overline{f}_n(x) = \sup_{t\in[a^n_{k-1};a^n_k]\ni x} f(t),$$

т. е. на каждом n-ом разбиении берём точные нижние и верхние грани функции $f(x)$ и полагаем $\underline{f}_n$ и $\overline{f}_n$ на каждом из частичных отрезков равными соответственно точным нижней и верхней граням функции f по этому отрезку.

3. Легко видеть, что построенные таким образом функции интегрируемы по Риману (как кусочно постоянные), по Лебегу (как простые функции), причём их интегралы равны соответственно нижней и верхней суммам Дарбу для рассматриваемого разбиения:

$$\int_a^b \underline{f}_n(x)\,dx = \int_{[a;b]} \underline{f}_n(x)\,d\mu = s_n, \quad \int_a^b \overline{f}_n(x)\,dx = \int_{[a;b]} \overline{f}_n(x)\,d\mu = S_n. \tag{3.1}$$

4. Поскольку нижние и верхние суммы Дарбу интегрируемой по Риману функции ограничены соответственно сверху и снизу её интегралом Римана, имеем

$$\int_{[a;b]} \underline{f}_n(x)\,d\mu \leqslant I, \quad \int_{[a;b]} \overline{f}_n(x)\,d\mu \geqslant I. \tag{3.2}$$

Заметим далее, что поточечно выполнены неравенства

$$\underline{f}_1 \leqslant \underline{f}_2 \leqslant \ldots, \quad \overline{f}_1 \geqslant \overline{f}_2 \geqslant \ldots. \tag{3.3}$$

В самом деле, при каждом последующем разбиении те множества, по которым берутся точные грани, разбиваются на подмножества, а $\sup A \leqslant \sup B$ при $A \subset B$ по очевидным причинам.

5. Таким образом, функции $\underline{f}_n$ и $-\overline{f}_n$ удовлетворяют условиям теоремы Беппо Леви. Следовательно,
1) существуют такие функции $\underline{f}$ и $\overline{f}$, что почти всюду

$$\underline{f}_n \to \underline{f}, \quad \overline{f}_n \to \overline{f}, \tag{3.4}$$

2) и при этом

$$s_n = \int_{[a;b]} \underline{f}_n\,d\mu \to \int_{[a;b]} \underline{f}\,d\mu, \tag{3.5}$$

$$S_n = \int_{[a;b]} \overline{f}_n\,d\mu \to \int_{[a;b]} \overline{f}\,d\mu. \tag{3.6}$$

С другой стороны, по необходимому условию интегрируемости по Риману имеем $s_n \to I$, $S_n \to I$, а тогда из (3.5)—(3.6) следует, что

$$\int\limits_{[a;b]} \underline{f}\, d\mu = \int\limits_{[a;b]} \overline{f}\, d\mu = I. \tag{3.7}$$

6. Теперь заметим, что по построению при всех $x \in [a;b]$ выполняются неравенства

$$\underline{f}_n(x) \leqslant f(x) \leqslant \overline{f}_n(x). \tag{3.8}$$

Значит (по теореме о предельном переходе в числовом неравенстве), то же почти всюду выполняется для их пределов $\underline{f}$ и $\overline{f}$:

$$\underline{f}(x) \leqslant f(x) \leqslant \overline{f}(x). \tag{3.9}$$

Следовательно, почти всюду

$$\underline{f}(x) \leqslant \overline{f}(x). \tag{3.10}$$

Отсюда и из (3.7) в силу 5-го свойства интеграла получаем, что почти всюду $\underline{f}(x) = \overline{f}(x)$. Но тогда из (3.9) имеем

$$\underline{f} = f = \overline{f} \quad \text{почти всюду.} \tag{3.11}$$

Поскольку уже доказано, что $\underline{f}(x)$ и $\overline{f}(x)$ интегрируемы по Лебегу и их интеграл равен I, то же получаем и для эквивалентной им в силу (3.11) функции $f(x)$.

Теорема доказана.

Замечание 2. Может показаться, что факт интегрируемости по Лебегу функции, интегрируемой по Риману, «можно» установить гораздо проще. Рассмотрим, скажем, неотрицательную функцию $f(x)$. Тогда её интеграл Римана может быть записан в виде

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = \sup_{g_{I(\{a_n\})}(x)} \int\limits_a^b g(x)\, dx, \tag{3.12}$$

где $g_n(x) = \inf_{[a_{k-1},a_k]\ni x} f(t)$ (ступенчатая функция), т. е. как точная верхняя грань нижних сумм Дарбу. А интеграл Лебега — в виде

$$\int\limits_{[a;b]} f(x)\, d\mu = \sup_{h \leqslant f} \int\limits_{[a;b]} h(x)\, d\mu, \tag{3.13}$$

где $h(x)$ — всевозможные простые функции, поточечно не превышающие f. Но дело в том, что класс функций $h(x)$ во втором случае значительно шире класса функций $g(x)$ в первом. Поэтому из существования точной верхней грани (3.12) ни существование точной верхней грани (3.13), ни, тем более, их равенство непосредственно не следуют.

§ 4. Основные свойства пространств Лебега

Предварительное замечание. При применении интегральных неравенств (вроде неравенств Гёльдера и Минковского) важно понимать, что интегрируемость функции в «меньшей» части неравенства следует из свойства 7 интеграла Лебега (упоминание об этом часто опускают), а уж потом можно «перейти к интегралу» в неравенстве.

На лекции было сформулировано без доказательства неравенство Гёльдера для показателей 1 и ∞: при $f \in L^1(X)$, $g \in L^\infty(X)$

$$\int\limits_X |f(x)g(x)|d\mu \leqslant \|f\|_1 \cdot \|g\|_\infty. \tag{4.1}$$

Оно доказывается ещё проще, чем «обычное» неравенство Гёльдера. В самом деле,

$$\|g\|_\infty = \inf\{c \mid \mu\{x \mid |g(x)| \geqslant c\} = 0\},$$

поэтому для любого $\varepsilon > 0$ имеем почти всюду на X

$$|g(x)| < \|g\|_\infty + \varepsilon, \quad |f(x)g(x)| < |f(x)| \left(\|g\|_\infty + \varepsilon\right).$$

Следовательно, $fg \in L^1(X)$ (этот шаг обычно пропускают — см. замечание в начале параграфа) и

$$\|fg\|_1 \equiv \int\limits_X |f(x)g(x)|d\mu \leqslant \int\limits_X |f(x)| \left(\|g\|_\infty + \varepsilon\right) d\mu = \left(\|g\|_\infty + \varepsilon\right) \int\limits_X |f(x)|d\mu,$$

откуда в силу произвольности ε получаем (4.1).

Заметим ещё, что для пространств X конечной меры имеет место вложение функциональных пространств

$$L^{p_1}(X) \subset L^{p_2}(X) \quad \text{при} \quad 1 \leqslant p_2 \leqslant p_1 \leqslant +\infty \tag{4.2}$$

(мнемоническое правило: знаки наоборот). Докажите это самостоятельно, пользуясь неравенством Гёльдера. Для этого воспользуйтесь тождеством $f(x) = 1 \cdot f(x)$. Более того, вы получите оценку для норм

$$\|f\|_{p_2} \leqslant (\mu(X))^{\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1}} \|f\|_{p_1},$$

из которой, в частности, следует, что из сходимости некоторой последовательности по норме $L^{p_1}(X)$ вытекает её сходимость по норме $L^{p_2}(X)$. (Что совершенно естественно: неотрицательная измеримая функция $|f(x)|^p$, заданная на пространстве X конечной меры, заведомо интегрируема при любом p на подмножестве $\{x \in X \mid |f(x)| \leqslant 1\}$, а на его дополнении до X при уменьшении степени p значение $|f(x)|^p$ только уменьшается.)

Обратное же вложение, вообще говоря, неверно. В качестве примера можно взять функцию

$$f(x) = \frac{1}{x \ln^2 x}.$$

Можно показать, что $f \in L^1([0; \frac{1}{2}])$, но $f \notin L^p([0; \frac{1}{2}])$ при любом $p > 1$.

$\square$ Действительно,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \int_{-\infty}^{-\ln 2} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{\ln 2},$$

но

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^p \ln^{2p} x} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \cdot x^{p-1} \ln^{2p} x} = \infty,$$

поскольку $x^{p-1} \ln^{2p} x \to 0$ при $x \to 0$ и, таким образом, подынтегральная функция растёт при $x \to +0$ быстрее, чем «эталонная» функция $\frac{1}{x}$. $\boxtimes$

Отметим также, что вложение (4.2) неверно для пространств X бесконечной меры, как показывает простой пример

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \in L^2(\mathbb{R}), \quad f \notin L^1(\mathbb{R}).$$

Докажем важный факт: вложение (4.2) плотно. Именно, верна

Теорема 2. *Пусть дана некоторая произвольная функция $f(x) \in L^p(\Omega)$, $1 < p < q < +\infty$. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Тогда найдётся функция $g(x) \in L^q(\Omega)$ такая, что*

$$\|f - g\|_p < \varepsilon. \tag{4.3}$$

Доказательство.

1. Мы ограничимся случаем, когда $\mu(\Omega) < +\infty$, но докажем несколько более сильное утверждение: множество всех ограниченных функций плотно в $L^p(\Omega)$. Иными словами, функцию $g(x)$ в (4.3) всегда можно выбрать ограниченной (и измеримой). А поскольку, как было замечено ранее, на пространстве конечной меры все ограниченные функции интегрируемы (и, тем самым, принадлежат $L^q(\Omega)$ при любом $q \in [1; +\infty]$), утверждение теоремы для случая пространства конечной меры тем самым будет доказано.

2. Основная идея доказательства — «срезать» функцию $f(x)$ там, где она «слишком велика». При этом в силу неравенства Чебышёва множество, где мы изменим функцию, будем иметь достаточно малую меру, а тогда в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега и

вклад в интеграл по этому множеству будет (как ни странно: ведь там функция очень велика!) очень мал. Проведём теперь эти рассуждения строго.

3. Итак, согласно неравенству Чебышёва

$$\mu\left(\{x \in \Omega \mid |f(x)|^p \geqslant M\}\right) \leqslant \frac{\int_\Omega |f(x)|^p d\mu}{M}. \tag{4.4}$$

С другой стороны, в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега

$$\forall \gamma > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall A \subset \Omega \quad \mu(A) < \delta \Rightarrow \int\limits_A |f(x)|^p d\mu < \gamma.$$

Положим $\gamma = \varepsilon^p$ и найдём соответствующее δ. Далее, положим

$$M = \frac{2\int_\Omega |f(x)|^p dx}{\delta},$$

так что

$$\frac{\int_\Omega |f(x)|^p dx}{M} = \frac{\delta}{2} < \delta.$$

Из предыдущего для множества

$$\Omega_1 \equiv \{x \in \Omega \mid |f(x)|^p \geqslant M\}$$

в силу неравенства Чебышёва имеем $\mu(\Omega_1) < \delta$. Но тогда в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега получаем, что

$$\int\limits_{\Omega_1} |f(x)|^p dx < \varepsilon^p. \tag{4.5}$$

Положим теперь

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & |f(x)|^p \leqslant M, \\ 0, & |f(x)|^p > M. \end{cases}$$

Получим тогда в силу (4.3)

$$\|f - g\|_p^p = \int\limits_\Omega |f - g|^p dx = \int\limits_{\Omega_1} |f|^p dx < \varepsilon^p,$$

что и требовалось.

Теорема доказана.

Некоторые примеры.

ПРИМЕР 1. Было отмечено, что при $\mu(\Omega) < +\infty$ для $p > q$ имеет место вложение $L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$. Следовательно, при $\mu(\Omega) < +\infty$ для каждой конкретной измеримой функции $f(x)$ множества

$$P_1 = \{p \in [1; +\infty] \mid f(x) \in L^p(\Omega)\}, \quad P_2 = \{p \in [1; +\infty] \mid f(x) \notin L^p(\Omega)\},$$

если они оба не пусты, «следуют» одно за другим на числовой оси, и граница между ними состоит из одной точки α. Покажем, что возможно как $\alpha \in P_1$, так и $\alpha \in P_2$.

□ Положим $\Omega = \left(0; \frac{1}{2}\right)$, $\alpha > 1$. Рассмотрим функции

$$f_1(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{\alpha}}}, \quad f_2(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{\alpha}} \ln^{\frac{2}{\alpha}} x}.$$

Очевидно, что $f_1 \in L^p\left(0; \frac{1}{2}\right)$ при всех $p \in [1; \alpha)$, $f_1 \notin L^p\left(0; \frac{1}{2}\right)$ при всех $p \in [\alpha; +\infty]$. Несложно показать, что $f_2 \in L^p\left(0; \frac{1}{2}\right)$ при всех $p \in$ $\in [1; \alpha]$, $f_2 \notin L^p\left(0; \frac{1}{2}\right)$ при всех $p \in (\alpha; +\infty]$. (При $p = \alpha$ делаем замену переменных в интеграле, а при остальных p пользуемся тем фактом, что $\lim_{x \to +0} x^\varepsilon |\ln x|^\gamma = 0$ при всех $\varepsilon, \gamma > 0$, и признаком сравнения несобственных интегралов.) ⊠

ПРИМЕР 2. Покажем, что, вообще говоря,

$$L^\infty(\Omega) \neq \cap_{p \geqslant 1} L^p(\Omega)$$

даже при $\mu(\Omega) < +\infty$.

□ Действительно, $\ln x \in L^p(0; 1)$ при всех $p \geqslant 1$ (поскольку $|\ln x|$ растёт медленнее любой степени), но $\ln x \notin L^\infty(0; 1)$, поскольку данная функция не может быть сделана ограниченной на $(0; 1)$ переопределением на множестве меры ноль. ⊠

§ 5. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Доказать неравенство Юнга

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \tag{5.1}$$

где $a, b \geqslant 0$, $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, найдя экстремум разности правой и левой частей неравенства дифференцированием по одной из переменных a, b и исследовав поведение получившейся функции одной переменной при остальных значениях переменных.

Задача 2. Доказать, что для $a, b \geqslant 0$ верны неравенства

$$(a+b)^p \geqslant a^p + b^p \quad \text{при } p \geqslant 1, \tag{5.2}$$

$$(a+b)^p \leqslant a^p + b^p \quad \text{при } p \leqslant 1. \tag{5.3}$$

Задача 3. Доказать с помощью неравенства Чебышёва, что сходимость в $L^p(X)$ влечёт сходимость по мере. Показать на примере (годится один из рассмотренных в данной лекции), что поточечная (или почти всюду) сходимость из сходимости в $L^p(X)$ не следует.

Задача 4*. (Продолжение.) Доказать для случая пространства X конечной меры теорему Рисса: если $f_n \to f$ в $L^p(X)$, где

f, f_n — конечные измеримые функции, то существует подпоследовательность f_{n_k}, сходящаяся к f почти всюду:
1) выбрать такую подпоследовательность, что

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < \frac{1}{2^k}$$

(почему это можно сделать?);
2) показать, что при этом для некоторой константы c

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_1 < \frac{c}{2^k};$$

3) пользуясь доказанным выше неравенством, образовать из этих разностей ряд, N-е частичные суммы которого равны $f_{n_{N+1}}$, и доказать, что он сходится почти всюду;
4) показать, что сумма построенного ряда почти всюду равна $f(x)$.

З а д а ч а 5. При каких значениях $p \in [1; +\infty]$ функция $\frac{\sin x}{x}$ принадлежит пространству $L^p(1; +\infty)$?

З а д а ч а 6. При каких значениях $p \in [1; +\infty]$ функция $\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$ принадлежит пространству $L^p(0; 1)$?

З а д а ч а 7. Привести пример функции $f(x)$, для которой существует (несобственный) интеграл Римана, но не существует интеграл Лебега.

З а д а ч а 8. Пусть $1 < \alpha < +\infty$. Привести пример функции, принадлежащей $L^p(0; +\infty)$ только при $p = \alpha$.

З а д а ч а 9. Пусть $1 \leqslant s < r \leqslant +\infty$. Построить функцию, принадлежащую $L^p(0; +\infty)$ в точности при $p \in (s; r)$.

З а д а ч а 10. 1) Пусть функция $f(x)$ непрерывна и положительна всюду на (невырожденном) отрезке $[a; b]$. Доказать, что $\int_a^b f(x)\, dx > 0$.
2) Пусть $f(x) > 0$ на множестве A с $\mu(A) > 0$. Можно ли утверждать, что $\int_A f(x)\, d\mu > 0$?

З а д а ч а 11. Пусть $f(x) \in L^p(\Omega)$, $g(x) \in L^q(\Omega)$. Что можно сказать о принадлежности fg пространствам Лебега? Тот же вопрос для $f + g$. (Рассмотреть все случаи.)

З а д а ч а 12. Построить такую последовательность $\{f_n(x)\}$ ограниченных на $(0; 1)$ функций, что $f_n(x) \to 0$ поточечно, но $\|f_n\|_1 \to +\infty$.

З а д а ч а 13. 1) Пусть $p \in [1; +\infty]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Пусть $f_n \in L^p(\Omega)$, $\|f_n - f\|_p \to 0$, $g \in L^q(\Omega)$. Доказать, что $\|f_n g - fg\|_1 \to 0$.
2) Пусть $p \in [1; +\infty]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Пусть $f_n \in L^p(\Omega)$, $\|f_n - f\|_p \to 0$, $g_n \in L^q(\Omega)$, $\|g_n - g\|_q \to 0$. Доказать, что $\|f_n g_n - fg\|_1 \to 0$.

З а д а ч а 14. Пусть $f_n \to f$ в $L^\infty(\Omega)$. Верно ли, что:
1) $f_n \to f$ в $L^1(\Omega)$?
2) $f_n \to f$ почти всюду на Ω?
3) $f_n \to f$ по мере на Ω?

З а д а ч а 15. Пусть $u(x) \in \cap_{L^{p \in [1;+\infty)}}(\Omega)$. Верно ли, что $u(x) \in L^\infty(\Omega)$, при:

1) $\mu(\Omega) < +\infty$?
2) $\mu(\Omega) = +\infty$?

Семинар–Лекция 5

ПРИМЕРЫ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

§ 1. Примеры и контрпримеры

Мы начнём с рассмотрения примеров, демонстрирующих необходимость осторожного использования интуиции при решении вопросов, связанных с метрическими пространствами. Читателям рекомендуется там, где этого возможно, делать рисунки, но помнить, что рисунок — не часть доказательства, а лишь иллюстрация, помогающая понять ситуацию.

ПРИМЕР 1. Может ли шар радиуса 4 быть подмножеством шара радиуса 3 в некотором метрическом пространстве?

□ Да, может. Рассмотрим, например, метрическое пространство

$$M = \left\{(x, y) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant 3\right\}$$

с обычным расстоянием. Тогда, очевидно, шары радиусов 3 и 4 с центром в точке $(0, 0)$ совпадают. (Внимание! В дальнейшем мы будем опускать уточнение про обычное расстояние.) ⊠

ПРИМЕР 2. А можно ли усилить результат предыдущего примера так, чтобы шар радиуса 4 был <u>собственным</u> подмножеством шара радиуса 3 в некотором метрическом пространстве?

□ Оказывается, можно добиться и этого. Положим

$$M = \{-2\} \cup [0; 4].$$

Тогда, как нетрудно убедиться,

$$[0; 4] = B_4^F(3) \subsetneq B_3^F(1) = \{-2\} \cup [0; 4],$$

где символ $B_r^F(x)$ обозначает замкнутый шар (фр. — boule fermée, отсюда буквы B и F) радиуса r. (Открытый шар будем обозначать без верхнего индекса.) ⊠

ПРИМЕР 3. Однако не стоит думать, что «может быть всё, что угодно». Покажем, что, если поменять в предыдущем вопросе число 4 на число 7, ответ будет отрицательный.

Мы докажем более общее утверждение: если некоторый замкнутый шар B_R^F радиуса R целиком содержится в замкнутом шаре B_r^F радиуса r и $R \geqslant 2r$, то эти шары совпадают.

$\square$ Для этого достаточно доказать, в дополнение к имеющемуся в условии вложению $B_R^F \subset B_r^F$, обратное вложение. Для этого выберем произвольную точку $x \in B_r^F$. (Попутно заметим, что шар с необходимостью непуст: он содержит по крайней мере свой центр.) Обозначив через O_R и O_r центры соответствующих шаров, из определения шара и неравенства треугольника с учётом условия $R \geqslant 2r$ и того факта, что $O_R \in B_R^F \subset B_r^F$, имеем

$$\rho(O_R, x) \leqslant \rho(O_R, O_r) + \rho(O_r, x) \leqslant r + r = 2r \leqslant R,$$

т. е. $x \in B_R^F$, что и требовалось. $\boxtimes$

П Р И М Е Р 4. Построим следующий странный пример — подпространство $M \subset \mathbb{R}^2$ и открытый шар в нём, который является замкнутым множеством, но не замкнутым шаром.

$\square$ Проще всего описать этот пример на комплексной плоскости. Нарисуем интервалы $(-1; 1)$, $(-i; i)$, а также 4 точки $\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

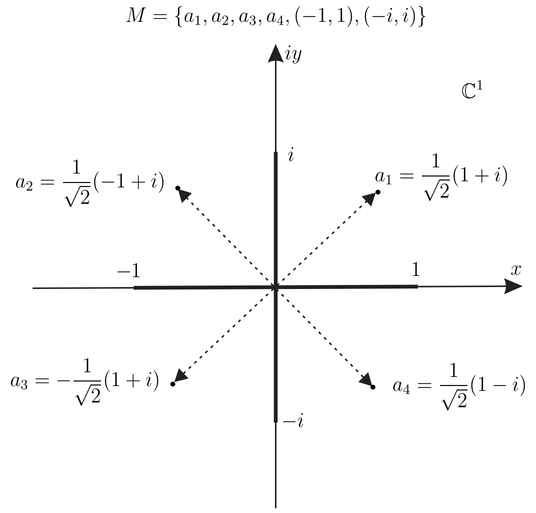

Рис. 7. Метрическое пространство M.

То, что получится, и будем считать метрическим пространством M. Легко видеть, что открытый шар B радиуса 1 с центром в 0 есть пространство без точек $\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}$. Это множество замкнуто, т. к. его дополнение A — те самые 4 точки — является открытым множеством. В самом деле, (0,1)-окрестность каждой из этих точек содержит только её саму, а следовательно, не содержит точек, не принадлежащих A. Но множество B не является замкнутым шаром в пространстве M:

нетрудно видеть, что какой бы центр $O_1 \in M$ и какой бы радиус мы ни брали, в полученный замкнутый шар или не входят некоторые точки множества B, или входит по крайней мере одна точка множества A (показать это подробно!). ⊠

ПРИМЕР 5. Предыдущий пример показывает, что замыкание открытого шара может быть собственным подмножеством соответствующего замкнутого шара. Тем самым, нельзя гарантировать, что $\overline{B_r(x)} = B_r^F(x)$. Однако всегда верно вложение

$$\overline{B_r(x)} \subset B_r^F(x).$$

□ Действительно, замыкание $\overline{B_r(x)}$ открытого шара $B_r(x)$ есть (по определению замыкания) пересечение всех содержащих его замкнутых множеств. Среди них есть и замкнутый шар $B_r^F(x)$ (проверить по определению замкнутого и открытого шаров!). Следовательно, $\overline{B_r(x)} \subset$ $\subset B_r^F(x)$, поскольку пересечение содержится в каждом из пересекаемых множеств. ⊠

ПРИМЕР 6. Пусть $x \in M$ — произвольная точка, а $A \subset M$ — произвольное множество в метрическом пространстве M. Можно определить расстояние от точки x до множества A, положив

$$\rho(x, A) = \inf_{y \in A} \rho(x, y).$$

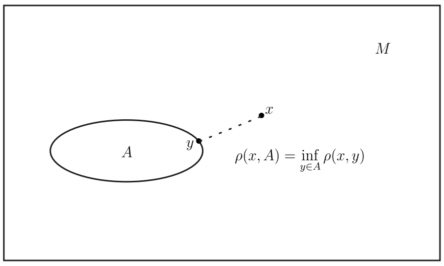

Рис. 8. Расстояние между точкой и множеством.

Нетрудно заметить, что если A — замкнутое множество и $x \notin A$, то $\rho(x, A) > 0$.

□ В самом деле, если A замкнуто, то его дополнение A^c открыто, а тогда поскольку $x \in A^c$, то x — внутренняя точка A^c, т. е. существует такое $\varepsilon > 0$, что в ε-окрестности точки x нет точек из множества A. Значит, $\rho(x, A) \geqslant \varepsilon$. ⊠

Пусть теперь

$$\rho(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} \rho(x, y)$$

— «расстояние» между множествами A и B. Можно ли утверждать, что $\rho(A, B) > 0$, если множества A и B замкнуты и не пересекаются?

□ Оказывается, нет. Нетрудно привести пример, положив в качестве A и B графики функций $y = 0$ и $y = \frac{1}{x}$ на плоскости. (Докажите аккуратно, что оба множества замкнуты.) ⊠

ПРИМЕР 7. Пусть A, B — замкнутые непересекающиеся множества в метрическом пространстве M. Можно ли построить их непересекающиеся открытые окрестности, т. е. такие открытые множества $O_A \supset A$ и $O_B \supset B$, что $O_A \cap O_B = \varnothing$?

□ Если «расстояние» d (см. предыдущий пункт) между множествами A, B положительно, положительный ответ на данный вопрос был бы очевиден: достаточно было положить O_A равным объединению $\frac{d}{3}$-окрестностей всех точек множества A и аналогично поступить для множества A. (Докажите, что в этом случае задача и в самом деле была бы решена.) Но, как мы знаем, положительность величины d не гарантирована даже для непересекающихся замкнутых множеств. Однако ответ всё-таки утвердительный (см. задачу 5). ⊠

§ 2. Свойства открытых и замкнутых множеств

Напомним прежде всего следующие понятия:

1) точка x называется <u>предельной точкой</u> множества A, если любая окрестность точки x содержит точки множества A, отличные от x (можно сказать так: любая <u>проколотая</u> окрестность точки x имеет непустое пересечение с множеством A);

2) точка x называется <u>граничной точкой</u> множества A, если любая окрестность точки x содержит как точки множества A, так и точки его дополнения;

3) точка x называется <u>точкой касания</u> (точкой прикосновения) множества A, если любая окрестность точки x содержит точки множества A (в частности, так будет при $x \in A$ — обратите внимание на отличие от предельной точки!);

4) точка x называется <u>внутренней точкой</u> множества A, если некоторая окрестность точки x целиком содержится в множестве A;

5) точка x называется <u>изолированной точкой</u> множества A, если $x \in A$, но некоторая проколотая окрестность не содержит точек множества A (можно сказать и так: некоторая окрестность точки x не содержит точек из A, кроме самой точки x).

Здесь важно отметить следующую языковую неточность. Во всех пяти определениях фигурируют слова «точка множества A». Однако только в последних двух речь действительно с необходимостью идёт о принадлежности $x \in A$. Точки первых трёх типов могут как принадлежать, так и не принадлежать A, и слова «точка множества A» в

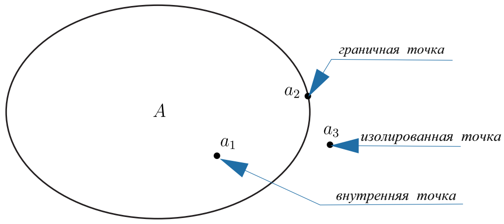

Рис. 9. Точки множества A.

определениях 1)—3) говорят лишь об отношении, в котором точка x находится именно с множеством A, — отношении, не связанном непосредственно с отношением «принадлежать».

После сделанного замечания приведём некоторые примеры.

Пример 8. Пусть $M = \mathbb{R}$, $A = [0; 1) \cup \{2\}$. Тогда:
1) $[0; 1]$ суть предельные точки A;
2) 0, 1 и 2 суть граничные точки A;
3) $[0; 1]$ и 2 суть точки касания A;
4) $(0; 1)$ суть внутренние точки A;
5) 2 — изолированная точка A.

Пример 9. Пусть $M = \mathbb{R}^2$, $A = \{(x, y) \mid \sqrt{x^2 + y^2} < 1\} \cup \cup \{(x, y) \mid y = 0, 10 \leqslant x < 11\} \cup \{(100, 100)\}$. Тогда:
1) $\{(x, y) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant 1\} \cup \{(x, y) \mid y = 0, 10 \leqslant x \leqslant 11\}$ суть предельные точки A;
2) $\{(x, y) \mid \sqrt{x^2 + y^2} = 1\} \cup \{(x, y) \mid y = 0, 10 \leqslant x \leqslant 11\} \cup \{(100, 100)\}$ суть граничные точки A;
3) точки касания A — те же, что и предельные, и $(100, 100)$;
4) $\{(x, y) \mid \sqrt{x^2 + y^2} < 1\}$ суть внутренние точки A;
5) $(100, 100)$ — изолированная точка A.

Пример 10. Пусть $M = \mathbb{R}$, $A = [0; 1) \cap \mathbb{Q}$. Тогда:
1) $[0; 1]$ суть предельные точки A;
2) $[0; 1]$ суть граничные точки A (почему?);
3) $[0; 1]$ суть точки касания A;
4) внутренних точек у A нет;
5) изолированных точек у A нет.

Пример 11. Пусть $M = \mathbb{R}$, $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Тогда:
1) 0 — предельная точка A;
2) $0 \cup A$ суть граничные точки A;
3) $0 \cup A$ суть точки касания A;
4) внутренних точек у A нет;
5) множество изолированных точек A совпадает с A.

Пример 12. Пусть $M = [0; 1) \cup \{2\}$, $A = (0; 1) \cup \{2\}$. Тогда:
1) $[0; 1)$ суть предельные точки A;
2) 0 — граничная точка A;
3) $[0; 1) \cup \{2\}$ суть точки касания A;

4) $(0;1)\cup\{2\}$ суть внутренние точки A;
5) 2 — изолированная точка A.

Обратите внимание, что в некоторых метрических пространствах могут существовать множества, некоторые точки которых являются одновременно изолированными и внутренними.

Если вы разобрались с помощью предложенных примеров в типах точек по отношению к заданному множеству в метрическом пространстве, то поняли, в частности, что:

Свойство 1. точки, принадлежащие данному множеству, делятся на внутренние и граничные;

Свойство 2. точки касания делятся на изолированные точки множества (обязательно принадлежащие ему) и предельные точки, которые могут как принадлежать множеству (среди них могут быть внутренние), так и не принадлежать;

Свойство 3. граничные точки делятся на изолированные точки множества (обязательно принадлежащие ему) и предельные точки, которые могут как принадлежать множеству (но не быть внутренними), так и не принадлежать;

Свойство 4. изолированные точки множества могут являться граничными, а могут и не являться (см. примеры 4 и 12);

Свойство 5. открытое множество целиком состоит из своих внутренних точек (среди которых могут быть изолированные — см. пример 12), а его граничные точки ему не принадлежат
и т. д.

Обсудим теперь возможные (равносильные!) определения замкнутого множества в метрическом пространстве:
Свойство 6. его дополнение открыто;
Свойство 7. его замыкание совпадает с ним самим (о замыкании см. ниже);
Свойство 8. оно содержит все свои граничные точки;
Свойство 9. оно содержит все свои предельные точки;
Свойство 10. оно содержит все свои точки касания;
Свойство 11. для любой последовательности $x_n \to x$, где $x_n \in A$ (A — рассматриваемое множество), $x \in M$, верно $x \in A$.
(Из сделанного выше замечания следует, что слово «свои» здесь не означает a priori принадлежность множеству A).

Нетрудно (хотя и несколько кропотливо) доказать их равносильность.

Напомним:
Свойство 12. пустое множество и всё пространство являются одновременно открытыми и замкнутыми множествами;

Свойство 13. произвольное объединение и конечное пересечение открытых множеств — открытое множество;
Свойство 14. дополнение открытого множества замкнуто, замкнутого — открыто;
Свойство 15. произвольное пересечение и конечное объединение замкнутых множеств — замкнутое множество.

Отметим также важнейшие свойства операции замыкания $A \mapsto \overline{A}$. Прежде всего, ей тоже можно дать несколько определений. Ограничимся следующими:

1) $\overline{A}$ есть множество A плюс все его предельные точки;

2) $\overline{A}$ есть множество всех точек касания множества A;

3) $\overline{A}$ есть множество A плюс все его граничные точки;

4) $\overline{A}$ есть пересечение всех замкнутых множеств, содержащих A.

Отметим следующие свойства операции замыкания:

0) $\overline{A}$ — замкнутое множество;

1) $A \subset \overline{A}$, причём равенство имеет место для замкнутых множеств и только для них;

2) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, где $\overline{\overline{A}} \equiv \overline{\left(\overline{A}\right)}$;

3) $A_1 \subset A_2 \Rightarrow \overline{A_1} \subset \overline{A_2}$;

4) $\overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$.

□ Докажем эти свойства.

0) Замыкание замкнуто как пересечение замкнутых множеств.

1) Следует из того, что в пересечение входят лишь те замкнутые множества, которые содержат множество A. Далее, если само A замкнуто, то оно входит в число пересекаемых множеств и поэтому указанное пересечение содержится в A. А поскольку верно и обратное включение, то они совпадают. Обратно, из равенства множества A своему замыканию следует, что множество A замкнуто (силу свойства 0)).

2) В силу 0) $\overline{A}$ замкнуто. Тогда согласно 1) имеет место равенство множества A и его замыкания $\overline{\overline{A}}$.

3) Поскольку $A_1 \subset A_2$ и $A_2 \subset \overline{A_2}$, то среди замкнутых множеств, содержащих A_1, есть множество $\overline{A_2}$, а тогда пересечение таких множеств содержится в $\overline{A_2}$, поскольку пересечение содержится в каждом из пересекаемых множеств.

4) Для доказательства вложения $\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \subset \overline{A_1 \cup A_2}$ достаточно заметить, что $A_i \subset A_1 \cup A_2$ $(i = 1; 2)$, и применить п. 3). Тогда мы получим, что $\overline{A_i} \subset \overline{A_1 \cup A_2}$, а следовательно, то же включение верно и для объединения $\overline{A_1} \cup \overline{A_2}$. Заметим, что это рассуждение проходит для объединения любого (конечного или бесконечного семейства множеств).

Для доказательства обратного вложения заметим, что $\overline{A_1} \cup \overline{A_2}$ замкнуто как объединение конечного семейства (!) замкнутых множеств и содержит A_1 и A_2, а следовательно, их объединение: $\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \supset$ $\supset A_1 \cup A_2$. Тогда, применив п. 3) вместе с п. 1), получаем: $\overline{A_1} \cup \overline{A_2} =$ $= \overline{\overline{A_1} \cup \overline{A_2}} \supset \overline{A_1 \cup A_2}$. Это рассуждение может быть обобщено на любое <u>конечное</u> семейство множеств $\{A_k\}_{k=1}^{n}$, но не на бесконечное. Легко привести контрпример: если $A_k = \{q_k\}$, где последовательность $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ «пересчитывает» все рациональные точки отрезка $[0; 1]$, то замыкание объединения представляет собой весь отрезок, а объединение замыканий содержит только эти точки. (Где в рассуждении существенна конечность семейства множеств $\{A_k\}$?)

Итак, <u>обобщение свойства 4) на бесконечные объединения неверно</u>. Неверно и обобщение этого свойства на пересечение. Пример к последнему привести совсем просто: $\overline{\mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})} = \overline{\varnothing} = \varnothing$, но $\overline{\mathbb{Q}} \cap \overline{(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})} =$ $= \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$. Однако можно утверждать, что $\overline{A_1 \cap A_2} \subset \overline{A_1} \cap \overline{A_2}$. Действительно, имеем

$$A_1 \cap A_2 \subset A_i \subset \overline{A_i}, \quad i = 1, 2, \quad \overset{3)}{\Longrightarrow} \quad A_1 \cap A_2 \subset \overline{A_1} \cap \overline{A_2}.$$

А поскольку $\overline{A_1} \cap \overline{A_2}$ — замкнутое множество (как пересечение замкнутых), в силу п. 1) и 3) имеем

$$\overline{A_1 \cap A_2} \subset \overline{\overline{A_1} \cap \overline{A_2}} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2},$$

что и требовалось. (Верно ли это рассуждение для бесконечного семейства множеств?) ⊠

§ 3. Пример метрического пространства последовательностей

На лекции 4 были рассмотрены пространства числовых последовательностей l^p и m. Было отмечено, что последнее является несепарабельным. Мы приведём пример его сепарабельного подпространства.

Итак, пусть c — пространство сходящихся последовательностей.

1. Очевидно вложение $c \subset m$ как множеств. Тогда можно ввести на c метрику так же, как она была введена на m. Тогда m становится подпространством метрического пространства m и корректность введения метрики (аксиомы метрического пространства) имеет место автоматически: как нетрудно заметить, всякое подмножество A метрического пространства M становится метрическим пространством, если определить $\rho_A(x, y) = \rho_M(x, y)$.

2. Докажем сначала *полноту пространства c*.

□ Пусть $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность элементов пространства c. Таким образом, x_k при каждом $k \in \mathbb{N}$ представляет собой числовую последовательность.

