3. Физические задачи приводящие к уравнениям параболического типа

1) Уравнение теплопроводности

Получим уравнение теплопроводности, описывающее процесс распространения тепла. Это уравнение относится к уравнениям параболического типа.

Введем следующие обозначения:

1) $u(M,t)$ – температура тела D в момент времени t, макроскопическая характеристика теплофизических свойств тела;

2) ρ - плотность тела;

3) $C(M)$ – удельная теплоемкость;

4) $K(M)$ – коэффициент теплопроводности;

5) $f(M,t)$ – объемная плотность источников (стоков) тепла.

Для вывода уравнения воспользуемся законом Фурье:

Если температура тела неравномерна, то в нем возникают тепловые потоки, направленные из мест с более высокой температурой в места с более низкой температурой.

Количество тепла, протекающее через площадку $d\sigma$ за промежуток времени dt, равно

$$dQ = -k\left(M\right)\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma dt,$$

где $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ - производная по нормали к площадке.

Рассмотрим тело D, ограниченное поверхностью S: $\bar{D} = D \bigcup S$. Обозначим через $\vec{n}$ внешнюю нормаль к поверхности S.

Для вывода уравнения теплопроводности воспользуемся **методом баланса (законом сохранения тепла).** Выделим внутри тела D элементарный объем ΔV с граничной поверхностью ΔS и запишем для него уравнение баланса тепла.

1) Количество тепла, которое необходимо сообщить объему ΔV в течение промежутка времени Δt для повышения его температур на величину $\Delta u = u(M, t+\Delta t) - u(M, t)$,

равно:

$$\Delta Q_1 = \iiint\limits_{\Delta V} C(M)\rho(M)\big(u(M,t+\Delta t) - u(M,t)\big)dV_M$$

Это количество тепла поступает в объем ΔV за счет теплообмена через поверхность ΔS с телом D, а также за счет действия источников (стоков) тепла, расположенных внутри объема ΔV.

2) Для учета теплообмена объема ΔV с телом D используем закон Фурье:

$$\Delta Q_2 = \int_t^{t+\Delta t} d\tau \iint_{\Delta S} k(P) \frac{\partial u}{\partial n}(P,\tau)\, d\sigma_P d\tau$$

Для преобразования поверхностного интеграла в объемный воспользуемся теоремой Остроградского – Гаусса:

Если вектор-функция $\vec{A}(M)$ непрерывно дифференцируема в области D и непрерывна в области $\bar{D}$: $\vec{A} \in C^{(1)}(D) \cap C(\bar{D})$, то

$$\iint_S \vec{A} d\vec{\sigma} = \iiint_D div\vec{A} dV,$$

где $d\vec{\sigma} = \vec{n} d\sigma$, $\vec{n}$ - внешняя нормаль к поверхности S, $\vec{A} d\vec{\sigma}$ поток вектора $\vec{A}$ через площадку $d\sigma$ $div\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$ - дивергенция вектора $\vec{A}$.

Положив в формуле Остроградского-Гаусса $\vec{A} = k(M)\, gradu(M,t)$, где $gradu = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$, получим

$$\iint_{\Delta S} k(P)\frac{\partial u}{\partial n}(P,t)\, d\sigma_P = \iiint_{\Delta V} div\big(k(M)\, gradu(M,t)\big) dV_M$$

и окончательно:

$$\Delta Q_2 = \int_t^{t+\Delta t} d\tau \iiint_{\Delta V} div\big(k(M)\, gradu(M,t)\big) dV_M$$

Для справедливости применимости формулы Остроградского – Гаусса необходимо предположить, что по переменной M

$$u \in C^{(2)}(D) \cap C^{(1)}(\bar{D}), k \in C^{(1)}(D) \cap C(\bar{D}).$$

3) Внутри объема ΔV за промежуток времени Δt может выделяться или поглощаться количество ΔQ_3, например, за счет прохождения тока, или вследствие химических реакций:

$$\Delta Q_3 = \int_t^{t+\Delta t} d\tau \iiint_{\Delta V} f\left(M,t\right) dV_M .$$

Уравнение баланса тепла:

$$\Delta Q_1 = \Delta Q_2 + \Delta Q_3 .$$

В левой части формулы изменение количества тепла в объеме D за время Δt , а в правой части – причины, вызывающие это изменение.

Для получения дифференциального уравнения предположим, что функция $u\left(M,t\right)$ дважды непрерывно дифференцируема в области D и один раз непрерывно дифференцируема в области $\bar{D}$ по M и один раз непрерывно дифференцируема в области D и непрерывна в области $\bar{D}$ по t : $u\left(M,t\right) \in C_{M,t}^{(2,1)}\left(D\right) \cap C_{M,t}^{(1,0)}\left(\bar{D}\right).$

Применяя формулу среднего значения и переходя к пределу при $\Delta V \to M,\ \Delta t \to 0$, получим уравнение теплопроводности:

$$C(M)\rho(M)u_t(M,t) = div\big(k(M)\,grad\,u(M,t)\big) + f(M,t).$$

Для вывода граничных условий нужно воспользоваться законом Ньютона:

Количество тепла Q, протекающее в единицу времени через площадку σ *поверхности тела в окружающую среду, равно* $Q = \sigma h(u - u_0)$, *где* $u_0(M,t)$ *- температура окружающей среды,* $u(P,t)$ *-температура поверхности тела, h (P) - коэффициент теплообмена.*

Поскольку тепловой поток на поверхности S равен $k(P)\dfrac{\partial u}{\partial n}$, где $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ - производная по внешней нормали, то граничное условие можно записать в виде

$$\alpha(P)\frac{\partial u}{\partial n}(P,t) + \beta(P)u(P,t) = \mu(P,t),\quad P \in S.$$

Начально-краевая задача для уравнения теплопроводности имеет следующий вид:

$$\begin{cases} C(M)\rho(M)u_t(M,t) = div\big(k(M)\,grad\;u(M,t)\big) + f(M,t),\;\; (M,t)\in Q_\infty, \\ u(M,0) = \varphi(M),\; M\in \bar{D}, \\ \alpha(P)\dfrac{\partial u}{\partial n}(P,t) + \beta(P)u(P,t) = \mu(P,t), P\in S, t\in[0,\infty). \end{cases}$$

Здесь

$$Q_\infty = D\times(0,\infty) \equiv \{(M,t): M\in D,\; t\in(0,\infty)\},\;\; \bar{Q}_\infty = \bar{D}\times[0,\infty),$$

$\dfrac{\partial u}{\partial n}$ - производная по внешней нормали, коэффициенты удовлетворяют следующим условиям:

$$C(M)>0,\; \rho(M)>0,\; k(M)>0, M\in D,\;\; \alpha(P)>0,\; \beta(P)>0,\; \alpha(P)+\beta(P)>0.$$

Определение. Функция $U(M,t)$ называется классическим решением поставленной начально-краевой задачи, если она:

1) принадлежит следующему классу $u(M,t) \in C_{M,t}^{(2,1)}(Q_\infty) \cap C_{M,t}^{(1,0)}(\bar{Q}_\infty)$;

2) удовлетворяет уравнению в классическом смысле (подстановка $u\,(M,t)$ в уравнение приводит к тождеству),

3) непрерывно примыкает к начальным и граничным условиям.