Будем обозначать номер числа в последовательности верхним индексом: $x_k^{(n)}$ — n-й элемент числовой последовательности x_k. Пусть последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ фундаментальна, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \in \mathbb{N} \quad \forall k > K \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \rho(x_k, x_{k+p}) < \varepsilon. \tag{3.1}$$

Перепишем (3.1) с учётом определения расстояния в пространстве c:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \in \mathbb{N} \quad \forall k > K \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_k^{(n)} - x_{k+p}^{(n)}| < \varepsilon. \tag{3.2}$$

Из (3.2) следует:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \in \mathbb{N} \quad \forall k > K \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |x_k^{(n)} - x_{k+p}^{(n)}| < \varepsilon. \tag{3.3}$$

Следовательно, при каждом фиксированном n последовательности $\{x_k^{(n)}\}_{k=1}^{\infty}$ фундаментальны.

Обозначим пределы этих последовательностей через $x^{(n)}$ и образуем тем самым последовательность $x \equiv \{x^{(n)}\}$. Перейдя в (3.3) к пределу при $p \to \infty$, получим:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \in \mathbb{N} \quad \forall k > K \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |x_k^{(n)} - x^{(n)}| \leqslant \varepsilon. \tag{3.4}$$

Из (3.4) следует, что элементы x_k сходятся к элементу x в пространстве m.

Осталось лишь доказать, что $x \in c$. Тогда получим $x_k \to x$ в c (поскольку расстояния в пространствах m и c введены одинаково), и тем самым будет доказана полнота пространства m.

Итак, достаточно доказать, что c — сходящаяся последовательность. Это будет следовать из того, что она фундаментальна. А для доказательства её фундаментальности мы воспользуемся так называемым $\frac{\varepsilon}{3}$-приёмом, который знаком вам из доказательства непрерывности равномерного предела непрерывных функций и который будет ещё не раз встречаться в дальнейшем.

Итак, пусть дано $\varepsilon > 0$ и надо указать такое $N \in \mathbb{N}$, что

$$\forall n > N \quad \forall q \in \mathbb{N} \quad |x^{(n)} - x^{(n+q)}| < \varepsilon. \tag{3.5}$$

Для этого вначале найдём такое $K \in \mathbb{N}$ в (3.4), что при всех $k > K$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |x_k^{(n)} - x^{(n)}| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3.6}$$

Далее, взяв последовательность $x_k \equiv \{x_k^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ с номером $k = K + 1$ (напомним, что она сходится, а следовательно, фундаментальна), выберем такое $N_1 \in \mathbb{N}$, что

$$\forall n > N_1 \quad \forall q \in \mathbb{N} \quad |x_k^{(n)} - x_k^{(n+q)}| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3.7}$$

Тогда, используя (3.6) и (3.7), получим для всех $n > N_1$, $q \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} &|x^{(n)} - x^{(n+q)}| = \\ &\quad = \left|\left(x^{(n)} - x_k^{(n)}\right) + \left(x_k^{(n)} - x_k^{(n+q)}\right) + \left(x_k^{(n+q)} - x^{(n+q)}\right)\right| \leqslant \\ &\quad \leqslant \left|x^{(n)} - x_k^{(n)}\right| + \left|x_k^{(n)} - x_k^{(n+q)}\right| + \left|x_k^{(n+q)} - x^{(n+q)}\right| < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned} \tag{3.8}$$

что и требовалось. Итак, утверждение доказано. ⊠

3. Покажем теперь, что *пространство c сепарабельно*. Ключевой идеей здесь будет переход от бесконечных последовательностей к «конечным» в том смысле, что они будут постоянными начиная с некоторого номера.

□ Сначала мы построим счётное подмножество в c. Затем покажем, что оно всюду плотно.

Для каждого рационального числа q и каждого натурального числа l рассмотрим всевозможные последовательности, у которых на местах до $(l-1)$-го включительно стоят произвольные рациональные числа, а начиная с l-го места — число q.

Из результатов семинара-лекции 1 следует, что 1) при фиксированных l и q множество таких последовательностей счётно, 2) объединение всех таких множеств сначала по $l \in \mathbb{N}$, а потом по $q \in \mathbb{Q}$ тоже счётно. Осталось понять, почему построенное подмножество c_0 всюду плотно в c.

Пусть нам дана произвольная последовательность $y = \{y^{(n)}\}_{n=1}^{\infty} \in c$. Пусть $y^{(n)} \to b$ (напоминаем, что пространство c состоит из сходящихся последовательностей). Пусть дано $\varepsilon > 0$ и требуется найти последовательность $z \in c_0$ такую, что $\rho(y, z) < \varepsilon$. Для этого прежде всего находим рациональное число r такое, что $|b - r| < \frac{\varepsilon}{2}$. Далее находим такое $N \in \mathbb{N}$, что при всех $n > N$ верно неравенство

$$|y^{(n)} - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Выберем теперь последовательность из c_0 следующим образом:

1) положим $q = r$, $l = N + 1$;

2) элементы $\{y^{(n)}\}_{n=1}^{N}$ приблизим рациональными числами с точностью ε, положив $z^{(n)} : |z^{(n)} - y^{(n)}| < \varepsilon$, $z^{(n)} \in \mathbb{Q}$ при $n = 1, \dots N$, и возьмём $z^{(n)} = r$ при $n > N$.

Легко проверить, что $z \in c_0$ и $\sup_{n\in\mathbb{N}} |y^{(n)} - z^{(n)}| < \varepsilon$. ⊠

4. Можно задаться вопросом, *плотно ли подпространство c в пространстве m*. Легко сообразить, что нет: иначе бы m было сепарабельным вследствие сепарабельности c.

В порядке дальнейшего обсуждения свойств пространства c приведём пример последовательности его элементов, сходящиеся к элементу $(0,0,0,\dots)$ в c, но не сходящейся в l^1. Положим

$$x_k = \Bigl(\underbrace{\frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{k}}_{k}, 0, \dots\Bigr). \tag{3.9}$$

Легко видеть, что $x_k \to (0,0,0,\dots)$ в c, но в пространстве l^1 последовательность $\{x_k\}$ не является даже фундаментальной, — см. задачу 21. (Очевидно, отсутствие фундаментальности — достаточное условие отсутствия сходимости, нередко удобно проверяемое на практике.)

§ 4. Задачи для самостоятельного решения

Задача 0. Ответить на вопросы по ходу текста.

Задача 1. Убедиться в том, что следующие множества с указанной функцией $\rho(x,y)$ являются метрическими пространствами:
1) $\mathbb{R}^n$, $\rho(x,y) = \max_{i=\overline{1,n}}(|x_i - y_i|)$;
2) $\mathbb{R}^n$, $\rho(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$;
3) любое множество M с $\rho(x,y) = 1$ при $x \neq y$, $\rho(x,y) = 0$ при $x = y$.

Задача 2. Доказать неравенство четырёхугольника: $|\rho(x,z) - \rho(y,w)| \leqslant \rho(x,y) + \rho(z,w)$.

Задача 3. Убедиться в том, что открытый шар открыт, а замкнутый шар замкнут (приняв любое определение замкнутости).

Задача 4. Построить пример метрического пространства M — подмножества $\mathbb{R}^2$, — в котором существует замкнутый шар, являющийся открытым множеством, но не открытым шаром.

Задача 5. Пусть A, B — замкнутые непересекающиеся множества в метрическом пространстве M. Построить их непересекающиеся открытые окрестности, т. е. такие открытые множества $O_A \supset A$ и $O_B \supset B$, что $O_A \cap O_B = \varnothing$.

Задача 6. (Продолжение.) Пусть $M = [1;2] \cup [4;5]$, $A = [1;2]$, $B = [4;5]$. Остаётся ли верным утверждение предыдущей задачи? Указать в явном виде множества O_A и O_B.

Задача 7. Объяснить подробно некоторые (* —все) примеры § 2.

Задача 8. Верны ли следующие утверждения для произвольного фиксированного множества:
1) каждая его предельная точка есть его точка касания;

2) каждая его внутренняя точка есть предельная точка;
3) каждая его точка касания — либо внутренняя точка, либо изолированная точка;
4) множество всех его граничных точек вместе с множеством всех его внутренних точек есть само множество A;
5) множество всех его внутренних точек вместе с множеством всех его изолированных точек есть само множество A?

Задача 9. Верны ли следующие утверждения:
1) замкнутое множество не имеет внутренних точек;
2) замкнутое множество не может состоять из одних только внутренних точек;
3) все точки открытого множества суть его точки касания?

Задача 10. Доказать равносильность хотя бы некоторых (* — всех) определений замкнутого множества.

Задача 11. Доказать равносильность хотя бы некоторых (* — всех) определений замыкания.

Задача 12. Доказать хотя бы некоторые (* — все) свойства замыкания.

Задача 13. Решить задачу 10* из семинара-лекции 2.

Задача 14. Привести пример счётного пересечения открытых множеств, дающего замкнутое множество; привести пример счётного объединения замкнутых множеств, дающего открытое множество.

Задача 15. Привести пример метрического пространства, имеющего более двух открыто-замкнутых подмножеств.

Задача 16. Привести пример, показывающий, что свойство 4) операции замыкания не выполняется для счётных объединений. (Указание. Подходящий пример есть в тексте.)

Задача 17. Доказать сепарабельность пространств l^p, $p \in [1;+\infty)$. (Указание. Начните с $p = 1$.)

Задача 18*. Показать, что в пространстве $L^1(X)$, где $X \subset \mathbb{R}^n$, плотно множество непрерывных функций.

Задача 19. Являются ли замкнутыми подмножествами в $C[a;b]$:
1*) подмножество всех многочленов степени не выше n;
2) подмножество всех многочленов;
3) подмножество $C^1[a;b]$ всех непрерывно дифференцируемых функций?

Задача 20. Почему в примере 6 слово «расстояние» взято в кавычки?

Задача 21. Доказать, что последовательность (3.9) не является фундаментальной в l^1.

Задача 22. Верно ли:
1) всякая изолированная точка есть точка касания?
2) для любого множества A верно $A \subset \operatorname{int} A \cup \partial A$, где $\operatorname{int} A$ — множество внутренних точек множества A?

Дополнительная–Лекция 1

МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА. ДОПОЛНЕНИЕ

§ 1. Простейшие свойства метрических пространств

Свойство 1. Непрерывность расстояния. Легко видеть, что функция «расстояние» $\rho(x, y)$ непрерывна по совокупности аргументов. Действительно, из неравенства четырёхугольника (см. задачу 2 из лекции-семинара 5)

$$|\rho(x,z) - \rho(y,w)| \leqslant \rho(x,y) + \rho(z,w)$$

при $x_n \to x$, $y_n \to y$ (что по определению сходимости в метрическом пространстве означает не что иное, как $\rho(x_n, x) \to 0$, $\rho(y_n, y) \to 0$) имеем

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x, y)| \leqslant \rho(x_n, x) + \rho(y_n, y) \to 0.$$

Свойство 2. Единственность предела. Легко видеть, что у последовательности в метрическом пространстве может быть не более одного предела. В самом деле, наличие двух пределов x, x' у последовательности $\{x_n\}$ в силу неравенства треугольника и только что доказанной непрерывности расстояния означало бы, что $0 \leqslant \rho(x, x') \leqslant \rho(x_n, x) + \rho(x_n, x') \to 0$, или $0 \leqslant \rho(x, x') \leqslant 0$, откуда $\rho(x, x') = 0$ и по определению расстояния $x = x'$. Однако, имея в виду изучение в скором времени топологических пространств и их свойств, полезно провести доказательство таким образом: в случае наличия двух пределов x, x' можно было бы взять их непересекающиеся окрестности, и тогда вся последовательность $\{x_n\}$, кроме некоторых начальных отрезков, должна была бы находиться в каждой из этих окрестностей, что, очевидно, невозможно. (Задание. Доказать, что при $0 \neq \varepsilon = \rho(x, x')$ $\varepsilon/3$-окрестности точек x и x' действительно не пересекаются.)

§ 2. Некоторые свойства полных метрических пространств и их приложения

Свойство 3. Подпространство M_1 полного метрического пространства M образует (с тем же расстоянием ρ_M) полное метрическое пространство тогда и только тогда, когда M_1 — замкнутое подмножество пространства M.

1) Действительно, в силу полноты M любая фундаментальная последовательность его элементов, в том числе и содержащая только элементы M_1, имеет предел (принадлежащий M). Но если M_1 замкнуто, то этот предел принадлежит M_1 (эквивалентное определение замкнутости!).

2) Обратно, пусть M_1 — полное метрическое пространство (относительно расстояния ρ_M). Тогда предел всякой последовательности, принадлежащей M_1, принадлежит M_1, что и означает, что M_1 замкнуто в M.

Замечание 1. Очевидно, что полнота пространства M_1 в первом рассуждении существенна. (Достаточно рассмотреть $M = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $M_1 = M$.)

Замечание 2. Во втором рассуждении мы неявно использовали единственность предела. Если бы пределов могло быть больше одного, то можно было бы представить себе ситуацию, когда один из пределов принадлежит M_1 (и тем самым обеспечивает его полноту), а другой — не принадлежит, нарушая замкнутость.

§ 3. Теорема о неподвижной точке или принцип сжимающих отображений

Определение 1. Отображение $F : M \to M$ называется сжимающим, если

$$\exists q \in [0;1)\,\forall x, y \in M \;\; \rho(F(x), F(y)) \leqslant q\rho(x, y). \tag{3.1}$$

Теорема о неподвижной точке. *Пусть $F : M \to M$ — сжимающее отображение. Тогда существует, и притом единственная, точка $x \in M$ такая, что $F(x) = x$, и она может быть найдена методом простой итерации (последовательных приближений): для любого $x_0 \in M$ верно предельное соотношение*

$$x = \lim_{n\to\infty} F^n(x_0). \tag{3.2}$$

Доказательство.

Пусть x_0 — произвольная точка пространства M. Построим последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, положив

$$x_n = F(x_{n-1}), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.3}$$

Легко установить её фундаментальность:

$$\rho(x_n, x_{n+p}) \leqslant \rho(x_n, x_{n+1}) + \ldots + \rho(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \leqslant$$

$$\leqslant \rho(x_0, x_1) \cdot q^n (1 + \ldots + q^{p-1}) \leqslant \rho(x_0, x_1) \cdot q^n \cdot \frac{1}{1-q}.$$

Следовательно, существует предел

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Поскольку сжимающее отображение, очевидно, непрерывно, можем перейти к пределу в равенстве (3.3):

$$x = F(x).$$

Таким образом, существование неподвижной точки отображения F установлено. Единственность же очевидна: в случая наличия двух неподвижных точек $\overline{x}, \overline{\overline{x}}$ в силу (3.1) и определения расстояния имеем

$$\rho(\overline{x}, \overline{\overline{x}}) = \rho(F(\overline{x}), F(\overline{\overline{x}})) \leqslant q\rho(\overline{x}, \overline{\overline{x}}),$$

откуда $\rho(\overline{x}, \overline{\overline{x}}) = 0$ и $\overline{x} = \overline{\overline{x}}$.

Теорема доказана.

Эта теорема (а также её усиленные варианты) находит широкое применение в доказательстве однозначной разрешимости многих задач математической физики. Вам уже известно её применение в теории интегральных уравнений (для уравнений Фредгольма с «малым» λ применяется именно она, для уравнений Вольтерра с произвольным λ — усиленная).

Замечание 3. Важно, что в определении сжимающего отображения будет недостаточно просто потребовать уменьшения расстояния между любыми различными точками. Легко привести контрпример. Пусть

$$F(x) = x + \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x, \quad M = [0; +\infty).$$

Тогда для любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ в силу теоремы Лагранжа о конечных приращениях имеем

$$|F(x_1) - F(x_2)| \leqslant |F'(\xi)||x_1 - x_2| = \left|1 - \frac{1}{1+\xi^2}\right| \cdot |x_1 - x_2| < |x_1 - x_2|,$$

но существование неподвижной точки функции F противоречило бы неравенствам $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$.

Свойство 5. Теорема о вложенных шарах. Обсудим некоторые условия этой теоремы и их существенность. Понятно, что полнота пространства, как и замкнутость шаров, существенны. Так, в пространстве $M = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ замкнутые шары радиуса $\frac{1}{2n}$ с центрами в точках $x_n = \frac{1}{2n}$ имеют пустое пересечение. Открытые шары в пространстве $M = \mathbb{R}$ с центрами в тех же точках и тех же радиусов также имеют пустое пересечение. Можно рассмотреть и аналогичный пример на плоскости (получатся открытые круги, касающиеся внутренним образом). Гораздо менее ожидаемо, что нельзя обойтись без условия стремления радиусов шаров к нулю. Приведём соответствующий пример. Рассмотрим метрическое пространство, носителем которого является множество натуральных чисел $\mathbb{N}$, а расстояние между числами введено как

$$\rho^*(m,n) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{m+n}, & m \neq n, \\ 0, & m = n. \end{cases}$$

Выполнение аксиом расстояния проверяется непосредственно. Далее, легко установить полноту пространства: поскольку в нём расстояние между любыми различными точками больше 1, фундаментальными являются лишь финально постоянные (постоянные начиная с некоторого номера) последовательности. Каждая такая последовательность, очевидно, имеет предел. Рассмотрим теперь шары $B_n \equiv \{m \in \in \mathbb{N} \mid \rho^*(m,n) \leqslant 1 + \frac{1}{2n}\}$. Эти шары замкнуты, т. к. заданы нестрогим неравенством. Далее, условие $\rho^*(m,n) \leqslant 1 + \frac{1}{2n}$ равносильно $m \geqslant n$ с учётом того, что при $m = n$ расстояние равно нулю по определению. Поэтому $B_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$. Тогда очевидно, что $B_{n+1} \subset B_n$, но пересечение всех шаров пусто. Таким образом, имеем последовательность вложенных замкнутых шаров, радиусы которых не стремятся к 0, с пустым пересечением.

Ещё проще привести пример последовательности замкнутых вложенных неограниченных множеств в полном пространстве, пересечение которых пусто. Годится система множеств $[n; +\infty) \subset \mathbb{R}$.

Однако можно снять требование, чтобы рассматриваемые в теореме множества были именно шарами. Достаточно потребовать лишь, чтобы они были ограниченными замкнутыми множествами A_n, диаметры которых стремятся к 0. В самом деле, тогда, взяв произвольным образом в каждом n-ом множестве точку x_n, получим последовательность $\{x_n\}$. Она обладает тем свойством, что $x_n \in A_m$ при всех $n \geqslant m$ (в силу цепочки $x_n \in A_n \subset A_{n-1} \subset \ldots \subset A_m$). Поэтому $\{x_n\}$ фундаментальна («хвосты» лежат в стягивающихся множествах). Её предел принадлежит любому из множеств A_n, потому что, опять-таки, все члены последовательности, начиная с n-го, лежат в A_n, которое, как замкнутое, обязано содержат предел последовательности своих элементов $\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$. Единственность же общей точки по-прежнему следует из стремления к нулю диаметров множеств.

Свойство 6. Теорема Бэра о категориях. В связи с этой теоремой (сформулированной и доказанной в лекции 4) мы обсудим лишь один кажущийся парадокс. Рассмотрим метрическое пространство X, состоящее из одной точки x. Тогда можно положить $X_n = X$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Но разве X содержит открытый шар? Конечно, да! Открытый шар любого положительного радиуса с центром в точке x просто совпадает с пространством X! Отметим ещё, что теорема Бэра о категориях используется при доказательстве принципа равномерной ограниченности, который, в свою очередь, нужен при доказательстве одной из важнейших теорем линейного функционального анализа — теоремы Банаха—Штейнгауза.

Свойство 7. Гомеоморфизм полного и неполного метрических пространств. Будем называть биекцию между двумя метрическими пространствами гомеоморфизмом, если она непрерывна в обе стороны. Оказывается, полное метрическое пространство может быть гомеоморфно неполному. Пример: $\mathbb{R}$ и $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, гомеоморфизм между которыми осуществляет функция $y = \operatorname{arctg} x$. Мы вернёмся к этому примеру в дальнейшем, когда будем обсуждать понятие компактности в метрических и топологических пространствах.

§ 4. Дальнейшие примеры на сходимости и замыкания

Свойство 8. Рассмотрим уже известные нам пространства последовательностей l^p ($p \geqslant 1$), m и c_0 и зададимся следующими вопросами. 1) Какому из пространств принадлежат x_n, y_n, z_n? 2) В каких из пространств последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{y_n\}$ сходятся?

а) $x_n = \left\{\underbrace{1,\ldots,1}_{n},0,0,\ldots\right\}$

б) $y_n = \left\{\underbrace{\frac{1}{n},\ldots,\frac{1}{n}}_{n},0,0,\ldots\right\}$

в) $z_n = \left\{\underbrace{\frac{1}{n^\alpha},\ldots,\frac{1}{n^\alpha}}_{n},0,0,\ldots\right\}$, $\alpha > 0$

Очевидно, элементы всех трёх последовательностей принадлежат всем трём пространствам. Теперь ответим на вопросы о сходимости.

Последовательность $\{x_n\}$ не сходится ни в каком пространстве. Так, в l^p она даже не является ограниченной: очевидно, $\rho_{l^p}(x_n,\{0,0,\ldots\}) \to +\infty$. (Ср. с задачей 1.) В двух других пространствах, как это часто бывает, легче проверить отсутствие фундаментальности. Имеем

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall p\in\mathbb{N}\ \ \rho_m(x_n,x_{n+p}) = \rho_{c_0}(x_n,x_{n+p}) = 1.$$

Последовательность $\{y_n\}$, очевидно, сходится к элементу $u = \{0,0,\ldots\}$ в пространствах m и c_0. Исследуем её сходимость в l^p. Имеем

$$\rho_{l^p}(\{0,0,\ldots\},u) = \left(\left(\frac{1}{n}\right)^p\cdot n\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{p-1}{p}} \to 0, \quad n\to\infty.$$

Следовательно, сходимость в l^p к той же последовательности имеет место при $p > 1$ и не имеет места при $p = 1$.

Последовательность $\{z_n\}$, очевидно, сходится к элементу $\{0, 0, \ldots\}$ в пространствах m и c_0. Исследуем её сходимость в l^p. Имеем

$$\rho_{l^p}\left(\{0, 0, \ldots\}, u\right) = \left(\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)^p \cdot n\right)^{\frac{1}{p}} = n^{-\alpha + \frac{1}{p}}. \tag{4.1}$$

Следовательно, сходимость в l^p к элементу $\{0, 0, \ldots\}$ заведомо имеет место при $p > \frac{1}{\alpha}$ (и только). А что происходит при остальных $p \geqslant 1$? Для ответа на этот вопрос сделаем следующее важное замечание. Имеет место вложение пространств $l^p \subset m$ (почему?) и, более того, принадлежность последовательности $v \equiv \{u^{(k)}\}$ пространству l^p гарантирует наличие среди чисел $v^{(k)}$ числа с максимальным модулем и оценку $\max_k |v^{(k)}| \leqslant \rho_{l^p}\left(\{0, 0, \ldots\}, v\right)$ (почему?), или

$$\rho_m\left(\{0, 0, \ldots\}, v\right) \leqslant \rho_{l^p}\left(\{0, 0, \ldots\}, v\right).$$

Но отсюда сразу следует, что если $z_n \to z$ в l^p, то $z_n \to z$ в m. Следовательно, или $z_n \to \{0, 0, \ldots\}$, или $\{z_n\}$ вовсе не сходится в l^p, но других пределов она точно иметь не может. Но в силу (4.1) мы знаем, что при $1 \leqslant p \leqslant \frac{1}{\alpha}$ сходимость $z_n \to \{0, 0, \ldots\}$ не имеет места. Следовательно, в этом случае $\{z_n\}$ не имеет предела в l^p.

Свойство 9. Назовём финитной числовую последовательность, все элементы которой, кроме конечного числа, равны 0. (Равносильное условие: все элементы, начиная с некоторого, равны 0.) Поставим вопрос: как устроены замыкания множеств финитных последовательностей в l^p и в m? Нетрудно проверить, что в первом случае ответом будет всё пространство l^p, а во втором — пространство c_0 сходящихся к нулю последовательностей. Отметим попутно, что тем самым мы доказали, что в обоих пространствах множества финитных последовательностей не являются замкнутыми.

Свойства метрических пространств, связанные с компактностью (полная ограниченность, сепарабельность, пространства непрерывных функций и теорема Арцела), будут рассмотрены в дальнейшем, при изучении общего понятия компактности для топологических пространств. То же относится к понятию базы и аксиомам счётности.

§ 5. Задачи для самостоятельного решения

Задача 0. Ответить на вопросы в тексте.

Задача 1. Множество в метрическом пространстве называется ограниченным, если существует шар, в котором оно целиком содержится. Аналогичное определение формулируется для последовательности. Доказать, что всякая сходящаяся последовательность ограничена.

Задача 2. Доказать, что если $x_n \to x$, то и всякая её подпоследовательность сходится к x.

Задача 3. 1) Пусть $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность в метрическом пространстве M и известно, что некоторая её подпоследовательность сходится к x. Доказать, что $x_n \to x$.
2) Пусть $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность в метрическом пространстве M и известно, что некоторая её подпоследовательность сходится к x, а некоторая другая её подпослсдеовательность сходится к y. Доказать, что $x = y$ и $x_n \to x$.

Задача 4. Пусть $\rho(x,y)$ — метрика в некотором метрическом пространстве. Доказать, что тогда

$$\rho'(x,y) = \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$$

— тоже метрика, причём класс сходящихся последовательностей при этих двух метриках один и тот же и предел у каждой сходящей последовательности не меняется.

Задача 5. Являются ли а) сжимающими, б) непрерывными следующие отображения пространства $C[0;1]$ в себя:
1) $F(y)(x) = \int_0^x y(\xi)\,d\xi$;
2) $F(y)(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 \sin(x-\xi)y(\xi)\,d\xi$;
3) $F(y)(x) = \frac{1}{2}\int_0^x y^2(\xi)\,d\xi$?

Задача 6. Доказать, что оператор дифференцирования непрерывен как отображение из $C^1[a;b]$ в $C[a;b]$ (со стандартным расстоянием). Верно ли аналогичное утверждение при действии из подмножества непрерывно дифференцируемых функций пространства $C[a;b]$ в пространство $C[a;b]$?

Задача 7. Доказать существование и единственность решения $x \in \mathbb{R}$ уравнения

$$2x + \sin x = 1.$$

Будет ли это доказательство верным при поиске решения в $\mathbb{C}$? В $\mathbb{Q}$?

Задача 8. Доказать, что если

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^{\infty} |a_{ij}| < 1,$$

то бесконечная система уравнений

$$x_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j + b_i, \quad i = 1, 2, \ldots$$

имеет единственное решение $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l^1$ при всякой фиксированной $b = (b_1, b_2, \ldots) \in l^1$.

Задача 9*. Пусть λ_k, $k = 1, \ldots, m$, — собственные значения матрицы A, причём среди них нет единичного. Доказать, что последовательные приближения

$$x_n = Ax_{n-1} + y$$

сходятся к решению СЛАУ $(I - A)x = y$ при любом начальном приближении тогда и только тогда, когда все собственные значения по модулю меньше единицы.

Задача 10. На столе на кафедре лежит карта Москвы. Доказать, что её можно проткнуть иголкой так, что проткнутая точка на карте будет соответствовать (в смысле картографического изображения) проткнутой точке на столе.

Задача 11. Дать определение предела и непрерывности функции со значениями в метрическом пространстве ($F : \mathbb{R} \to M$) и доказать для этого случая (если пространство M полно) критерий Коши существование предела функции в точке $t_0 \in \mathbb{R}$.

Задача 12. Сформулировать и доказать утверждение о непрерывности композиции непрерывных функций.

Задача 13*. Доказать, что в полном метрическом пространстве счётное пересечение всюду плотных открытых множеств всюду плотно.

Задача 14. Доказать, что в пространстве $\mathbb{R}^n$ пересечение вложенных непустых ограниченных замкнутых множеств всегда непусто (независимо от стремления их диаметров к нулю).

Задача 15. Будут ли данные условия равносильны условию непрерывности отображения (всюду):
1) прообраз любого замкнутого множества замкнут;
2) образ любого открытого множества открыт?

Задача 16*. Ввести на интервале $(-1; 1)$ метрику (расстояние) таким образом, чтобы он стал полным метрическим пространством.

Задача 17. Доказать, что множество ограниченных функций, действующих из метрического пространства M_1 в метрическое пространство M_2, с sup-расстоянием само есть метрическое пространство, причём в случае полноты M_2 оно полно.

Задача 18. Доказать, что множество ограниченных непрерывных функций, действующих из метрического пространства M_1 в метрическое пространство M_2, с sup-расстоянием само есть метрическое пространство, причём в случае полноты M_2 оно полно.

Семинар–Лекция 6

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА. ОБСУЖДЕНИЕ

§ 1. Открытые множества и окрестности

Установим сначала одно простое, но важное утверждение, демонстрирующее то общее, что есть у понятия открытого множества в топологическом пространстве и его частного случая — открытого множества в метрическом пространстве. Напомним только прежде, что **в топологическом пространстве открытыми называются в точности те множества, которые входят в топологию**.

Теорема 0. *Для того чтобы множество A в топологическом пространстве было открытым, необходимо и достаточно, чтобы оно содержало окрестность каждой своей точки.*

Доказательство.

Необходимость очевидна: открытое множество само является окрестностью любой своей точки и содержит самого себя как подмножество. Достаточность тоже доказывается просто: если множество A вместе с любой своей точкой содержит некоторую её окрестность, то оно является объединением этих окрестностей, а поскольку они суть открытые множества, то и множество A открыто.

Теорема доказана.

Замечание 1. Иногда применяется несколько другая терминология, а именно окрестностью точки x называется любое множество A, содержащее некоторое открытое множество O, содержащее точку x. Наша же окрестность в этом случае называется открытой окрестностью. (Будьте внимательны при чтении книг!) Мы этой терминологией, по крайней мере в данной лекции пользоваться не будем.

§ 2. База топологии

Напомним, что такое база топологии.

Определение 1. *Пусть $T \equiv (X, \tau)$ — некоторое топологическое пространство. Семейство его подмножеств $\mathfrak{B}$ называется <u>базой</u> топологии τ, если:*

1) $\mathfrak{B} \subset \tau$, *т. е. база состоит только из открытых множеств*;

2) *любое открытое множество представимо в виде объединения некоторой подсистемы множеств из* $\mathfrak{B}$.

Замечание 2. Отметим сразу, что поскольку топология (т. е. система подмножеств τ множества X) замкнута относительно произвольных объединений, то можно утверждать, что любое объединение множеств из базы является открытым (входит в топологию).

Замечание 3. В метрическом пространстве с естественной топологией (т. е. топологией, состоящей в точности из всех открытых в смысле метрического пространства множеств) в качестве базы можно выбрать все шары (произвольного радиуса).

Мы не будем доказывать этот факт непосредственно, потому что он будет следовать из общего критерия того, является ли данное семейство множеств базой данной топологии. Этот критерий будет установлен в теореме 2. Прежде мы установим условие, необходимое и достаточное для того, чтобы рассматриваемое семейство множеств вообще могло быть базой (некоторой, не обязательно исходной) топологии.

Теорема 1. *Рассмотрим непустое семейство* $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}$ *подмножеств непустого множества* X. *Оно является базой некоторой топологии тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия*:
1) *для любой точки* $x \in X$ *найдётся* $G \in \mathcal{G}$ *такое, что* $x \in G$;
2) *для любых двух множеств* $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$ *и любой точки* $x \in G_1 \cap G_2$ *найдётся множество* $G_3 \in \mathcal{G}$ *такое, что* $x \in G_3 \subset G_1 \cap G_2$.

Доказательство.

1. Установим сначала необходимость сформулированных условий.

□ В самом деле, условие 1) означает тот факт, что всё множество-носитель X, будучи открытым множеством в T, представимо в виде объединения некоторых множеств из базы.

Для доказательства 2) заметим, что любое множество из базы само открыто, а поэтому пересечение двух таких множеств снова открыто и должно быть представимо в виде объединения некоторых множеств из базы. Среди этих последних и найдётся то, которое содержит точку x (и при этом, конечно, содержится в $G_1 \cap G_2$). ⊠

2. Теперь установим достаточность.

□ Именно, докажем, что класс $\tau(\mathcal{G})$ всевозможных объединений множеств из семейства $\mathcal{G}$ удовлетворяют условиям, предъявляемым к топологии, и что $\mathcal{G}$ есть база топологии $\tau(\mathcal{G})$.

В самом деле, всё X содержится в $\tau(\mathcal{G})$ в силу условия 1). Пустое множество тоже (как объединение пустого семейства множеств из $\mathcal{G}$).

Далее, объединение некоторого семейства объединений множеств из $\mathcal{G}$ снова будет объединением некоторого семейства множеств из $\mathcal{G}$.

Чуть сложнее с конечным пересечением. Достаточно проверить для пересечения двух множеств. Пусть $A = \cup_\alpha G_\alpha$, $B = \cup_\alpha G_\alpha$. Тогда

$$A \cap B = \cup_{\alpha,\beta}(G_\alpha \cap G_\beta) \quad \text{(проверьте!)}.$$

Но из условия 2) следует, что каждое $G_\alpha \cap G_\beta$ содержится в $\tau(G)$ (проверьте!). теперь надо лишь снова перейти к объединению.

Осталось лишь заметить, что $\mathcal{G}$ есть база топологии $\tau(\mathcal{G})$. Непосредственно по построению $\tau(\mathcal{G})$ имеем: 1) $\mathcal{G} \subset \tau(\mathcal{G})$; 2) любое множество из $\tau(\mathcal{G})$ представимо в виде объединения некоторых множеств из $\mathcal{G}$. ⊠

Теорема доказана.

Замечание 4. Настоятельно рекомендуется проиллюстрировать условия рисунком. То же относится к теоремам 2, 3, 3а.

Теорема 2. *Для того чтобы система $\mathcal{G} \subset \tau$ была базой данной топологии τ, необходимо и достаточно выполнения условия*
3) *для каждого открытого множества O и каждой содержащейся в нём точки x найдётся множество $G_x \in \mathcal{G}$ такое, что $x \in G_x \subset O$.*

Доказательство.

1. Действительно, если $\mathcal{G} \subset \tau$ — база топологии τ, то открытое множество O представимо в виде объединения некоторых множеств из $\mathcal{G}$, откуда и следует 3).

2. Обратно, если верно 3), то, очевидно, всякое множество из топологии представимо в виде объединения множеств из $\mathcal{G}$. С другой стороны, поскольку $\mathcal{G} \subset \tau$ и топология замкнута относительно произвольных объединений, «чужих» (не входящих в τ) множеств среди объединений множеств из $\mathcal{G}$ не будет.

Теорема доказана.

Замечание 5. Обратите внимание, что требовать выполнения условий 1), 2) не нужно: условия 3) при заданной топологии уже достаточно, чтобы система $\mathcal{G}$ была базой (причём именно заданной топологии). Напротив, теорема 1 не требует предварительного введения топологии и позволяет проверить, может ли система $\mathcal{G}$ позволить построить топологию, где $\mathcal{G}$ являлась бы базой. Таким образом, роль этих теорем несколько различна.

Теперь легко видеть, что открытые шары произвольных радиусов (или даже лишь открытые шары радиусов $1/n$, $n \in \mathbb{N}$), образуют базу в произвольном метрическом пространстве. При этом условие 3) применительно к метрическим пространствам в случае выбора базы всех открытых шаров есть не что иное, как <u>определение</u> открытого множества в метрическом пространстве.

Таким образом, если бы мы хотели начать изложение теории топологических пространств в полной аналогии с теорией метрических, нам бы пришлось сначала задать базу, т. е. некоторое семейство подмножеств, удовлетворяющих условиям 1), 2), затем ввести понятие топологии как семейства всевозможных объединений множеств из базы, а лишь затем ввести критерий, сформулированный в теореме 2.

§ 3. База, локальная база и фундаментальная система окрестностей

Давайте несколько «развернём» теорему о ФСО из лекции 5, сформулировав её в виде нескольких утверждений. Они будут полезны в качестве критериев того, может ли данная система множеств быть фундаментальной системой окрестностей и задавать топологию, что важно, т. к. часто топологию проще задать именно в терминах окрестностей (а не базы и тем более не всей топологии).

Теорема 3. *Множество окрестностей τ_x каждой точки x топологического пространства $T = (T, \tau)$ обладает следующими свойствами*:
1) *τ_x непусто и если $U \in \tau_x$, то $x \in U$;*
2) *если $U, V \in \tau_x$, то существует некоторая окрестность $W \in \tau_x$ такая, что $W \subset U \cap V$;*
3) *если $U \in \tau_x$, то для каждого $y \in U$ найдётся $V \in \tau_y$ такое, что $V \subset U$.*

Доказательство. Свойство 1) тривиально, т. к. $X \in \tau_x$, а любое множество из системы τ_x содержит точку x просто по определению τ_x. Свойство 2) доказать не менее просто: достаточно взять в качестве W само $U \cap V$: очевидно, что это множество открыто и содержит точку x и поэтому принадлежит τ_x. Наконец, в 3) в качестве V можно положить само U, ведь по условию U открыто и содержит точку y.

Теорема доказана.

Однако гораздо более существенно, что те же свойства выполняются не только для семейств всех окрестностей τ_x, но и для локальных баз ν_x.

Теорема 3а. *Локальная база окрестностей ν_x каждой точки x топологического пространства $T = (T, \tau)$ обладает следующими свойствами*:
1) *ν_x непусто и если $U \in \nu_x$, то $x \in U$;*
2) *если $U, V \in \nu_x$, то существует некоторая окрестность $W \in \nu_x$ такая, что $W \subset U \cap V$;*
3) *если $U \in \nu_x$, то для каждого $y \in U$ найдётся $V \in \nu_y$ такое, что $V \subset U$.*

Доказательство. Утверждение $x \in U$ по-прежнему тривиально. Далее, чтобы доказать непустоту ν_x, возьмём сначала $X \in \tau_x$, а тогда по определению ν_x найдётся некоторое $V \in \nu_x$ ($V \subset X$). Свойство 2) не менее просто: $U \cap V \in \tau_x$, и снова по определению локальной базы найдётся содержащаяся в $U \cap V$ окрестность W из локальной базы. Та же идея работает в 3): в прошлом доказательстве уже заметили, что $U \in \tau_y$, но тогда найдётся окрестность $V \in \nu_y$ точки y, содержащаяся в U.

Теорема доказана.

Наконец, верна следующая важная

Т е о р е м а 4. *Если в каждой точке* $x \in X$ *задан класс* ν_x *подмножеств множества* X *и семейство* $\{\nu_x \mid x \in X\}$ *удовлетворяет свойствам* 1)—3) *из теоремы 3а, то на* X *существует единственная топология* τ, *в которой классы* ν_x *являются локальными базами. При этом совокупность* $\cup_{x \in X} \nu_x$ *является базой этой топологии.*

Теорема фактически доказана на лекции 5. Рекомендуется её «передоказать» с использованием теорем 1, 2.

Теперь мы можем задавать топологию в пространстве с помощью ФСО, т. е. фактически просто задав базы окрестностей для каждой точки пространства. Надо лишь проверить, что эти базы удовлетворяют условиям теоремы 4 (т. е. выполнены свойства 1)—3) из теоремы 3).

§ 4. Первая аксиома счётности. Контрпример

Т е о р е м а 5. *Пусть* $T = (X, \tau)$ — *топологическое пространство. Пусть* A — *произвольное непустое его подмножество. Положим*

$$\tau_A = \{V \cap A \mid V \in \tau\}.$$

Тогда (A, τ_A) — *топологическое пространство.*

(Проверить самостоятельно, что для τ_A выполнены аксиомы топологии.)

П Р И М Е Р 1. Несколько модифицируем пример, рассмотренный на лекции 5. Именно, пусть $B(X)$ — пространство всех ограниченных функций на метрическом пространстве X, где, например, $X = [0; 1]$. Проверим, что окрестности, описанные в примере 4 лекции 5, действительно удовлетворяют условиям 1)—3).

□ Условие 1) проверяется тривиально. Условие 2) — тоже просто, потому что можно взять

$$V_{x,t_1,\ldots,t_n,\widetilde{t_1},\ldots,\widetilde{t_m},\min(\varepsilon_1,\varepsilon_2)} \subset V_{x,t_1,\ldots,t_n,\varepsilon_1} \cap V_{x,\widetilde{t_1},\ldots,\widetilde{t_m},\varepsilon_2}$$

(проверить указанное вложение!). Наконец, если $y \in V_{x,t_1,\ldots,t_n,\varepsilon}$, то

$$V_{y,t_1,\ldots,t_n,\delta} \subset V_{x,t_1,\ldots,t_n,\varepsilon}$$

при $\delta = \varepsilon - \max_{i=\overline{1,n}} |y(t_i) - x(t_i)|$. ⊠

Заметим кстати, что такое пространство не удовлетворяет первой аксиоме счётности (а следовательно, и второй).

□ В самом деле, если нам удалось представить базу окрестностей некоторой функции $x(t)$ в виде последовательности, то мы получим не более чем счётное множество T (как объединение счётного семейства конечных множеств) точек t_i, входящих в определения этих окрестностей. Возьмём теперь некоторое $\widetilde{t} \in [0; 1]$, не входящее в T. Построим окрестность

$$\widetilde{V} \equiv V_{x,\widetilde{t},1}$$

и убедимся, что нет ни одной окрестности из нашей последовательности, вложенной в $\widetilde{V}$. В самом деле, какова бы ни была окрестность

$$V_{x,t_1,\ldots,t_n,\varepsilon}, \tag{4.1}$$

найдётся функция $y(t) \in B(X)$, отличающаяся от $x(t)$ в точке t_1 более чем на ε и поэтому не попадающая в (4.1), но совпадающая с $x(t)$ в точке $\widetilde{t}$ и поэтому попадающая в $\widetilde{V}$. Таким образом,

$$V_{x,t_1,\ldots,t_n,\varepsilon} \not\subset \widetilde{V}. \quad \boxtimes$$

Замечание 6. Видно, что существенно использовалась несчётность области определения функций. Наше рассуждение не прошло бы, если бы X было не более чем счётно.

Теперь заметим, что в нашем примере $C[0;1] \subset B[0;1]$, поэтому, пользуясь понятием относительной топологии, мы «бесплатно» получаем, что введённая с помощью указанных окрестностей топология может быть сужена на пространство непрерывных функций. Таким образом, для случая компактного X мы автоматически доказали, что приведённый в лекции 5 пример окрестностей действительно задаёт топологию. Впрочем, выполненную нами для $B(X)$ проверку можно было столь же непосредственно провести и для $C(X)$.

§ 5. Замыкание и внутренность

ПРИМЕР 2. Приведём один из большого количества «странных» примеров, показывающих, насколько осторожно следует обращаться с понятиями замыкания, внутренности, границы и т. п. даже в метрическом пространстве. Пусть рассматривается пространство $M = [0;1]$ со стандартной метрикой, $A = [0;1] \setminus \mathbb{Q}$. Тогда A является собственным подмножеством своей границы, т. е. $\mathrm{b}(A) \supsetneq A$!

§ 6. Пересечение топологий

Пусть X — некоторое пространство-носитель. Предположим, на нём задано некоторое семейство топологий $\{\tau_\alpha \mid \alpha \in A\}$. Легко видеть, что *пересечение любого семейства топологий*

$$\tau = \bigcap_{\alpha \in A'} \tau_\alpha, \quad A' \subset A,$$

тоже является топологией (возможно, антидискретной).

$\square$

1. В самом деле, пустое множество и всё X входят во все пересекаемые топологии, а поэтому и в τ.

2. Далее, если семейство множеств $\{G_\beta \mid \beta \in B\}$ входит в τ, то оно — по определению пересечения — обязано входить в каждую из топологий τ_α, $\alpha \in A'$.

3. Но поскольку любая топология замкнута относительно произвольных объединений и конечных пересечений, то все τ_α, $\alpha \in A'$, а с ними и их пересечение τ, содержат $\cup_{\beta\in B} G_\beta$, причём если B — конечное множество индексов, то то же верно и для пересечения $\cap \cap_{\beta\in B} G_\beta$. ⊠

§ 7. Задачи для самостоятельного решения

Задача 0. Ответить на вопросы по ходу текста.

Задача 1. Пусть $X = \{0; 1\}$, $\tau = \{\varnothing, \{0\}, X\}$. Проверить, что (X, τ) — топологическое пространство. Выполнена ли в нём аксиома отделимости Хаусдорфа?

Задача 2. Пусть X — некоторое несчётное множество, например $X = [0; 1]$. Объявим в нём открытыми:
а) все не более чем счётные множества и само X;
б) пустое множество и множества, дополнения которых не более чем счётны.
Будут ли такие определения корректными (удовлетворяющими аксиомам топологии)? Если да, то выяснить, удовлетворяют ли такие пространства аксиоме отделимости Хаусдорфа.

Задача 3. Пусть $T_1 = (X, \tau_1)$, $T_2 = (X, \tau_2)$ — два топологических пространства с общим носителем X, причём топология τ_2 сильнее (тоньше) топологии τ_1. Какое из вложений в этом случае непрерывно: T_1 в T_2 или наоборот?

Задача 4. Проверить, что пересечение прообразов есть прообраз пересечения, и то же для объединений. Именно, пусть $f : X \to Y$ — отображение с областью определения X и множеством значений Y (не обязательно взаимно однозначное). Прообразом $f^{-1}(A)$ множества $A \subset \subset Y$ в этом случае называется множество всех тех $x \in X$, для которых $f(x) \in A$. Тогда

$$f^{-1}\left(\cup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right) = \cup_{\gamma\in\Gamma} f^{-1}(A_\gamma), \quad f^{-1}\left(\cap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right) = \cap_{\gamma\in\Gamma} f^{-1}(A_\gamma).$$

Задача 5. (Продолжение.) Назовём прообразом системы σ подмножеств множества Y совокупность всех прообразов множеств из системы σ: $f^{-1}(\sigma) = \{f^{-1}(A) \mid A \in \sigma\}$. Проверить, что прообраз топологии на Y есть топология на X (конечно, не обязательно исходная, если на X уже была введена топология).

Задача 6. (Продолжение.) Сформулировать условие непрерывности отображения $f : X \to Y$ (по Коши) в терминах сравнения топологий.

Задача 7*. Доказать, что в топологическом пространстве T со счётной базой из любого покрытия пространства можно извлечь не более чем счётное подпокрытие.

З а д а ч а 8. Придумать топологию τ на $\mathbb{R}$, для которой топологическое пространство $(\mathbb{R}, \tau)$ компактно.

З а д а ч а 9*. Придумать топологию на $\mathbb{R}$, в которой объединение любых открытых множеств замкнуто.

З а д а ч а 10. Привести пример топологического (возможно, метрического) пространства и множества A в нём такого, что A является собственным подмножеством внутренности своей границы!

З а д а ч а 11. Доказать, что пространство, не удовлетворяющее аксиоме отделимости Хаусдорфа, не является метризуемым.

З а д а ч а 12. Доказать, что пространство, не удовлетворяющее I аксиоме счётности, не является метризуемым.

З а д а ч а 13. Привести пример метрического пространства, не удовлетворяющего II аксиоме счётности.

З а д а ч а 14*. Нам известны следующие свойства замыкания (теперь не только в метрическом, но и в произвольном топологическом пространстве):

1) $A \subset \overline{A}$;
2) $\overline{A} = \overline{\overline{A}}$;
3) $\overline{\varnothing} = \varnothing$;
4) $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$.

Доказать, что можно определить топологию исходя из операции замыкания. Именно, если для непустого множества X дано отображение $\overline{} : P(X) \to P(X)$ (словами: операция из семейства всех подмножеств множества A в это же семейство подмножеств) и оно удовлетворяет условиям 1)—4), то можно объявить замкнутыми все множества $A \subset \subset X$, для которых $\overline{A} = A$, их дополнения — открытыми, и тогда для семейства открытых множеств будут выполнены все аксиомы топологии. (Предостережение. Не забудьте проверить наличие в топологии всего X и пустого множества.)

Таким образом, мы получили ещё один (помимо базы и ФСО) «косвенный» способ задания топологии в пространстве.

З а д а ч а 15*. (П р о д о л ж е н и е.) Показать, что от условия 3) нельзя отказаться (не все аксиомы топологии будут выполнены).

З а д а ч а 16. Доказать, что при выполнении аксиомы отделимости Хаусдорфа выполняется и более слабое условие отделимости (назовём его T_1): любые 2 различные точки пространства имеют окрестности, не содержащие вторую точку из пары.

З а д а ч а 17*. Доказать, что условие T_1 в точности равносильно условию замкнутости всех конечных подмножеств X.

З а д а ч а 18*. Доказать, что в пространстве, удовлетворяющем условию T_1 (в частности, в пространстве, удовлетворяющем аксиоме отделимости Хаусдорфа), точка x является предельной для множества M тогда и только тогда, когда любая окрестность содержит бесконечно много точек из M.

Задача 19. Доказать, что в пространстве, удовлетворяющем I аксиоме счётности, можно выбрать счётную локальную базу $\{O_{x,n}\}$ каждой точки x так, что $O_{x,1} \supset O_{x,2} \supset \ldots$.

Задача 20*. (Продолжение.) Доказать, что в пространстве, удовлетворяющем I аксиоме счётности (а следовательно, в любом метрическом пространстве), точка x является предельной для множества M тогда и только тогда, когда существует последовательность точек из M, отличных от x, сходящаяся к x.

Задача 21. Подобно тому как замыкание произвольного множества A в метрическом или топологическом пространстве можно определить как наименьшее (по включению) замкнутое множество, содержащее A, т. е. попросту пересечение всех замкнутых множеств, содержащих A (хотя бы одно такое множество — X — существует), подобно тому как для произвольной системы σ подмножеств данного множества можно определить наименьшее кольцо множеств, содержащее все множества системы σ (см. лекцию 2а и задачи к нему), можно построить и наименьшую топологию, содержащую совершенно произвольную систему подмножеств σ непустого множества X. Провести соответствующее рассуждение. (Предостережение. Не забудьте проверить непустоту того класса топологий, который возникнет в доказательстве.)

Задача 22*. Пусть A, B — некоторые подмножества топологического пространства T. Пусть пересечение $A \cap B$ непусто.
1) Можно ли утверждать, что объединение $A \cup B$ связно?
2) Какое условие надо добавить, чтобы это объединение было связно?
(Множество C в топологическом пространстве называется связным, если оно связно как топологическое пространство в относительной топологии τ_C, т. е. если τ_C не содержит других открыто-замкнутых множеств, кроме $\varnothing$ и C.)

Семинар–Лекция 7

НАПРАВЛЕННОСТИ. ОБСУЖДЕНИЕ

§ 1. Частичный порядок

Определение 1. *Говорят, что на множестве X задано отношение частичного порядка, если для некоторых пар (x, y) элементов множества X сказано, что $x \leqslant y$, причём выполнены следующие условия*:
1) $\forall x \in X\ x \leqslant x$ *(рефлексивность)*;
2) $\forall x, y \in X\ (x \leqslant y,\ y \leqslant x \Rightarrow x = y)$ *(антисимметричность)*;
3) $\forall x, y, z \in X\ (x \leqslant y,\ y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z)$ *(транзитивность)*.

Замечание 1.

1. Говорят о частичном порядке, потому что не обязательно любые два элемента $x, y \in R$ сравнимы, т. е. не для каждой пары элементов $x, y \in R$ верно хотя бы одно из соотношений $x \leqslant y$, $y \leqslant x$. Если в R сравнимы все пары элементов, то такое отношение порядка называется линейным порядком. Очевидно, линейный порядок представляет собой частный случай частичного порядка.

2. В дальнейшем без всяких оговорок будем употреблять запись $y \geqslant x$ в качестве синонима записи $x \leqslant y$.

3. Иногда говорят «x меньше y» и пишут «$x < y$», имея в виду, что $x \leqslant y$ и при этом $x \neq y$.

§ 2. Примеры.

ПРИМЕР 1. Множество натуральных чисел с обычным порядком является частично (и даже линейно) упорядоченным множеством.

ПРИМЕР 2. То же верно для множества действительных чисел.

ПРИМЕР 3. Введём отношение частичного порядка между числовыми функциями на некотором множестве X следующим образом: $f \leqslant g$, если при всех $x \in X$ верно числовое неравенство (понимаемое в обычном смысле) $f(x) \leqslant g(x)$. Проверьте, что все условия выполнены. Очевидно, что найдутся несравнимые функции: например, при $X = [0; 1]$ можно взять $f(x) = x$, $g(x) = 1 - x$.

ПРИМЕР 3а. Аналогично можно ввести отношение частичного порядка на множестве функций с общей областью определения и со значениями в фиксированном частично упорядоченном множестве. (Проверка предоставляется читателям.)

ПРИМЕР 4. Введём отношение частичного порядка между парами действительных чисел так: $(x_1, y_1) \leqslant (x_2, y_2)$, если одновременно $x_1 \leqslant x_2$, $y_1 \leqslant y_2$. Снова легко проверить, что все условия выполняются; при этом, например, элементы $(0,1)$ и $(1,0)$ не сравнимы.

ПРИМЕР 5. На том же множестве можно ввести и отношение линейного порядка. Например, положим $(x_1, y_1) \leqslant (x_2, y_2)$, если

1) либо $x_1 < x_2$,

2) либо $x_1 = x_2$, $y_1 \leqslant y_2$.

Такое отношение порядка называется лексикографическим (по такому принципу расположены слова в словарях).

ПРИМЕР 6. (Спасибо слушателям!) Наконец, ещё один пример возможного построения отношения линейного порядка на $\mathbb{R}^2$ даёт следующая идея: установим взаимно однозначное соответствие φ между $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^2$ (это можно сделать) и примем для $\varphi(a)$, $\varphi(b)$ то же соотношение, что имеет место для a и b.

ПРИМЕР 7. Часто бывает полезно установить отношение частичного порядка между подмножествами некоторого множества, а именно, считать, что $A \leqslant B$, если $A \subset B$ (или, наоборот, если $A \supset \supset B$). В первом случае говорят, что система подмножеств упорядочена по включению, во втором условимся говорить об упорядочении по обратному включению. В более сложном случае эти подмножества могут быть наделены некоторой структурой, которая, например, сохраняется при произвольном пересечении (подпространства линейного пространства, кольца подмножеств данного множества, топологии и т. п.) или объединении (открытые подмножества данного метрического или топологического пространства).

Обсудим теперь понятия наименьшего и минимального элементов в частично упорядоченном множестве.

Определение 2. *Элемент a частично упорядоченного множества R называется наименьшим элементом в множестве R, если выполнены 2 условия*:

1) *a сравним со всеми элементами R*;

2) *для любого $x \in R$ верно $a \leqslant x$.*

(*Условие* 1) *следует из* 2), *но мы предпочли его явно выделить.*)

Определение 3. *Элемент a частично упорядоченного множества R называется минимальным элементом в множестве R, если для любого $x \in R$ из $x \leqslant a$ следует $x = a$.*

Как видно, последнее условие можно переформулировать так: в R нет элементов, (сравнимых с a и) меньших a.

Очевидно:

1) всякий наименьший элемент есть минимальный (обратное неверно);

2) наименьший элемент единствен (для минимального, вообще говоря, неверно).

Аналогичным образом определяются наибольший и максимальный элементы.

ПРИМЕР 8. Построим пример, иллюстрирующий возможную ситуацию. На рис. 1 изображено 6 точек, соединённых стрелками.

Будем считать, что точка x меньше точки y, если из x в y можно дойти по стрелкам (в указанном направлении). При этом, как обычно, $x \leqslant y$ допускает, кроме указанного «меньше», и равенство. Тогда мы получим отношение частичного порядка.

Легко видеть, что элемент a является наименьшим (и, тем самым, минимальным), причём других наименьших и даже минимальных элементов нет. Элементы b и c являются максимальными, и ни один из них не является наибольшим.

Однако если (вновь спасибо слушателям!) соединить стрелкой b и c (в направлении от b к c), то c станет наибольшим элементом (оставаясь при этом, конечно, максимальным), а b статус максимального элемента утратит (см. рис. 2).

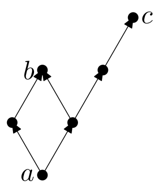

Рис. 1

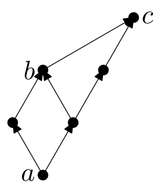

Рис. 2

Заметим в отношении приведённых ранее примеров, что в тех случаях, когда мы имеем дело с системой подмножеств (подпространств, колец и т. п.), замкнутой относительно пересечения и упорядоченной по включению, всегда имеется наименьший элемент — пересечение.

□ Действительно, при любом $\gamma \in \Gamma$ имеем $\cap_\gamma A_\gamma \subset A_\gamma$. Наоборот, для системы всех открытых подмножеств множества X имеем наибольший элемент — объединение (совпадающее с X). ⊠

ПРИМЕР 9. Обсудим теперь один интересный с точки зрения топологических пространств пример.

Как мы уже отмечали (см. лекцию 5а), пересечение (но не объединение!) топологий есть снова топология. Далее, пусть имеются множество X и топологическое пространство T_3. Рассмотрим некоторое фиксированное отображение $f : X \to T_3$. Можно ли ввести топологию на X так, чтобы f было непрерывным?

□ Конечно: достаточно ввести на X дискретную топологию. Тогда прообраз любого открытого множества в T_3, будучи некоторым подмножеством X, автоматически будет открытым. ⊠

Сделаем теперь следующий шаг.

Заметим, что *если* $f : (X, \tau_1) \to T_3$ *непрерывно и* $\tau_2 \supset \tau_1$, *то и* $f : (X, \tau_2) \to T_3$ *непрерывно.*

□ Действительно, все прообразы открытых множеств пространства T_3 как были открытыми в τ_1, так и остались таковыми в более сильной топологии τ_2. Поэтому если в какой-то топологии в пространстве X отображение f непрерывно, то оно будет непрерывно и во всякой более сильной топологии. ⊠

Возникает вопрос: а нельзя ли найти в X самую слабую топологию, в которой f ещё непрерывно? Можно!

□ Рассмотрим класс $\mathcal{T}$ всех топологий в X, в которых f непрерывно. Он не пуст: в нём содержится по крайней мере дискретная топология. Рассмотрим теперь топологию

$$\tau = \cap_{\tau_\alpha \in \mathcal{T}} \tau_\alpha.$$

По ранее доказанному τ — топология.

Очевидно и то, что τ — наименьший по включению элемент в классе $\mathcal{T}$. Наконец, $f : (X, \tau) \to T_3$ непрерывно. В самом деле, если каждая топология τ_α содержит прообразы всех открытых в T_3 множеств, то же верно и для пересечения всех топологий τ_α.

Тем самым мы установили, что в (непустом!) классе топологий на множестве X, для которых отображение $f : X \to T_3$ непрерывно, имеется наименьший по включению элемент, который естественно назвать слабейшей топологией, в которой отображение f непрерывно. ⊠

§ 3. Направленное множество. Направленность

Определение 4. *Множество A называется направленным множеством, если на нём введено отношение частичного порядка $\leqslant$, удовлетворяющее следующему условию*:
для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in A$ существует $\alpha \in A$ такое, что $\alpha_1 \leqslant \alpha$, $\alpha_2 \leqslant \alpha$.

1. Легко видеть, что это условие всегда выполняется, если A — линейно упорядоченное множество: достаточно взять больший из двух элементов.

2. Условие также будет выполнено, если в A имеется наибольший элемент.

3. Однако в общем случае для частичного порядка оно, вообще говоря, не выполнено: в примере на рис. 1 нет элемента x такого, что $a \leqslant x$, $b \leqslant x$. В то же время, семейство всех подмножеств данного множества X является направленным множеством, поскольку для любых A, B верно

$$A \subset A \cup B, \quad B \subset A \cup B \Rightarrow A \leqslant A \cup B, \quad B \leqslant A \cup B.$$

Если бы мы ввели отношение порядка вторым способом (обратное включение), то имели бы

$$A \leqslant A \cap B, \quad B \leqslant A \cap B.$$

З а м е ч а н и е 2. Вовсе не требуется, чтобы α было отлично от α_1 и α_2! В частности, не для всякого α_0 найдётся $\alpha > \alpha_0$. И это не противоречит определению, ибо если положить $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_0$, то можно взять $\alpha = \alpha_0$). Более того, направленное множество может состоять из одного элемента. В этом случае отношение порядка тривиально: $x \leqslant x$.

С учётом замечания легко видеть, что каждое из следующих числовых множеств (с обычным порядком) является направленным:

$$\mathbb{N}, \quad \mathbb{R}, \quad [0;1), \quad [0;1], \quad -\mathbb{N}, \quad \{0;1\}.$$

Также направленным множеством является множество $\mathbb{R}^2$ с любым из трёх введённых в примерах 4—6 отношений порядка.

Введём теперь понятие, играющее для топологических пространств приблизительно ту же роль, какую для метрических играет понятие последовательности, и являющееся его обобщением.

О п р е д е л е н и е 5. *Функция $\{x_\alpha\} : A \to X$, где A — направленное множество, X — произвольное множество, называется* <u>*направленностью*</u>.

В качестве простейшего примера направленности, разумеется, годится последовательность. Однако чуть позже мы увидим, почему последовательностей при построении теории топологических пространств недостаточно.

Введём теперь понятие предела направленности в топологическом пространстве. Но прежде модифицируем определение предела последовательности:

О п р е д е л е н и е 6. *Говорят, что последовательность $\{x_n\}$ в топологическом пространстве T стремится к элементу $x \in T$, если для любой окрестности $U_x \in \tau_x$ точки x найдётся такое N, что при всех $n \geqslant N$ верно $x_n \in U_x$.*

З а м е ч а н и е 3. Обычно вместо $n \geqslant N$ пишут $n > N$. Для последовательностей это неважно, ведь $n \geqslant N \Leftrightarrow n + 1 > N$. Однако, как мы выяснили, направленное множество может не иметь элемента, большего данного. Поэтому для предела направленности имеем

О п р е д е л е н и е 7. *Говорят, что направленность $\{x_\alpha\}$ в топологическом пространстве T стремится к элементу $x \in T$, если для любой окрестности $U_x \in \tau_x$ точки x найдётся такое $\alpha_0 \in A$, что при всех $\alpha \geqslant \alpha_0$ верно $x_\alpha \in U_x$.*

П Р И М Е Р 10. Приведём простой пример. Направленность $x_\alpha = \frac{1}{\alpha}$, где $A = (0; +\infty)$ с обычным порядком, $T = [0; +\infty)$ с обычной топологией, сходится к 0 (проверить!).

Докажем ключевую теорему этой лекции.

Т е о р е м а 1. *Точка x в топологическом пространстве T является точкой касания для множества M тогда и только тогда, когда найдётся направленность точек множества M, сходящаяся к x.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем сначала *достаточность.*

1. Если $x_\alpha \to x$ и при всех $\alpha \in A$ верно $x_\alpha \in M$, то согласно определению сходящейся направленности для всякой окрестности U_x точки x существует такое $\alpha_0 \in A$, что при всех $\alpha \geqslant \alpha_0$ верно $x_\alpha \in U_x$.

2. Существенно, что для самого α_0 имеем $x_{\alpha_0} \in U_x$. В случае предела последовательности мы могли взять произвольное n, большее N. В данном же случае существенно, что можно взять α_0, потому что следующих за ним элементов направленного множества A может и не существовать.

Теперь докажем *необходимость.*

1. И здесь, как ни странно, доказательство окажется идейно даже более простым, чем для последовательностей в метрических пространствах, где нам нужно было каким-то образом выбирать стягивающиеся к пределу последовательности окрестности.

2. Теперь же мы можем в качестве «индекса», которым «нумеруются» точки направленности, возьмём не что иное, как окрестности U_x, т. е. положим $A = \tau_x$ (множество окрестностей точки x), упорядоченное по обратному включению: $U_{x,\alpha} \leqslant U_{x,\beta}$, если $U_{x,\alpha} \supset U_{x,\beta}$. Естественность такого упорядочения очевидна: нам хочется получить «стягивающиеся» к пределу окрестности.

3. Следует убедиться, что τ_x — действительно направленное множество.

□ В самом деле, частичная упорядоченность очевидна (как для любого семейства подмножеств, упорядоченного по включению или обратному включению). Далее, для любых окрестностей $U_{x,\alpha}$, $U_{x,\beta}$ точки x их пересечение $U_{x,\alpha} \cap U_{x,\beta}$ — снова окрестность точки x, т. к. является открытым множеством и содержит x. А согласно нашему упорядочению, $U_{x,\alpha} \leqslant U_{x,\alpha} \cap U_{x,\beta}$, $U_{x,\beta} \leqslant U_{x,\alpha} \cap U_{x,\beta}$. ⊠

4. Теперь определим направленность $x_{U(x)}$, взяв для каждой окрестности $U_x \in \tau_x$ точку $x_{U(x)} = y$ из пересечения $M \cap U_x$. Такое y существует, поскольку x – точка касания множества M.

5. Осталось доказать, что построенная направленность (состоящая, заметим, из элементов множества M) сходится x.

□ Но это непосредственно следует из построения, ибо для любой окрестности $U_{x,0}$ точки x можно положить $\alpha_0 = U_{x,0}$ и тогда для любой окрестности $U_x \geqslant U_{x,0}$ имеем в силу построения и введённого отношения порядка $x_{U_x} \in U_x \subset U_{x,0}$, т. е. $x_{U_x} \in U_{x,0}$, что и требовалось. ⊠

Теорема доказана.

Рассмотрим, к каким направленностям приводит доказательство теоремы в конкретных случаях.

ПРИМЕР 11. Пусть $T = [0;1]$ с обычной метрической топологией, $M = (0;1]$, $x = 0$. Тогда имеем $A = \{[0;y) \mid 0 < y \leqslant 1\}$, причём можно положить $x_{[0;y)} = \frac{y}{2}$. Легко видеть, однако, что можно построить и последовательность элементов множества X, сходящуюся к 0: $x_n = \frac{1}{n}$.

ПРИМЕР 12. Рассмотрим так называемое связное двоеточие, а именно пространство $T = (X, \tau)$, где $X = \{a, b\}$, $\tau = \{\varnothing, \{b\}, \{a, b\}\}$.

Заметим, что в этом пространстве точка a является точкой касания множества $M = \{b\}$, поскольку единственным открытым множеством, содержащим a, является $X \ni b$.

Тогда направленное множество A, построенное в теореме, имеет вид $A = \{X\}$. Соответствующая же направленность точек множества $\{b\}$, сходящаяся к точке a, представляет собой $x_X = b$.

□ Действительно, любая окрестность точки a (а именно, X: других нет) содержит точку b при всех $U_a \geqslant X$ (т. е. при $U_a = X$). ⊠

С первого взгляда может показаться, что уже в этом примере нет последовательности точек множества $\{b\}$, стремящейся к a. Однако это не так: последовательность $\{x_n\}$, где $x_n = b$, сходится к a. (Заметим попутно, что и она, и построенная направленность, конечно сходятся и к b. Для пространства, не удовлетворяющего аксиоме отделимости Хаусдорфа, это неудивительно.)

ПРИМЕР 13. В следующем примере не существует последовательности точек множества X, сходящейся к некоторой его точке касания (но, в силу доказанной теоремы, существует направленность).

1. Положим снова $X = [0; 1]$, выбрав в качестве открытых все множества, получающиеся выбрасыванием из X не более чем счётного множества точек (в частности, само X), а также пустое множество. Легко проверить, что полученное семейство множеств действительно удовлетворяет всем аксиомам топологии (удобнее проверять условия, предъявляемые к замыканиям, для их дополнений).

2. Убедимся, что и в такой «странной» топологии 0 — точка касания множества $(0; 1]$.

□ В самом деле, любая окрестность U_0 точки 0 (как открытое множество) или пуста (что невозможно, ибо $0 \in U_0$), или содержит все точки отрезка, кроме конечного или счётного их числа. Но тогда она обязательно содержит хотя бы одну точку из $(0; 1]$, что и требовалось. ⊠

3. Теперь заметим, что в рассматриваемой топологии сходиться могут лишь последовательности, стационарные с некоторого номера.

□ В самом деле, пусть $y_n \to y$. Положим Y_0 равным множеству значений последовательности y_n за вычетом самой точки y. Легко видеть, что Y_0 не более чем счётно, а поэтому $[0; 1] \setminus Y_0$ открыто; а т. к. $[0; 1] \setminus Y_0 \ni y$, то оно является окрестностью точки y.

С другой стороны, если последовательность y_n не является стационарной ни с какого номера, то, сколь бы велико ни было N, найдётся $n > N$, для которого $y_n \neq y$. Но тогда $y_n \notin [0; 1] \setminus Y_0$, т. е. y_n не лежит в рассматриваемой окрестности точки y. Итак, не найдётся такого N, после которого все члены последовательности лежали бы в окрестности $[0; 1] \setminus Y_0$ точки y. Следовательно, $y_n \not\to y$. Значит, стремиться к 0 в нашем пространстве могут лишь те последовательности, которые с некоторого номера принимают только значения 0. ⊠

Но такие последовательности не лежат в $(0;1]$.

Замечание 4. Нетрудно видеть, что топологическое пространство, рассмотренное в предыдущем примере, не удовлетворяет аксиоме отделимости Хаусдорфа, однако последовательности в нём могут иметь не более одного предела. Таким образом, аксиома отделимости Хаусдорфа является достаточным, но не необходимым условием единственности предела последовательности.

Отметим в заключение ещё некоторые факты.

1. Всякая подпоследовательность некоторой последовательности есть её поднаправленность, но не всякая поднаправленность последовательности есть её подпоследовательность: рассмотрим последовательность $\{x_1, x_1, x_2, x_3, \ldots\}$.

2. Как и в лекции 5, отметим без доказательства важнейшую теорему о компактности, обобщающее соответствующее утверждение для метрических пространств.

Теорема 2. *Топологическое пространство компактно тогда и только тогда, когда всякая направленность в нём имеет сходящуюся поднаправленность.*

§ 4. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Проверить, что введённые в примерах 3—7 отношения действительно удовлетворяют аксиомам отношения порядка. Проверить, что в примере 5 мы имеем дело с отношением линейного порядка.

Задача 2. Убедиться, что замкнутые подмножества данного множества X, содержащие заданное множество $A \subset X$, образуют множество, частично упорядоченное по включению. Убедиться, что оно содержит наименьший элемент и что он равен $\overline{A}$.

Задача 3. Построить пример, показывающий, что объединение двух топологий может не быть топологией.

Задача 4. Решить задачи 15—16 из лекции 2а.

Задача 5*. Решить задачи 19—20 из лекции 5а.

Задача 6. 1) Показать, что в метрическом пространстве для множества A и его точки касания x найдётся последовательность $\{x_n\}$ точек из A, сходящаяся к x.
2) Можно ли утверждать, что такую последовательность можно выбрать не содержащей точку x?
3) Те же вопросы для случая, когда x — предельная точка множества A.

Задача 7*. Выяснить, может ли какая-либо направленность (не обязательно являющаяся последовательностью) в топологическом пространстве из последнего примера иметь более одного предела.

Семинар–Лекция 8

ВТП. ОБСУЖДЕНИЕ

§ 1. Выпуклые множества

Докажем некоторые свойства выпуклых множеств, непосредственно следующее из их определения.

1) Пересечение любого семейства выпуклых множеств — выпуклое множество.

□ Действительно, либо $E = \cap_{\alpha \in A} E_\alpha$ пусто (и, тем самым, выпукло), либо непусто. В последнем случае рассмотрим произвольные точки $x, y \in E$ (не обязательно различные). Тогда получим:

$$
\begin{aligned}
x, y \in E \;\Rightarrow\; \forall \alpha \in A \quad x, y \in E_\alpha \;\Rightarrow \\
\Rightarrow \forall \alpha \in A,\; \forall \lambda \in [0;1] \quad \lambda x + (1-\lambda) y \in E_\alpha \;\Rightarrow \\
\Rightarrow\; \forall \lambda \in [0;1] \quad \lambda x + (1-\lambda) y \in E.
\end{aligned}
$$

⊠

С другой стороны, объединение выпуклых множеств, вообще говоря, таковым не является (достаточно взять два непересекающихся непустых множества в метрическом пространстве, расстояние между которыми положительно, или «собрать» из прямоугольников «уголок»).

2) Пусть числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ удовлетворяют условиям

$$
\left\{
\begin{aligned}
\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geqslant 0, \\
\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1,
\end{aligned}
\right.
\tag{1.1}
$$

а $x_1, \ldots, x_n$ суть некоторые элементы выпуклого множества E. Тогда $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n \in E$.

□ Докажем это по индукции.

1. Её база — $n = 2$ — есть непосредственно определение выпуклого множества. Далее, выведем справедливость утверждения для $n+1$ из его справедливости для n.

2. Пусть для чисел $\beta_1, \ldots, \beta_{n+1}$ выполнены условия, аналогичные (1.1), и $x_1, \ldots, x_{n+1} \in E$. Рассмотрим линейную комбинацию $x =$

$= \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_{n+1} x_{n+1}$. Если $\beta_1 = \ldots = \beta_n = 0$, то $x = x_{n+1} \in E$. В противном случае положим

$$\gamma = \beta_1 + \ldots + \beta_n, \quad \alpha_i = \frac{\beta_i}{\gamma}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Легко видеть, что $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$.