Необходимое условие существование классического решения – **условие согласования начального и граничного условий:**

$$\alpha(P)\frac{\partial\varphi(P)}{\partial n} + \beta(P)\varphi(P) = \mu(P,0), \quad P \in S.$$

В одномерном случае уравнение теплопроводности имеет следующий вид:

$$C(x)\rho(x)u_t(x,t)=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right)+f(x,t).$$

В случае постоянных коэффициентов $C(x)=C_0,\ \rho(x)=\rho_0,\ k(x)=k_0$ одномерное уравнение теплопроводности можно записать в виде

$$u_t=a^2u_{xx}+F(x,t),\quad a^2=\frac{k_0}{C_0\rho_0},\quad F(x,t)=\frac{1}{C_0\rho_0}.$$

2) Температурные волны

С исследования процессов распространения тепла связано зарождение математической физики, понимаемой как науки о построении и изучении математических моделей физических явлений и процессов. В 1811 году Парижская академия наук объявила конкурс на тему создания математической теории законов распространения тепла. Победителем этого конкурса стал Фурье Жан Батист Жозеф (1768-1830 гг.). Им были написаны знаменитые мемуары по теории тепла в 1807 г., в 1811 г. и в 1822 году - мемуар «Аналитическая теория тепла».

Одним из первых примеров приложения математической теории теплопроводности, развитой Фурье, к изучению явлений природы является задача о распространении температурных волн в почве.

Температура на поверхности земли носит ярко выраженную суточную и годовую периодичность. Будем рассматривать почву как однородное полупространство $0 \le x \le \infty$.

Рассмотрим процесс распространения периодических колебаний в почве. Заметим, что эта задача является характерной задачей без начальных условий, поскольку при многократном повторении температурного хода на поверхности почвы влияние начальной температуры будет меньше, чем влияние других факторов, которыми мы пренебрегаем (например, неоднородностью почвы).

Заметим также, что поскольку область, в которой ищется решение, является неограниченной, то для обеспечения единственности решения данной задачи необходимо поставить условие ограниченности решения.

Постановка задачи имеет следующий вид. Найти ограниченное решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in [0, \infty), \quad t \in [0, \infty),$$

удовлетворяющее граничному условию

$$u(0,t) = A\cos\omega t, \quad t \in [0, \infty)$$

и условию

$$|u(x,t)| \le M, \quad x \in [0, \infty), \quad t \in [0, \infty).$$

Запишем граничное условие в виде: $u(0,t) = Ae^{i\omega t}$. Из линейности уравнения теплопроводности следует, что действительная часть его комплексного решения удовлетворяет условию вида $u(0,t) = A\cos\omega t$, а мнимая – условию вида $u(0,t) = A\sin\omega t$.

Будем искать решение в виде

$$u(x,t) = Ae^{\alpha x + \beta t},$$

где $\alpha,\ \beta$ – не определенные пока постоянные. Подставляя данную формулу в уравнение теплопроводности и граничные условия, получим

$$\alpha^2 = \frac{1}{a^2}\beta, \quad \beta = i\omega.$$

Отсюда

$$\alpha = \pm\sqrt{\frac{\beta}{a^2}} = \pm\sqrt{\frac{\omega}{a^2}}\sqrt{i} = \pm\sqrt{\frac{\omega}{a^2}}\frac{(1+i)}{\sqrt{2}} = \pm\left[\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} + i\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}\right],$$

$$u(x,t) = A\exp\left[\pm\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}\,x + i\left(\pm\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}\,x + \omega t\right)\right].$$

Действительная часть этого решения

$$u(x,t) = A\exp\left(\pm\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x\right)\cos\left(\pm\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x + \omega t\right)$$

удовлетворяет уравнению теплопроводности и соответствующему граничному условию. Так как условию задачи удовлетворяет ограниченное решение, то окончательное решение уравнения, моделирующего температурные волны будет иметь

$$u(x,t) = A\exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x\right)\cos\left(\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x - \omega t\right).$$

Анализ полученного решения. На основании полученного решения можно дать следующую характеристику процесса распространения температурной волны в почве. Если температура поверхности длительное время периодически меняется, то в почве также устанавливаются колебания температуры с тем же периодом. При этом имеют место следующие утверждения.

1. **Первый закон Фурье**. Амплитуда колебаний экспоненциально убывает с глубиной:

$$A(x) = A\exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x\right),$$

то есть если глубины растут в арифметической прогрессии, то амплитуды убывают в геометрической прогрессии

2. Второй закон Фурье. Температурные колебания в почве происходят со сдвигом фазы. Время δ отставания максимумов (минимумов) температуры в почве от соответствующих моментов на поверхности пропорционально глубине:

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{2\omega a^2}}x.$$

3. Третий закон Фурье. Глубина проникновения тепла в почву зависит от периода колебаний температуры на поверхности. Относительное изменение температурной амплитуды равно

$$\frac{A(x)}{A} = \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x\right).$$

Эта формула показывает, что чем меньше период, тем меньше глубина проникновения температуры. Для температурных колебаний с периодами T_1, T_2 глубины x_1, x_2, на которых происходит одинаковое относительное изменение температуры, связаны соотношением

$$x_2 = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} x_1.$$

Рассмотрим в качестве примера результаты наблюдений за годовыми температурными колебаниями (станция Гош в Приамурье).

Глубина (м)	1	2	3	4
Амплитуды (град С)	11,5	6,8	4,2	2,6

Эти данные показывают, что амплитуда годовых колебаний на глубине 4 м уменьшается до 13.3% от своего значения на поверхности, равного $19,5^{\circ}$. На основании этих данных можно определить коэффициент температуропроводности почвы a^2. Используя формулы

$$\ln\frac{A(x)}{A} = -\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}\,x, \qquad a^2 = \frac{\omega\, x^2}{2\ln^2\left(A(x)/A\right)},$$

находим, что коэффициент температуропроводности почвы равен $a^2 \approx 4\cdot 10^{-2}\,\text{см}^2/c$.

Время запаздывания максимальной температуры на глубине 4 м достигает 4 месяцев.

Замечание. Рассмотренная теория относится к распространению тепла в сухой почве или горных породах. Наличие влаги усложняет температурные явления в почве, и при замерзании происходит выделение скрытой теплоты, не учитываемой данной моделью.

3) Уравнение диффузии

Если среда неравномерно заполнена газом, то происходит его диффузия из мест с более высокой концентрацией в места с меньшей концентрацией. Это же явление наблюдается и в растворах, если концентрация растворенного вещества в объеме непостоянна.

Рассмотрим процесс диффузии в полой трубке или в трубке, заполненной пористой средой.

Предположим, что: 1) в любой момент времени концентрация газа (раствора) по сечению трубки одинакова (в этом случае процесс диффузии может быть описан функцией $u(x,t)$, представляющей собой **концентрацию** в сечении x в момент времени t); 2) в трубке нет источников вещества; 3) диффузия через стенки трубки отсутствует.

Введем обозначения:

D – коэффициент диффузии; S – площадь сечения трубки; W (x, t) – плотность диффузионного потока, равная массе газа, протекающего за единицу времени через единицу площади; $u(x, t)$ – концентрация газа (раствора); $c(x)$ – коэффициент пористости, равный отношению объема пор к полному объему V, равному в нашем случае $dV=Sdx$.

Закон Нернста. Масса газа, протекающего через сечение x за промежуток времени $(t, t+\Delta t)$, равна

$$dQ = -D\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)Sdt = WSdt, \quad W = -D\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Количество газа Q в объеме V равно $Q=uV$.

Изменение массы газа ΔQ на участке трубки $(x,\ x+\Delta x)$ при изменении концентрации на Δu равно

$$\Delta Q = \int_{x}^{x+\Delta x} c(x)\,\Delta u\, S\, dx.$$

Уравнение баланса массы газа на участке $(x,\ x+\Delta x)$ за промежуток времени $(t,\ t+\Delta t)$ имеет вид:

$$S\int_{t}^{t+\Delta t}\left[D(x+\Delta x)\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x,\tau)-D(x)\frac{\partial u}{\partial x}(x,\tau)\right]d\tau =$$

$$= S\int_{x}^{x+\Delta x} c(\xi)\left[u(\xi,t+\Delta t)-u(\xi,t)\right]d\xi.$$

Применяя формулу среднего значения в предположении необходимой гладкости входящих функций и переходя к пределу при $\Delta x \to 0,\ \ \Delta t \to 0,$ получим **уравнение диффузии**:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(D(x)\frac{\partial u}{\partial x} \right) = c(x)\frac{\partial u}{\partial t}.$$

Если коэффициент диффузии постоянен, то уравнение диффузии имеет вид:

$$u_t = a^2 u_{xx},\quad a^2 = \frac{D}{c}.$$

Если коэффициент пористости равен 1, а коэффициент диффузии постоянен, то -

$$u_t = D u_{xx}.$$

4) Температура тонкой проволоки, нагреваемой электрическим током

Рассмотрим тонкую проволоку, нагреваемую постоянным электрическим током. Предположим, что на поверхности проволоки происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона с окружающим воздухом, имеющим известную температуру. Предположим также, что концы проволоки зажаты в массивные клеммы с заданной теплоемкостью и очень большой теплопроводностью.

Обозначения: 1) $a^2 -$ коэффициент температуропроводности; 2) $k -$ коэффициент теплопроводности; 3) $\rho -$ плотность; 4) S – площадь поперечного сечения; 5) c – удельная теплоемкость; 6) $\alpha -$ коэффициент теплообмена между поверхностью стержня и окружающей средой; 7) p – периметр поперечного сечения стержня; 8) $c_1,\ c_2 -$ теплоемкость клемм.

Для получения дифференциального уравнения рассмотрим уравнение баланса тепла для элемента $(x,\ x+\Delta x)$ провода.

Приращение тепла за единицу времени равно

$$\Delta Q_1 = c\rho \Delta x \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Это приращение тепла складывается из следующих составляющих.

а) Количество тепла, поступившего в выделенный элемент за единицу времени через сечения x и $x+\Delta x$:

$$\Delta Q_2 = -Sk \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x} + Sk \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x}.$$

Выбор знаков в правой части формулы определяется следующим образом.

Будем считать, что $x+\Delta x > x$ (это, очевидно, не нарушает общности рассуждений). Если на торце x выделенного элемента будет $\frac{\partial u}{\partial x} > 0,$ то в точках, лежащих правее торца (то есть внутри элемента), температура будет выше, чем в точках, лежащих левее торца (то есть вне элемента), тепло будет вытекать из элемента и, следовательно, первый член в правой части последней формулы нужно брать со знаком минус. Если же $\frac{\partial u}{\partial x} < 0,$ то температура левее торца больше, чем температура правее торца, поэтому тепло будет втекать в стержень, первый член суммы в правой части формулы должен быть положительным и, следовательно, передним снова должен стоять знак минус. Аналогично проверяется знак при втором члене в правой части формулы.

б) Поток тепла через боковую поверхность провода, вследствие несовершенства теплоизоляции, равен:

$$\Delta Q_3 = -\alpha p \Delta x \left(u - u_0 \right).$$

Выбор знака в правой части очевиден, так как при $u > u_0$ тепло вытекает из провода, а при $u < u_0 -$ втекает в провод.

в) Количество тепла, выделяемое на данном участке вследствие прохождения тока, определяется законом Джоуля- Ленца, согласно которому, количества тепла, выделяющегося в единицу времени в выделенном элементе проводника при прохождении через него электрического тока, пропорционально квадрату силы тока и сопротивлению проводника:

$$\Delta Q_4 = \beta I^2 R \Delta x,$$

где $\beta -$ коэффициент пропорциональности.

Уравнение баланса тепла имеет следующий вид:

$$\Delta Q_1 = \Delta Q_2 + \Delta Q_3 + \Delta Q_4.$$

Подставляя соответствующие выражения, деля на Δx и переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим окончательное уравнение:

$$u_t = \frac{k}{c\rho} u_{xx} - \frac{\alpha p}{c\rho S}\left(u - u_0\right) + \frac{\beta I^2 R}{c\rho S}.$$

Для получения полной детерминированной дифференциальной модели необходимо к полученному уравнению добавить одно начальное и два граничных условия (на левом и правом концах провода).

Начально-краевая задача, моделирующая процесс распространения тепла в проволоке, имеет следующий вид:

$$\begin{cases} u_t = \dfrac{k}{c\rho} u_{xx} - \dfrac{\alpha p}{c\rho S}\left(u - u_0\right) + \dfrac{\beta I^2 R}{c\rho S}, \quad x \in \left(0, l\right), \quad t \in \left(0, \infty\right), \\ c_1 u_t\left(0, t\right) = -kS u_x\left(0, t\right), \quad c_2 u_t\left(l, t\right) = kS u_x\left(l, t\right), \quad t \in \left(0, \infty\right), \\ u\left(x, 0\right) = f\left(x\right), \quad x \in \left(0, l\right). \end{cases}$$

5) Уравнение Буссинеска. Задача о наводнении

Предположим, что рядом с населенным пунктом расположен водоем, под которыми находится гидроупорный слой (глина). Введем декартову систему координат (x,z), ось x которой направим вдоль поверхности водоема, а ось z перпендикулярно этой поверхности. Предположим, что населенный пункт находится в области $x>0$, в которой уровень грунтовой воды над гидроупором описывается функцией $u(x,t)$. Водоем занимает область $x<0$. Пусть к моменту $t=0$ вода в водоеме поднялась до отметки $z=0$ и продолжает пребывать по закону $u(0,t)=kt$. Вопрос: насколько быстро вода дойдет до населенного пункта, имеющего координату $x=L$, если населенный пункт расположен над гидроупором на высоте h?

Получим уравнение, описывающее изменение уровня грунтовых вод $u(x,t)$ над гидроупором.

Плотность q горизонтального потока воды равна

$$q = -D\frac{\partial P}{\partial x} \quad ,$$

где P – давление, а D – коэффициент проводимости среды.

Давление на высоте z, где $0<z<u$ равно

$$P(z) = \rho g(u - z),$$

где ρ - плотность воды.

Следовательно, плотность горизонтального потока воды q равна

$$q = -D\rho g \frac{\partial u}{\partial x}$$

и не зависит от z. Коэффициент D определяется свойствами грунта.

Полный поток, идущий через сечение, будет равен

$$Q = -D\rho g u \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Интегральное уравнение баланса воды в слое, заключенном между сечениями x и $x + \Delta x$, за промежуток времени от момента t до $t + \Delta t$, будет иметь следующий вид:

$$\int_x^{x+\Delta x} \varepsilon\big(u(\xi,t+\Delta t)-u(\xi,t)\big)d\xi =$$

$$= \int_t^{t+\Delta t} D\rho g\left(u(x+\Delta x,\tau)\frac{\partial u(x+\Delta x,\tau)}{\partial x}-u(x,\tau)\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}\right)d\tau,$$

где ε - коэффициент пористости (порозность) среды. Из уравнения при $\Delta x \to 0$, $\Delta t \to 0$ получаем уравнение Буссинеска:

$$u_t = \frac{D\rho g}{\varepsilon}(uu_x)_x .$$

Уравнение Буссинеска описывает высоту уровня грунтовых вод над гидроупором.