3. Поскольку $x_1, \ldots, x_{n+1} \in E$, то по предположению индукции $x \equiv \equiv \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n \in E$. Далее, поскольку $\gamma + \beta_{n+1} = (\beta_1 + \ldots + \beta_n) + \beta_{n+1} = 1$, имеем по определению выпуклого множества $\gamma x + \beta_{n+1} x_{n+1} \in E$. Поскольку $\gamma x + \beta_{n+1} x_{n+1} \equiv \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_n x_n + \beta_{n+1} x_{n+1}$, требуемое утверждение доказано. ⊠

§ 2. Непосредственные следствия аксиом. Некоторые ограничения на топологию

Требование непрерывности операции сложения приводит к инвариантности топологии относительно переносов. Именно, *каковы бы ни были открытое множество $O \subset X$ и элемент $x \in X$, множество $O + x \equiv \{z = y + x \mid y \in O\}$ тоже открыто.*

□ В самом деле, докажем, что из непрерывности по совокупности переменных следует непрерывность по отдельным переменным. Именно, по определению непрерывности сложения имеем

$$\forall x_0, y_0 \in X \quad \forall O_{x_0+y_0} \in \tau_{x_0+y_0} \quad \exists O_{x_0} \in \tau_{x_0}, O_{y_0} \in \tau_{y_0} \quad \forall x \in O_{x_0}, y \in O_{y_0} \quad x + y \in O_{x_0+y_0}. \tag{2.1}$$

Поскольку при любом выборе $O_{y_0} \in \tau_{y_0}$ имеем $y_0 \in O_{y_0}$, из (2.1) следует, что при указанном выборе $O_{x_0} \in \tau_{x_0}$ верно $x + y_0 \in O_{x_0+y_0}$, т. е. сложение непрерывно и по отдельным переменным. Но тогда можно воспользоваться эквивалентным определением непрерывности в топологическом пространстве («прообраз открытого открыт») и заметить, что $O + x$ есть прообраз открытого множества O при отображении $y \mapsto \to y - x \equiv y + (-x)$. (Очевидно, аналогичным образом можно установить и непрерывность умножения отдельно по числовой и векторной переменной.) ⊠

Из только что доказанного вытекает важное следствие: *топология в векторном топологическом пространстве полностью определяется окрестностями нуля.*

□ Действительно, каково бы ни было $O \in \tau$, для любой точки $x \in \in O$ множество $O - x$ будет окрестностью нуля. Обратно, каковы бы ни были окрестность нуля U_ϑ и элемент $x \in X$, имеем $U_\vartheta + x \in \tau$. Поэтому в дальнейшем удобно следить именно за окрестностями нуля. ⊠

Также из инвариантности топологии относительно переносов следует, что *если $A \in \tau$, B — произвольное множество, то*

$$A + B \equiv \{x + y \mid x \in A, \ y \in B\} \in \tau.$$

□ Действительно, тождество [1] $A + B = \cup_{y \in B}(A + y)$ есть не что иное, как представление множества $A + B$ в виде объединения открытых множеств $A + y$. ☒

Отметим теперь, какие ограничения на топологию накладывает требование непрерывности умножения.

Каковы бы ни были окрестность нуля U_ϑ и число $\lambda \neq 0$, λU_ϑ также есть окрестность нуля.

□ В самом деле, λU_ϑ есть прообраз U_ϑ при умножении на λ^{-1} и $\lambda U_\vartheta \ni \vartheta$. ☒

Однако не все топологии, удовлетворяющие этому условию, могут быть топологиями в ВТП.

Например, дискретная топология (все множества открыты) не подходит. Показательно, что она удовлетворяет условию непрерывности сложения, но «навязанная извне» метрическая топология числовых полей $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ «мешает».

□ В самом деле, нужно, чтобы выполнялось требование

$$\forall x_0 \in X, \quad \forall \lambda_0 \quad \forall O_{\lambda_0 x_0} \in \tau_{\lambda_0 x_0} \quad \exists O_{x_0} \in \tau_{x_0},\ \delta > 0$$
$$\forall x \in O_{x_0}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad |\lambda - \lambda_0| < \delta \Rightarrow \lambda x \in O_{\lambda_0 x_0}. \qquad (2.2)$$

Но это требование не может быть выполнено в дискретной топологии, например, для $\lambda = 1$. Выберем произвольный элемент $x_0 \neq \vartheta$ и возьмём в качестве $O_{1 \cdot x_0}$ одноточечное множество $\{x_0\}$. Тогда, какую бы мы ни выбрали O_{x_0}, в ней обязательно будет содержаться x_0 (по определению окрестности), а сколь бы малое мы ни взяли δ, в шаре $\{\lambda \mid |\lambda - 1| < \delta\}$ найдутся $\lambda \neq 1$, а для них $\lambda x_0 \neq x_0$. ☒

По аналогичным причинам *топология в векторном пространстве $\mathbb{R}^2$ не может быть задана фундаментальной системой окрестностей вида горизонтальных интервалов* $((x_1, y); (x_2, y))$, *хотя такие окрестности удовлетворяют всем условиям относительно ФСО топологического пространства* (*не ВТП!*).

Предыдущие контрпримеры обладают общим свойством: в них существуют точки x_0 и окрестности нуля U_ϑ такие, что

$$\text{ни при каких } t > 0 \text{ не выполняется } x_0 \in tU_\vartheta. \qquad (2.3)$$

Заметим, что для ВТП выполняется свойство, даже более сильное, чем отрицание (2.3), а именно, для любых $x_0 \in X$ и любой $U_\vartheta \in \tau_\vartheta$ найдётся такое $s > 0$, что

$$\text{при всех } t > s \text{ выполняется } x_0 \in tU_\vartheta. \qquad (2.4)$$

(Заметим, что (2.4) есть не что иное, как утверждение о том, что любое одноточечное множество — а следовательно, и любое конечное — явля-

[1] Здесь и далее для подмножества E векторного пространства X и элемента $z \in X$ под $E + z$ понимается множество $\{x + z \mid x \in E\}$.

ется в ВТП ограниченным. Этот факт был использован в лекции 6 при построении слабых топологий.) Для доказательства (2.4) достаточно воспользоваться условием непрерывности умножения (2.2), из которого следует, что

$$\forall x_0 \in X, \forall O_{0\cdot x_0=\vartheta} \in \tau_\vartheta \ \exists \delta > 0 \ \forall \lambda \in \mathbb{C} \ |\lambda| < \delta \Rightarrow \lambda x_0 \in O_\vartheta,$$

поскольку точка x_0 автоматически входит в любую свою окрестность. Таким образом, при всех $t > \frac{1}{\delta}$ выполнено $x_0 \in tU_\vartheta$, что и требовалось.

§ 3. Полунормы. Примеры

Рассмотрим простые примеры полунорм в известных пространствах.

ПРИМЕР 1. На $\mathbb{C}(\mathbb{R})$ можно положить $p_1(z) = |\operatorname{Re} z|$.

1. Легко видеть, что система, состоящая из одной такой полунормы, не будет разделяющей. Она станет таковой, если добавить полунорму $p_2(z) = |\operatorname{Im} z|$.

2. Если вспомнить построение окрестностей нуля в виде конечных пересечений множеств вида $V(p,n) = \{x \in X \mid p(x) < \frac{1}{n}\}$, то станет ясно, что система двух только что введённых полунорм на $\mathbb{C}$ порождает окрестности типа вертикальных $|\operatorname{Re} z| < \frac{1}{n}$ и горизонтальных $|\operatorname{Im} z| < \frac{1}{m}$ полос, а также прямоугольников $|\operatorname{Re} z| < \frac{1}{n}$, $|\operatorname{Im} z| < \frac{1}{m}$.

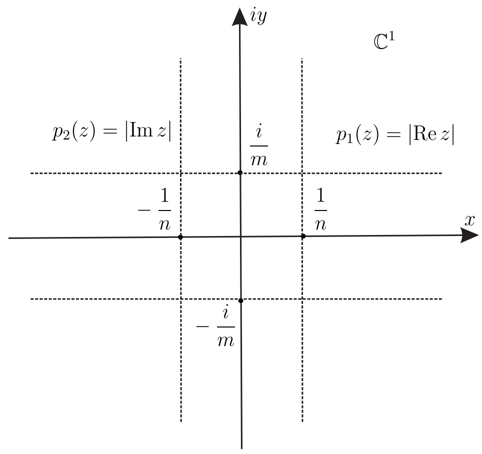

Рис. 10. К примеру 1.

Отметим также, что указанные полосы не являются ограниченными, а прямоугольники — являются, поскольку никакая полоса не поглощается никаким прямоугольником, а любой прямоугольник поглощается и полосой, и прямоугольником. (Естественно, что мы обязаны в данном случае использовать определение ограниченности, принятое для ВТП. Говорить о шарах бессмысленно, поскольку не определено расстояние.)

ПРИМЕР 2. На линейном пространстве l^p последовательностей $x = \{x_n\}$, для которых $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$, можно ввести как полунормы $p_n(x) = |x_n|$, образующие разделяющее семейство, если n «пробегает» $\mathbb{N}$, так и полунорму (норму) $p(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, образующую разделяющее семейство.

ПРИМЕР 3. На линейном пространстве $B[0;1]$ всех ограниченных на отрезке $[0;1]$ функций можно ввести разделяющее семейство полунорм $\{p_x(f)\}_{x\in[0;1]}$, $p_x(f) = |f(x)|$. На его подпространстве $C[0;1]$ для построения разделяющей системы можно обойтись его счётным подсемейством $\{p_r(x)\}_{r\in[0;1]\cap\mathbb{Q}}$.

ПРИМЕР 4. На линейном пространстве целых комплексных функций можно ввести счётное разделяющее семейство полунорм $p_n(f) = |f^{(n)}(0)|$ (где $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$). Действительно, целые функции представляются на всей комплексной плоскости своим рядом Маклорена, коэффициенты которого с точностью до константы равны введённым полунормам.

§ 4. Полунормы и топология

Как мы знаем, топологию можно задать с помощью семейства полунорм $P = \{p_\delta \mid \delta \in \Delta\}$. Для этого сначала строят базу $\mathfrak{B}_\vartheta$ окрестностей нуля, состоящую из всех возможных конечных пересечений множеств вида

$$V(p,n) = \left\{x \in X \mid p(x) < \frac{1}{n}\right\}. \tag{4.1}$$

Легко видеть, что множества (4.1) абсолютно выпуклые и поглощающие (доказать!), но не обязательно ограниченные (см. полосы в примере 1 предыдущего параграфа).

Установим сначала, что *система множеств*

$$\{\nu_x \mid x \in X\}, \quad \textit{где} \quad \nu_x = \{U_\vartheta + x \mid U_\vartheta \in \mathfrak{B}_\vartheta\},$$

действительно может быть принята в качестве системы локальных баз для построения топологии.

□ Для этого достаточно проверить три стандартных свойства локальной базы (см. теорему о ФСО лекции 5 или теорему 4 семинаралекции 6).

1. Первое свойство проверяется тривиально: если имеется хотя бы одна полунорма $p_0 \in P$, то имеется окрестность нуля $V(p_0, 1)$ и соответствующая ей окрестность $V(p_0,1)+x$ точки x, причём в силу определения полунормы имеем $x \in V(p_0,1)+x$.

2. Второе свойство тоже достаточно очевидно. Действительно, пусть для некоторых $A, B \subset \Delta$, $|A|, |B| < \infty$,

$$U_x = \bigcap_{\alpha\in A} V(p_\alpha, n_\alpha) + x, \quad V_x = \bigcap_{\beta\in B} V(p_\beta, m_\beta) + x,$$

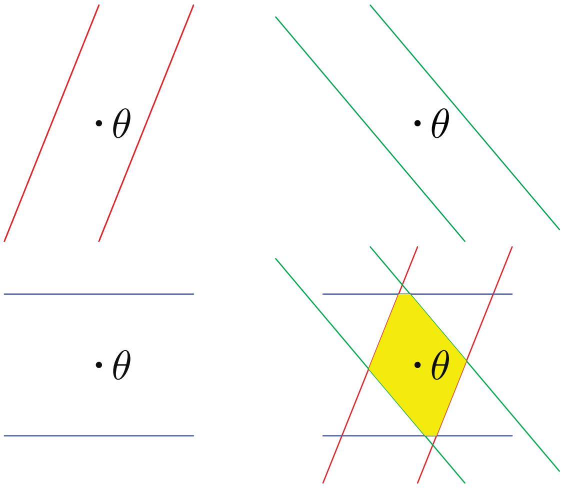

Рис. 11. Окрестность нуля как пересечение конечного числа множества вида (4.1)

то достаточно положить

$$W_x = U_x \cap V_x = \cap_{\gamma\in A\cup B} V(p_\gamma, k_\gamma) + x,$$

где

$$k_\gamma = \begin{cases} \min(n_\gamma, m_\gamma), & \text{если } \gamma\in A\cap B,\\ n_\gamma, & \text{если } \gamma\in A\setminus B,\\ m_\gamma, & \text{если } \gamma\in B\setminus A.\end{cases}$$

3. Для проверки третьего свойства заметим, что если $y \in U_x = \cap$ $\cap_{\alpha\in A} V(p_\alpha, n_\alpha) + x$, то при всех $\alpha \in A$ имеем $p_\alpha(y-x) = \varepsilon_\alpha < \frac{1}{n_\alpha}$. Но тогда имеется «запас»

$$\delta_\alpha = \frac{1}{n_\alpha} - \varepsilon_\alpha,$$

т. е., выбрав $m_\alpha \in \mathbb{N}$ так, что $\frac{1}{m_\alpha} < \delta_\alpha$, в силу определения полунормы получим

$$\forall z \in X\ \ p_\alpha(z-y) < \frac{1}{m_\alpha} \Rightarrow p_\alpha(z-x) \leqslant p_\alpha(z-y) + p_\alpha(y-x) <$$
$$< \delta_\alpha + \varepsilon_\alpha = \frac{1}{n_\alpha} - \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\alpha = \frac{1}{n_\alpha}$$

(«неравенство треугольника»). Проведя такие рассуждения для всех $\alpha \in A$, получим

$$V_y \equiv \cap_{\alpha\in A} V(p_\alpha, m_\alpha) + y \subset U_x,$$

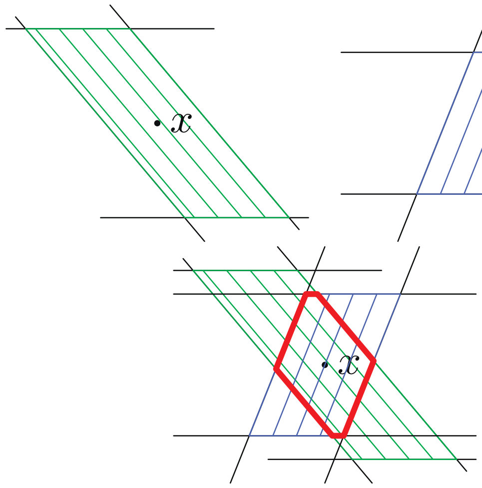

Рис. 12. Пересечение окрестностей

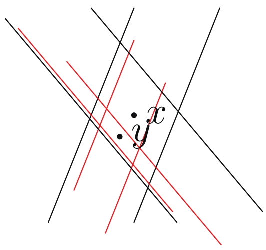

Рис. 13. Выбор окрестности, принадлежащей локальной базе ν_y и целиком содержащейся в U_x, для некоторой точки $y \in U_x$

что и требовалось. $\boxtimes$

Теперь убедимся, что *топология, введённая с помощью такой базы окрестностей нуля, согласована с линейной структурой пространства.*

$\square$ Надо проверить, что умножение на число и сложение непрерывны относительно построенной топологии.

1. Вначале убедимся, что выполнено требование (2.2). Прежде всего представим себе, что у нас имеется лишь одна полунорма. Тогда достаточно доказать, что, каковы бы ни были $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, $x_0 \in X$ и $n \in \mathbb{N}$, найдутся такие $m \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$, что при

$$p(x - x_0) < \frac{1}{m}, \quad |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon \Rightarrow p(\lambda x - \lambda_0 x_0) < \frac{1}{n}.$$

Для этого, пользуясь свойствами полунормы, запишем оценку

$$p(\lambda x - \lambda_0 x_0) = p(\lambda x - \lambda x_0 + \lambda x_0 - \lambda_0 x_0) \leqslant p(\lambda(x - x_0)) + p((\lambda - \lambda_0)x) \leqslant$$

$$\leqslant |\lambda| p(x-x_0) + |\lambda-\lambda_0| p(x) <$$
$$< (|\lambda_0|+\varepsilon) p(x-x_0) + \varepsilon(p(x_0)+p(x-x_0)) <$$
$$< (|\lambda_0|+\varepsilon)\frac{1}{m} + \varepsilon\Big(p(x_0)+\frac{1}{m}\Big). \quad (4.2)$$

Легко видеть, что достаточно большом $m \in \mathbb{N}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$ правая часть действительно достаточно мала.

2. Заметим, что окрестности точек $x \in X$ суть произвольные объединения конечных пересечений V множеств вида $V(p,n)+y$ ($y \in X$). Поэтому для доказательства (2.2) в общем случае можно для произвольной окрестности $O_{\lambda_0 x_0}$ взять некоторое из множеств V, составляющих $O_{\lambda_0 x_0}$, так, что $\lambda_0 x_0 \in V$. Тогда имеем

$$V = \bigcap_{i=\overline{1,l}} (V(p_i, n_i) + x_i) \quad (4.3)$$

для некоторых $x_1, \ldots, x_l \in X$, причём все множества, входящие в пересечение (4.3), содержат $\lambda_0 x_0$. Однако вовсе не факт, что $x_i = \lambda_0 x_0$. (См. рис. 3.) Однако (докажите сами!) нетрудно построить множество $\widetilde{V} \subset V$ вида

$$\widetilde{V} = \bigcap_{i=\overline{1,l}} (V(p_i, \widetilde{n}_i) + \lambda_0 x_0). \quad (4.4)$$

3. Если теперь согласно рассуждению в самом начале доказательства найти такие m_i и ε_i, что для каждого $i = \overline{1,l}$ из условий

$$p_i(x-x_0) < \frac{1}{m_i}, \quad |\lambda-\lambda_0| < \varepsilon_i$$

будет вытекать

$$p_i(\lambda x - \lambda_0 x_0) < \frac{1}{\widetilde{n}_i},$$

а затем положить

$$\varepsilon = \min_{n=\overline{1,l}} \varepsilon_i, \quad O_{x_0} = \bigcap_{i=\overline{1,l}} V(p_i, m_i) + x_0,$$

то для всех $x \in O_{x_0}$,

$$\lambda : |\lambda-\lambda_0| < \varepsilon \Rightarrow \lambda x \in \widetilde{V} \subset V \subset O_{\lambda_0 x_0}.$$

4. Аналогичное рассуждение для непрерывности суммы в топологии, задаваемой произвольным семейством полунорм, рекомендуется провести самостоятельно. ⊠

§ 5. Функционал Минковского. Примеры

Рассмотрим несколько примеров того, какие полунормы (и нормы) задаёт функционал Минковского конкретных множеств в $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$. (Мы рассматриваем плоскость для наглядности; а поскольку в $\mathbb{C}(\mathbb{C})$ абсолютно выпуклыми поглощающими множествами являются лишь открытые и замкнутые круги с центром в начале координат — доказать! — то у нас нет выбора.)

ПРИМЕР 5. Если U есть круг радиуса 1 с центром в начале координат, то $p_U(\mathbf{x})$ есть обычная евклидова норма $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x^2+y^2}$.

ПРИМЕР 6. Если U есть горизонтально ориентированный эллипс с центром в начале координат и полуосями 2, 1, то $p_U(\mathbf{x})$ есть норма $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2+y^2}$.

ПРИМЕР 7. Если U есть квадрат со сторонами 2 и центром в начале координат, то $p_U(\mathbf{x})$ есть норма $\|\mathbf{x}\| = \max |x|, |y|$.

ПРИМЕР 8. Если U есть полоса $|y| < 1$, то $p_U(\mathbf{x})$ есть полунорма $p(\mathbf{x}) = |y|$.

ПРИМЕР 9. Если U есть полоса, ограниченная прямыми $y = x+1$ и $y = x-1$, то $p_U(\mathbf{x})$ есть полунорма $p(\mathbf{x}) = |x-y|$.

ПРИМЕР 10. Если U есть квадрат, ограниченный прямыми $y = \pm x \pm 1$, то $p_U(\mathbf{x})$ есть норма $\|\mathbf{x}\| = |x| + |y|$.

§ 6. Задачи для самостоятельного решения

Задача 0. Ответить на вопросы по тексту.

Задача 1. Проверить аксиомы полунормы для примеров из параграфа 3.

Задача 2. Проверить, что множества из параграфа 5 действительно выпуклые, поглощающие и уравновешенные (где в определении уравновешенности следует заменить $\lambda \in \mathbb{C}$ на $\lambda \in \mathbb{R}$).

Задача 3. 1) Восполнить доказательство в параграфе 4, построив окрестность $\widetilde{V}$ по V.
2*) Провести доказательство непрерывности суммы в топологии, заданной полунормами (см. параграф 4).

Задача 4. 1) Верны ли (для введённых нами операции суммы и произведения множеств в линейном пространстве) равенства $(A+B)-B = A$, $2\cdot(0{,}5B) = B$?
2) Верно ли, что $(A \cup B) \setminus B = A$?

Задача 5. Доказать, что метрика, введённая в лекции 6 для метризации топологического пространства со счётной разделяющей системой полунорм, действительно удовлетворяет неравенству треугольника.

Задача 6*. Предположим, система подмножеств $\pi = \cup_{x \in X} \pi_x$ множества X удовлетворяет следующим условиям:
1) для любого $x \in X$ верно: $\pi_x \neq \varnothing$, для любого $U_x \in \pi_x$ $x \in U_x$;
2) для любых $U_{x,1}, U_{x,2} \in \pi_x$ найдётся $U_x \in \pi_x$ такое, что $U_x \subset U_{x,1} \cap \cap U_{x,2}$.
Верно ли, что π образует ФСО?
(Смысл этой задачи в том, достаточно ли проверить для окрестностей нуля и всех их переносов требования 1), 2), чтобы убедиться, что топология корректно ими задана.)

Семинар–Лекция 9

БАНАХОВЫ ПРОСТРАНСТВА: ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

§ 1. Общие вопросы теории нормированных пространств

1. Пространство $\mathcal{L}(N_1, N_2)$ банахово, если пространство N_2 банахово.

2. (Следствие.) Для любого нормированного пространства X сопряжённое к нему пространство $X^* \equiv \mathcal{L}(X, \mathbb{C})$ банахово.

3. (Следствие.) Рефлексивное нормированное пространство X с необходимостью банахово, т. к. оно изоморфно банахову пространству $X^{**} \equiv (X^*)^*$.

4. Следующие определения нормы линейного оператора $A : N_1 \to N_2$ равносильны (мы исключаем из рассмотрения тривиальный случай нульмерного пространства):

$$\|A\|_{1\to 2} = \sup_{x\neq\vartheta_1} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_1} = \sup_{\|x\|_1\leqslant 1} \|Ax\|_2 = \sup_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_2.$$

Здесь мы для ясности указали, нормы в каком из пространств — N_1 или N_2 — берутся. В дальнейшем там, где это очевидно, мы будем использовать просто обозначение нормы $\|\cdot\|$.

§ 2. Ряды в банаховом пространстве. Сходимость абсолютно сходящегося ряда

В любом линейном пространстве можно рассматривать конечные суммы элементов. В нормированном, к тому же, можно ввести понятие сходимости по норме или сильной сходимости:

$$y_n \to y \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \|y_n - y\| \to 0,$$

а следовательно, и понятие суммы ряда:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} S_n \equiv \sum_{n=1}^{N} x_n \to x.$$

Имеет место полезная теорема, обобщающая аналогичное утверждение для числовых рядов.

Теорема 1. *Абсолютно сходящийся ряд сходится, т. е. если сходится числовой ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|,$$

то сходится и исходный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

Доказательство этой теоремы, в полной аналогии со случаем числовых рядов, будет основано на критерии Коши сходимости последовательности, из которого очевидным образом вытекает критерий Коши сходимости ряда.

Доказательство.

1. Напомним, что в силу полноты банахова пространства относительно метрики, заданной нормой, всякая последовательность его элементов сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна. Таким образом, критерий Коши в части достаточного условия выполняется в банаховом пространстве автоматически.

2. Переходя к последовательностям частичных сумм, переформулируем с учётом очевидного тождества $S_{n+p} - S_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k$ критерий Коши сходимости последовательности в критерий Коши сходимости ряда:

3. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ в банаховом пространстве X сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N(\varepsilon), \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k \right\| < \varepsilon. \tag{2.1}$$

4. Докажем, что условие (2.1) выполнено, если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|. \tag{2.2}$$

$\square$ Действительно, пусть задано произвольное $\varepsilon > 0$. Воспользовавшись критерием Коши как необходимым условием сходимости ряда (2.2), находим такое N_1, что при всех $n > N_1$ и $p \in \mathbb{N}$ верно неравенство

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \|x_k\| < \varepsilon.$$

Но тогда (при тех же n, p) в силу неравенства треугольника верно и что

$$\left\|\sum_{k=n+1}^{n+p} x_k\right\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} \|x_k\| < \varepsilon.$$

Следовательно, выполнено условие Коши сходимости ряда в банаховом пространстве. ⊠

Теорема доказана.

Замечание 1. Условие непустоты пересечения последовательности вложенных замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю, можно принять за (эквивалентное) определение полноты метрического пространства. При этом существенно, что в этом рассуждении не используется компактность. С другой стороны, во многих книгах по началам анализа приводится доказательство сходимости фундаментальной числовой последовательности (из теоремы о вложенных отрезках), основанное на предварительном доказательстве её ограниченности и извлечении сходящейся подпоследовательности по теореме Больцано — Вейерштрасса. Такое доказательство, наиболее подходящее в силу своей простоты для начинающих изучать анализ, следует признать затемняющим суть дела при дальнейшем освоении идей и фактов анализа, ибо оно может создать впечатление, что для достаточности условия Коши существенна не только полнота, но и локальная компактность метрического пространства, что не соответствует действительности.

§ 3. Примеры линейных функционалов

ПРИМЕР 1. Установить непрерывность следующих линейных функционалов над пространством $C[-1;1]$:

1) $\langle f_1, x\rangle = x(0)$;
2) $\langle f_2, x\rangle = \frac{1}{3}(x(-1) + x(1))$;
3) $\langle f_3, x\rangle = \int_{-1}^{0} x(t)\,dt - \int_0^1 x(t)\,dt$;
4) $\langle f_4, x\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x(1/n)}{n!}$.

□ Проще установить ограниченность этих функционалов, которая, как мы знаем (см. лемму 1 лекции 7), равносильно непрерывности. Имеем

$$|\langle f_1, x\rangle| = |x(0)| \leqslant \|x\|_C \Rightarrow \|f_1\| \equiv \sup_{\|x\|_C=1} |\langle f_1, x\rangle| \leqslant 1,$$

$$|\langle f_2, x\rangle| = \left|\frac{1}{3}(x(-1) + x(1))\right| \leqslant \frac{2}{3}\|x\|_C \Rightarrow \|f_2\| \equiv \sup_{\|x\|_C=1} |\langle f_2, x\rangle| \leqslant \frac{2}{3},$$

$$|\langle f_3, x\rangle| \leqslant \left|\int\limits_{-1}^{0} x(t)\,dt\right| + \left|\int\limits_{0}^{1} x(t)\,dt\right| \leqslant 2\|x\|_C \Rightarrow \|f_3\| \equiv \sup_{\|x\|_C=1} |\langle f_3, x\rangle| \leqslant 2,$$

$$|\langle f_4, x\rangle| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x(1/n)}{n!}\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{x(1/n)}{n!}\right| \leqslant \|x\|_C (e-1).\boxtimes$$

Рекомендуется самостоятельно доказать, что f_4 является суммой ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}, \quad \langle f^{(n)}, x\rangle = \frac{x(1/n)}{n!}$$

не только поточечно (т. е. в смысле $*$-слабой сходимости), но и по норме пространства $(C[0,1])^*$.

До сих пор мы получили лишь оценки сверху на нормы каждого из функционалов. Определение нормы подсказывает, как получить оценки снизу. Именно, для любого ненулевого элемента $x_0 \in X$ имеем

$$\|f\| \equiv \sup_{x \neq \vartheta} \frac{|\langle f, x\rangle|}{\|x\|} \geqslant \frac{|\langle f, x_0\rangle|}{\|x_0\|}.$$

Более общо, для любой последовательности ненулевых элементов $\{x_n\} \subset X$ верно

$$\|f\| \geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|\langle f, x_n\rangle|}{\|x_n\|}.$$

Эти соображения мы и будем в дальнейшем использовать для вычисления нормы конкретных линейных функционалов. В частности, в примерах 1—4 все оценки сверху для норм точны, именно,

$$\|f_1\| = 1, \quad \|f_2\| = \frac{2}{3}, \quad \|f_3\| = 2, \quad \|f_4\| = e-1.$$

В самом деле, в примерах 1—2, 4 достаточно рассмотреть $x_0(t) \equiv 1$, а в примере 3 нетрудно построить последовательность функций из C[-1;1]

$$x_n(t) = \begin{cases} -1, & t \in [-1; -\frac{1}{n}]; \\ nt, & t \in [-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}]; \\ 1, & t \in [\frac{1}{n}; 1], \end{cases} \tag{3.1}$$

для которой $|\langle f_3, x\rangle| \to 2$ (проверить самостоятельно!).

П Р И М Е Р 2. Выяснить, будут ли ограниченными в $C[0;1]$ следующие линейные функционалы:

1) $\langle f_1, x\rangle = \int_0^1 x(\sqrt{t})\,dt$;

2) $\langle f_2, x\rangle = \int_0^1 x(t^2)\,dt$.

$\square$ Нетрудно сообразить, что в обоих случаях имеем

$$|x(\varphi(t))| \leqslant \|x\|_C,$$

где $\varphi(t) = \sqrt{t}$ или $\varphi(t) = t^2$, откуда

$$\int_0^1 x(\varphi(t))\,dt \leqslant 1 \cdot \|x\|_C.$$

Следовательно, $\|f_1\| \leqslant 1$, $\|f_2\| \leqslant 1$. Взяв $x(t) = 1$, устанавливаем, что $\|f_1\| = \|f_2\| = 1$. ⊠

ПРИМЕР 3. Установить ограниченность данного линейного функционала и найти его норму:
1) $\langle f_1, x\rangle = \int_{-1}^{1} tx(t)\,dt, \quad x \in C[-1;1]$;
2) $\langle f_2, x\rangle = \int_{-1}^{1} tx(t)\,dt, \quad x \in L^1[-1;1]$;
3) $\langle f_3, x\rangle = \int_{0}^{1} tx(t)\,dt, \quad x \in C^1[0;1]$;
4) $\langle f_4, x\rangle = \int_{-1}^{1} tx(t)\,dt, \quad x \in L^2[-1;1]$;
5) $\langle f_5, x\rangle = \int_{0}^{1} t^{-1/3}x(t)\,dt, \quad x \in L^2[0;1]$.

□ Рассмотрим все подпункты подробно.

1) Если бы нам нужно было только установить ограниченность функционала f, было бы достаточно оценить подынтегральное выражение следующим образом: $|tx(t)| \leqslant 1 \cdot \|x\|_C$ при $t \in [-1;1]$, откуда $\|f\| \leqslant 2$. Однако ясно, что это слишком грубая оценка, поскольку множитель t «зарезает» значение интеграла. Поэтому проведём более тонкую оценку:

$$\left|\int_{-1}^{1} tx(t)\,dt\right| \leqslant \int_{-1}^{1} |t|\cdot|x(t)|\,dt \leqslant \int_{-1}^{1} |t|\|x\|_C dt = 2\|x\|_C \int_{0}^{1} t\,dt = \|x\|_C,$$

откуда $\|f\| \leqslant 1$. Можно убедиться, что $\|f\| = 1$, рассмотрев последовательность функций (3.1) (сделайте это самостоятельно). Поэтому норма рассматриваемого функционала равна 1.

2) В силу неравенства Гёльдера при $p = 1$, $q = \infty$ имеем $\|f\| \leqslant 1$. Чтобы показать, что на самом деле $\|f\| = 1$, рассмотрим последовательность функций

$$x_n(t) = \begin{cases} 0, & t \in [-1; 1 - \frac{1}{n}); \\ 1, & t \in [1 - \frac{1}{n}; 1]. \end{cases}$$

Имеем тогда:

$$\|x\|_{L^1[-1;1]} = \frac{1}{n}, \quad \langle f_2, x\rangle = \int_{1-\frac{1}{n}}^{1} t\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\left(2 - \frac{1}{n}\right),$$

откуда

$$\|f_2\| \geqslant \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2n}\left(2 - \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1.$$

Следовательно, $\|f_2\| = 1$.

3) В данном случае с помощью интегрирования по частям получаем

$$|\langle f,x\rangle| = \left|\frac{t^2}{2}x(t)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{t^2}{2}x'(t)\,dt\right| \leqslant \frac{|x(1)|}{2} + \int_0^1 \frac{t^2}{2}|x'(t)|dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\|x\|_C + \frac{1}{6}\|x'\|_C \leqslant \frac{1}{2}\|x\|_C + \frac{1}{2}\|x'\|_C = \frac{1}{2}\|x\|_{C^1}.$$

Обратное неравенство следует из рассмотрения функции $x(t) = 1$. Замечание. В данном случае сработала бы и оценка типа сделанной в п. 1), но мы посчитали полезным продемонстрировать оценку, специфичную для пространства C^1.

4) Пользуясь неравенством Коши — Буняковского и тем фактом, что при совпадении функций оно обращается в равенство, находим $\|f\| = \|t\|_{L^2[-1;1]} = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

5) Из аналогичных соображений, пользуясь тем фактом, что $t^{-1/3} \in$ $\in L^2[0;1]$, получаем $\|f\| = \sqrt{\int_0^1 t^{-2/3}\,dt} = \sqrt{3}$. ⊠

ПРИМЕР 4. Рассмотрим линейные функционалы

$$\langle f_\varepsilon, x\rangle = \frac{1}{2\varepsilon}(x(\varepsilon) - x(-\varepsilon)), \quad f_0 = x'(0), \quad x(t) \in C^1[-1;1].$$

Требуется:
1) установить ограниченность этих функционалов и найти их норму;
2) доказать, что $f_\varepsilon \rightharpoonup f_0$ $*$-слабо;
3) выяснить, имеет ли место сильная сходимость $f_\varepsilon \to f_0$.

□ Проведём рассуждение в несколько этапов.

1) Заметим прежде всего, что норма каждого из рассматриваемых функционалов не превосходит 1. В самом деле,

$$|\langle f_0, x\rangle| = |x'(0)| \leqslant \|x'\|_C \leqslant \|x\|_C + \|x'\|_C \equiv \|x\|_{C^1},$$

$$|\langle f_\varepsilon, x\rangle| = \left|\frac{1}{2\varepsilon}(x(\varepsilon) - x(-\varepsilon))\right| = \left|\frac{1}{2\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x'(t)\,dt\right| \leqslant \frac{2\varepsilon}{2\varepsilon}\|x'\|_C \leqslant \|x\|_{C^1}. \tag{3.2}$$

Легко видеть, что $\|f_0\| = 1$. Чтобы это установить, достаточно рассмотреть функции

$$x_n(t) = \begin{cases} \frac{\mathbf{sgn}\, t}{2n}, & t \notin [-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}]; \\ t - \frac{n}{2}t|t|, & t \in [-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}]. \end{cases}$$

Читатель легко убедится самостоятельно, что $x_n(t) \in C^1[-1;1]$. Тогда имеем $\|x_n\|_{C^1} = 1 + \frac{1}{2n}$, $\langle f_0, x_n\rangle = 1$.

Для функционалов f_ε можно доказать, что $\|f_\varepsilon\| = \frac{1}{1+\varepsilon}$, но для этого понадобится провести более тонкие оценки. Заметим прежде всего, что

$$|\langle f_\varepsilon, x\rangle| \leqslant \frac{\|x\|_C}{\varepsilon}. \tag{3.3}$$

Но тогда
$$\frac{\|x\|_{C^1}}{|\langle f_\varepsilon, x\rangle|} \equiv \frac{\|x\|_C + \|x'\|_C}{|\langle f_\varepsilon, x\rangle|} = \frac{\|x\|_C}{|\langle f_\varepsilon, x\rangle|} + \frac{\|x'\|_C}{|\langle f_\varepsilon, x\rangle|} \geqslant \varepsilon + 1,$$
где в последнем неравенстве мы оценили первое слагаемое с помощью (3.3), а второе — с помощью неравенства $|\langle f_\varepsilon, x\rangle| \leqslant \|x'\|_C$, полученного по ходу дела в цепочке (3.2). Итак, для любой функции $x(t) \in C^1[-1;1]$ имеем
$$\frac{\|x\|_{C^1}}{|\langle f_\varepsilon, x\rangle|} \geqslant \varepsilon + 1, \quad \text{или} \quad \frac{|\langle f_\varepsilon, x\rangle|}{\|x\|_{C^1}} \leqslant \frac{1}{1+\varepsilon}.$$
Отсюда получаем, что
$$\|f_\varepsilon\| \leqslant \frac{1}{1+\varepsilon}. \tag{3.4}$$
Установим теперь обратное неравенство. Для этого при каждом фиксированном ε рассмотрим нечётные функции $x_{n\varepsilon}$, определённые при $t \geqslant 0$ следующим образом:
$$x_{n\varepsilon}(t) = \begin{cases} t, & t \in [0;\varepsilon), \\ \varepsilon + (t-\varepsilon) - \frac{n}{2}(t-\varepsilon)^2, & t \in [\varepsilon; \varepsilon + \frac{1}{n}]; \\ \varepsilon + \frac{1}{2n}, & t \in (\varepsilon + \frac{1}{n}; 1]. \end{cases}$$
Читатель легко проверит, что $x_{n\varepsilon}(t) \in C^1[-1;1]$ и $\|x_{n\varepsilon}\|_{C^1} = \varepsilon + \frac{1}{2n} + 1$.

Теперь легко видеть, что
$$\frac{\langle f_\varepsilon, x_{n\varepsilon}\rangle}{\|x\|_{C^1}} = \frac{\frac{1}{2\varepsilon}(x(\varepsilon) - x(-\varepsilon))}{\|x\|_{C^1}} = \frac{\frac{2\varepsilon}{2\varepsilon}}{1+\varepsilon+\frac{1}{2n}} \to \frac{1}{1+\varepsilon}$$
при $n \to \infty$, а поэтому $\|f_\varepsilon\| \geqslant \frac{1}{1+\varepsilon}$. Обратное неравенство было доказано выше.

2) Для любой функции $x(t) \in C^1[-1;1]$ имеем
$$\langle f_\varepsilon, x\rangle =$$
$$= \frac{1}{2\varepsilon}(x(\varepsilon) - x(-\varepsilon)) = \frac{1}{2}\left[\frac{x(\varepsilon) - x(0)}{\varepsilon} - \frac{x(0) - x(-\varepsilon)}{\varepsilon}\right] \to \frac{2x'(0)}{2} = x'(0)$$
при $\varepsilon \to 0$.

3) Сильная сходимость места не имеет. В самом деле, рассмотрим функции $x_n(t) = \frac{1}{n}\sin nt$. Ясно, что $\|x_n\|_{C^1} \leqslant \frac{n+1}{n}$. В то же время
$$|\langle f_\varepsilon - f, x_n\rangle| = \left|\frac{1}{2\varepsilon}\cdot\frac{\sin n\varepsilon + \sin n\varepsilon}{n} - 1\right| = \left|\frac{\sin n\varepsilon}{n\varepsilon} - 1\right|,$$
и поэтому
$$\|f_\varepsilon - f\| \geqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\left|\frac{\sin n\varepsilon}{n\varepsilon} - 1\right|}{\frac{n+1}{n}} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{n}{n+1}\cdot\left|\frac{\sin n\varepsilon}{n\varepsilon} - 1\right| = 1$$
при каждом фиксированном ε. Отсюда и следует, что $f_n \not\to f$. ⊠

§ 4. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Доказать, что всякое нормированное пространство становится метрическим, если положить $\rho(x, y) = \|x - y\|$. (На самом деле мы уже не раз этим пользовались.) Указание. Требуется проверить аксиомы метрики.

В дальнейшем мы будем использовать метрические понятия (полнота, замкнутость и т. д.) применительно к нормированному пространству, используя без оговорок именно эту метрику. При этом сходимость по ней (в отличие от других возможных типов) называется сильной сходимостью.

Задача 2. Доказать, что норма непрерывна как функция своего аргумента: если $x_n \to x$, то $\|x_n\| \to \|x\|$. Верно ли обратное?

Задача 3. Доказать, что следующие линейные пространства с указанным образом введёнными нормами являются а) нормированными; б) банаховыми:

1) $l^\infty \equiv m$ — пространство ограниченных последовательностей $\{x_n\}$, $\|\{x_n\}\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$;
2) l^1 — пространство последовательностей $\{x_n\}$, для которых ряд $\sum_{n=1}^\infty |x_n|$ сходится, $\|\{x_n\}\| = \sum_{n=1}^\infty |x_n|$;
3*) l^p — пространство последовательностей $\{x_n\}$, для которых ряд $\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p$ сходится, $\|\{x_n\}\| = \left(\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $p \in (1; +\infty)$;
4а, б*) $L^\infty([0;1])$;
5а, б) $C[0;1]$;
6а, б) $C^{(1)}[0;1]$.

Задача 4. Доказать, что двумерное координатное пространство $\mathbb{R}^2$ будет а) нормированным, б) банаховым, если ввести норму на нём каждым из следующих способов:

1) $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$;
2) $\|(x, y)\| = \max(|x|, |y|)$;
3) $\|(x, y)\| = |x| + |y|$.

Соответствующие нормированные пространства мы будем обозначать $l^2_{(2)} \equiv E^2$, $l^\infty_{(2)}$, $l^1_{(2)}$ (обозначения не общепринятые!). Изобразить единичные шары $\|(x, y)\| < 1$ в каждом случае.

Задача 5. 1) Доказать, что все нормы из предыдущей задаче эквивалентны. 2) Доказать, что в том же пространстве можно ввести норму по формуле $\|(x, y)\| = \sqrt{100x^2 + y^2}$ и что она будет эквивалентна любой норме из предыдущей задачи. (Это полезно для численных методов, если в рассматриваемой задаче характерная величина x составляет 0,01 от характерной величины y.)

Задача 6. Можно ли ввести норму так: $\|(x, y)\| = \left(\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}\right)^2$?

З а д а ч а 7. Установить непрерывность следующих линейных функционалов:
1) $\langle f, x\rangle = x_1 + x_2, \quad x = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\} \in l^2$;
2) $\langle f, x\rangle = x_1 + x_2, \quad x = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\} \in m$;
3) $\langle f, x\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}, \quad x = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\} \in l^2$;
4) $\langle f, x\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}, \quad x = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\} \in l^1$;
5) $\langle f_\varepsilon, x\rangle = \frac{1}{2\varepsilon}(x(\varepsilon) + x(-\varepsilon) - 2x(0)), \quad \varepsilon \in [-1; 1], \quad x \in C[-1; 1]$;
6) $\langle f, x\rangle = \int_0^1 x(t)\,dt, \quad x \in C[-1; 1]$.
В п. 1)—4) требуется также найти норму функционалов.

З а д а ч а 8. Рассмотрим на пространстве $C[0; 1]$ линейные функционалы

$$\langle f_n, x\rangle = \int\limits_0^1 x(t^n)\,dt, \quad \langle f, x\rangle = x(0).$$

1) Доказать ограниченность и найти норму этих функционалов.
2*) Доказать, что $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$.

З а д а ч а 9. 1) Пусть последовательность $\{x_n\} \subset X$ ограничена и для каждого f из некоторого всюду плотного в X^* множества $\langle f, x_n\rangle \to \to \langle f, x\rangle$. Доказать, что $x_n \rightharpoonup x$.
2) Сформулировать и доказать аналогичное утверждение для $*$-слабой сходимости функционалов.
3)* Можно ли отказаться от условия ограниченности последовательности?

З а д а ч а 10. Пусть X — вещественное линейное пространство, f — определённый на нём линейный функционал. Доказать, что он непрерывен тогда и только тогда, когда для любого $c \in \mathbb{R}$ множества

$$\{x \in X \mid \langle f, x\rangle < c\}, \quad \{x \in X \mid \langle f, x\rangle > c\}$$

открыты относительно метрики пространства X (порождённой нормой).

З а д а ч а 11. Пусть B — банахово пространство, $f \in B^*$ и для некоторого шара $\overline{B}_r(x_0) \equiv \{x \in B \mid \|x - x_0\| \leqslant r\}$ верно

$$\sup_{x,y \in \overline{B}_r(x_0)} |\langle f, x\rangle - \langle f, y\rangle| = 1. \tag{4.1}$$

Найти $\|f\|$.

Ц и к л з а д а ч п о с в я з и н о р м ы и т о п о л о г и и.

З а д а ч а 12. Доказать, что нормированное пространство становится линейным топологическим, если в качестве базы окрестностей нуля взять а) все открытые шары с центром в нуле; б) открытые шары радиусов $r_n = \frac{1}{n}$ с центром в нуле. Указание. Сначала опишите топологию, задаваемую такой базой окрестностей нуля, затем проверьте, что она согласована с линейными операциями.

Задача 13. (Продолжение.) Одну и ту же или разные топологии задают на $\mathbb{R}^2$ нормы 1)—3) из задачи 4 и норма из задачи 5?

Задача 14. (Продолжение.) 1) Доказать, что во всяком нормированном пространстве всякий открытый и всякий замкнутый шар выпуклы. 2) Доказать, что в нормированной пространстве замкнутый шар с центром в нуле является уравновешенным и поглощающим множеством.

(С учётом задач 12, 14 мы видим, что всякое нормированное пространство есть локально выпуклое линейное топологическое пространство.)

Задача 15. Нормированное пространство называется строго выпуклым, если равенство $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ достигается лишь для «коллинеарных» (т. е. пропорциональных, $x = \lambda y$ при некотором λ или $y = \vartheta$) x и y. Какие из пространств, построенных в задаче 4, строго выпуклы?

Задача 16*. (Продолжение.) Можно ли задать обычную метрическую топологию (порождаемую нормой из задачи 4, п. 1)) с помощью базы, состоящей из невыпуклых множеств? (Если да, то станет понятно, почему в определении локально выпуклого ЛТП говорится «...базу можно выбрать...».)

Задача 17. Доказать, что если последовательность элементов нормированного пространства сходится по одной из эквивалентных норм, то она сходится и по другой. Может ли некоторая последовательность сходиться к разным пределам (в зависимости от нормы), если эти нормы: а) эквиваленты, б) не обязательно эквивалентны?

Задача 18. Установить сепарабельность пространств l^p, $p \in (1; +\infty)$. (Заметим, что сепарабельность l^1 и несепарабельность $m \equiv l^\infty$ уже установлены.)

Семинар–Лекция 10

БАНАХОВЫ ПРОСТРАНСТВА. ДАЛЬНЕЙШИЕ СВЕДЕНИЯ

§ 1. Некоторые общие свойства линейных функционалов в банаховых пространствах

Свойство 1. Доказать, что *линейный функционал в банаховом пространстве непрерывен тогда и только тогда*, *когда его ядро замкнуто.*

$\square$ *Необходимость* условия $\ker f = \overline{\ker f}$ очевидна, поскольку из непрерывности функционала f сразу следует, что прообраз $\ker f$ замкнутого множества $\{0\}$ при отображении f должен быть замкнут. (Можно рассуждать и в терминах последовательностей: при $x_n \to x_0$, $\langle f, x_0\rangle = 0$ верно $\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x_0\rangle = 0$, т. е. точка, являющаяся предельной для ядра, принадлежит ядру. Но такое рассуждение не годится для более общего случая линейного топологического пространства.)

Достаточность. Осталось доказать, что из замкнутости ядра линейного функционала следует ограниченность этого линейного функционала.

1. Пусть $\ker f = \overline{\ker f}$. Как известно, непрерывность функционала равносильна его непрерывности в нуле, поэтому для разрывного (или, что равносильно, неограниченного) функционала найдётся такая последовательность элементов $x_n \to \vartheta$, что $|\langle f, x_n\rangle| > C$ при некотором $C > 0$. Но тогда и

$$y_n \equiv \frac{Cx_n}{\langle f, x_n\rangle} \to \vartheta \quad \text{и} \quad \langle f, y_n\rangle = C.$$

При этом $z_n \equiv y_n - y_1 \to -y_1$ и, как нетрудно проверить, $z_n \in \ker f$.

2. Но $y_1 \notin \ker f$, поскольку $\langle f, y_1\rangle = C \neq 0$, т. е. $\ker f$ незамкнуто. Полученное противоречие доказывает требуемое утверждение. $\boxtimes$

Свойство 2. Доказать, что *если два линейных функционала имеют одно и то же ядро*: $\ker f_1 = \ker f_2$, *то они пропорциональны.*

$\square$ Если оба ядра совпадают со всем пространством, то утверждение тривиально. В противном случае рассмотрим фиксированный элемент $x_0 \notin \ker f_1 = \ker f_2$ и произвольный элемент x. Наша задача установить, что

$$\langle f_2, x\rangle = \lambda\langle f_1, x\rangle \tag{1.1}$$

при некотором λ, не зависящем от x.

1. Заметим, что существует $\mu \neq 0$, при котором

$$\mu\langle f_1, x_0\rangle + \langle f_1, x\rangle = 0:$$

достаточно положить $\mu = \frac{-\langle f_1, x\rangle}{\langle f_1, x_0\rangle}$, поскольку числитель и знаменатель отличны от 0. Но тогда

$$\langle f_1, \mu x_0 + x\rangle = 0,$$

т. е. $\mu x_0 + x \in \ker f_1 = \ker f_2$. Следовательно,

$$\langle f_2, \mu x_0 + x\rangle = 0,$$

или

$$\mu\langle f_2, x_0\rangle + \langle f_2, x\rangle = 0.$$

2. Таким образом,

$$\langle f_2, x\rangle = -\mu\langle f_2, x_0\rangle = -\frac{-\langle f_1, x\rangle}{\langle f_1, x_0\rangle}\langle f_2, x_0\rangle = \frac{\langle f_2, x_0\rangle}{\langle f_1, x_0\rangle}\langle f_1, x\rangle,$$

что совпадает с (1.1), причём

$$\lambda = \frac{\langle f_2, x_0\rangle}{\langle f_1, x_0\rangle}.$$

⊠

З а м е ч а н и е 1. Мы существенно использовали (где?) тот факт, что размерность образа линейного функционала равна 1. Поэтому для произвольного линейного оператора приведённое доказательство не проходит. Рекомендуется обобщить рассуждение на случай линейных операторов с общим одномерным образом. Обратите внимание, что положить

$$\mu = -\frac{A_1 x}{A_1 x_0}$$

уже нельзя (это не числа!).

§ 2. Конкретные сопряжённые пространства: $(l^p)^* \sim l^q$

Докажем один полезный факт.

Т е о р е м а 1. *Пусть* $p \in (1; +\infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Тогда пространство* $(l^p)^*$ *изометрически изоморфно пространству* l^q, *т. е. существует такое взаимно однозначное линейное отображение* $J : l^q \to (l^p)^*$, *что для любого* $y \in l^q$ *верно* $\|Jy\|_{(l^p)^*} = \|y\|_q$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Построим отображение J следующим образом. Если

$$y = (y_1, y_2, \ldots) \in l^q,$$

то положим для всех $x \in l^p$

$$\langle Jy, x\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} y_n x_n. \tag{2.1}$$

Требуется проверить следующие утверждения.
1) Выражение в правой части (2.1) имеет смысл при всех $x \in l^p$.
2) Функционал Jy, заданный формулой (2.1), является линейным.
3) Функционал Jy является ограниченным, и его норма равна $\|y\|_q$.
4) Отображение J является линейным.
5) Отображение J является обратимым, т. е. при $\widetilde{y} \neq \widetilde{\widetilde{y}}$ функционалы $J\widetilde{y}$ и $J\widetilde{\widetilde{y}}$ различны.
6) Отображение J является сюръективным, т. е. для любого $f \in (l^p)^*$ существует такое $y \in l^q$, что $Jy = f$.

Перейдём к доказательству этих утверждений.

1) В силу арифметического неравенства Гёльдера при любом $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$\sum_{n=1}^{k} |y_n x_n| \leqslant \left(\sum_{n=1}^{k} |y_n|^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{n=1}^{k} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \equiv \|y\|_q \|x\|_p,$$

поэтому в силу произвольности k верно неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} |y_n x_n| \leqslant \|y\|_q \|x\|_p, \tag{2.2}$$

откуда следует абсолютная сходимость ряда в правой части (2.1).

2) В силу теорем об арифметических действиях со сходящимися числовыми рядами при любых $\widetilde{x}$, $\widetilde{\widetilde{x}} \in l^p$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ имеем

$$\langle Jy, \lambda\widetilde{x} + \mu\widetilde{\widetilde{x}}\rangle \equiv \sum_{n=1}^{\infty} y_n(\lambda\widetilde{x}_n + \mu\widetilde{\widetilde{x}}_n) =$$
$$= \lambda \sum_{n=1}^{\infty} y_n\widetilde{x}_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} y_n\widetilde{\widetilde{x}}_n \equiv \lambda\langle Jy, \widetilde{x}\rangle + \mu\langle Jy, \widetilde{\widetilde{x}}\rangle. \tag{2.3}$$

3) Ограниченность функционала Jy, а также оценка нормы $\|Jy\|_{(l^p)^*} \leqslant \|y\|_q$ следуют из неравенства (2.2). Покажем, что выполняется обратное неравенство. Для этого фиксируем $y \in l^q$ и положим

$$x = (|y_1|^{q-1}\, \mathbf{sgn}\, y_1, \ldots, |y_n|^{q-1}\, \mathbf{sgn}\, y_n, \ldots).$$

Заметим, что $x \in l^p$. В самом деле, при любом $k \in \mathbb{N}$ верно равенство

$$\sum_{n=1}^{k} |x_n|^p = \left\{ q = \frac{p}{p-1} \right\} = \sum_{n=1}^{k} |y_n|^{\left(\frac{p}{p-1}-1\right)p} =$$
$$= \sum_{n=1}^{k} |y_n|^{\frac{p}{p-1}} = \sum_{n=1}^{k} |y_n|^q \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q \equiv \|y\|_q^q.$$

В силу произвольности k отсюда вытекает сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p$ и оценка

$$\|x\|_p^p \equiv \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \leqslant \|y\|_q^q. \tag{2.4}$$

Теперь заметим:

$$\langle Jy, x\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} y_n |y_n|^{q-1}\, \mathbf{sgn}\, y_n = \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q = \|y\|_q^q. \tag{2.5}$$

Из (2.4) и (2.5) имеем

$$\frac{\langle Jy, x\rangle}{\|x\|_p} \geqslant \frac{\|y\|_q^q}{\|y\|_q^{\frac{q}{p}}} = \|y\|_q^{q\left(1-\frac{1}{p}\right)} = \|y\|^{q\frac{p-1}{p}} = \|y\|_q^{q\cdot\frac{1}{q}} = \|y\|_q, \tag{2.6}$$

что и доказывает неравенство $\|Jy\|_{(l^p)^*} \geqslant \|y\|_q$. Поскольку обратное неравенство уже установлено, получаем требуемое равенство $\|Jy\|_{(l^p)^*} = \|y\|_q$.

4) Линейность отображения J проверяется аналогично п. 2: при любом $x \in l^p$ имеем

$$\langle J(\lambda\widetilde{y} + \mu\widetilde{\widetilde{y}}), x\rangle \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda\widetilde{y}_n + \mu\widetilde{\widetilde{y}}_n\right) x_n =$$
$$= \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{y}_n x_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{\widetilde{y}}_n x_n \equiv \lambda\langle J\widetilde{y}, x\rangle + \mu\langle J\widetilde{\widetilde{y}}, x\rangle,$$

т. е. $J(\lambda\widetilde{y} + \mu\widetilde{\widetilde{y}}) = \lambda J\widetilde{y} + \mu J\widetilde{\widetilde{y}}$.

5) Обратимость отображения J следует из его линейности и изометричности. В самом деле,

$$\|J\widetilde{y} - J\widetilde{\widetilde{y}}\|_{(l^p)^*} = \|J(\widetilde{y} - \widetilde{\widetilde{y}})\|_{(l^p)^*} = \|\widetilde{y} - \widetilde{\widetilde{y}}\|_{l^q} > 0 \quad \text{при} \quad \widetilde{y} \neq \widetilde{\widetilde{y}}.$$

Значит, $J\widetilde{y} \neq J\widetilde{\widetilde{y}}$ в силу первого свойства нормы. Однако этот же результат легко получить и непосредственно. В самом деле, если $\widetilde{y} \neq \widetilde{\widetilde{y}}$, существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $\widetilde{y}_n \neq \widetilde{\widetilde{y}}_n$. Положим

$$x = e_n = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1}, 1, 0, \ldots) \in l^p. \tag{2.7}$$

Тогда в силу (2.1) получаем

$$\langle J\widetilde{y}, x\rangle = \widetilde{y}_n \neq \widetilde{\widetilde{y}}_n = \langle J\widetilde{\widetilde{y}}, x\rangle,$$

т. е. $J\widetilde{y}$ и $J\widetilde{\widetilde{y}}$ суть заведомо разные функционалы.

6) Пусть $f \in (l^p)^*$. Положим

$$y_f = (y_1^f, y_2^f, \ldots), \quad y_n^f = \langle f, e_n\rangle, \tag{2.8}$$

где e_n задано формулой (2.7). Основную сложность представляет доказательство того факта, что элемент y, определённый формулой (2.8), действительно принадлежит l^q. Как только это будет доказано, в силу пп. 1—4 мы автоматически получим, что y_f задаёт линейный функционал Jy_f. При этом $Jy_f = f$. В самом деле, для $x = e_n$, $n \in \mathbb{N}$ равенство

$$\langle Jy_f, x\rangle = \langle f, x\rangle, \tag{2.9}$$

очевидно, выполняется по построению — в силу (2.8). Но тогда в силу линейности функционалов Jy_f и f равенство (2.9) верно и для всех <u>конечных</u> линейных комбинаций

$$\sum_{n=1}^{N} c_n e_n \tag{2.10}$$

элементов e_n. Наконец, поскольку любой элемент $x \in l^p$ может быть с произвольной точностью приближен элементами вида (2.10), то равенство (2.9) гарантируется непрерывностью обоих функционалов (см. задачу 5).

Итак, осталось лишь доказать, что $y_f \in l^q$. Поступим аналогично доказательству второй части п. 3. Именно, положим

$$x^{(k)} = (|y_1^f|^{q-1} \,\mathbf{sgn}\, y_1^f, \ldots, |y_k^f|^{q-1} \,\mathbf{sgn}\, y_k^f, 0, 0, \ldots).$$

Очевидно, $x^{(k)} \in l^p$ (в силу финитности). Имеем тогда:

$$\langle f, x^{(k)}\rangle = \sum_{n=1}^{k} (x^{(k)})_n \langle f, e_n\rangle = \sum_{n=1}^{k} |y_n^f|^{q-1} \,\mathbf{sgn}\, y_n^f \cdot y_n^f = \sum_{n=1}^{k} |y_n^f|^q. \tag{2.11}$$

С другой стороны,

$$\langle f, x^{(k)} \rangle \leqslant \|f\|_{(l^p)^*} \|x^{(k)}\|_p, \tag{2.12}$$

где

$$\|x^{(k)}\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |(x^{(k)})_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{n=1}^{k} |(x^{(k)})_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{n=1}^{k} |y_n^f|^{(q-1)p} \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left\{ p(q-1) = p\left(\frac{p}{p-1} - 1 \right) = p\frac{1}{p-1} = \frac{p}{p-1} = q \right\} = \left(\sum_{n=1}^{k} |y_n^f|^q \right)^{\frac{1}{p}},$$

или

$$\|x^{(k)}\|_p = \left(\sum_{n=1}^{k} |y_n^f|^q \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.13}$$

Из (2.11)—(2.13) получаем:

$$\sum_{n=1}^{k} |y_n^f|^q \leqslant \|f\|_{(l^p)^*} \left(\sum_{n=1}^{k} |y_n^f|^q \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.14}$$

Деля обе части неравенства (2.14) на $\left(\sum_{n=1}^{k} |y_n^f|^q\right)^{\frac{1}{p}}$, с учётом равенства $1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p} = \frac{1}{q}$ получаем:

$$\left(\sum_{n=1}^{k} |y_n^f|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \|f\|_{(l^p)^*}. \tag{2.15}$$

Поскольку (2.15) верно для всех $k \in \mathbb{N}$, получаем:

$$\|y\|_q \equiv \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n^f|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \|f\|_{(l^p)^*} < +\infty.$$

В силу рассуждений в начале п. 6 это завершает доказательство теоремы.

Теорема доказана.

Тем самым мы, как говорят, описали общий вид ограниченного линейного функционала в l^p, $1 < p < +\infty$. Иногда пространства $(l^p)^*$ и l^q в этом смысле отождествляют и пишут: $(l^p)^* = l^q$.

Теорема 2. В смысле, аналогичном теореме 1, $(l^1)^* = l^\infty \equiv m$.

Доказательство составляет задачу 2.

Замечание 2. В силу общих свойств сопряжённых пространств (см. лекцию 7) верно вложение $m^* = (l^1)^{**} \supset l^1$. Как мы скоро увидим, $m^* \neq l^1$ и поэтому здесь имеет место строгое вложение.

§ 3. Случай сходимости на всюду плотном подмножестве

Существует ещё одна теорема, также иногда называемая теоремой Банаха—Штейнгауза. Однако её сходство с теоремами 11 и 12 лекции 7 чисто внешнее: для её доказательства принцип равномерной ограниченности (и, соответственно, теорема Бэра) не нужен.

Теорема 3. *Пусть:*
1) T_n, $n \in \mathbb{N}$, — *линейные операторы, действующие из банахова пространства* X_1 *в банахово пространство* X_2, *причём* $\exists C > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\|T_n\| \leqslant C$;
2) *счётное множество* $\{x_j\} \subset X_1$ *таково, что его линейная оболочка* $L(\{x_j\})$ *плотна в* X_1 *(иными словами, для любого* $x \in X_1$ *и любого* $\varepsilon > 0$ *найдётся такая конечная линейная комбинация* y *элементов* x_j, *что* $\|x - y\| < \varepsilon$);
3) $\forall j \in \mathbb{N}$ *существует предел* $\lim_{n\to\infty} T_n x_j$, *который мы обозначим через* $T(x_j)$.
Тогда:
0) *Оператор* $T(x)$ *однозначно продолжается с* $\{x_j\}$ *до линейного оператора на* $L(\{x_j\})$,
1) *для любого* $x \in X_1$ *существует предел* $\lim_{n\to\infty} T_n x$, *который мы обозначим через* $\widetilde{T}(x)$; *при этом на* $L(\{x_j\})$ *оператор* $\widetilde{T}(x)$ *совпадает с продолжением оператора* $T(x)$ *на* $L(\{x_j\})$;
2) $\widetilde{T}(x)$ — *линейный оператор*;
3) *оператор* $\widetilde{T}$ *непрерывен, причём* $\left\|\widetilde{T}\right\| \leqslant C$.

Доказательство.

0. Пусть $x \in L(\{x_j\})$. Тогда существует представление

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} c_j x_j, \tag{3.1}$$

где лишь конечное количество коэффициентов отлично от 0. Тогда следует положить

$$T(x) := \sum_{j=1}^{\infty} c_j T(x_j). \tag{3.2}$$

Если система $L(\{x_j\})$ линейно зависима, то элемент x может иметь и другие представления, отличные от (3.1). Возьмём одно из них:

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \widetilde{c}_j x_j \tag{3.3}$$

(здесь также лишь конечное количество коэффициентов отлично от 0). Но тогда имеем

$$
\begin{gathered}
T_n x = T_n x \\
\Downarrow \\
T_n \sum_{j=1}^{\infty} c_j x_j = T_n \sum_{j=1}^{\infty} \widetilde{c}_j x_j \\
\Downarrow \\
\sum_{j=1}^{\infty} c_j T_n x_j = \sum_{j=1}^{\infty} \widetilde{c}_j T_n x_j,
\end{gathered}
$$

где, напомним, все суммы на самом деле конечны. Перейдя в последнем равенстве к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j T(x_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \widetilde{c}_j T(x_j).$$

Следовательно, если бы мы при построении $T(x)$ по формуле (3.2) использовали бы представление (3.3) вместо (3.1), то пришли бы к тому же самому результату. Следовательно, оператор T теперь корректно определён на $L(\{x_j\})$. Очевидна линейность такого продолжения: достаточно рассмотреть для произвольных элементов x и y их любые возможные представления

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} c_j x_j, \quad y = \sum_{j=1}^{\infty} y_j x_j \tag{3.4}$$

(где по-прежнему отлично от нуля лишь конечное число коэффициентов) и записать равенство

$$
\begin{aligned}
T(\lambda x + \mu y) = T\left(\lambda \sum_{j=1}^{\infty} c_j x_j + \mu \sum_{j=1}^{\infty} y_j x_j\right) = T\left(\sum_{j=1}^{\infty} (\lambda c_j + \mu b_j) x_j\right) = \\
= \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda c_j + \mu b_j) T(x_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda c_j T(x_j) + \sum_{j=1}^{\infty} \mu b_j T(x_j) = \\
= \lambda \sum_{j=1}^{\infty} c_j T(x_j) + \mu \sum_{j=1}^{\infty} b_j T(x_j) = \lambda T(x) + \mu T(y),
\end{aligned}
$$

причём в силу сказанного выше неважно, какие именно представления для x и y были выбраны.

1. Докажем, что для любого $x \in X_1$ последовательность $\{T_n x\}$ фундаментальна.

Для этого воспользуемся так называемым «$\frac{\varepsilon}{3}$-приёмом». Заметим сначала, что для произвольных $x \in X_1$, y из линейной оболочки x_j и любых $n, p \in \mathbb{N}$ верно

$$\|T_{n+p}x - T_n x\| \leqslant \|T_{n+p}x - T_{n+p}y\| + \|T_{n+p}y - T_n y\| + \|T_n y - T_n x\|. \tag{3.5}$$

2. Пусть теперь задано $\varepsilon > 0$. Выберем такое y из линейной оболочки x_j, что $\|x-y\| \leqslant \frac{\varepsilon}{3C}$. В силу условия 3), линейности операторов T_n и теоремы о пределе суммы существует предел $\lim_{n\to\infty} T_n y$. Следовательно, последовательность $\{T_n y\}$ фундаментальна, а поэтому существует такое $N \in \mathbb{N}$, что при всех $n > N$, $p \in \mathbb{N}$ верно неравенство $\|T_{n+p}y - T_n y\| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$.

3. Итак, мы можем оценить сверху каждое из слагаемых в правой части (3.5) числом $\varepsilon/3$ (для первого и третьего слагаемых понадобится оценки нормы операторов $\|T_n\| \leqslant C$). Таким образом, при всех n, больших выбранного N, имеем $\|T_{n+p}x - T_n x\| < \varepsilon$, что и требовалось.

4. Утверждение о том, что на линейной оболочке элементов x_j операторы T и $\widetilde{T}$ совпадают, очевидно.

5. Линейность оператора $\widetilde{T}$ доказывается теперь в полной аналогии с п. 1 доказательства теоремы 12 в лекции 7.

6. Оценка $\left\|\widetilde{T}\right\| \leqslant C$ следует из цепочки

$$\left\|\widetilde{T}\right\| = \sup_{\|x\|=1} \left\|\widetilde{T}x\right\| = \sup_{\|x\|=1} \left\|\lim_{n\to\infty} T_n x\right\|,$$

в которой в силу п. 1) $\|T_n x\| \leqslant C$.

Теорема доказана.

Замечание 3. Утомительная проверка корректности определения оператора T на всей линейной оболочке $L(\{x_j\})$ может быть опущена, если известно, что среди элементов x_j нет линейно зависимых и, таким образом, каждый элемент $x \in L(\{x_j\})$ имеет единственное представление вида (3.1).

Замечание 4. Поучительно сравнить данную теорему с теоремой 12 лекции 7. По сравнению с ней мы требуем сходимость не для всех x, а (с учётом п. 0 доказательства) на всюду плотном подмножестве, но при этом накладываем условие равномерной ограниченности норм операторов. Оказывается, от этого условия нельзя отказаться. (См. задачу 6.)

Замечание 5. Ещё раз подчеркнём, что принцип равномерной ограниченности в доказательстве этой теоремы не использовался (напротив, равномерная ограниченность уже требуется в условии), поэтому фигурирующее иногда её название как теоремы Банаха—Штейнгауза следует считать неудачным.

Замечание 6. Полезно сравнить доказательство утверждения 1) с другими примера применения «$\frac{\varepsilon}{3}$-приёма», например доказательством непрерывности равномерного предела непрерывных функций или заключительной частью доказательства теоремы Арцела (см. курс мат. анализа за III семестр).

§ 4. Нерефлексивность некоторых пространств

Сформулируем два следствия из теоремы Хана—Банаха, которые будут использованы в этом параграфе.

Следствие 1. *Пусть $x \in X$, $x \neq \vartheta$. Тогда существует линейный функционал $f \in X^*$ такой, что $\|f\| = 1$, $\langle f, x\rangle = \|x\|$. (См. второе следствие, теорема 7 в лекции 7.)*

Следствие 2. *Пусть X — банахово пространство. Тогда из сепарабельности X^* следует сепарабельность X. Иными словами, сопряжённое к несепарабельному банахову пространство не может быть сепарабельным. (См. четвёртое следствие, лекция 7.)*

ПРИМЕР 1. Установим *нерефлексивность пространства* l^1.

1) Легко установить сепарабельность пространства l^1 (см. задачу 17 из семинара-лекции 5).

2) Пространство $m \equiv l^\infty$, являющееся сопряжённым к пространству l^1 (см. задачу 2), несепарабельно (см. лекцию 4).

Итак, в силу следствия 2 получаем, что $m^* \neq l^1$.

ПРИМЕР 2. *Нерефлексивность пространства* $C[-1;1]$ мы покажем другим способом.

1. Прежде всего заметим, что если пространство B рефлексивно, то для любого линейного функционала $f \in B^*$ найдётся элемент $x \in B$, для которого $\langle f, x\rangle = \|f\|_*\|x\|$ (здесь мы для большей ясности явно указали на норму в сопряжённом пространстве).

$\square$ Действительно, в силу следствия 1 из теоремы Хана—Банаха (см. начало этого параграфа), применённого к B^* и $(B^*)^* = B^{**}$, для каждого линейного функционала $f \in B^*$ существует линейный функционал $F \in B^{**}$ такой, что $\langle F, f\rangle_* = \|F\|_{**}\|f\|_*$.

Но тогда в силу рефлексивности пространства B можно положить $x = J^{-1}F$, причём в силу изометричности отображения $J : B \to B^{**}$ верно $\|x\| = \|F\|_{**}$. $\boxtimes$

2. Рассмотрим теперь функционал

$$\langle f, x\rangle = \int\limits_{-1}^{1} \mathbf{sgn}\, t\, x(t)\, dt.$$

Легко видеть, что $\|f\| = 2$.

$\square$ Действительно,

$$|\langle f, x\rangle| \leqslant \int\limits_{-1}^{1} |x(t)|\, dt \leqslant 2\|x\|.$$

С другой стороны, для последовательности функций из $C[-1;1]$, заданной формулой

$$x_n(t) = \begin{cases} -1, & t \in [-1; -\frac{1}{n}]; \\ nt, & t \in [-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}]; \\ 1, & t \in [\frac{1}{n}; 1], \end{cases}$$

имеем $\langle f, x_n \rangle \to 2$ (проверить!). Далее, в силу тождества

$$\langle f, x \rangle = -\int\limits_{-1}^{0} x(t)\,dt + \int\limits_{0}^{1} x(t)\,dt,$$

теоремы об устойчивости знака непрерывной функции и очевидных оценок интегралов ясно, что равенство $\langle f, x \rangle = 2$ может достигаться при $\|x\| \leqslant 1$ только в случае, когда $x(t) = \mathbf{sgn}\, t$ (при $t \neq 0$), что невозможно в силу непрерывности функции $x(t) \in C[-1;1]$. ⊠

Этот факт, с учётом доказанного в п. 1 утверждения, гарантирует нерефлексивность пространства $C[-1;1]$.

Отметим, что в примере 2, в отличие от примера 1, мы даже не пытались описать пространство, сопряжённое к $C[-1;1]$ (не говоря уже о втором сопряжённом) и получили результат о нерефлексивности пространства $C[-1;1]$ лишь из общей теории.

В следующем примере мы поступим «наиболее конструктивно», построив некоторый функционал из второго сопряжённого пространства X^{**} и доказав, что он не порождается никаким элементом исходного пространства X.

ПРИМЕР 3. Вспомним, что $(L^1(-1;1))^* = L^\infty(-1;1)$, и установим, что $(L^\infty(-1;1))^* \supsetneq L^1(-1;1)$, *т. е. пространство* $L^1(-1;1)$ *не является рефлексивным.*

□ Для этого мы построим пример функционала из $(L^\infty(-1;1))^*$, не порождаемого ни одним элементом $L^1(-1;1)$, — некоторый аналог дельта-функции для $L^\infty(-1;1)$.

1. Очевидно, $C[-1;1] \subset L^\infty(-1;1)$. Уточним, что́ именно здесь можно утверждать.

Нам важно, что если некоторый элемент $f \in L^\infty(-1;1)$ имеет непрерывный представитель $f_0(x) \in C[-1;1]$, то он не может иметь никакого другого непрерывного представителя.

В самом деле, если бы существовал другой непрерывный представитель $f_1(x) \not\equiv f_0(x)$, то в силу теоремы об устойчивости знака непрерывной функции, применённой к $f_1(x) - f_0(x)$, мы бы получили, что $f_1(x)$ отличается от $f_0(x)$ на некотором интервале, т. е. множестве заведомо положительной меры.

Следовательно, $f_0(x)$ и $f_1(x)$ не эквивалентны и поэтому не могут быть представителями одного элемента из $L^\infty(-1;1)$.

2. Из доказанного выше следует, что на подпространстве $C[-1;1] \subset \subset L^\infty(-1;1)$ корректно определён функционал

$$\langle F, f\rangle = f_0(0),$$

где f_0 — непрерывный представитель элемента f. Очевидно, такой функционал является линейным и непрерывным на подпространстве $C[-1;1]$ (его норма равна единице). Следовательно, в силу теоремы Хана—Банаха он может быть продолжен на всё пространство $L^\infty(-1;1)$ с сохранением нормы.