Сделаем замену переменных:

$$t = \frac{\varepsilon}{D\rho g}\tau \qquad \text{и} \qquad K = \frac{k\varepsilon}{D\rho g}.$$

В новых переменных задача имеет следующий вид:

$$\begin{cases} u_\tau = \left(u u_x\right)_x, & x > 0, \quad \tau > 0, \\ u\left(x, 0\right) = 0, & x \ge 0, \\ u\left(0, \tau\right) = K\tau, & \tau \ge 0. \end{cases}$$

Одним из эффективных способов исследования нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных является метод построения частных решений этих уравнений, называемых автомодельными решениями.

Автомодельными решениями нелинейного уравнения в частных производных мы будем называть такие его частные решения специального вида, которые могут быть получены путем интегрирования некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений, аргументы искомых функций которых представляют собой комбинацию независимых переменных x и t.

Одно нелинейное уравнение может обладать целым рядом автомодельных решений, отражающих различные свойства его решения.

Построим автомодельное решение рассматриваемой задачи в виде бегущей волны:

$$\begin{cases} u = f\left(\nu\tau - x\right), & \nu\tau - x > 0, \\ u = 0, & \nu\tau - x \le 0, \end{cases}$$

где ν - постоянная скорость, которую нужно определить.

Подставив данное выражение в первое уравнение системы, получим обыкновенное дифференциальное уравнение для определения функции $f\left(\alpha\right), \quad \alpha = \nu\tau - x$:

$$\nu f' = (ff')'.$$

Интегрируем полученное уравнение от 0 до $\alpha > 0$:

$$\nu f = ff',$$

откуда

$$f' = \nu.$$

Вид функции f находим из граничного условия:

$$u(0,\tau)=K\tau = f\left(\nu\tau-0\right).$$

Отсюда

$$f\left(\alpha\right)=\frac{K\alpha}{\nu}.$$

Поскольку $f'=\nu,$ то $\frac{K}{\nu}=\nu$ и $\nu=\sqrt{K}$, а $f\left(\alpha\right)=\alpha\sqrt{K}.$

Решение поставленной задачи имеет вид:

$$\begin{cases} u\left(x,\tau\right)=K\tau-\sqrt{K}x, & x<\sqrt{K}\tau, \\ u\left(x,\tau\right)=0, & x\geq\sqrt{K}\tau. \end{cases}$$

Наводнение дойдет до населенного пункта в момент τ, который определяется равенством

$$h = K\tau - \sqrt{K}L.$$

6) Параболическое приближение

Уравнениями параболического типа описываются процессы, связанные с распространением тепла. К ним также приводит рассмотрение процессов диффузии. Однако в ряде случаев и процессы распространения электромагнитных волн могут описываться уравнениями параболического типа. В этом случае говорят, что процессы распространения электромагнитных волн **рассматриваются в параболическом приближении**.

При рассмотрении задач для уравнений гиперболического типа мы выяснили, что в декартовой прямоугольной системе координат компоненты полей **H** и **E** удовлетворяют уравнению колебаний

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f\left(M, t\right),$$

где $$a^2 = \frac{1}{\varepsilon_a \mu_a}, \quad \alpha = \frac{\sigma}{\varepsilon_a}.$$

Если предположить гармоническую зависимость от времени (установившиеся колебания), когда $u(M,t) = v(M)e^{-i\omega t}$, то получается, что

$$\frac{\partial u}{\partial t} \sim \omega u, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \sim \omega^2 u.$$

Если $\omega \ll \alpha$, то есть $\varepsilon_a \omega \ll \sigma$, что означает, что токи смещения пренебрежимо малы по сравнению с токами проводимости, то, пренебрегая второй производной по времени, то есть токами смещения, мы приходим к уравнению параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{a^2}{\alpha} \Delta u + \frac{1}{\alpha} f(M,t).$$

4. Стационарные процессы

Стационарные процессы описываются уравнениями эллиптического типа, в которые не входит время. Поэтому для них ставятся не начально-краевые, а краевые задачи.

1) Стационарное распределение тепла

Если в некоторой системе плотность источников (стоков) тепла не зависит от времени и граничные условия также не зависят от времени, то с течением времени в такой системе установится некоторое постоянное распределение тепла, то есть система будет выходить на стационарный режим. Распределение температуры в такой системе будет описываться уравнениями эллиптического типа, которое можно получить из уравнения теплопроводности параболического типа, учитывая, что

$$u(M,t) = u(M), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad f(M,t) = f(M).$$

Стационарное уравнение теплопроводности примет вид

$$div\left(k\left(M\right)grad\ u\left(M\right)\right)=-f\left(M\right).$$

Граничные условия ставятся так же, как и для уравнения теплопроводности.

В случае постоянного коэффициента $k\left(M\right)=k_0$ неоднородное стационарное уравнение теплопроводности переходит в уравнение Пуассона

$$\Delta u\left(M\right)=F\left(M\right),\quad F\left(M\right)=\frac{1}{k_0}f\left(M\right),$$

а однородное стационарное уравнение теплопроводности переходит в уравнение Лапласа

$$\Delta u\left(M\right)=0.$$

2) Задачи электростатики

В электростатическом случае из уравнений Максвелла получаем:

$$rot\ \vec{E}(M) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E}(M) = -grad\ u(M).$$

Здесь введена скалярная функция *u(M)* таким образом, что уравнение $rot\ \vec{E}(M) = 0$ выполняется автоматически. Если теперь воспользоваться дивергентным уравнением

$$div\left(\varepsilon(M)\vec{E}(M)\right) = \rho(M),$$

то приходим к уравнению электростатики

$$div\left(\varepsilon(M)grad\ u(M)\right) = -\rho(M).$$

В случае постоянного коэффициента $\varepsilon(M)=\varepsilon_0$ мы снова получаем уравнение Пуассона

$$\Delta u(M)=-f(M),\;\; f(M)=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(M)$$

и уравнение Лапласа

$$\Delta u(M)=0.$$

3) Установившиеся колебания

Если на систему, обладающую затуханием, действует периодическая вынуждающая сила с частотой ω, то с течением времени в системе устанавливаются колебания с частотой вынуждающей силы ω.

Уравнение колебаний для диссипативной среды имеет вид:

$$u_{tt} + \alpha u_t = a^2 \Delta u + F(M,t),$$

где

$$F(M,t) = F(M) e^{-i\omega t}, u(M,t) = U(M) e^{-i\omega t}.$$

Отсюда получаем $\left(-\omega^2 - i\alpha\omega\right) U(M) = a^2 \Delta U + F(M)$

и, вводя обозначение $k^2 = \dfrac{\omega^2 + i\alpha\omega}{a^2}$, приходим к уравнению Гельмгольца

$$\Delta U + k^2 U = f(M).$$

4) Установившиеся электромагнитные колебания

Получим теперь уравнение, описывающее установившиеся электромагнитные колебания. Уравнение получим для изотропной и однородной среды, свободной от сторонних токов и зарядов. Таким образом, имеем $\varepsilon_a = const, \quad \mu_a = const, \quad \rho = 0, \quad \mathbf{j}^{(\text{ст})} = 0$ и система уравнений Максвелла примет вид:

$$\begin{cases} rot\mathbf{H} = \varepsilon_a \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \sigma \mathbf{E}, \\ rot\mathbf{E} = -\mu_a \dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \\ div\mathbf{E} = 0, \\ div\mathbf{B} = 0. \end{cases}$$

Предположим, что функции $\mathbf{E}(M,t)$, $\mathbf{H}(M,t)$ зависят от времени по гармоническому закону:

$$\mathbf{E}(M,t)=\mathbf{E_0}(M)e^{-i\omega t},\mathbf{H}(M,t)=\mathbf{H_0}(M)e^{-i\omega t}.$$

Система уравнений Максвелла примет следующий вид;

$$\begin{cases} rot\mathbf{H_0}=-i\omega\varepsilon_a\mathbf{E_0}-i\omega\sigma\mathbf{E_0}=-i\omega\left(\varepsilon_a+i\frac{\sigma}{\omega}\right)\mathbf{E_0}=-i\omega\tilde{\varepsilon}_a\mathbf{E_0}, \\ rot\mathbf{E_0}=i\omega\mu_a\mathbf{H_0}, \\ div\mathbf{E_0}=0, \\ div\mathbf{H_0}=0. \end{cases}$$

где $\tilde{\varepsilon}_a=\varepsilon_a+i\frac{\sigma}{\omega}$ — комплексная абсолютная диэлектрическая проницаемость.

Подействуем на первое уравнение системы оператором rot:

$$rot\ rot\mathbf{H_0} = grad\ div\mathbf{H_0} - \nabla^2\mathbf{H_0} = -i\omega\tilde{\varepsilon}_a rot\mathbf{E_0} = \omega^2\tilde{\varepsilon}_a\mu_a\mathbf{H_0}.$$

Обозначая $k^2 = \omega^2\tilde{\varepsilon}_a\mu_a$, получим однородное векторное уравнение Гельмгольца:

$$\nabla^2\mathbf{H_0} + k^2\mathbf{H_0} = 0.$$

Аналогичным образом получается векторное уравнение Гельмгольца для функции $\mathbf{E_0}\left(M\right)$:

$$\nabla^2\mathbf{E_0} + k^2\mathbf{E_0} = 0.$$

5) Постановка краевой задачи

Отличие в постановке краевых задач для уравнений эллиптического типа, описывающих стационарные процессы, от начально-краевых задач для уравнений гиперболического и параболического типов заключается в отсутствии начальных условий. Краевая задача в области $\bar{D} = D \bigcup S$ имеет следующий вид:

$$\begin{cases} div\left(k\left(M\right) grad\ u\right) = -f\left(M\right), \ \ M \in D, \\ \alpha\left(P\right)\dfrac{\partial u\left(P\right)}{\partial n} + \beta\left(P\right) u\left(P\right) = \mu\left(P\right), \ \ P \in S. \end{cases}$$

Если D – внешняя область, то для того, чтобы решение было единственным, необходимо добавить условия на бесконечности. В частности, если задача ставится во всем пространстве $\mathbb{R}^3$, то ставятся только условия на бесконечности.

Определение. Функция $u(M)$ называется классическим решением поставленной краевой задачи, если она обладает следующими свойствами:

1) дважды непрерывно дифференцируема в области D и один раз непрерывно дифференцируема в области $\bar{D}$: $u(M) \in C^{(2)}(D) \cap C^{(1)}(\bar{D})$;

2) удовлетворяет в области D уравнению в классическом смысле;

3) непрерывно примыкает к граничному условию.

6) Постановка условий на бесконечности

В случае решения внешних краевых задач для уравнений эллиптического типа достаточно сложной проблемой является постановка граничных условий на бесконечности, которые обеспечивают единственность решения краевой задачи.

В случае внешних краевых задач для уравнения Лапласа эта проблема решается достаточно просто: решение должно быть регулярным на бесконечности.

Функция трех переменных $u(x, y, z)$ называется регулярной на бесконечности, если при достаточно большом $r \geq R$ имеют место оценки:

$$|u| \leq \frac{A}{r}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \leq \frac{A}{r^2}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \leq \frac{A}{r^2}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial z}\right| \leq \frac{A}{r^2}.$$

Функция $u(x,y)$ называется гармонической в области D, если она дважды непрерывно дифференцируема в этой области и удовлетворяет в D уравнению Лапласа: $u \in C^{(2)}(D)$, $\Delta u(M) = 0,\ M \in D.$

Если в трехмерном случае функция является гармонической во внешней по отношению к замкнутой поверхности S области D_e и равномерно сходится к нулю на бесконечности, то она регулярна на бесконечности. Таким образом для уравнения Лапласа внешняя краевая задача в области $\bar{D}_e = D \cup S$ ставится следующим образом:

$$\begin{cases} \Delta u(M) = 0, \quad M(x,y,z) \in D_e, \\ u(M) = 0, \quad M(x,y,z) \in S, \\ u(M) \ \text{равномерно сходится к нулю на бесконечности.} \end{cases}$$

Функция двух переменных $u(x,y)$ называется регулярной на бесконечности если она имеет конечный предел на бесконечности.

Поэтому в двумерном случае для обеспечения единственности решения внешней краевой задачи для уравнения Лапласа достаточно потребовать ограниченности решения во внешней области.

Более сложным является вопрос о выделении единственного решения уравнения Гельмгольца с вещественным коэффициентом $k^2 > 0$:

$$\Delta u + k^2 u = 0$$

во внешней области в трехмерном случае.

Рассмотрим частный случай сферически симметричных решений $u = u(r)$ однородного уравнения Гельмгольца.

Уравнение Гельмгольца в этом случае будет иметь вид:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+k^2u=0.$$

Положим $v=ru.$ Тогда для функции $v\left(r\right)$ получаем уравнение:

$$v''\left(r\right)+k^2v\left(r\right)=0,$$

общее решение которого имеет следующий вид

$$v\left(r\right)=C_1e^{ikr}+C_2e^{-ikr},$$

и для функции $u\left(r\right)$ окончательно получаем:

$$u\left(r\right)=C_1\frac{e^{ikr}}{r}+C_2\frac{e^{-ikr}}{r}.$$

Для единственности решения задачи нам необходимо выделить одно решение, имеющее физический смысл. Сложность заключается в том, что в случае вещественного коэффициента $k^2 > 0$ частные решения одинаково ведут себя на бесконечности:

$$\frac{e^{ikr}}{r} = \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{r}\right), \quad \frac{e^{-ikr}}{r} = \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{r}\right).$$

Поэтому требование равномерного стремления решения к нулю на бесконечности, обеспечивающее единственность решения в случае уравнения Лапласа в трехмерном случае, в случае уравнения Гельмгольца с коэффициентом $k^2 > 0$ уже недостаточно для единственности решения внешней краевой задачи. Необходимо более тонкое условие, учитывающее фазовые различия двух решений.

Это условие было предложено немецким физиком Арнольдом Зоммерфельдом.

Прежде всего заметим, что физический смысл имеют выражения

$$u^{+}\left(x,t\right)=\frac{e^{ikr}}{r}e^{-i\omega t}, \quad u^{-}\left(x,t\right)=\frac{e^{-ikr}}{r}e^{-i\omega t},$$

представляющие собой сходящиеся и расходящиеся сферические волны при данном выборе временной зависимости: $e^{-i\omega t}$.

При выделении физически обоснованной волны необходимо отбросить волну, приходящую из бесконечности (волну u^{-}).

Для простоты будем считать, что точечный источник находится в начале декартовой прямоугольной системы координат.

Введем обозначение $v^{\pm}(r)=\dfrac{e^{\pm ikr}}{r}.$ Тогда получаем:

$$\frac{dv^{\pm}}{dr}=\pm ik\,\frac{e^{\pm ikr}}{r}-\frac{e^{\pm ikr}}{r^{2}}=\pm ikv^{\pm}+\overset{=}{o}\left(\frac{1}{r}\right).$$

Расходящейся сферической волне соответствует $v^{+}(M)$, а сходящейся - $v^{-}(M)$.