3. Докажем, что не существует $g \in L^1(-1;1)$ такого, что

$$\forall f \in L^\infty(-1;1) \quad \langle F, f\rangle = \int\limits_{-1}^{1} f(x)g(x)\,d\mu.$$

Достаточно доказать, что такое представление функционала F невозможно даже на подпространстве $C[-1;1]$. Для доказательства от противного рассмотрим последовательность

$$f_n(x) = \begin{cases} nx+1, & x \in \left[-\frac{1}{n};0\right], \\ -nx+1, & x \in \left[0;\frac{1}{n}\right], \\ 0, & x \in [-1;1] \setminus \left[-\frac{1}{n};\frac{1}{n}\right]. \end{cases}$$

Очевидно, что $f_n \in C[-1;1]$ и что при всех n верно $\langle F, f_n\rangle = 1$. Заметим также, что при всех n имеют место неравенства $0 \leqslant f_n(x) \leqslant 1$.

Тогда в силу свойств интеграла Лебега имеем

$$1 = |1| = \left|\int\limits_{-1}^{1} f_n(x)g(x)\,d\mu\right| = \\ = \left|\int\limits_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f_n(x)g(x)\,d\mu\right| \leqslant \int\limits_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} |f_n(x)g(x)|\,d\mu \leqslant \int\limits_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} |g(x)|\,d\mu \to 0, \quad (4.1)$$

где предельное соотношение вытекает из абсолютной непрерывности интеграла Лебега.

Полученное противоречие доказывает невозможность существования $g(x) \in L^1(-1;1)$ с указанным свойством. ⊠

§ 5. Пример неэквивалентности слабой и $*$-слабой сходимости

ПРИМЕР 4. *Слабая и $*$-слабая сходимости неэквивалентны.*

$\square$ Очевидно, нам потребуется рассмотреть некоторое нерефлексивное пространство.

Для этого придётся лишь слегка дополнить рассуждения из предыдущего примера.

Действительно, соотношение (4.1), верное для всякой функции $g(x) \in L^1(-1;1)$, показывает, что имеет место $*$-слабая сходимость

$$f_n(x) \overset{*}{\rightharpoonup} 0 \quad \text{в} \quad L^\infty(-1;1).$$

Однако в силу полученного ранее соотношения $\langle F, f_n\rangle = 1$ получаем, что

$$f_n(x) \not\rightharpoonup 0 \quad \text{в} \quad L^\infty(-1;1).$$

Более того, поскольку слабая сходимость влечёт $*$-слабую, то предположение о том, что $f_n(x) \rightharpoonup f(x) \neq 0$ в $L^\infty(-1;1)$, влечёт $f_n(x) \overset{*}{\rightharpoonup} f(x) \in L^\infty(-1;1)$, где $f(x) \neq 0$.

Но последовательность не может иметь более одного $*$-слабого предела (см. ниже свойство 3), а следовательно, предположение о слабой сходимости последовательности $\{f_n(x)\}$ приводит нас к противоречию. $\boxtimes$

Свойство 3. *Отделимость $*$-слабой топологии* (единственность $*$-слабого предела).

$\square$ Докажем, что если

$$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f, \quad f_n \overset{*}{\rightharpoonup} \widetilde{f},$$

где все рассматриваемые функционалы принадлежат пространству X^*, X — банахово пространство, то $\widetilde{f} = f$.

Действительно, для всякого $x \in X$ имеем

$$\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle, \quad \langle f_n, x\rangle \to \left\langle \widetilde{f}, x\right\rangle.$$

Следовательно (в силу отделимости метрической топологии в пространстве чисел $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) для всякого $x \in X$ верно равенство $\langle f, x\rangle = \left\langle \widetilde{f}, x\right\rangle$, но это и означает не что иное, как равенство функционалов f и $\widetilde{f}$. $\boxtimes$

Замечание 7. В дополнительной лекции 1 мы установили отделимость метрической топологии в произвольном метрическом пространстве, что эквивалентно единственности предела последовательности в произвольном метрическом пространстве. Как мы видели в семинаре-лекции 7, для топологического пространства ситуация, вообще говоря, совершенно иная. Поэтому при доказательстве единственности слабого предела мы не могли сослаться на единственность предела, доказанную для метрических пространств.

§ 6. Задачи для самостоятельного решения

Задача 0. Ответить на вопросы по тексту.

Задача 1. Привести пример «неколлинеарных» линейных операторов, ядра которых совпадают.

Задача 2. Доказать, что $(l^1)^*$ изометрически изоморфно l^∞.

Задача 3. Доказать отделимость слабой топологии (единственность слабого предела).

Задача 4. В каком месте не пройдут рассуждения примера 3, если вместо пространств L^1, L^∞ рассматривать L^p, L^q, $p > 1$?

Задача 5. Пусть $f, g \in C(M_1, M_2)$ — непрерывные отображения метрического пространства M_1 в метрическое пространство M_2 (с областью определения M_1), и пусть их значения совпадают на некотором всюду плотном в M_1 множестве. Доказать, что f и g совпадают всюду на M_1.

Задача 6*. Показать, что если исключить из условия теоремы 3 требование равномерной ограниченности норм операторов, то для некоторых $x \in X_1$ предела $T_n x$ при $n \to \infty$ может и не существовать.

Семинар–Лекция 11

СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ. ОБСУЖДЕНИЕ

§ 1. Некоторые понятия и факты теории аналитических банаховозначных функций

Пусть B_1 — банахово пространство. В частности, в качестве B_1 может выступать произвольная банахова алгебра $\mathcal{A}$ [1] или банахова алгебра ограниченных линейных операторов $L(B, B)$. Будем говорить о свойствах функций комплексного аргумента со значениями в B_1. Не оговаривая особо, все рассматриваемые функции считаем однозначными.

1. Аналитическая функция. *Функция $f(\lambda)$ называется аналитической в области $D \subset \mathbb{C}$, если она дифференцируема всюду в D. Функция $f(\lambda)$ называется аналитической в точке $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, если она аналитична в некоторой окрестности этой точки.*

Как было сказано в лекции 10, аналитичность функции $f(\lambda)$ (при $\lambda \in D \subset \mathbb{C}$) со значениями в банаховой алгебре $\mathcal{A}$ равносильна следующему требованию:

$$\forall w^* \in \mathcal{A}^* \text{ числовая функция } \varphi(\lambda) \equiv \langle w^*, f(\lambda)\rangle \text{ аналитична в } D.$$

Более того, если $T(\lambda)$ — операторнозначная функция, $T(\lambda) : D \to \to L(B, B)$, то она аналитична тогда и только тогда, когда

$$\forall w^* \in B^*, \forall x \in B \text{ числовая функция } \psi(\lambda) \equiv \langle w^*, T(\lambda)x\rangle \text{ аналитична в } D.$$

Последнее также равносильно условию

$$\forall x \in B \text{ функция } \chi(\lambda) \equiv T(\lambda)x : D \to B \text{ аналитична в } D.$$

Замечание 1. Необходимость приведённых выше условий очевидна. Нетривиальным утверждением является их достаточность (которую мы здесь не доказываем).

2. Теорема Коши об обращении в ноль интеграла по замкнутому контуру: если l — замкнутый кусочно гладкий контур, ограничиваю-

[1] Здесь и далее всюду подразумевается банахова алгебра с единицей.

щий область G (возможно, многосвязную или несвязную), причём $\overline{G} \subset \subset D$ и функция f аналитична в D, то

$$\int\limits_l f(\lambda)\,d\lambda = \vartheta,$$

где ϑ — нулевой элемент пространства B_1. В дальнейшем, говоря «контур», мы всюду будем иметь в виду замкнутую кусочно гладкую кривую.

3. Формула Коши. Если функция $f(\lambda)$ аналитична в точке λ_0, то для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$ верна формула

$$f^{(n)}(\lambda_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_l \frac{f(\lambda)}{(\lambda - \lambda_0)^{n+1}} d\lambda, \tag{1.1}$$

где замкнутый контур l охватывает некоторую окрестность точки λ_0, целиком лежащую в области аналитичности функции $f(\lambda)$, и проходится в положительном направлении.

4. Разложение в ряд Лорана в окрестности изолированной особой точки. Пусть функция $f(\lambda)$ аналитична в некоторой проколотой круговой окрестности точки λ_0. Тогда в этой окрестности для неё верно представление

$$f(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(\lambda - \lambda_0)^n, \text{ где } a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_l \frac{f(\lambda)}{(\lambda - \lambda_0)^{n+1}} d\lambda, \quad a_n \in B_1. \tag{1.2}$$

В частности, если функция $f(\lambda)$ аналитична в точке λ_0, то в некоторой окрестности последней верно представление (ряд Тейлора)

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(\lambda - \lambda_0)^n, \tag{1.3}$$

где с учётом (1.2) и (1.1) имеем

$$a_n = \frac{f^{(n)}(\lambda_0)}{n!}.$$

Замечание 2. Не следует путать ряды (1.2), (1.3) с банаховозначными коэффициентами по степеням числа $\lambda - \lambda_0$, которые имеют смысл для любой банаховозначной функции, с рядом

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n a^n, \quad \alpha_n \in \mathbb{C},$$

с числовыми коэффициентами по степеням элемента банаховой алгебры. Примером последнего является, скажем, ряд Неймана.

Отметим здесь же нужные нам свойства интеграла Бохнера по кусочно гладкой кривой l конечной длины (в частности, замкнутой):

1) возможность вынести постоянный числовой множитель за знак интеграла:

$$\int\limits_l \lambda_0 f(\lambda)\,d\lambda = \lambda_0 \int\limits_l f(\lambda)\,d\lambda, \quad f(\lambda) : D \to B_1; \tag{1.4}$$

2) возможность вынести постоянный банаховозначный множитель за знак интеграла:

$$\int\limits_l g(\lambda) a\,d\lambda = \left(\int\limits_l g(\lambda)\,d\lambda\right) a, \quad a \in B_1, g : D \to \mathbb{C}, \tag{1.5}$$

а также для случая банаховой алгебры (порядок банаховозначных сомножителей менять нельзя!)

$$\int\limits_l g(\lambda) a\,d\lambda = \left(\int\limits_l g(\lambda)\,d\lambda\right) a, \quad a \in \mathcal{A}, g : D \to \mathcal{A},$$

и

$$\int\limits_l a g(\lambda)\,d\lambda = a\left(\int\limits_l g(\lambda)\,d\lambda\right), \quad a \in \mathcal{A}, g : D \to \mathcal{A};$$

3) возможность почленно интегрировать равномерно сходящийся ряд;

4) оценка

$$\left\|\int\limits_l f(\lambda)\,d\lambda\right\| \leqslant L(l) \sup_{\lambda \in l} \|f(\lambda)\|, \quad f(\lambda) : D \to B_1,$$

где $L(l)$ — длина контура l.

§ 2. Теорема об отображении рядов

Теорема 1. Ряд переходит в ряд. *Пусть $a \in \mathcal{A}$ и степенной ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \lambda^n \tag{2.1}$$

имеет радиус сходимости $r > \|a\|$. *Тогда отображение* $\mathcal{O}_a$, *задаваемое интегралом Данфорда*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_l \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \lambda^n R(\lambda, a)\, d\lambda, \tag{2.2}$$

переводит функцию, равную сумме ряда (2.1), *в элемент*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n a^n \in \mathcal{A}, \tag{2.3}$$

причём ряд в (2.3) *сходится.*

Замечание 3. Здесь и далее, если не оговорено особо, в интеграле Данфорда берётся произвольный кусочно гладкий контур, охватывающий спектр элемента a и проходимый в положительном направлении. Кроме того, в (2.2) контур должен лежать целиком в круге сходимости ряда (2.1). Эти условия не противоречат друг другу, как мы увидим в доказательстве.

Для доказательства теоремы нам понадобится следующая

Лемма 1. Степень переходит в степень. *При всех* $n = 0, 1, 2, \ldots$ *верно равенство*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_l \lambda^n R(\lambda, a)\, d\lambda = a^n.$$

Доказательство.

1. Заменим прежде контур l на контур $l' = \{\lambda \mid \lambda = (\|a\| + \varepsilon)e^{i\varphi}, \varphi \in [0; 2\pi],\ \varepsilon > 0\}$, также проходимый в положительном направлении. Пусть (для простоты рассуждений) ε выбрано столь большим, что контур l целиком лежит в области, охватываемой контуром l'. Тогда между этими контурами заключена область, свободная от точек спектра элемента a, откуда в силу теоремы Коши следует равенство интегралов по рассматриваемым контурам.

2. Но поскольку на контуре l' имеем

$$|\lambda| = \|a\| + \varepsilon, \tag{2.4}$$

можно записать резольвенту в виде ряда Неймана и получить представление

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_l \lambda^n R(\lambda, a)\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l'} \lambda^n R(\lambda, a)\, d\lambda =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l'} \lambda^n \cdot \frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{a}{\lambda}\right)^k d\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l'} \lambda^{n-(k+1)} d\lambda = a^n.$$

Здесь мы сначала заметили, что в силу (2.4) ряд в подынтегральном выражении сходится равномерно по λ на контуре l', а поэтому его можно интегрировать почленно; затем в каждом слагаемом вынесли из-под знака интеграла постоянный множитель a^k; далее воспользовались известной формулой теории функций комплексной переменной

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c_\delta} \lambda^l\, d\lambda = \begin{cases} 1, & l = -1, \\ 0, & l \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}, \end{cases}$$

где c_δ — окружность произвольного радиуса $\delta > 0$ с центром в начале координат, проходимая в положительном направлении.

Лемма доказана.

Доказательство теоремы.

1. Аналогичной заменой контура можем перейти к контуру l'', представляющему собой окружность с центром в начале координат и радиусом $r' = \frac{r+\|a\|}{2}$. Тогда, очевидно, $\|a\| < r' < r$. Это гарантирует:
1) что контур целиком охватывает спектр элемента a,
2) равномерную по λ сходимость ряда (2.1) на контуре l'', а следовательно, и возможность почленного интегрирования в (2.2).

2. Такая замена контура возможна, потому что контур l уже охватывает весь спектр, а следовательно, область, ограниченная контурами l и l'', свободна от точек спектра. Но почленное интегрирование приводит нас (благодаря лемме) к ряду (2.3). Его сходимость уже гарантирована возможностью почленного интегрирования.

Теорема доказана.

§ 3. Обратимость элементов банаховой алгебры

Пусть a — некоторый элемент банаховой алгебры $\mathcal{A}$, e — её единица.

Определение 1. *Будем называть элемент $b \in \mathcal{A}$ <u>левым обратным</u> к элементу a, если $ba = e$.*

Определение 2. *Будем называть элемент $c \in \mathcal{A}$ <u>правым обратным</u> к элементу a, если $ac = e$.*

Определение 3. *Будем называть элемент $d \in \mathcal{A}$ <u>обратным</u> к элементу a, если $ad = da = e$. Элемент a, имеющий обратный, называется <u>обратимым</u>.*

«Сокращения» вида

$$xa = ya \Rightarrow x = y, \quad ax = ay \Rightarrow x = y$$

суть не что иное, как домножения на соответствующий обратный элемент (с учётом ассоциативности умножения): в первом случае — на правый, во втором — на левый обратный. Хотелось бы предостеречь от сокращения на элемент, не имеющий нужного обратного!

Легко видеть, что если существуют левый и правый обратный элементы к a, то они равны другу другу:

$$b = be = b(ac) = (ba)c = ec = c. \tag{3.1}$$

Тем самым, существование левого и правого элементов гарантирует обратимость элемента a. Более того, из (3.1) сразу следует, что элемент, обратный к данному элементу a, единствен (если вообще существует). Действительно, если d_1 и d_2 суть два обратных к a элемента, то, в частности, d_1 является левым обратным, а d_2 — правым обратным. Но тогда они равны. (Отсюда же следует корректность определения резольвенты.)

Элемент, обратный к a, обозначается a^{-1}. Обратимый элемент допускает сокращение с любой стороны.

§ 4. Спектральное разложение, соответствующее замкнутым компонентам спектра

Пусть спектр оператора $A \in L(B, B)$ можно разбить на непересекающиеся замкнутые компоненты σ_j:

$$\sigma(A) = \cup_{j=1}^{n} \sigma_j, \quad \rho\{\sigma_j, \sigma_k\} > 0 \text{ при } j \neq k.$$

Пусть $O(\sigma_j)$ — это окрестности спектральных компонент, причём

$$O(\sigma_j) \cap O(\sigma_k) = \varnothing, \quad j \neq k.$$

Выберем D так, чтобы $\sigma_j \subset D_j \subset O(\sigma_j)$, и рассмотрим интегралы Данфорда

$$P_j = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D_j} R(\lambda, A)\, d\lambda. \tag{4.1}$$

Тогда каждый из операторов (4.1) является проектором, т. е. $P_j^2 = P_j$, причём банахово пространство B разлагается в прямую сумму:

$$B = \oplus \sum_{j=1}^{n} P_j B, \quad P_j P_k = \Theta, \quad j \neq k, \quad P_j^2 = P_j,$$

где $\Theta \in L(B, B)$ — нулевой оператор.

Докажем эти утверждения. Введём функцию $\chi_j(\lambda)$, равную единице в окрестности $O(\sigma_j)$ компоненты σ_j и нулю при остальных λ. Заметим, что такая функция принадлежит алгебре функций, аналитичных в окрестности спектра. Далее, $\chi_j^2(\lambda) = \chi_j(\lambda)$. Тогда для интеграла Данфорда по контуру ∂D, охватывающему весь спектр и проходимому в положительном направлении, имеем с учётом того факта, что $\mathcal{O}_A$ есть гомоморфизм:

$$P_j = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D_j} R(\lambda, a)\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \chi_j(\lambda) R(\lambda, a)\, d\lambda,$$

$$P_j^2 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \chi_j^2(\lambda) R(\lambda, a)\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \chi_j(\lambda) R(\lambda, a)\, d\lambda = P_j.$$

Далее,

$$P_j P_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D_j} \chi_j(\lambda)\chi_k(\lambda) R(\lambda, a)\, d\lambda = \Theta$$

и

$$\sum_{j=1}^{n} \chi_j(\lambda) = 1$$

в некоторой (несвязной!) окрестности спектра (конечно, не на всей комплексной плоскости), поэтому $\sum_{j=1}^{n} P_j = E$.

§ 5. Вычисление операторных норм. Примеры

ПРИМЕР 1. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оператор, задаваемой этой матрицей, действует в пространстве столбцов высоты 2:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 2x + y \end{pmatrix}.$$

Норму в этом пространстве можно ввести различными способами. Мы рассмотрим для примера l^∞-, l^1- и l^2-нормы. Будем рассматривать точную верхнюю грань правой части на единичной сфере.

1) Имеем

$$\sup_{\max(|x|,|y|)=1} \max(|x + 2y|, |2x + y|) \leqslant \\ \leqslant \sup_{\max(|x|,|y|)=1} \max(|x| + 2|y|, 2|x| + |y|) = 3.$$

Очевидно, что значение 3 достигается, например, на $(x; y)^T = (1; 1)^T$.

2) Имеем

$$\sup_{|x|+|y|=1} (|x + 2y| + |2x + y|) \leqslant \sup_{\max(|x|+|y|)=1} (3|x| + 3|y|) = 3.$$

Очевидно, что значение 3 достигается, например, на $(x;y)^T = (1;0)^T$.
3) Имеем

$$\sup_{\sqrt{|x|^2+|y|^2}=1} \left(\sqrt{|x+2y|^2+|2x+y|^2}\,\right) \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{\sqrt{|x|^2+|y|^2}=1} \left(\sqrt{5|x|^2+5|y|^2+8|xy|}\,\right) \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{\sqrt{|x|^2+|y|^2}=1} \left(\sqrt{9(|x|^2+9|y|^2)}\,\right) = 3.$$

(Оценка следует из неравенства Коши, являющегося частным случаем неравенства Юнга при $p = q = 1/2$.) Очевидно, что значение 3 достигается, например, на $(x;y)^T = (1/\sqrt{2}\,;1/\sqrt{2}\,)^T$. Однако для случая l^2 можно было искать не норму, а собственные значения. Как известно (см. лекции по интегральным уравнениям), самосопряжённый оператор обладает собственным значением, равным по модулю его норме. Осталось лишь выбрать наибольшее собственное значение. Оно равно 3. С другой стороны, для пространств l^∞, l^1, не являющихся евклидовами, так рассуждать уже нельзя.

Важное замечание. Как мы и ожидали согласно общей теории, спектр данного оператора $\sigma(A) = \{-1;3\}$ лежит внутри круга $\{\lambda \in \in C \mid |\lambda| \leqslant \|A\| = 3\}$. В то же время, на линейном пространстве операторов, заданных 2×2-матрицами, можно было бы задать норму

$$\left\|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\right\| = \max(|a_{11}|, |a_{12}|, |a_{21}|, |a_{22}|).$$

Однако в нашем случае такая норма была бы равна 2, а круг радиуса 2 уже не содержит всего спектра. Дело в том, что требования на норму элемента, накладываемые определением банаховой алгебры, более сильные, чем в случае линейного пространства (какое требование добавляется?). Поэтому не всякая норма, которую можно ввести на банаховой алгебре, рассматриваемой как банахово пространство, является нормой на банаховой алгебре. С другой стороны, операторная норма автоматически удовлетворяет всем условиям нормы на банаховой алгебре (почему?).

ПРИМЕР 2. Рассмотрим теперь

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Аналогичными рассуждениями нетрудно установить, что нормы этого оператора в l^∞ и l^1 равны 2. На каких векторах это значение достигается?

§ 6. Функции от оператора. Примеры

ПРИМЕР 3. Пусть, как и в предыдущем примере,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix}, \tag{6.1}$$

$$R(\lambda, A) = (\lambda E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda-1} & \frac{1}{(\lambda-1)^2} \\ 0 & \frac{1}{\lambda-1} \end{pmatrix}. \tag{6.2}$$

Отметим, что:
1) резольвента оператора в конечномерном пространстве в качестве особых точек может иметь лишь полюсы (в точках спектра, т. е. — для оператора в конечномерном пространстве — в собственных значениях), причём максимальный порядок полюса не превосходит размерность пространства (может и не достигать её);
2) максимальное собственное значение не превосходит норму оператора, но может её и не достигать (в случае неэрмитовой матрицы).

В силу (6.2) ясно, что интеграл Данфорда, соответствующий данной матрице A, отображает всякую функцию, аналитичную в окрестности точки $\lambda_0 = 1$, в оператор (матрицу) по формуле

$$\mathcal{O}_A(f) \equiv f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_c f(\lambda) \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda-1} & \frac{1}{(\lambda-1)^2} \\ 0 & \frac{1}{\lambda-1} \end{pmatrix} d\lambda = \begin{pmatrix} f(1) & f'(1) \\ 0 & f(1) \end{pmatrix}, \tag{6.3}$$

где при вычислении интеграла по контуру c, обходящему точку $\lambda_0 = 1$ в положительном направлении, мы воспользовались формулой Коши (1.1) (покомпонентно для числовых функций) при $n = 0; 1$.

Подсчитаем теперь $f(A)$ в конкретном случае $f(\lambda) = e^\lambda$. Очевидно, эта функция, являющаяся целой, заведомо удовлетворяет условию аналитичности в окрестности спектра. Имеем в силу (6.3)

$$e^A = \begin{pmatrix} e & e \\ 0 & e \end{pmatrix}. \tag{6.4}$$

Этот же результат можно получить и другим способом, а именно, подставив A в ряд для экспоненты. (См. теорему «ряд переходит в ряд».) Доказав предварительно по индукции (это элементарно), что

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

имеем

$$f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\begin{pmatrix} 0 & n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{n!} = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{(n-1)!} =$$

$$= \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{k!} = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & e \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & e \\ 0 & e \end{pmatrix}.$$

Ещё на примере этой же матрицы поучительно заметить, что спектральный радиус, который мы определили в лекции 11 как максимум модуля точек спектра, может быть вычислен по формуле $r(A) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}$ (как и обещает общая теория; нередко эту формулу и рассматривают как определение спектрального радиуса). В данном случае спектр состоит из единственного числа $\lambda_0 = 1$, а спектральный радиус в нормах пространств l^∞ и l^1 можно вычислить так:

$$r(A) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left\| \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1.$$

ПРИМЕР 4. Вычислим

$$\sin \begin{pmatrix} \pi & \pi \\ 0 & \pi \end{pmatrix}.$$

Имеем, действуя аналогично предыдущему примеру,

$$\sin \begin{pmatrix} \pi & \pi \\ 0 & \pi \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi i} \int \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda-\pi} & \frac{\pi}{(\lambda-\pi)^2} \\ 0 & \frac{1}{\lambda-\pi} \end{pmatrix} \sin\lambda\, d\lambda =$$

$$= \begin{pmatrix} \sin\pi & \pi \sin'\pi \\ 0 & \sin\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\pi \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В качестве иллюстрации небезынтересно провести численный расчёт, например на MathCAD'е.

$$\mathrm{A} := \begin{pmatrix} \pi & \pi \\ 0 & \pi \end{pmatrix} \qquad \sum_{n=0}^{17} \frac{(-1)^n}{(2\cdot n+1)!} \cdot \mathrm{A}^{2\cdot n+1} = \begin{pmatrix} 0 & -3.1415927 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Рис. 1. Численное значение синуса матрицы, полученное с помощью MathCAD'а

ПРИМЕР 5. Рассмотрим интегральный оператор Вольтерра с непрерывным по совокупности переменных ядром $K(x, s)$ в пространстве $C[0; l]$:

$$(Ay)(x) = \int_0^x K(x, s) y(s)\, ds.$$

По индукции нетрудно доказать (см. лекции по интегральным уравнениям), что при всех $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0; l]$ верна оценка

$$|(A^n)y(x)| \leqslant M \frac{x^n}{n!},$$

где $M = \max_{0 \leqslant s \leqslant x \leqslant l} |K(x, s)|$, откуда $\|A^n\| \leqslant M^n \frac{l^n}{n!}$ и, с учётом $\sqrt[n]{n!} \to \to \infty$, имеем $r(A) = 0$. В силу непустоты спектра произвольного элемента банаховой алгебры отсюда можно сделать вывод, что $\sigma(A) = \{0\}$. Заметим, что при этом $\lambda = 0$ не может быть собственным значением. В самом деле, в противном случае из тождества

$$\int_0^x K(x, s) y(s)\, ds = 0 \cdot y(x)$$

дифференцированием по x получили бы, что $K(x, x) y(x) \equiv 0$, что, по крайней мере в случае $K(x, s) \neq 0$ нигде на диагонали квадрата $[0; l] \times \times [0; l]$, означало бы: $y(x) \equiv 0$, т. е. не является собственным вектором. С другой стороны, очевидно, что в область значений оператора A входят лишь те функции, которые обращаются в нуль в точке $x = = 0$ (и при этом непрерывно дифференцируемые!). Поскольку $C[0; l]$ такими функциями не исчерпывается, для любого ограниченного линейного оператора B имеем $R(AB) \subsetneq C[0; l]$. Значит, оператор A не может иметь правого обратного, а следовательно, и обычного обратного (см. § 3). Таким образом, в случае бесконечномерного пространства спектр может состоять не только из собственных значений или даже не содержать ни одного собственного значения (но, как следует из общей теории, не может быть пустым). Развитие данной темы мы увидим в следующих примерах, а также в задачах.

ПРИМЕР 6. Рассмотрим в пространстве $C[0; 10]$ оператор умножения на независимую переменную:

$$(Ax)(t) = tx(t).$$

Очевидно, что оператор $(\lambda E - A)^{-1}$, если он существует, может задаваться лишь выражением $(\lambda E - A)^{-1} y = \frac{y(t)}{\lambda - t}$. Ясно, что принадлежность $(\lambda E - A)^{-1} y \in C[0; 10]$ для всех $y(t) \in C[0; 10]$ можно гарантировать при всех $t \notin [0; 10]$ и только при них. Таким образом, $\sigma(A) = = [0; 10]$. Это вполне согласуется со значением спектрального радиуса:

$$\|A^n\|_{C[0;10]} = \sup_{\|x(t)\|_{C[0;10]} = 1} \sup_{t \in [0;10]} \|t^n x(t)\| = 10^n, \quad r(A) = 10.$$

(Значение нормы, равное 10, достигается на $x(t) = 1$.) Однако, как и в предыдущем примере, оператор A не имеет собственных значений! В самом деле, если предположить, что для некоторого $\lambda_0 \in \sigma(A) = [0; 10]$ и некоторой функции $x(t) \in C[0; 10]$ выполнено тождество

$$\forall t \in [0; 10] \quad tx(t) = \lambda_0 x(t),$$

то приходим к условию $x(t) = 0$ при $t \neq \lambda_0$, а в силу непрерывности $x(t)$ имеем $x(t) \equiv 0$. Следовательно, λ_0 не является собственным значением.

ПРИМЕР 7.. (Внимание! Рассуждение содержит ошибку. Её поиск составит одну из задач.) Рассмотрим в пространстве l^2 последовательностей оператор правого сдвига:

$$A_{\rightarrow}(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots). \tag{6.5}$$

Прежде чем обсуждать его резольвенту и спектр, заметим, что оператор $A_{\rightarrow}$ имеет левый обратный, но не имеет правого обратного. В самом деле, из (6.5) следует, что левый обратный с необходимостью имеет вид (оператор левого сдвига)

$$B_{\leftarrow}(y_1, y_2, y_3, \ldots) = (y_2, y_3, y_4, \ldots). \tag{6.6}$$

Если бы существовал правый обратный, то он в силу общей теории (см. выше) совпадал бы с $B_{\leftarrow}$. Но последний имеет ненулевое ядро $\ker B_{\leftarrow} = \{(x_1, 0, 0, \ldots)\}$. Тем самым, ненулевое ядро с необходимостью имеет и оператор $A_{\rightarrow}B_{\leftarrow}$. Поэтому $A_{\rightarrow}B_{\leftarrow} \neq E$ и $B_{\leftarrow}$ не является правым обратным к $A_{\rightarrow}$. Таким образом, $A_{\rightarrow}$ не имеет правого обратного (отсюда, в частности, следует, что $0 \in \sigma(A_{\rightarrow})$).

Аналогично тому, как это было сделано в примере 4, нетрудно получить формальное выражение для резольвенты оператора $A_{\rightarrow}$. Для этого запишем вначале:

$$(\lambda E - A_{\rightarrow})(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (\lambda x_1, \lambda x_2 - x_1, \lambda x_3 - x_2, \ldots). \tag{6.7}$$

Решая последовательно каждое уравнение бесконечной системы

$$\begin{cases} \lambda x_1 = y_1, \\ \lambda x_2 - x_1 = y_2, \\ \lambda x_3 - x_2 = y_3, \\ \ldots, \end{cases} \tag{6.8}$$

находим выражение для левого обратного к $(\lambda E - A_{\rightarrow})$:

$$C(y_1, y_2, y_3, \ldots) \equiv$$

$$\equiv (\lambda E - A_{\rightarrow})^{-1}(y_1, y_2, y_3, \ldots) = \left(\frac{y_1}{\lambda}, \frac{y_2 + \frac{y_1}{\lambda}}{\lambda}, \frac{y_3 + \frac{y_2 + \frac{y_1}{\lambda}}{\lambda}}{\lambda}, \ldots \right). \tag{6.9}$$

Заметим, что система (6.8) разрешима при любой правой части (в случае $\lambda \neq 0$), а ядро оператора (6.9) тривиально. Поэтому мы не встречаемся ни с проблемой из предыдущего примера, когда применение резольвентного оператора могло привести к разрывной функции, ни с проблемой вырожденности левого обратного. Наконец, подставив правую часть (6.9) в (6.7), мы получим

$$(\lambda E - A_{\to})C(y_1, y_2, y_3, \ldots) = (y_1, y_2, y_3, \ldots),$$

т. е. оператор C оказался не только левым, но и правым обратным к $\lambda E - A_{\to}$, поэтому последний обратим при всех $\lambda \neq 0$. Итак, спектр оператора $A_{\to} : l^2 \to l^2$ состоит из одной точки $\lambda = 0$.

Однако посмотрим на ситуацию с другой стороны, а именно, попытаемся вычислить $r(A_{\to})$. Легко сообразить, что при всех $n \in \mathbb{N}$ имеем $\|A_{\to}{}^n\|=1$, откуда $r(A_{\to}) = 1$. Таким образом, помимо точки $\lambda = 0$ (принадлежность которой спектру оператора $A_{\to}$ установлена выше), $\sigma(A_{\to})$ содержит ещё некоторые точки. В чём же дело? Где в рассуждении мы допустили ошибку?

§ 7. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Показать, что для операторов $Ax(t) = \int_0^t x(s)\,ds$, $Bx(t) = tx(t)$, действующих в $C[0;1]$, по крайней мере одно из неравенств $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$, $\|BA\| \leqslant \|B\|\|A\|$ выполняется как строгое неравенство.

Задача 2. Найти нормы в пространствах l^∞, l^1, вычислить значение $f(A)$, $\sin A$, $\cos A$, e^A для следующих матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Задача 3*. Обратим ли оператор $\sin(\pi A_{\to})$?

Задача 4. Доказать, что для любого элемента a банаховой алгебры верно соотношение

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a.$$

Задача 5*. Пусть матрица A подобна диагональной, т. е. существует такая обратимая матрица U, что матрица UAU^{-1} диагональна:

$$UAU^{-1} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n).$$

Получить в явном виде матрицу $f(A)$, где $f(\lambda)$ — функция, аналитическая в окрестности спектра матрицы A.

Задача 6. Для каких элементов a банаховой алгебры определена функция $\operatorname{tg} a$?

Задача 7*. Вычислить операторную норму матрицы из примера 2 § 5 в пространстве l^2.

Задача 8. 1) Вычислить операторную норму произвольной квадратной матрицы в пространстве l^∞.
2) Получить оценки для её норм в пространствах l^1 и l^2.

Задача 9. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Описать геометрический смысл данной матрицы. Вычислить A^2, A^4, A^5 и объяснить полученный результат. Вычислить A^n при произвольном $n \in \mathbb{N}$.
2) Найти её спектр и объяснить связь полученного результата с п. 1) этой задачи.
3) Вычислить $f(A)$, если

$$f(\lambda) = 1; \lambda; \lambda^4; \lambda^5; \sin\lambda; e^\lambda.$$

Задача 10*. Ответить на «вопрос на засыпку» в последнем примере.

Задача 11. Доказать, что всякий линейный оператор в конечномерном пространстве (при любом способе введения в последнем нормы) ограничен.

Задача 12. Оператор A называется нильпотентным, если при некотором $n \in \mathbb{N}$ верно $A^n = \Theta$. Оператор A называется квазинильпотентным, если $r(A) = 0$.
1) Доказать, что всякий нильпотентный оператор является квазинильпотентным.
2*) Привести пример квазинильпотентного (возможно, нильпотентного) оператора с нормой $\|A\| = 10$.
3) Доказать, что формула ряда Неймана

$$(E - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$$

верна для всякого квазинильпотентного оператора (а не только для операторов с нормой меньше 1).
4*) При каких более слабых условиях она ещё верна?

Задача 13. Верно ли, что спектральный радиус:
1) задаёт норму, удовлетворяющую всем условиям на норму в банаховой алгебре?
2) задаёт операторную норму в $L(B, B)$, если только норму в B выбрать подходящим образом?
Может ли для данного оператора спектральный радиус быть больше конкретной операторной нормы? меньше её?

Задача 14. Рассмотрим оператор левого сдвига $B_{\leftarrow}$ (см. (6.6)).
1) Существует ли у него левый обратный?

2) Указать какой-либо правый обратный к $B_{\leftarrow}$.
3*) Показать, что правый обратный к $B_{\leftarrow}$ не единствен. (Предостережение.) Не забудьте, что оператор должен быть линейным!
4) Найти спектр оператора $B_{\leftarrow}$.

Задача 15*. 1) Пусть $A \in L(B, B)$, $C \in L(B, B)$ — его правый обратный. Доказать, что если $C(B) = B$, то $C = A^{-1}$.
2) Пусть $A \in L(B, B)$, $D \in L(B, B)$ — его левый обратный. Доказать, что если $\ker D = \{\vartheta\}$, то $D = A^{-1}$.

Задача 16*. Показать, что спектр оператора правого сдвига состоит из всех точек круга $|\lambda| \leqslant 1$.

Задача 17*. Опишем классификацию спектра операторов в банаховом пространстве B. Говорят, что число λ_0 принадлежит:
1) точечному спектру $\sigma_p(A)$ оператора A, если λ_0 — собственное значение оператора A, т. е. если существует такое $x \in B$, $x \neq \vartheta$, что $Ax = \lambda_0 x$;
2) непрерывному спектру $\sigma_p(A)$ оператора A, если резольвента $R(\lambda_0, A)$ не существует (как ограниченный оператор, определённый на всём B) и при этом замыкание образа оператора $(\lambda_0 E - A)$ совпадает с B;
3) остаточному спектру $\sigma_p(A)$ оператора A, если резольвента $R(\lambda_0, A)$ не существует (как ограниченный оператор, определённый на всём B) и при этом замыкание образа оператора $(\lambda_0 E - A)$ не совпадает с B.
Иногда говорят, что в случаях 2), 3) резольвента существует, но, конечно, уже не как элемент $L(B, B)$: она определена (как?) не на всём пространстве (почему?) и неограничена (почему?).