Следовательно, расходящаяся сферическая волна должна удовлетворять соотношению (при временной зависимости $e^{-i\omega t}$):

$$\frac{\partial u}{\partial r}-iku=\overset{=}{o}\left(\frac{1}{r}\right),\quad u=v^{+}(M)e^{-i\omega t},$$

а сходящаяся - соотношению

$$\frac{\partial u}{\partial r}+iku=\overset{=}{o}\left(\frac{1}{r}\right),\quad u=v^{-}(M)e^{-i\omega t}.$$

Таким образом, предложенные Зоммерфельдом условия излучения в трехмерном случае имеют следующий вид;

$$u(M) = \underline{\underline{O}}\left(1/r\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} - iku = \overset{=}{o}\left(\frac{1}{r}\right).$$

Для двумерных задач условия излучения Зоммерфельда записываются следующим образом:

$$u(M) = \underline{\underline{O}}\left(1/\sqrt{r}\right),$$

$$\lim_{r\to\infty}\sqrt{r}\left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku\right) = 0.$$

В трехмерном случае постановка внешней краевой задачи для уравнения Гельмгольца с вещественным коэффициентом $k^2 > 0$ во внешней области $\bar{D}_e = D_e \cup S$ имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0, \quad M(x, y, z) \in D_e, \\ u(M) = g(M), \quad M \in S, \\ u(M) = O\left(\dfrac{1}{r}\right), \\ \dfrac{\partial u}{\partial r} - iku = o\left(\dfrac{1}{r}\right). \end{cases}$$

Советский математик И.Н. Векуа показал, что первое условие излучения является следствием второго условия.

Нетрудно показать, что условия излучения Зоммерфельда сохраняют свой вид и для случая несовпадения источника с началом координат.

Следует отметить, что для неограниченных областей, не совпадающих со всем пространством, условия на бесконечности могут иметь форму, отличную от той, которая была предложена А. Зоммерфельдом.

Таким образом первое и второе условия излучения Зоммерфельда представляют аналитическую форму для неограниченного пространства и не основаны на физическом принципе, который позволил бы сформулировать эти условия для областей более сложной формы.

В качестве примеров условий для выделения единственного решения уравнения Гельмгольца можно привести принцип предельного поглощения, принцип предельной амплитуды, парциальные условия излучения и ряд других.

7) Математическое моделирование волноведущих систем

Излучатели конечных размеров, расположенные в свободном пространстве, возбуждают электромагнитное поле, распространяющееся по всем направлениям. Однако энергию электромагнитного поля часто необходимо передавать от излучателя (возбудителя) к нагрузке так, чтобы она не рассеивалась в пространстве, а по возможности целиком поступала в нагрузку, для чего она должна быть локализована в части пространства – определенном канале. В качестве таких каналов используются **волноведущие (направляющие) системы**. Основой любой волноведущей системы являются **волноводы.**

Волновод – это специальное устройство или канал в неоднородной среде, в котором могут распространяться волны различной природы: акустические (в акустических волноводах), электромагнитные (в радиоволноводах, световодах), сейсмические и другие.

Одним из первых исследователей волноведущих систем был лорд Дж. У. Рэлей, который изучал акустические волны в органных трубах. Эти исследования были выполнены в конце XIX века на чисто физическом уровне строгости.

Начало строгой математической теории волноведущих систем было положено в 1947-1948 гг. классическими работами А.Н.Тихонова и А.А.Самарского:

а) О возбуждении радиоволноводов //Журнал технической физики. 1947. Т. 27, вып. 11, 12. С. 1283-1296, 1431-1440.

Для уравнения Гельмгольца в цилиндрической области впервые построена функция Грина и выделена ее особенность, что потребовало доказательства полноты системы собственных функций регулярного волновода.

б) О представлении поля в волноводе в виде суммы полей TE и TM // Журнал технической физики. 1948. Т. 28, вып. 7. С. 959-970.

Строго доказано, что любое электромагнитное поле в регулярном волноводе в области, свободной от внешних зарядов и токов, может быть представлено в виде суперпозиции поперечномагнитных и поперечноэлектрических волн TM и TE полей, каждое из которых можно описать в виде краевой задачи для скалярного уравнения Гельмгольца.

Проведенные фундаментальные исследования послужили основой для создания строгой математической теории возбуждения регулярных волноводов произвольным распределением заданного тока.

Эти результаты позволили П.Е.Краснушкину ввести понятие нормальной волноводной волны или моды.

После фундаментальных работ А.Н.Тихонова, А.А.Самарского, В.Г.Кисунько, П.Е.Краснушкина, Луи де Бройля и ряда других ученых электродинамика волноведущих систем превратилась в строгую математическую теорию, определившую новое научное направление в математической физике.

Рассмотрим полый волновод произвольного сечения, представляющий собой цилиндрическую трубу, неограниченно простирающуюся вдоль оси Z.

Введем следующие обозначения: Σ - боковая поверхность волновода; S – поперечное сечение волновода; C – контур, ограничивающий это сечение.

Сделаем следующие предположения:

а) стенки волновода являются идеально проводящими;

б) заполняющая волновод среда является однородной и характеризуется следующими значениями параметров: $\varepsilon = 1, \quad \mu = 1, \quad \sigma = 0;$

в) внутри волновода отсутствуют источники поля;

г) поля зависят от времени по гармоническому закону $e^{-i\omega t}$.

Уравнения Максвелла, описывающие поле внутри волновода, имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\mathbf{H} = -ik\mathbf{E}, \\ \mathrm{rot}\mathbf{E} = ik\mathbf{H}, \\ \mathrm{div}\mathbf{H} = 0, \\ \mathrm{div}\mathbf{E} = 0, \end{cases}$$

где $k = \dfrac{\omega}{c}$ волновое число.

Поскольку стенки волновода являются идеально проводящими, тангенциальная компонента электрического вектора равна нулю:

$$E_t\big|_C = 0.$$

Покажем, что **внутри волновода могут распространяться бегущие электромагнитые волны.**

Будем искать решение в виде

$$\mathbf{E} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{\Pi} + k^2\mathbf{\Pi},$$
$$\mathbf{H} = -ik\operatorname{rot}\mathbf{\Pi},$$

где $\mathbf{\Pi}$ – поляризационный потенциал.

а) Рассмотрим случай, когда вектор П имеет всего одну компоненту, направленную вдоль оси Z $(H_z = 0)$.

В этом случае система уравнений Максвелла приводит к уравнению Гельмгольца для поляризационного потенциала:

$$\Delta\mathit{\Pi} + k^2\mathit{\Pi} = 0, \quad \left(\mathbf{\Pi} = \mathit{\Pi}\mathbf{k}\right).$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{\Pi}=\left(\frac{\partial\Pi_z}{\partial y}-\frac{\partial\Pi_y}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial\Pi_x}{\partial z}-\frac{\partial\Pi_z}{\partial x}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial\Pi_y}{\partial x}-\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{\Pi}=\{0,0,\Pi_z\}\ \Rightarrow\ \mathrm{rot}\mathbf{\Pi}=\frac{\partial\Pi_z}{\partial y}\mathbf{i}-\frac{\partial\Pi_z}{\partial x}\mathbf{j}\ ;\ \mathbf{H}=\text{-i}k\ \mathrm{rot}\mathbf{\Pi}\ \Rightarrow\ \mathrm{H}_z=0$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{H}=\text{-i}k\,\mathrm{rot\ rot}\mathbf{\Pi}=\text{-i}k\left(\mathrm{grad\ div}\mathbf{\Pi}-\nabla^2\mathbf{\Pi}\right)=-\mathrm{i}k\mathbf{E}=-\mathrm{i}k\,\mathrm{grad\ div}\mathbf{\Pi}-\mathrm{i}kk^2\mathbf{\Pi}\ \Rightarrow$$

$$\nabla^2\mathbf{\Pi}+k^2\mathbf{\Pi}=0,\ \mathbf{\Pi}=\mathit{\Pi}\mathbf{k}\ \Rightarrow\ \Delta\mathit{\Pi}+k^2\mathit{\Pi}=0$$

Граничное условие идеально проводящей стенки приводит к следующему граничному условию:

$$\Pi\big|_{\Sigma} = 0.$$

Записав трехмерный оператор Лапласа следующим образом

$$\Delta u = \Delta_2 u + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad \Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

будем искать решение в виде

$$\Pi(M, z) = \psi(M) f(z),$$

где M – точка, лежащая в поперечном сечении. Нас будет интересовать нетривиальное решение задачи.

Будем решать задачу методом разделения переменных (методом Фурье). Подставляя решение вида $\Pi(M,z)=\psi(M)f(z)$ в уравнение, получим:

$$f(z)\Delta_2\psi(M)+\psi(M)f''(z)+k^2\psi(M)f(z)=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta_2\psi(M)}{\psi(M)}=-\frac{f''(z)}{f(z)}-k^2.$$

В левой части последнего равенства стоит функция, зависящая от *M*, а в правой части – функция, зависящая от z, причем равенство должно выполняться при любых допустимых значениях *M* и z, что возможно только в том случае, когда левая и правая стороны равенства сохраняют постоянное значение, то есть

$$\frac{\Delta_2\psi(M)}{\psi(M)}=-\frac{f''(z)}{f(z)}-k^2=-\lambda, \qquad \lambda=\text{const}.$$

Таким образом, для функции $\psi(z)$ мы получаем следующую **задачу на собственные значения (задачу Штурма-Лиувилля)**: найти те значения параметра λ, при которых краевая задача

$$\begin{cases} \Delta_2\psi + \lambda\psi = 0, M \in S, \\ \psi(M) = 0, M \in C. \end{cases}$$

имеет нетривиальные решения, и сами эти решения. При этом **значения параметра λ носят название собственных значений, а нетривиальные решения называются собственными функциями.**

Из общей теории следует, что рассматриваемая задача на собственные значения имеет счетное множество вещественных собственных значений $\{\lambda_n\}$ и соответствующую им систему собственных функций $\{\psi_n(M)\}$.

Для функции $f(z)$ получаем уравнение

$$f_n''(z)+\left(k^2-\lambda_n\right)f_n(z)=0,$$

общее решение которого имеет следующий вид:

$$f_n(z)=A_n e^{i\gamma_n z}+B_n e^{-i\gamma_n z}.$$

Постоянная $\gamma_n=\sqrt{k^2-\lambda_n}$ называется **постоянной распространения.**

Если временная зависимость выбирается в виде $e^{-i\omega t}$, то первый член в правой части формулы для $f_n(z)$ соответствует правой собственной волне (правой моде), а второй член соответствует левой собственной волне (левой моде). Таким образом поле внутри волновода представляет собой суперпозицию правых и левых мод.

Рассмотрим правую собственную волну (моду)

$$f_n(z) = A_n e^{i\gamma_n z},$$

тогда получим решение в виде:

$$\Pi_n(M, z) = A_n \psi_n(M) e^{i\gamma_n z},$$

где постоянная A_n определяется из условия возбуждения полей.

Подставляя полученное выражение в формулы, связывающие векторы **E, H, П,** и восстанавливая временной множитель $e^{-i\omega t}$, найдем составляющие поля n-й правой моды в виде

$$F_n(M) e^{i(\gamma_n z - \omega t)},$$

где F_n – функция, выражающаяся через собственную функцию $\psi_n(M)$ или ее производные.

Заметим, что собственные функции $\psi_n(M)$ носят название **функций сечения**.

Поле в волноводе в общем случае является суперпозицией правых и левых собственных волн (мод).

Если $k^2 > \lambda_n$, то γ_n вещественно и мы получаем **бегущую волну**, распространяющуюся вдоль оси Z с фазовой скоростью

$$v = \frac{\omega}{\sqrt{k^2 - \lambda_n}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\lambda_n}{k^2}}} > c.$$

Групповая скорость волны равна

$$u = \frac{c^2}{v} = c\sqrt{1 - \frac{\lambda_n}{k^2}} < c,$$

то есть в пустом волноводе имеет место дисперсия.

Если $k^2 < \lambda_n$, то $\gamma_n = i\chi_n \quad (\chi_n > 0)$ и вместо распространяющейся волны получаем затухающую волну

$$F_n(M)e^{-i\omega t - \chi_n z},$$

распространяющуюся вдоль оси Z в положительном направлении.

Так как собственные числа λ_n, представляющие собой собственные частоты мембраны *S*, неограниченно возрастают с увеличением номера n, то какова бы ни была частота ω, начиная с некоторого номера $n=N$, будем иметь $k^2 < \lambda_n$.

Следовательно, в волноводе может распространяться лишь конечное число бегущих волн. Если $k^2 < \lambda_1$, то волноводе не может существовать ни одной бегущей волны («запертый волновод»). Частота, начиная с которой в волноводе начинает распространяться некоторая бегущая мода, называется **частотой отсечки данной моды**.

Для того, чтобы в волноводе заданной формы и размеров могла распространяться хотя бы одна бегущая волна, должно, очевидно, выполняться условие

$$\lambda_1 < k^2, \qquad \text{или} \qquad \Lambda < \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda_1}},$$

где Λ – длина волны, распространяющейся в волноводе.

Рассмотрим прямоугольный волновод, поперечное сечение *S* которого представляет собой прямоугольник со сторонами *a* и *b*.

Найдем для него функции сечения, которые являются решением задачи на собственные значения:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \lambda\psi = 0, \ \ x \in (0,a), \ \ y \in (0,b), \\ u(x,0) = u(x,b) = 0, \ \ x \in [0,a], \\ u(0,y) = u(a,y) = 0, \ \ y \in [0,b]. \end{cases}$$

Данную задачу также будем решать методом разделения переменных:

$$\psi(x,y)=X(x)Y(y)\ \Rightarrow\ \frac{X''(x)}{X(x)}+\frac{Y''(y)}{Y(y)}+\lambda=0\ \Rightarrow\ \frac{X''(x)}{X(x)}=-\frac{Y''(y)}{Y(y)}-\lambda=-\mu\Rightarrow$$

$$X''(x)+\mu X(x)=0,\ \ X(0)=X(a)=0,$$

$$Y''(y)+(\lambda-\mu)Y(y)=0,\ \ Y(0)=Y(b)=0.$$

Решение задачи для нахождения функции $X(x)$ имеет вид:

$$X(x)=A\cos\sqrt{\mu}x+B\sin\sqrt{\mu}x\Rightarrow X(0)=A=0\Rightarrow X(a)=B\sin\sqrt{\mu}a=0\Rightarrow$$

$$\sqrt{\mu}a=\pi m, m=1,2,...\Rightarrow \mu=\mu_m=\left(\frac{\pi m}{a}\right)^2\Rightarrow X(x)=X_m(x)=B_m\sin\frac{\pi m x}{a}, m=1,2,...$$

Заметим, что собственные функции, как решения однородного уравнения, удовлетворяющие однородным граничным условиям, определяются с точностью до произвольного множителя. Поэтому положим $B_m = 1, \; m = 1, 2, \ldots$