Провести классификацию спектра для следующих примеров, рассмотренных ранее:
1) оператор в конечномерном пространстве;
2) операторы правого и левого сдвига в l^2;
3) оператор домножения на независимую переменную в $C[0; 10]$ и $L^2[0; 10]$;
4) оператор Вольтерра $(Ay)(x) = \int_0^x K(x, s) y(s)\, ds$ с непрерывным по совокупности переменных ядром, действующий в $C[0; l]$, при условии $K(x, x) \neq 0$.

Задача 18. Показать, что условие равномерной сходимости функционального ряда (или функциональной последовательности) в теореме о почленном переходе к пределу под знаком интеграла существенно.

Семинар–Лекция 12

ГИЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА. ОБСУЖДЕНИЕ

§ 1. Необходимое условие «евклидовости»

Как следует из материала лекции 11, необходимым (а также и достаточным — см. [14]) условием возможности задать норму с помощью скалярного произведения является выполнение для этой нормы равенства параллелограмма. Отсюда, в частности, следует, что пространства $L^\infty[0;1]$, $C[0;1]$ не являются гильбертовыми (являясь банаховыми).

Отметим также правило вынесения числового множителя из первого аргумента скалярного произведения:

$$(\lambda x, y) = \overline{(y, \lambda x)} = \overline{\lambda(y,x)} = \overline{\lambda}\overline{(y,x)} = \overline{\lambda}(x,y),$$

или $(\lambda x, y) = \overline{\lambda}(x,y)$.

§ 2. Поляризационное тождество

Пусть $B(x,y)$ — полуторалинейная форма в гильбертовом пространстве H. Будем называть функцию

$$B(x) \stackrel{\text{def}}{=} B(x,x)$$

квадратичной формой, соответствующей полуторалинейной форме $B(x,y)$. Возникает естественный вопрос: можно ли, зная квадратичную форму $B(x)$, восстановить полуторалинейную форму $B(x,y)$? Оказывается, да.

Пользуясь свойствами линейности по второму аргументу и полулинейности по первому, легко проверить следующее тождество (носящее название поляризационного)

$$B(x,y) = \frac{1}{4}[B(x+y) - B(x-y) + iB(x-iy) - iB(x+iy)]. \qquad (2.1)$$

Совсем по-другому обстоит дело с билинейными формами (они отличаются от полуторалинейных тем, что линейны по обоим аргументам). В этом нетрудно убедиться уже на простом примере в двумерном пространстве: если

$$B((x^1, x^2)^T, (y^1, y^2)^T) \equiv a_{11}x^1y^1 + a_{12}x^1y^2 + a_{21}x^2y^1 + a_{22}x^2y^2, \quad (2.2)$$

то

$$B((x^1, x^2)^T) \equiv a_{11}(x^1)^2 + (a_{12} + a_{21})x^1x^2 + a_{22}(x^2)^2,$$

откуда следует, что любые билинейные формы вида (2.2) будут задавать одну и ту же квадратичную форму, если для этих билинейных форм $a_{11} = \mathrm{const}$, $a_{22} = \mathrm{const}$, $a_{12} + a_{21} = \mathrm{const}$.

Можно сказать, что этот пример показывает характерное отличие вещественного гильбертова пространства от комплексного. В самом деле, в вещественном линейном пространстве всякая полуторалинейная форма фактически является билинейной. Следовательно, её уже нельзя восстановить по квадратичной. (Можно восстановить только симметричную билинейную форму.)

§ 3. Замкнутые и незамкнутые подпространства гильбертова пространства

(Сразу оговоримся, что возможная незамкнутость бесконечномерного подпространства характерна для любого банахова пространства, но мы рассмотрим эту проблему на примере гильбертова пространства.)

ПРИМЕР 1. Рассмотрим в гильбертовом пространстве l^2 ограниченный линейный оператор

$$A : (x_1, x_2, x_3, \ldots) \mapsto (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \ldots).$$

Рассмотрим его область значений. В силу общих свойств линейного оператора она образует линейное подпространство (многообразие), которое мы обозначим $R(A)$. Будет ли оно замкнутым? Чтобы ответить на этот вопрос, будем рассуждать «в обход».

1) Нетрудно заметить, что $R(A)$ всюду плотно в пространстве l^2. В самом деле, в пространстве l^2 плотны уже финитные последовательности, т. е. такие, у которых отлично от нуля лишь конечное число членов (почему?). А все финитные последовательности заведомо принадлежат $R(A)$. Итак, $\overline{R(A)} = l^2$.

2) С другой стороны, $R(A)$ не может совпадать со всем пространством l^2. В самом деле, пусть $y = (y_1, \ldots) \in R(A)$, $x = (x_1, \ldots)$ — прообраз y. (Для нас сейчас не существенно, единственным ли образом можно восстановить этот прообраз, важно лишь его существование, которое имеет место по смыслу области значений оператора.) Тогда имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2|y_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty.$$

С другой стороны, не для всякого элемента $z \in l^2$ выполнено $\sum_{n=1}^{\infty} n^2|z_n|^2 < +\infty$. Например, для $z = \{\frac{1}{n}\}$ данный ряд расходится. Таким образом, $R(A) \subsetneq l^2$.

Легко видеть, что из 1) и 2) следует незамкнутость $R(A)$.

ПРИМЕР 2. Оказывается, сумма замкнутых линейных подпространств может быть незамкнутым подпространством (линейным многообразием). Пусть

$$M = \{x_1, 0, x_3, 0, x_5, 0, \ldots\}, \quad N = \{x_1, x_1, x_3, \frac{x_3}{3}, x_5, \frac{x_5}{5}, \ldots\}.$$

Установим замкнутость этих подпространств.

1) Замкнутость M следует из того соображения, что оно изоморфно l^2 и поэтому полно как метрическое пространство.

2) Пусть $x^{(n)} \equiv (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots)$ — фундаментальная последовательность элементов подпространства N. Тогда в силу полноты l^2 имеем

$$x^{(n)} \to x = (x_1, x_2, \ldots) \in l^2. \tag{3.1}$$

Остаётся доказать лишь, что $x \in N$. Заметим прежде всего, что из (3.1) следует, в частности: $x_j^{(n)} \to x_j$, $j \in \mathbb{N}$. В самом деле, ведь $|x_j^{(n)} - x_j| \leqslant \|x^{(n)} - x\|$. Но арифметические соотношения $x_{2k}^{(n)} = \frac{x_{2k-1}^{(n)}}{2k-1}$, определяющие подпространство N, сохраняются при переходе к пределу. Поэтому $x \in N$.

С другой стороны,

$$M + N \neq \overline{M + N} = l^2.$$

Действительно, все финитные последовательности лежат в $M + N$ (последовательно решаем систему уравнений.) Следовательно, $\overline{M + N} = l^2$. С другой стороны, для всех элементов из $M + N$ имеем $\sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)^2|x_{2k-1}|^2 < +\infty$, откуда аналогично предыдущему примеру получаем, что $M + N \neq l^2$. Итак,

$$\overline{M + N} = l^2 \neq M + N.$$

Замечание 1. Поскольку все сепарабельные гильбертовы пространства изоморфны пространству l^2, то многие общие свойства первых могут быть изучены на примере последнего (чем мы будем пользоваться и в дальнейшем по ходу семинара). В то же время, случаи, где существенна связь той или иной дополнительной структуры на исходном пространстве (например, связь предела по мере или почти всюду с пределом по норме $L^2[0; 1]$), мы вынуждены рассматривать исходное пространство.

§ 4. Гильбертов сопряжённый оператор. Простейшие свойства и примеры

Непосредственно можно доказать следующие элементарные свойства сопряжённого оператора.

Свойство 1. $(AB)^* = B^*A^*$. (Обратим внимание на сходство этой формулы с формулой оператора, обратного к произведению. Следует только иметь в виду, что, в отличие от обратного, сопряжённый оператор имеется у каждого ограниченного линейного оператора.)

Свойство 2. $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A$.

Свойство 3. Совершенно произвольный ограниченный линейный оператор A в гильбертовом пространстве может быть представлен в виде $A = B + iC$, где $B = \frac{A+A^*}{2}$, $C = \frac{A-A^*}{2i}$ — самосопряжённые ограниченные операторы.

В следующих задачах требуется построить гильбертов сопряжённый оператор A^* к данному оператору A в данном гильбертовом пространстве l^2 (примеры 1)—5)), $L^2(\mathbb{R})$ (примеры 6), 7)), $L^2[0;1]$ (примеры 8), 9)).

ПРИМЕР 3. $A(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$, $A^*(y_1, y_2, y_3, \ldots) = (y_2, y_3, y_4, \ldots)$ (уже знакомые нам операторы правого и левого сдвига).

ПРИМЕР 4. $A(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \alpha_3 x_3 \ldots)$, $A^*(y_1, y_2, y_3, \ldots) = (\overline{\alpha}_1 y_1, \overline{\alpha}_2 y_2, \overline{\alpha}_3 y_3, \ldots)$, причём $A = A^*$ тогда и только тогда, когда все числа α_i вещественны.

ПРИМЕР 5. $A(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$, $A^* = A$.

ПРИМЕР 6. $A(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-1}, x_1, 0, 0, \ldots)$, $A^*(y_1, y_2, y_3, \ldots) = (y_n, 0, 0, \ldots)$.

ПРИМЕР 7. $A(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (\alpha_n x_n, \alpha_{n+1} x_{n+1}, \alpha_{n+2} x_{n+2} \ldots)$, $A^*(y_1, y_2, y_3, \ldots) = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-1}, \overline{\alpha}_n y_n, \overline{\alpha}_{n+1} y_{n+1}, \ldots)$.

ПРИМЕР 8. $(Ax)(t) = x(t+h)$, $(A^*y)(t) = y(t-h)$. (Здесь и в следующем примере доказательство использует замену переменной в интеграле, представляющем скалярное произведение.)

ПРИМЕР 9. $(Ax)(t) = x(-t)$, $(A^*y)(t) = y(-t)$.

ПРИМЕР 10. $(Ax)(t) = \varphi(t)x(t)$, $\varphi(t) \in L^\infty[0;1]$, $(A^*y)(t) = \overline{\varphi(t)}y(t)$.

ПРИМЕР 11. $(Ax)(t) = \int_0^t x(s)\,ds$ в $L^2[0;1]$. В данном случае приведём решение подробно. Прежде всего следует показать, что данный оператор действительно является ограниченным оператором в $L^2[0;1]$ (что заранее не очевидно). Имеем

$$|(Ax)(t)| = \left|\int_0^t 1 \cdot x(s)\,ds\right| \leqslant \sqrt{\int_0^t 1^2\,ds \int_0^t x^2(s)\,ds} \leqslant \|x(t)\|_{L^2[0;1]}$$

и далее

$$\|(Ax)(t)\|^2_{L^2[0;1]} = \int_0^1 |(Ax)(t)|^2\,dt \leqslant \|x(t)\|^2_{L^2[0;1]},$$

откуда $\|A\| \leqslant 1$.

Теперь собственно вычислим сопряжённый оператор. Итак, пусть $x(t)$, $y(t)$ — произвольные функции из $L^2[0;1]$. Нам требуется найти такую функцию $z(t)$ (зависящую от $y(t)$), что $(y, Ax) = (z, x)$ при всех $x(t) \in L^2[0;1]$. Ясно, что придётся воспользоваться интегрированием по частям. Корректность интегрирования по частям, которое мы сейчас проведём, нуждается в дополнительном обосновании (поскольку мы имеем дело не с непрерывно дифференцируемыми функциями), которое мы отложим до более подробного изучения функциональных пространств. Для удобства интегрирования по частям введём функцию $v(t)$ по формуле

$$v(t) = -\int_t^1 \overline{y(s)}\,ds.$$

Тогда

$$\int_0^1 \left(\int_0^t x(s)\,ds\right)\overline{y(t)}\,dt = \\ = \left(\int_0^t x(s)\,ds\right) v(t)\Big|_0^1 - \int_0^1 x(t)v(t)\,dt = \int_0^1 x(t)\left(\int_t^1 \overline{y(s)}\,ds\right)dt,$$

где верхняя подстановка обратилась в ноль в силу специального выбора первообразной для $y(t)$ в виде $v(t)$. Таким образом, имеем $\int_0^1 x(t)\left[\overline{z(t)} - \int_t^1 \overline{y(s)}\,ds\right] dt = 0$. Полагая $x(t) = z(t) - \int_t^1 y(s)\,ds$, получим, что $z(t) = \int_t^1 y(s)\,ds$ почти всюду, откуда

$$(A^*y)(t) = \int\limits_t^1 y(s)\,ds.$$

§ 5. Ортогональная проекция на конечномерное подпространство. Ортопроекторы

ПРИМЕР 12. Чтобы ортогонально спроецировать вектор на конечномерное подпространство L, достаточно спроецировать его на векторы ортонормированного базиса $\{e_k\}_{k=1}^n$ в L и сложить результаты:

$$\text{Пр}_L x = \sum_{k=1}^{n} (x, e_k) e_k. \tag{5.1}$$

Ортогональность существенна, как показывает простой пример. Пусть мы проецируем вектор $(1;1;1)^T$ на плоскость Oxy. Очевидно, результат равен $(1;1;0)^T$. Однако если применить формулу (5.1), взяв неортогональный нормированный базис $(0;1;0)^T$, $(1;1;0)^T/\sqrt{2}$, мы получим $(1;2;0)^T$.

ПРИМЕР 13. Ортогональный проектор P в общем случае обладает двумя свойствами: $P^2 = P$, $P^* = P$. Докажем это.

Итак, ортогональный проектор P — это оператор, ставящий каждому элементу $x \in H$ вектор $y \in L$, где L — замкнутое подпространство и

$$x = y + z, \quad y \in L, \quad z \in L^{\perp}. \tag{5.2}$$

Такое разложение единственно, а соответствующий оператор действительно линейный и ограниченный, как легко проверить: в силу теоремы Пифагора имеем $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$, откуда $\|P\| \leqslant 1$. На самом деле $\|P\| = 1$, если только подпространство L нетривиально.

Докажем, что $P^2 = P$. Для этого заметим, что проекция элемента y из (5.2) на подпространство L равна самому y. Действительно, если $y \in L$, $y = u + v$, $u \in L$, $v \in L^{\perp}$, то $v = y - u \in L \cap L^{\perp}$, откуда $v = \vartheta$. Теперь докажем самосопряжённость ортопроектора. Пусть $w \in H$ — произвольный элемент. Запишем ортогональное разложение и для него:

$$w = w_L + w_{\perp}, \quad w_L \in L, \quad w_{\perp} \in L^{\perp}.$$

Тогда получим:

$$(w, Px) = (w, y) = (w_L + w_{\perp}, y) = (w_L, y) = (w_L, y + z) = (Pw, x). \tag{5.3}$$

Обратно, любой ограниченный линейный оператор, обладающий указанными двумя свойствами, является ортопроектором. В самом деле, рассмотрим $L = PH \equiv R(P)$. Заметим прежде всего, что подпространство L — замкнутое.

$\square$ Пусть $x_n \in L$, $x_n \to x \in H$. Поскольку $x_n \in L$, существуют такие $y_n \in H$, что $x_n = Py_n$. Имеем тогда

$$Px_n = P^2 y_n = Py_n = x_n,$$

и далее, с учётом непрерывности оператора P,

$$x_n \to x \Rightarrow Px_n \to Px \Rightarrow x_n = Px_n \to Px \Rightarrow x = Px \Rightarrow x \in L. \boxtimes$$

Далее,

$$\forall x, w \in H \quad (w - Pw, Px) = (Pw - P^2 w, x) = (Pw - Pw, x) = 0.$$

Тем самым, оператор P действительно ставит в соответствие каждому элементу x его ортогональную проекцию на замкнутое подпространство $L = R(P)$.

Замечание 2. Конечно, не всякий проектор является ортогональным. Можно рассмотреть пример оператора, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

§ 6. Некоторые замечания о слабой сходимости

Рассмотрим сепарабельное гильбертово пространство H. Как следует из лекционного материала, в нём существует полная ортонормированная система, или ортонормированный базис $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Нетрудно видеть, что $e_n \rightharpoonup \vartheta$. В самом деле, слабая сходимость $x_n \rightharpoonup x$ в гильбертовом пространстве равносильна условию

$$\forall y \in H \ (y, x_n) \to (y, x).$$

Но

$$\forall y \in H \ (y, e_n) = y_n \to 0 = (y, \vartheta),$$

где y_n суть коэффициенты Фурье элемента $y \in H$, которые стремятся к нулю в силу равенства Парсеваля.

§ 7. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Показать, что скалярное произведение непрерывно по норме по совокупности переменных, т. е. если $x_n \to x$, $y_n \to y$, то $(x_n, y_n) \to (x, y)$.

Задача 2. (Продолжение.) Можно ли в условии предыдущей задачи заменить сильную сходимость на слабую:
1) для одной из последовательностей?
2) для обеих последовательностей?

Задача 3. Доказать, что если $x_n \rightharpoonup x$ и $\|x_n\| \to \|x\|$, то $x_n \to x$. Показать, что отказаться от второго условия нельзя.

Задача 4. Доказать единственность слабого предела: если $x_n \rightharpoonup x$ и $x_n \rightharpoonup y$, то $x = y$.

Задача 5. 1) Доказать n-мерную теорему Пифагора: если в наборе $\{x_k\}_{k=1}^n$ все элементы попарно ортогональны, то $\|x_1 + \ldots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \ldots + \|x_n\|^2$.
2) Доказать, что попарно ортогональные элементы (среди которых нет нулевого!) линейно независимы. В каком месте не пройдёт доказательство при наличии нулевого элемента?

Задача 6. Найти сопряжённые к следующим операторам в l^2:
1) $A(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, x_4, \ldots)$;
2) $A(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, 0, \alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \ldots)$;
...в $L^2(\mathbb{R})$:
3) $(Ax)(t) = \varphi(t)x(t+h)$, $\varphi(t) \in L^\infty(\mathbb{R})$;
4) $(Ax)(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t))$.
Те из операторов, которые не совпали со своими сопряжёнными, представить в виде $C + iD$, где C и D — самосопряжённые.

Задача 7. 1) Как выглядит матрица оператора A^* в конечномерном пространстве, если дана матрица оператора A? Рассматриваются матрицы относительно фиксированного ортонормированного базиса.
2) Останется ли результат верным, если снять условие ортонормированности базиса?
3) Убедиться, что этот результат согласуется с результатами задач 6.1), 6.2) (предварительно рассмотрев эти задачи для конечномерного случая).

Задача 8. Пусть $A \in L(H)$ — обратимый оператор. Доказать, что существует $(A^*)^{-1}$ и он равен $(A^{-1})^*$. (Тем самым, оператор обратим тогда и только тогда, когда его сопряжённый обратим.)

Задача 9. Пусть M — произвольное множество в гильбертовом пространстве. Пусть $M^\perp \equiv \{x \in H \mid \forall y \in M\ (y, x) = 0\}$ (ортогональное дополнение множества). Доказать следующие факты:
1) $M^\perp$ — (замкнутое!) подпространство;
2) $M^{\perp\perp} \supset M$, причём равенство имеет место тогда и только тогда, когда M — замкнутое подпространство;
3) если $M \subset N$, то $N^\perp \subset M^\perp$;
4) $M^\perp = M^{\perp\perp\perp}$;
5) если M — линейное многообразие, то $\overline{M} = H$ тогда и только тогда, когда из $x \perp M$ следует, что $x = \vartheta$.

Задача 10. Доказать, что если M, N суть (замкнутые) подпространства и $M \perp N$, то $M + N$ — замкнутое подпространство.

Задача 11*. (Продолжение.) Пусть M, N суть (замкнутые) подпространства и при некотором $\varepsilon > 0$

$$\sup\{|(x, y)| \mid \|x\| = \|y\| = 1,\ x \in N,\ y \in M\} < 1 - \varepsilon.$$

Доказать, что $M + N$ — замкнутое подпространство.

Задача 12. С помощью ортогонализации Грама—Шмидта получить (с точностью до нормировочного коэффициента) первые 3 многочлена Лежандра.

Задача 13. Для функции $x(t) = e^t$ найти такие многочлены степеней 0, 1, 2, что норма $\|e^t - p_n(t)\|$ в $L^2[0; 1]$ минимальна.

Задача 14. (Продолжение.) Тот же вопрос для $x(t) = t^3$ в $L^2[-1; 1]$. Объяснить особенность полученного результата.

Задача 15. 1) В $L^2[-1; 1]$ построить проекцию любой функции на подпространства чётных/нечётных функций.
2*) Как проще всего доказать, что линейные многообразия чётных и нечётных функций действительно образуют (замкнутые) подпространства?

Задача 16. 1) Убедиться, что оператор Q, заданный матрицей Q (в самом конце основного текста) является проектором (т. е. $\mathrm{Q}^2 = \mathrm{Q}$) и что он не самосопряжён. Описать соответствующее проецирование геометрически.
2) Те же вопросы для оператора, заданного матрицей Q^T.

Задача 17. Доказать, что если $A \in L(H)$, $A = A^*$, то оператор $E + iA$ обратим.

Задача 18*. Будем говорить, что множество M в гильбертовом пространстве слабо замкнуто, если из $x_n \in M$, $x_n \rightharpoonup x$ следует $x_n \to x$. Слабым замыканием множества M будем называть множество, состоящее из слабых пределов всевозможных слабо сходящихся последовательностей $\{x_n\} \subset M$.
1) Доказать, что замкнутое выпуклое множество в гильбертовом пространстве слабо замкнуто.
2) Найти слабое замыкание единичной сферы в l^2.

Задача 19*. Показать, что на бесконечномерном гильбертовом пространстве нельзя нетривиальным образом ввести меру. Именно, если потребовать от меры выполнения стандартных свойств (неотрицательность, счётная аддитивность), а также естественной для линейного пространства инвариантности относительно переносов и строгой положительности для любого непустого открытого множества, то окажется, что мера любого непустого открытого множества будет бесконечной.

Задача 20. Доказать следующее утверждение, также называемое теоремой Беппо Леви: если $\mathbb{H}_1$ – произвольное замкнутое выпуклое множество в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$, $x \in \mathbb{H}$ — произвольный элемент гильбертова пространства, то существует единственный элемент $x_1 \in \mathbb{H}_1$ такой, что

$$\|x - x_1\| = d(x, \mathbb{H}_1).$$

Семинар–Лекция 13

КОМПАКТНОСТЬ. ОСНОВНЫЕ ИДЕИ

§ 1. Топологическое определение компактности

Начнём со следующего предварительного понятия.

Определение 0. *Непустая система замкнутых множеств называется центрированной, если любая её конечная подсистема имеет непустое пересечение.*

Примером центрированной системы замкнутых множеств может служить система вложенных замкнутых шаров в $\mathbb{R}^n$ или система лучей $\{[n;+\infty)\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Напомним (см. лекции 4, 5) следующее основное определение.

Определение 1. *Топологическое пространство T называется компактным, если из любого его покрытия открытыми множествами (говорят: открытого покрытия) можно извлечь конечное подпокрытие.*

Имеет место следующая важная теорема:

Теорема 1. *Топологическое пространство T компактно тогда и только тогда, когда любая центрированная система его замкнутых подмножеств имеет непустое пересечение.*

Прежде чем доказывать теорему, заметим, что в общем случае центрированная система замкнутых множеств может иметь пустое пересечение: например, так будет для системы $\{[n;+\infty)\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Доказательство. Необходимость.

1. Пусть пространство T компактно. Рассмотрим центрированную систему замкнутых множеств $\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$. Предположим, что её пересечение пусто: $\cap_{\alpha\in A}F_\alpha=\varnothing$. Тогда в силу формул де Моргана (см. § 2 семинара-лекции 1) для $G_\alpha\equiv T\setminus F_\alpha$ имеем

$$\cup_{\alpha\in A}G_\alpha=\cup_{\alpha\in A}T\setminus F_\alpha=T\setminus\cap_{\alpha\in A}F_\alpha=T\setminus\varnothing=T.$$

2. Итак, $\{G_\alpha\}$ есть открытое покрытие пространства T. Но тогда по условию оно содержит конечное подпокрытие $\{G_{\alpha_k}\}_{k=1}^n$ и в силу формул де Моргана получим

$$T=\cup_{k=1}^n G_{\alpha_k}\quad\Longrightarrow\quad \cap_{k=1}^n F_{\alpha_k}=\cap_{k=1}^n T\setminus G_{\alpha_k}=T\setminus\cup_{k=1}^n G_{\alpha_k}=\varnothing,$$

что противоречит условию центрированности.

Достаточность.

1. Пусть произвольная центрированная система замкнутых множеств имеет непустое пересечение. Рассмотрим произвольное открытое покрытие $\{O_\alpha\}_{\alpha\in A}$. Вновь привлекая формулы де Моргана, имеем $\cap$ $\cap_{\alpha\in A}(T\setminus O_\alpha)=\varnothing$.

2. Тогда система замкнутых множеств $\{T\setminus O_\alpha\}_{\alpha\in A}$, имея пустое пересечение, не является центрированной, т. е. существует подмножество индексов $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}\subset A$ такое, что $\cap_{k=1}^n(T\setminus O_{\alpha_k})=\varnothing$, откуда $\cup_{k=1}^n O_{\alpha_k}=T$. Таким образом, мы извлекли конечное подпокрытие данного покрытия.

Теорема доказана.

Теперь условие непустоты пересечения любой центрированной системы замкнутых множеств в топологическом пространстве можно считать новым определением компактности. Будем условно называть его определением 1а.

Сделаем важное для дальнейшего

Замечание 1. Если в определении 1 заменить слова «из любого покрытия» на «из любого счётного покрытия», то получится определение счётной компактности. Совершенно аналогично предыдущему случаю, но ограничиваясь только счётными множествами индексов A, можно доказать следующую теорему.

Теорема 2. *Топологическое пространство T счётно-компактно тогда и только тогда, когда в нём любая счётная центрированная система замкнутых множеств имеет непустое пересечение.*

Определения, получающиеся из определений 1 и 1а добавлением требования счётности, назовём определениями $1'$ и $1\text{a}'$.

§ 2. Компактные метрические пространства. Определение

К метрическому пространству, естественно, можно применить топологическое определение компактности. Однако в случае метрических пространств удобно пользоваться другими определениями (= критериями) компактности. Постепенно мы установим равносильность для метрических пространств всех приводимых нами определений (критериев) компактности.

Определение 2. *Метрическое пространство X называется компактным, если любое его бесконечное подмножество имеет предельную точку.*

Замечание 2. Метрическое пространство, состоящее из конечного числа точек, следует считать компактным: в нём нет бесконечных подмножеств, а стало быть, для всякого его бесконечного подмножества условие существования предельной точки выполнено. (Для несуществующего объекта верно всё что угодно.)

Определение 2а. *Метрическое пространство X называется компактным, если любая последовательность его точек имеет предельную точку* (= *содержит сходящуюся подпоследовательность*).

Предостережение. Обращаем внимание читателя на различия понятий предельной точки последовательности и множества. Так, предельная точка последовательности может не быть предельной точкой множества её значений. (Почему? Приведите примеры.)

□ Докажем *равносильность этих определений.*

2 ⇒ 2а.

1. Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\} \subset X$. Покажем, что из неё можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

2. Если из неё можно извлечь стационарную подпоследовательность, утверждение тривиально. В противном случае можно утверждать, что множество значений последовательности бесконечно.

3. По условию оно имеет предельную точку $x \in X$. Таким образом, в любой окрестности точки x найдётся элемент последовательности, отличный от x. Уменьшая размеры окрестностей, мы получим, что в любой окрестности таких элементов даже бесконечно много. Тем самым, x — предельная точка последовательности $\{x_n\}$.

2а ⇒ 2.

1. Пусть $Y \subset X$ — бесконечное множество. Построим последовательность $\{x_n\}$ его элементов так, чтобы среди её членов не было равных. По условию она имеет предельную точку x.

2. Легко видеть, что x является также предельной точкой множества X. В самом деле, по определению предельной точки последовательности в каждой окрестности точки x найдётся бесконечно много членов последовательности.

3. Но в силу нашего выбора они суть различные точки множества X. Они не могут все совпадать с x. Тем самым, в любой окрестности точки x имеется хотя бы одна точка $x_n \in X$, отличная от x. ⊠

ПРИМЕР 1. Пользуясь определением 2а, нетрудно заметить, что бесконечномерное гильбертово пространство l^2 не является локально компактным [1]. Действительно, для элементов стандартного базиса верно $\|e_k - e_l\| = \sqrt{2}$, а следовательно, из $\{e_n\} \subset l^2$ нельзя извлечь сходящуюся подпоследовательность.

§ 3. Компактность и полная ограниченность

Обсудим теперь другой подход к понятию компактности. Для этого нам потребуется ввести ещё некоторые понятия.

[1] Векторное топологическое пространство называется локально компактным, если каждая его точка имеет окрестность, замыкание которой компактно.

Определение 3. *Назовём множество A ε-сетью в метрическом пространстве X, если $X = \cup_{x\in A} \overline{B_\varepsilon(x)}$, где $\overline{B_\varepsilon(x)}$ — замкнутый шар радиуса ε с центром в точке x.*

Определение 4. *Назовём метрическое пространство X вполне ограниченным, если в нём для любого $\varepsilon > 0$ найдётся некоторая конечная ε-сеть.* (*Более новый термин*: *сверхограниченное*. *Мы будем пользоваться традиционным.*)

Нетрудно привести примеры вполне ограниченных множеств: отрезок на прямой или шар в $\mathbb{R}^3$. ε-сети в них можно построить на основе координатной сетки.

Теорема 3. *Метрическое пространство X компактно тогда и только тогда, когда оно одновременно полно и вполне ограниченно.*

Доказательство. Необходимость.

1. Необходимость полноты очевидна: иначе мы могли бы взять фундаментальную последовательность, не имеющую предела, — и никакая её подпоследовательность не была бы сходящейся. (Поскольку если сходится некоторая подпоследовательность фундаментальной последовательности, то сходится и вся последовательность — см. задачу 3 к дополнительной лекции 1.)

2. Нетрудно доказать и полную ограниченность. В самом деле, пусть для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ конечной ε_0-сети не существует. Это значит, что можно построить последовательность $\{x_n\} \subset X$, каждый последующий член которой удалён от каждого из предыдущих более чем на ε_0. Но такая последовательность, очевидно, не имеет сходящихся подпоследовательностей.

Достаточность.

1. Пусть для любого $\varepsilon > 0$ в пространстве X существует конечная ε-сеть. Пусть $Y \subset X$ — бесконечное множество. Построим в X 1-, $\frac{1}{2}$-, $\frac{1}{4}$-, …, $\frac{1}{2^n}$-, … сети и рассмотрим соответствующие шары.

2. Поскольку число шаров каждого радиуса конечно, то найдётся шар радиуса 1, содержащий бесконечно много элементов множества Y. Назовём его B_0 и положим $Y_1 = Y \cap B_0$ (Y_1 бесконечно).

3. Далее, найдётся шар радиуса $1/2$ с центром в элементе $\frac{1}{2}$-сети, содержащий бесконечно много элементов множества Y_1. Обозначим этот шар через B_1 и положим $Y_2 = Y_1 \cap B_1$.

4. Продолжая указанную процедуру, получим последовательность шаров $\{B_k\}$ радиусов $\frac{1}{2^k}$ (с центрами в точках $\frac{1}{2^k}$-сетей), где каждый шар содержит бесконечно много элементов множества Y.

5. Увеличив радиусы шаров в 4 раза ($\widetilde{B}_k$), получим последовательность вложенных (докажем ниже) замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю. В силу полноты пространства X эти шары содержат общую точку x, которая, очевидно, и будет предельной для Y.

6. Осталось доказать, что шары $\widetilde{B}_k$ вложены друг в друга. В самом деле, пусть z_k — центр k-го шара. Поскольку $B_k \cap B_{k+1}$ непусто (именно, $B_k \cap B_{k+1} \supset Y_k$), имеем $\rho(z_k, z_{k+1}) \leqslant \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{3}{2}/2^k$. После

увеличения радиусов в 4 раза будем иметь тем самым, что все точки шара $\widetilde{B}_{k+1}$ удалены от z_k не более чем на $\frac{3}{2}/2^k + \frac{1}{2^{k-1}} = (\frac{3}{2} + 2)/2^k < 4/2^k$. Поэтому $\widetilde{B}_{k+1} \subset \widetilde{B}_k$.

Теорема доказана.

Теперь мы можем считать требование полноты и полной ограниченности третьим определением компактности (для метрического пространства).

Определение 5. *Метрическое пространство X называется компактным, если оно полно и вполне ограниченно.*

ПРИМЕР 2. Гильбертов кирпич. Рассмотрим в пространстве l^2 множество

$$Q = \{x \in l^2 \mid |x_0| \leqslant 1, |x_1| \leqslant \frac{1}{2}, \ldots, |x_k| \leqslant \frac{1}{2^k}, \ldots\}. \tag{3.1}$$

Оно является компактным.

□ Прежде всего заметим, что множество Q замкнуто. Действительно, из сходимости в l^2 вытекает покоординатная сходимость. А условия в (3.1) замкнуты относительно покоординатной сходимости.

Теперь покажем, как построить для каждого $\varepsilon > 0$ конечную ε-сеть в Q. Заметим сначала, что если для произвольных $x = (x_0, x_1, x_2, \ldots) \in l^2$ и $n \in \mathbb{N}$ положить $[x]_n = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$, то

$$\|x - [x]_n\|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^2. \tag{3.2}$$

В случае $x \in Q$ в силу (3.1) и (3.2) имеем

$$\|x - [x]_n\|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^2 \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k}\right)^2 = \frac{1}{3 \cdot 4^n}.$$

Выберем теперь такое n, что $\frac{1}{3 \cdot 4^n} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$. Осталось лишь «построить сеть по оставшимся координатам». Положим

$$R = \{x \in l^2 \mid x_0 = k_0 \frac{\varepsilon}{\sqrt{2(n+1)}}, \\ x_1 = k_1 \frac{\varepsilon}{\sqrt{2(n+1)}}, \ldots, x_n = k_n \frac{\varepsilon}{\sqrt{2(n+1)}}, 0, 0, \ldots\},$$

где целые числа k_i $(i = \overline{0, n})$ пробегают все значения, при которых

$$\left| k_i \frac{\varepsilon}{\sqrt{2(n+1)}} \right| \leqslant \frac{1}{2^i}.$$

Тогда, если $x \in Q$, то расстояние от $[x]_n$ до ближайшего элемента сети будет не больше

$$\sqrt{(n+1)\cdot\frac{\varepsilon^2}{2(n+1)}} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}};$$

с учётом оценки

$$\|x-[x]_n\|^2 \leqslant \frac{1}{3\cdot 4^n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

и теоремы Пифагора получаем требуемое. ⊠

§ 4. Связь между метрическим и топологическим определениями компактности

Установим теперь связь между топологическими и метрическими определениями компактности для метрического пространства.

Для этого нам потребуется три вспомогательные леммы.

Лемма 1. *Вполне ограниченное метрическое пространство сепарабельно.*

Доказательство. Очевидно: достаточно взять конечные 1-, $\frac{1}{2}$-, $\frac{1}{4}$- и т. д. сети.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Сепарабельное метрическое пространство имеет счётную базу.*

Лемма 3. *Пусть топологическое пространство T имеет счётную базу. Тогда из любого его открытого покрытия можно извлечь счётное подпокрытие.*

Доказательства лемм 2 и 3 во избежание перегрузки текста вынесены в приложение.

Теперь мы в состоянии доказать, пожалуй, самую интересную теорему данной лекции.

Теорема 4. *«Топологические» и «метрические» определения компактности равносильны* (*разумеется, в своей общей области применимости — для метрических пространств*).

Доказательство.

1a $\Rightarrow$ 2.

1. Пусть X — метрическое пространство, в котором любая центрированная система замкнутых множеств имеем непустое пересечение. Пусть Y — произвольное бесконечное множество в X. Докажем, что оно имеет предельную точку.

2. Образуем последовательность различных точек множества Y:

$$\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}. \tag{4.1}$$

Построим множества

$$X_1 = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\},\ X_2 = \{x_2, x_3, x_4, \ldots\},\ X_3 = \{x_3, x_4, x_5, \ldots\}, \ldots. \tag{4.2}$$

Тогда, очевидно, их замыкания образуют центрированную систему замкнутых множеств.

3. В силу компактности в смысле «топологического определения» 1а она имеет непустое пересечение. Обозначим через x некоторую точку из указанного пересечения. Значит, x является точкой касания для каждого из множеств (4.2).

4. Если x не совпадает ни с одной из точек (4.1), то, очевидно, x является предельной точкой для всех X_n (как точка касания, не принадлежащая множеству), а следовательно, и для Y, т. к. $X_n \subset \subset Y$. Если же имеет место совпадение $x = x_{n_0}$, то в силу попарной различности точек (4.1) такое совпадение не имеет места больше ни при каком n и для всех X_n, $n > n_0$, $x \notin X_n$.

5. Тогда аналогично предыдущему случаю получаем, что точка x является предельной по крайней мере для X_n, $n > n_0$ (на самом деле всё же для всех, но это не важно), а поэтому и для Y.

Замечание 3. На самом деле, как нетрудно заметить, нам достаточно было потребовать счётную компактность (1а$'$ вместо 1а): мы использовали лишь счётную центрированную систему замкнутых множеств.

2а $\Rightarrow$ 1.

1. Итак, пусть в данном метрическом пространстве из любой последовательности можно извлечь сходящуюся подпоследовательность.

2. Докажем сначала, что в этом случае любая счётная центрированная система замкнутых множеств имеет непустое пересечение (2а $\Rightarrow$ 1а$'$). Пусть Φ_n, $n \in \mathbb{N}$, — замкнутые множества. Рассмотрим множества

$$\Psi_n = \cap_{k=1}^{n} \Phi_k. \tag{4.3}$$

Их непустота гарантируется центрированностью системы.

3. Выберем в каждом из них произвольным образом по точке $x_n \in \in \Psi_n$. По условию последовательность $\{x_n\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k} \to x$.

4. Докажем, что точка x принадлежит всем Φ_n. Поскольку последние замкнуты, достаточно доказать, что x является точкой касания для каждого из множеств Φ_n, т. е. что в любой её ε-окрестности найдётся хотя бы одна точка из Φ_n. Пусть задано произвольное $\varepsilon > > 0$. В силу сходимости $x_{n_k} \to x$ при всех k, больших некоторого $K(\varepsilon)$, получим $\rho(x, x_{n_k}) < \varepsilon$. Но в силу (4.3) точка x_{n_k} принадлежит <u>всем</u> множествам Φ_n, где $n \leqslant n_k$.

5. С другой стороны, условие $\rho(x, x_{n_k}) < \varepsilon$ выполнено также при <u>всех</u> $k > K(\varepsilon)$, а для любого N найдётся k, при котором $N \leqslant n_k$. Тем самым показано, что в ε-окрестности точки x найдутся точки всех множеств Φ_n, что и требовалось.

6. Осталось доказать равносильность компактности и счётной компактности (применительно к метрическим пространствам; в общем случае это неверно!). Но из определения 2а следует 3, поэтому пространство будет сепарабельным, а тем самым (в силу леммы 2) будет

иметь счётную базу. Тогда по лемме 3 любое открытое покрытие такого пространства содержит счётное подпокрытие, и мы можем применить предыдущие рассуждения.

Теорема доказана.

Для удобства читателей приведём здесь логическую схему проведённых выше рассуждений.

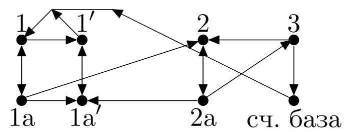

Рис. 14. Логическая схема.

§ 5. Компактные множества в метрических пространствах

До сих пор мы говорили лишь о компактных пространствах. Дадим теперь определение компактного множества.

Определение 6. *Множество A в метрическом пространстве X называется компактным, если оно компактно как метрическое пространство (с прежней метрикой* [1]*).*

Поскольку компактность в метрических пространствах может быть определена в чисто метрических терминах (обсуждением чего мы занимались выше), то свойство множества (метрического пространства) быть компактным никак не зависит от «вложения» в другие метрические пространства, существенно лишь условие неизменности расстояния. (В случае общих топологических пространств ситуация меняется.)

Поскольку компактное пространство обязано быть полным, то компактное множество A с необходимостью замкнуто. (Очевидно, однако, что замкнутости ещё недостаточно для компактности множества.)

Однако нередко приходится рассматривать множества, единственным «препятствием» для которых к тому, чтобы быть компактными, является незамкнутость.

Определение 7. *Множество A в метрическом пространстве X называется предкомпактным, если его замыкание в X компактно.*

Так, например, в $\mathbb{R}$ предкомпактны любой конечный интервал, $[0;1]\cap\mathbb{Q}$, $\{\frac{1}{n} \mid n\in\mathbb{N}\}$.

Внимание! В отличие от свойства компактности, свойство предкомпактности зависит от пространства, содержащего данное множество,

---

[1] Метрика в пространстве A, «унаследованная» от содержащего его пространства X, называется индуцированной.

что легко проиллюстрировать примером множества $(0;1)$ в пространствах $\mathbb{R}$ и $(0;+\infty)$.

§ 6. Некоторые простые факты

Теорема Вейерштрасса. *Непрерывный образ компактного топологического пространства есть компактное топологическое пространство.*

Доказательство. Пусть отображение $f: T_1 \to T_2$ непрерывно, причём образом пространства T_1 является всё T_2. Пусть $\{O_\alpha\}$ — произвольное открытое покрытие пространства T_2. Тогда множества $f^{-1}(O_\alpha)$ открыты в силу непрерывности отображения f и вместе образуют покрытие пространства T_1 (почему?). В силу компактности последнего из покрытия $\{f^{-1}(O_\alpha)\}$ можно извлечь конечное подпокрытие, но тогда его образ будет покрытием T_2 (почему?). Тем самым мы извлекли из $\{O_\alpha\}$ конечное подпокрытие.

Теорема доказана.

Следствие. Непрерывный образ компактного множества в метрическом пространстве есть компактное множество в метрическом пространстве образов. В частности, оно ограничено (см. задачу 2) и замкнуто (см. § 5).

Теорема Кантора. *Функция, непрерывная на компактном метрическом пространстве, равномерно непрерывна.*

Доказательство. Докажем от противного. Пусть выполнено отрицание определения равномерной непрерывности:

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x, \widetilde{x} \in X \ \ (\rho(x, \widetilde{x}) < \delta, \rho(f(x), f(\widetilde{x})) \geqslant \varepsilon).$$

Взяв, например, при всех $n \in \mathbb{N}$ $\delta_n = \frac{1}{n}$ и построив соответствующие последовательности x_n, $\widetilde{x}_n$, получим для некоторой сходящейся подпоследовательности $x_{n_k} \to x$:

$$x_{n_k} \to x, \quad \widetilde{x}_{n_k} \to x \text{ (в силу } \rho(x_n, \widetilde{x}_n) \to 0\text{)},$$

$$f(x_{n_k}) \to f(x), \quad f(\widetilde{x}_{n_k}) \to f(x).$$

Тогда в силу непрерывности расстояния по обоим аргументам в совокупности (см. дополнительную лекцию 1) и теоремы о предельном переходе в числовом неравенстве имеем

$$\rho(f(x), f(x)) = \lim_{k\to\infty} \rho(f(x_{n_k}), f(\widetilde{x}_{n_k})) \geqslant \varepsilon,$$

что невозможно.

Теорема доказана.

§ 7. Эквивалентность норм в конечномерном линейном пространстве

Утверждение 1. *В любом конечномерном нормированном пространстве L^n все нормы эквивалентны, т. е. связаны соотношением*

$$\exists \alpha_1, \alpha_2 > 0 \ \forall x \in L^n \ \ \alpha_1 \|x\| \leqslant \|x\|' \leqslant \alpha_2 \|x\|.$$

Доказательство.

1. Ясно, что достаточно доказать эквивалентность какой-либо фиксированной нормы всем остальным.

2. Сделаем это для евклидовой нормы $\|x\|_2$. Прежде всего заметим, что произвольная норма $\|x\|$ непрерывна как функция своего аргумента относительно евклидовой нормы: $\lim_{\|x\|_2 \to 0} \|x\| \to 0$. В самом деле, если $e_1, \ldots, e_n$ — элементы ортонормированного базиса, $x_1, \ldots, x_n$ — координаты элемента x в этом базисе, то $\|x\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i| \|e_i\| \to 0$ при $\|x\|_2 \to 0$ в силу очевидной оценки $|x_i| \leqslant \|x\|_2$.

3. В силу теоремы Больцано—Вейерштрасса о компактности ограниченных замкнутых множеств в $\mathbb{R}^n$ единичная сфера $\{x \in L^n \mid \|x\|_2 = 1\}$ компактна (см. также задачу 3), а в силу теоремы Вейерштрасса о непрерывном образе компактного пространства множество N значений, которые принимает норма $\|x\|$ на единичной относительно $\|x\|_2$ сфере, есть компактное множество действительных чисел. Следовательно, N замкнуто и ограничено.

4. Но тогда, во-первых, N ограничено сверху, а во-вторых, «отграничено» от нуля, поскольку норма ненулевого элемента отлична от нуля. Итак, на единичной относительно евклидовой нормы сфере имеем

$$0 < \beta_1 \leqslant \|x\| \leqslant \beta_2,$$

или

$$\alpha_1 \|x\| \leqslant 1 \leqslant \alpha_2 \|x\| \tag{7.1}$$

с $\alpha_1 = 1/\beta_2$, $\alpha_2 = 1/\beta_1$, откуда для произвольного $x \in L^n$ имеем

$$\alpha_1 \|x\| \leqslant \|x\|_2 \leqslant \alpha_2 \|x\|.$$

Теорема доказана.

Следствие 1. В конечномерном нормированном пространстве сходимость по норме влечёт сходимость по любой другой норме, которую можно ввести в данном линейном пространстве.

Следствие 2. Из предыдущего следствия вытекает, что сходимость по норме в конечномерном пространстве эквивалентна покоординатной сходимости. В самом деле: это верно для евклидовой нормы (которая может быть введена так, что используемый базис окажется ортонормированным).

Утверждение 2. *В произвольном банаховом пространстве X любое конечномерное линейное подпространство* (*многообразие*) L^m *замкнуто* (*является подпространством*).

Доказательство.

1. Требуется лишь доказать, что если некоторая последовательность $\{x_n\} \subset L^m$ сходится по норме X, то её предел принадлежит L^m.

2. Для доказательства этого факта рассмотрим сначала L^m как линейное пространство (линейное многообразие). Легко убедиться, что индуцированная из пространства X норма будет нормой и в L^m. Следовательно, (в силу утверждения об эквивалентности норм) фундаментальная по норме пространства X последовательность будет фундаментальной и по какой-либо евклидовой норме в L^m. Введём в L^m ортонормированный базис $\{e_i\}_{i=\overline{1,m}}$.

3. Тогда последовательности координат элементов x_n тоже будут фундаментальными, а следовательно, сходящимися. Задаваемый соответствующими пределами элемент $x \in L^m$ будет пределом $\{x_n\}$ в евклидовой норме, а следовательно, и в исходной норме, совпадающей с нормой X. В силу единственности предела имеем $x_n \to x \in L^m$, что и требовалось.

Утверждение доказано.

§ 8. Теорема Арцела

Теорема Арцела. *Пусть заданы функции $f_n : K_1 \to K_2$ и*
1) K_1, K_2 — *компактные метрические пространства*;
2) *последовательность функций $\{f_n\}$ является равностепенно непрерывной* (*или, выражаясь точнее, равномерно равностепенно непрерывной*):

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, \widetilde{x} \in K_1, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (\rho_1(x, \widetilde{x}) \leqslant \delta \Rightarrow \Rightarrow \rho_2(f_n(x), f_n(\widetilde{x})) \leqslant \varepsilon). \quad (8.1)$$

Тогда из последовательности $\{f_n\}$ можно извлечь подпоследовательность, равномерно сходящуюся к некоторой функции $f \in C(K_1, K_2)$.

Доказательство.

1. Построим (это возможно в силу компактности K_1) конечные 1-, $\frac{1}{2}$-, $\frac{1}{4}$- и т. д. сети. Упорядочив совокупность точек этих сетей в порядке перечисления и выбрасывая из последовательности повторяющиеся точки, получим счётное всюду плотное в K_1 множество $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_l, \ldots\}$.

2. Для каждого фиксированного l рассмотрим последовательности $\{f_n(x_l)\}$. В силу компактности множества значений K_2 с помощью «диагональной процедуры» (см. приложение в конце данной лекции)

можно выделить такую подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$, которая будет сходиться в каждой точке $x_l \in X$:

$$f(x_l) \equiv \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x_l), \quad l \in \mathbb{N}.$$

Для сокращения записи будем далее обозначать полученную подпоследовательность функций $\{f_{n_k}\}$ одним индексом: $f_k \equiv f_{n_k}$, не смешивая её с исходной последовательностью.

3. Докажем, что полученная функциональная подпоследовательность сходится поточечно при всех $x \in K_1$, а не только при $x_l \in X$, и, более того, сходимость равномерна на K_1. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Пользуясь неравенством треугольника, запишем для произвольного $x \in \in K_1$:

$$\rho_2(f_k(x), f_m(x)) \leqslant \\ \leqslant \rho_2(f_k(x), f_k(x_l)) + \rho_2(f_k(x_l), f_m(x_l)) + \rho_2(f_m(x_l), f_m(x)), \quad (8.2)$$

где x_l будет определено ниже.

4. Пользуясь равностепенной непрерывностью исходной функциональной последовательности (а значит, и выбранной подпоследовательности), найдём такое $\delta > 0$, что для всех $k \in \mathbb{N}$ и $\rho_1(\overline{x}, \overline{\overline{x}}) < \delta$ будет выполнено $\rho_2(f_k(\overline{x}), f_k(\overline{\overline{x}})) < \frac{\varepsilon}{3}$.

5. Найдём первое среди чисел 2^{-j}, $j \in \mathbb{N}$, меньшее δ. Рассмотрим конечное множество $X_j \subset X$, состоящее из всех элементов выбранных ранее 1-, $\frac{1}{2}$-,…, $\frac{1}{2^j}$-сетей в K_1. (Легко видеть, что тогда для каждого $x \in X$ ближайший к нему элемент $x_l \in X_j$ находится на расстоянии меньше δ.)

6. В силу сходимости последовательности $\{f_k\}$ во всех точках множества X_j (поскольку она по построению сходится всюду на X) существует такое $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ (зависящее только от ε, но не от x!), что для любых $k, m > N$ и для любого $x_l \in X_j$ верно неравенство

$$\rho_2(f_k(x_l), f_m(x_l)) < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (8.3)$$

Поскольку ближайший к произвольному фиксированному элементу $x \in \in K_1$ элемент $x_l \in X_j$ находится на расстоянии ближе δ, то с учётом выбора δ и два остальных слагаемых в (8.2) меньше $\frac{\varepsilon}{3}$, откуда мы получаем

$$\rho_2(f_k(x), f_m(x)) < \varepsilon \quad (8.4)$$

при всех $x \in K_1$ и всех $k, m > N(\varepsilon)$.

7. Тем самым установлена «равномерная фундаментальность» последовательности $\{f_k\}$ на K_1. Из этого факта следует сходимость в каждой точке, а также равномерность этой сходимости: для доказательства последней достаточно перейти в (8.4) к пределу при $m \to \infty$ (уже зная, что он существует поточечно).

8. Итак, мы доказали, что из данной последовательности можно извлечь равномерно сходящуюся последовательность, предел которой — как равномерный предел непрерывных функций — сам является непрерывной функцией.

Теорема доказана.

Следствие. *Семейство функций из $C(K_1, K_2)$, обладающее свойством равномерной равностепенной непрерывности (как в условии теоремы) с конкретными $\delta(\varepsilon)$, является компактным (в индуцированной из $C(K_1, K_2)$ метрике).*

□ В самом деле, мы показали, что любая последовательность элементов этого семейства содержит сходящуюся в $C(K_1, K_2)$ подпоследовательность. Осталось доказать, что предел лежит в рассматриваемом семействе. Но это легко следует из предельного перехода в неравенстве $\rho_2(f_n(x), f_n(\widetilde{x})) \leqslant \varepsilon$. ⊠

Замечание 4. Если бы мы использовали в условии теоремы неравенство $\rho_2(f_n(x), f_n(\widetilde{x})) < \varepsilon$, то смогли бы гарантировать лишь предкомпактность соответствующего семейства функций, т. к. неравенство при предельном переходе может стать нестрогим.

§ 9. Теорема Пеано

В качестве примера использования теоремы Арцела докажем теорему Пеано о существовании (локальном) решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения. Эта теорема не гарантирует единственности, но зато верна в более слабых предположениях относительно правой части уравнения; при этом вместо теоремы о неподвижной точке в доказательстве используется более изощрённая техника, основанная на идее компактности.

Теорема Пеано. *Рассмотрим дифференциальное уравнение*

$$y' = f(x, y). \tag{9.1}$$

Если правая часть $f(x, y)$ непрерывна в некоторой ограниченной замкнутой области G, то через каждую внутреннюю точку (x_0, y_0) этой области проходит хотя бы одна интегральная кривая этого уравнения.

Доказательство. 1. Заметим прежде всего (см. теорему Вейерштрасса, § 6, и задачи 2, 3), что функция $f(x, y)$, как непрерывная на компактном множестве G, ограничена. Пусть $M > 0$ таково, что всюду в G верно $|f(x, y)| < M$.

2. Построим фигуру $\Delta \subset G$ следующим образом. Проведём через точку (x_0, y_0) прямые с угловыми коэффициентами $\pm M$ и возьмём $a < x_0$, $b > x_0$ так, чтобы затушёванные треугольники лежали целиком в G. Это возможно, т. к. (x_0, y_0) — внутренняя точка области G.

3. Построим последовательность ломаных Эйлера, лежащих в Δ. Именно, из точки (x_0, y_0) проведём отрезок с угловым коэффициен-

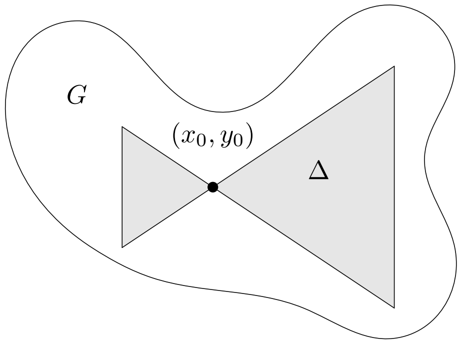

Рис. 15. Фигура Δ

том $f(x_0, y_0)$ до точки (x_1, y_1) (здесь, очевидно, $y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0)$). Затем проведём отрезок с угловым коэффициентом $f(x_1, y_1)$ из точки (x_1, y_1) в точку (x_2, y_2). Важно, что каждое следующее звено не может «вылезти» за верхнюю и нижнюю наклонные границы фигуры Δ (почему?). При этом каждый раз будем брать приращение по x «не слишком маленьким» (чтобы достичь абсциссы b за конечное число шагов) и «не слишком большим» (меньше некоторого δ, своего для каждой конкретной ломаной). Аналогично построим часть ломаной и «назад» до абсциссы a. Описанным способом построим бесконечную последовательность ломаных L_n, где $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$. Обозначим через $\varphi_n(x)$ функции (определённые на $[a; b]$), графиками которых являются ломаные L_n.

Заметим, что эти ломаные лежат целиком в пределах фигуры $\Delta \subset G$, «не вылезая» вверх или вниз и даже не соприкасаясь с её наклонными границами (почему?). Тем самым, каждая вершина ломаной оказывается строго внутри углов, образованных этими границами. Более того, функции φ_n являются липшиц-непрерывными с общей константой Липшица M (докажите это аккуратно!).

4. Таким образом, функции $\{\varphi_n(x)\}$ обладают следующими свойствами:
1) они определены на $[a; b]$;
2) они равномерно ограничены;
3) они равностепенно непрерывны.
(Свойства 2), 3) следуют из сказанного в последнем абзаце этапа 3 доказательства.)

В силу теоремы Арцела из последовательности $\{\varphi_n(x)\}$ можно выделить сходящуюся равномерно на $[a; b]$ подпоследовательность $\{\varphi_{n_k}(x)\}$. Обозначим её для простоты $\{\psi_k(x)\}$ и положим

$$\psi(x) = \lim_{k\to\infty} \psi_k(x). \tag{9.2}$$

Докажем, что эта функция является решением уравнения (9.1), проходящим через точку (x_0, y_0) (и, тем самым, решением соответствующей задачи Коши).

5. Надо доказать фактически:

$$\forall x' \in (a;b),\ \forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0\ \ \forall x'' \in [a;b] \cap \big((x'-\delta; x') \cup (x'; x'+\delta)\big)$$
$$\left| \frac{\psi(x'') - \psi(x')}{x'' - x'} - f(x', \psi(x')) \right| < 2\varepsilon.$$

Зафиксируем произвольные $x' \in [a;b]$ и $\varepsilon > 0$. В силу непрерывности $f(x,y)$ и предельного соотношения (9.2) достаточно доказать, что

$$\exists \delta > 0, \exists K > 0\ \ \forall k > K,\ \forall x'' \in [a;b] \cap \big((x'-\delta; x') \cup (x'; x'+\delta)\big)$$
$$\left| \frac{\psi_k(x'') - \psi_k(x')}{x'' - x'} - f(x', \psi_k(x')) \right| < \varepsilon. \tag{9.3}$$

Поскольку f непрерывна в области G, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0$ такое, что при

$$|x - x'| < 2\eta, \quad |y - y'| < 4M\eta \tag{9.4}$$

(где $y' = \psi(x')$) верно

$$f(x', y') - \varepsilon < f(x,y) < f(x', y') + \varepsilon. \tag{9.5}$$

Условия (9.4) задают открытый прямоугольник, который мы обозначим Q. При достаточно малом $\eta > 0$ он лежит целиком в Δ.

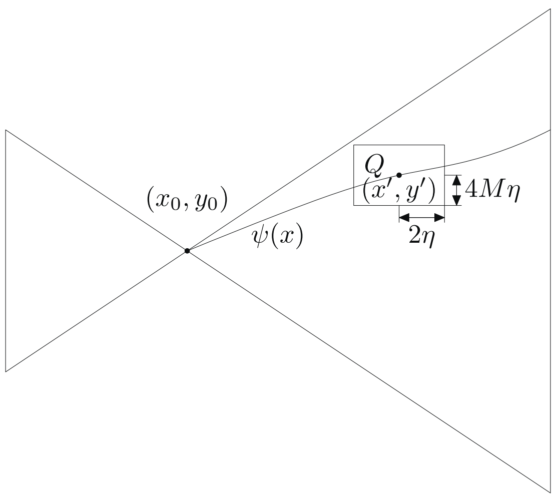

Рис. 16. Прямоугольник Q

Выберем теперь $K \in \mathbb{N}$ такое, что при всех $k > K$:
1) верно неравенство $|\psi(x) - \psi_k(x)| < 2M\eta$ для всех $x \in [a;b]$,

2) звенья ломаных L_k имеют длины меньше η по координате x.
Тогда при $|x - x'| < 2\eta$ все ломаные L_k с $k > K$ лежат внутри Q (почему?), а следовательно, для любой точки (x, y), лежащей на любой из этих ломаных при $|x - x'| < 2\eta$, выполнено (9.5).

Рассмотрим теперь конкретную ломаную с некоторым $k > K$. Пусть точки (a_0, b_0), (a_1, b_1),…, (a_{n+1}, b_{n+1}) — её вершины, причём

$$a_0 \leqslant x' < a_1 < \ldots < x'' \leqslant a_{n+1} \tag{9.6}$$

(для определённости считаем, что $x'' > x'$; случай $x'' < x'$ рассматривается аналогично). Для функции $\psi_k(x)$ имеем

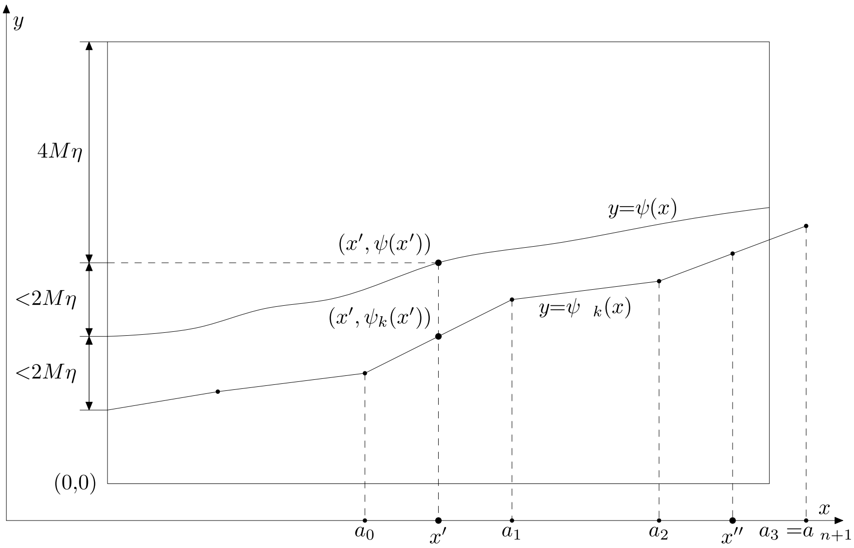

Рис. 17. Ломаная $y = \psi_k(x)$

$$\psi_k(a_1) - \psi_k(x') = f(a_0, b_0)(a_1 - x');$$
$$\psi_k(a_{i+1}) - \psi_k(a_i) = f(a_i, b_i)(a_{i+1} - a_i), \quad i = \overline{1, n-1};$$
$$\psi_k(x'') - \psi_k(a_n) = f(a_n, b_n)(x'' - a_n).$$

Тогда при $|x' - x''| < \eta$ в силу (9.5) и того факта, что все вершины (a_0, b_0), (a_1, b_1),…, (a_{n+1}, b_{n+1}) лежат в прямоугольнике Q, имеем

$$[f(x', y') - \varepsilon](a_1 - x') < \psi_k(a_1) - \psi_k(x') < [f(x', y') + \varepsilon](a_1 - x');$$
$$[f(x', y') - \varepsilon](a_{i+1} - a_i) < \psi_k(a_{i+1}) - \psi_k(a_i) < [f(x', y') + \varepsilon](a_{i+1} - a_i);$$
$$[f(x', y') - \varepsilon](x'' - a_n) < \psi_k(x'') - \psi_k(a_n) < [f(x', y') + \varepsilon](x'' - a_n).$$

Сложив эти равенства, получаем:

$$[f(x', y') - \varepsilon](x'' - x') < \psi_k(x'') - \psi_k(x') < [f(x', y') + \varepsilon](x'' - x'),$$

откуда и следует (9.3).

Теорема доказана.

Замечание 5. Разные последовательности ломаных Эйлера могут сходиться к разным решениям уравнения (9.1), и, таким образом, решение может быть не единственно. Рассмотрите пример задачи Коши

$$\begin{cases} y' = 3y^{\frac{2}{3}}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

§ 10. Приложение

Доказательство леммы 2.

1. Достаточно доказать, что базу стандартной метрической топологии в сепарабельном метрическом пространстве X образуют шары B_{nk} с центрами в точках всюду плотной счётной системы $\{x_n\}$ и всевозможными рациональными радиусами r_k, $k \in \mathbb{N}$.

2. С учётом теоремы 2 из лекции 5б и поскольку всякое открытое множество в метрическом пространстве вместе с каждой своей точкой содержит (по определению) некоторый открытый шар, достаточно доказать, что для произвольного открытого шара B и произвольной точки y в нём найдётся шар из рассматриваемого семейства, содержащий точку y и целиком содержащийся в шаре B.

3. Пусть $B \equiv B_R(x) \subset X$ — шар радиуса R с центром в точке x; пусть y — произвольная точка в этом шаре. Пусть $r = \frac{R-\rho(x,y)}{3}$, тогда:
1) в шаре радиуса r с центром в точке y найдётся точка x_n из счётной системы (поскольку последняя всюду плотна в X);
2) шар с центром в точке x_n радиуса r_k, где $r_k \in \mathbb{Q}$, $r < r_k < 2r$, содержит точку y и лежит целиком в шаре B (докажите самостоятельно!).

4. Проведя для каждой точки шара B аналогичное построение, мы представим его в виде объединения шаров из системы $\{B_{nk}\}$, что и доказывает, что последняя образует базу (очевидно, счётную).

Лемма доказана.

Доказательство леммы 3.

1. Пусть $\{G_n\}$ — счётная база пространства T. Пусть $\{O_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — некоторое его открытое покрытие. Тогда для каждого O_α из покрытия существует (по определению базы топологии) представление

$$O_\alpha = \cup_{k\in K_\alpha} G_k, \quad K_\alpha \subset \mathbb{N}. \tag{10.1}$$

2. Обозначим $K = \cup_{\alpha\in A} K_\alpha \subset \mathbb{N}$. Поскольку $\{O_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — покрытие, то

$$T = \cup_{\alpha\in A} O_\alpha = \cup_{\alpha\in A} \cup_{\, k\in K_\alpha} G_k = \cup_{k\in K} G_k, \quad K \subset \mathbb{N}. \tag{10.2}$$

Тем самым, подсемейство $\{G_k\}_{k\in K}$ базы топологии является покрытием. Но в силу (10.1) и равенства $K = \cup_{\alpha\in A} K_\alpha$ для каждого $k \in K$ найдётся хотя бы одно такое α_k, что $G_k \subset O_{\alpha_k}$.

3. Следовательно,

$$T = \cup_{k\in K} G_k \subset \cup_{k\in K} O_{\alpha_k} \subset T,$$

или $T = \cup_{k\in K} O_{\alpha_k}$. Мы извлекли из данного покрытия не более чем счётное подпокрытие.

Лемма доказана.

Диагональная процедура.

1. Пусть нам требуется из последовательности функций $\{f_n : K_1 \to \to K_2\}$ извлечь подпоследовательность, сходящуюся в каждой точке счётного множества $X = \{x_l\}_{l\in\mathbb{N}}$.

2. Выберем на первом шаге подпоследовательность $\{f_{n_k}\} \equiv \{f_{n1}\}$, сходящуюся в точке x_1 (это можно сделать, т. к. последовательность $\{f_n(x_1)\} \subset K_2$ лежит в компактном пространстве).

3. Далее выберем из полученной подпоследовательности последовательность $\{f_{n2}\}$, …, на i-ом шаге — выберем из подпоследовательности $\{f_{n,i-1}\}$ подпоследовательность $\{f_{n,i}\}$, сходящуюся в точке $x_i \in \in X$. Заметим, что при извлечении подпоследовательностей свойство сходиться в предыдущих точках не терялось.

4. Запишем теперь полученные последовательности в бесконечный столбец и заметим, что под произвольным элементом записан элемент, номер которого в исходной последовательности не меньше номера рассматриваемого элемента в ней же. (Зачем нужно это замечание?) Рассмотрим теперь «диагональную последовательность», способ построения которой исходя из полученной таблицы ясен из названия, — она будет подпоследовательностью исходной последовательности (почему?), обладающей нужным нам свойством сходимости во всех точках $x_l \in X$ (почему?).

§ 11. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Доказать, что любое вполне ограниченное множество в метрическом пространстве является ограниченным.

Задача 2. Доказать, что любое компактное множество в метрическом пространстве является ограниченным.

Задача 3. Как следует из задачи 2 и вышеизложенного материала, любое компактное множество в метрическом пространстве является замкнутым и ограниченным.

1) Доказать, что в $\mathbb{R}^n$ эти два условия вместе достаточны для компактности множества.

2) Сформулировать достаточное условие предкомпактности в $\mathbb{R}^n$.

3) Привести пример, показывающий, что в общем случае этих двух условий недостаточно для компактности.

Задача 4. С помощью «$\frac{\varepsilon}{3}$-приёма» доказать полноту пространства $C(M_1, M_2)$ ограниченных непрерывных функций, действующих из метрического пространства M_1 в полное метрическое пространство M_2.

Задача 5. Пусть X — банахово пространство, причём X^* сепарабельно. Как с помощью диагональной процедуры извлечь из ограниченной последовательности $\{x_n\} \subset X$ слабо сходящуюся?

Задача 6. Пусть M — равномерно ограниченное множество функций в $C[a;b]$. Доказать, что множество функций

$$\left\{ \int\limits_0^t x(\tau)\, d\tau \mid x(t) \in M \right\}$$

предкомпактно в $C[a;b]$.

Задача 7. Доказать, что множество непрерывно дифференцируемых функций $x(t)$ на $[a;b]$ таких, что

$$\int\limits_a^b \Big((x(t))^2 + (x'(t))^2 \Big)\, dt < k$$

при некотором фиксированном k, предкомпактно в $C[a;b]$.

Задача 8. Доказать, что соотношение эквивалентности для норм, заданных на линейном пространстве, действительно является отношением эквивалентности в смысле определения из семинара-лекции 2.

Задача 9. Доказать, что любое конечномерное нормированное пространство полно (и, следовательно, банахово).

Предметный указатель

Взаимно однозначное соответствие, 10
Гильбертов кирпич, 153
Лемма
— Фату, 44
Мера
— Жордана, 20
— Лебега непрерывная, 20
— Лебега полная, 20
— Лебега, непрерывность, 23
— монотонность, 34
— элементарного множества, 33
Множество
— ε–сеть, 152
— Кантора, 21
— бесконечное, 10
— вполне ограниченное, 152
— единица, 30
— кольцо, 31
— кольцо множеств, 30
— компактное, 156
— мощность континуума, 12
— направленное, 86
— не более чем счетное, 14
— открытое покрытие, 149
— полукольцо множеств, 30
— предкомпактное, 156
— равномощное, 11
— расстояние до точки, 56
— счетное, 13
— центрированная система, 149
Направленность, 87
— сходящаяся, 87
Неравенство
— Гельдера, 48
— Минковского, 48
Отношение эквивалентности, 25
Пространство
— компактное, 150
— метрическое
— — компактное, 153
Ряд Лорана, 126
Следствие
— из теоремы Хана–Банаха, 120
Сходимость
— $*$-слабая, 122
— сильная, 101
— слабая, 122
Теорема
— Арцела, 159
— Беппо–Леви, 43
— Вейерштрасса, 157
— Кантора, 15, 157
— Кантора—Бернштейна, 12
— Коши, 125
— Лебега, 43
— Пеано, 161
— Рисса, 51
Тождество
— поляризационное, 140
Топология
— база, 74
Точка
— касания, 57
Формула
— Коши, 126
— де Моргана, 9
Функция
— аналитическая, 125
Частичный порядок, 83
Элемент
— минимальный, 84

— наименьший, 84
— обратимый, 129

Список литературы

1. *Арсеньев А. А.* Лекции по функциональному анализу для начинающих специалистов по математической физике. — М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009.— 512 с.
2. *Байокки К., Капело А.* Вариационные и квазивариационые неравенства. — М.: Наука, 1988. — 448 с.
3. *Богачев В. И.* Основы теории меры.— М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2003.— Т. 1.— 554 с.
4. *Брудно А. Л.* Теория функций действительного переменного.— М.: Наука, 1971.— 120 с.
5. *Вайнберг М.М.* Вариационные методы исследования нелинейных операторов. — М.: Гос. изд. технико-теор. лит., 1956. — 344 с.
6. *Гелбаум Б., Олмстед Дж.* Контрпримеры в анализе.— М.:Мир, 1967.— 252 с.
7. *Данфорд Н.*, *Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория.
8. *Дьяченко М. И., Ульянов П. Л.* Интеграл и мера.— М.: Факториал, 1998.—159 с.
9. *Зорич В. А.* Математический анализ. — М.: Наука, 1981. — 544 с.
10. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Основы математического анализа. Часть II. М.: Наука, 1980. — 448 с.
11. *Иосида К.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967. — 624 с.
12. *Канторович Л. В.*, *Акилов Г. П.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1977. — 744 с. — М.: Мир, 1962. — 897 с.
13. *Келли Дж. Л.* Общая топология.—М.: Наука, 1981.—431 с.
14. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа.— М.: Наука, 1972, — 496 с.
15. *Морен К.* Методы Гильбертова пространства. — М.: Мир, 1965. — 572 с.
16. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. Издание третье, исправленное. Серия «Учебники для вузов. Специальная литература»/ СПб.: Издательство «Лань», 1999.— 560 с.
17. *Осмоловский В. Г.* Нелинейная задача Штурма-Лиувилля. — С.-П.: 2003. — 260 с.
18. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Функциональный анализ.—М.: Мир, 1977.—Т. 1.—357 с.
19. *Робертсон А., Робертсон В.* Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1967.
20. *Рудин У.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.
21. *Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О.* Нелинейный функциональный анализ и его приложения к уравнениям в частных производных. — М.: Научный Мир, 2008. — 400 с.

22. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1980. — 496 с.
23. *Ульянов П. Л., Бахвалов А. Н., Дьяченко М. И., Казарян К. С., Сифуэнтес П.* Действительный анализ в задачах. — М.: Физматлит, 2005. — 416 с.
24. *Хатсон В., Пим Дж.*. Приложения функционального анализа и теории операторов. — М.: Мир, 1983. — 432 с.
25. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. — М.: Изд-во иностр. лит., 1962. — 832 с.
26. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. Теория и приложения. — М.: Мир, 1969. —1072 с.
27. *Эванс Л. К.* Уравнения с частными производными. — Новосибирск.: Тамара Рожковская, 2003. — 563 с.
28. *Adams R.* Sobolev spaces. Academic press, 1975.

КОРПУСОВ Максим Олегович
ПАНИН Александр Анатольевич

Учебное издание

Лекции по линейному и нелинейному
функциональному анализу.
Том I. Общая теория. Часть II. Лекции–Семинары

Подписано к печати 01.04.2016 г.
Формат А5. Объем 10,75 п. л. Тираж 50 экз.
Заказ №

Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова
119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

Отпечатано в типографии
Физического Факультета МГУ им. М.В. Ломоносова