Аналогично решается задача для функции $Y(y)$:

$$Y(y) = A\cos\sqrt{\lambda - \mu_m} + B\sin\sqrt{\lambda - \mu_m} \Rightarrow \lambda - \mu_m = \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\lambda = \lambda_{m,n} = \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2, \; m, n = 1, 2, \ldots; \; Y(y) = Y_n(y) = \sin\frac{\pi n y}{b}, \; n = 1, 2, \ldots$$

Таким образом функции сечения для волновода прямоугольного сечения имеют вид:

$$\psi_{m,n}(x, y) = \sin\frac{\pi m x}{a}\sin\frac{\pi n y}{b}, \quad \lambda_{m,n} = \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2, \quad m, n = 1, 2, \ldots$$

В волноводе прямоугольного сечения бегущая волна может существовать лишь при условии

$$k > \sqrt{\lambda_{1,1}} \quad \Rightarrow \quad k > \pi\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$$

или

$$\Lambda < \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda_{1,1}}} \quad \Rightarrow \quad \Lambda < \frac{2}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}}}.$$

Рассмотренные здесь собственные волны (моды), удовлетворяющие условию $H_z = 0$, называются **электрическими волнами, или поперечно-магнитными волнами (волнами типа ТМ).**

b) Рассмотрим теперь решения уравнений Максвелла с равной нулю Z- составляющей электрического поля $(E_z = 0)$.

Введем вектор $\hat{\mathbf{\Pi}} = \hat{\Pi}\mathbf{i_z}$ и положим

$$\hat{\mathbf{E}} = ik\,\mathrm{rot}\,\hat{\mathbf{\Pi}}, \quad \hat{\mathbf{H}} = \mathrm{grad\,div}\,\hat{\mathbf{\Pi}} + \mathrm{k}^2\,\hat{\mathbf{\Pi}}, \quad \left(\hat{E}_z = 0\right).$$

Тогда функция $\hat{\Pi}$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta\hat{\Pi} + k^2\hat{\Pi} = 0$$

и граничному условию Неймана на поверхности Σ

$$\frac{\partial\hat{\Pi}}{\partial n} = 0.$$

Повторяя рассуждения пункта а), найдем решение этой задачи

$$\hat{\Pi}_n = A_n \hat{\psi}_n(M) e^{i\hat{\gamma}_n z} \qquad \left(\hat{\gamma}_n = \sqrt{k^2 - \hat{\lambda}_n}\right),$$

которым соответствуют решения уравнения Максвелла вида:

$$\hat{F}_n(M) e^{i(\hat{\gamma}_n z - \omega t)}.$$

Здесь $\hat{\psi}_n(M)$ функции сечения и соответствующие собственные значения задачи

Штурма-Лиувилля

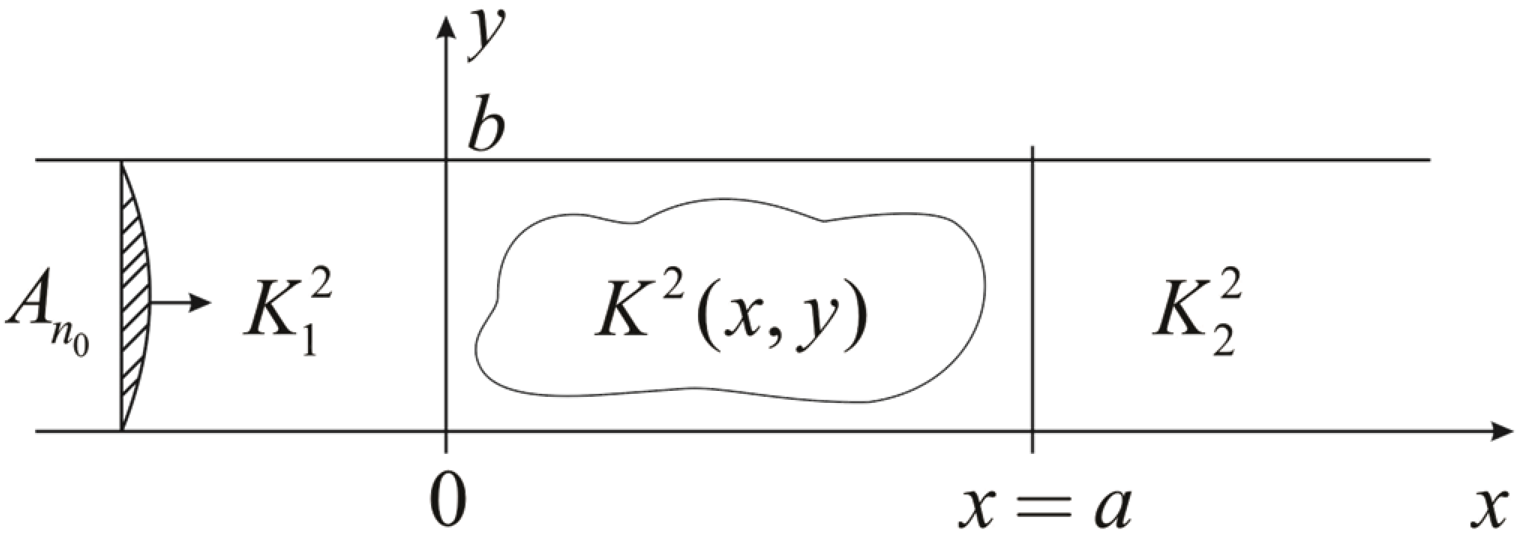
$$\begin{cases} \Delta_2 \hat{\psi}_n + \hat{\lambda}_n \hat{\psi}_n = 0 & M \in S, \\ \dfrac{\partial \hat{\psi}_n}{\partial n} = 0 & M \in C. \end{cases}$$

Волны такого типа называются **магнитными или поперечно электрическими волнами (ТЕ-волнами).**

Можно показать, что любое поле в волноводе представимо в виде суммы полей ТЕ и ТМ типа.

Следовательно, любое поле в регулярном волноводе можно определить, если известны две скалярные функции $\mathit{\Pi}(M,z)$ и $\hat{\mathit{\Pi}}(M,z)$, являющиеся z-компонентами поляризационных потенциалов $\mathbf{\Pi}$ и $\hat{\mathbf{\Pi}}$ соответственно.

Парциальные условия излучения



Рассмотрим плоский волновод с локальной нерегулярностью.

При $x \le 0$ и $x \ge a$ волновод регулярный: его заполнение однородно и геометрия сечения постоянна.

Нормальные волны (моды) – частные решения вида

$$u(x,y)=e^{i\gamma x}\psi(y), \tag{30}$$

где γ – постоянная распространения, $\psi(y)$ - функция сечения.

Поле $u(x,y)$ в волноводе удовлетворяет уравнению Гельмгольца:

$$\Delta u+k^2u=0, \quad (x,y)\in V\equiv\mathbb{R}^1\times(0,b), \tag{31}$$

где $k^2(x,y)=\bar{k}^2(x,y)+i\bar{\bar{k}}^2(x,y),$

$$k^2(x,y)=\begin{cases} k_1^2=const, & x<0, \\ k^2(x,y), & 0<x<a, \\ k_2^2=const, & x>a. \end{cases} \tag{32}$$

Электродинамический случай: $k^2(x,y)=k_0^2\varepsilon(x,y)$, где

$k_0=\dfrac{\omega}{c}$ - волновое число, $\varepsilon(x,y)$ - диэлектрическая проницаемость.

$$u(x,0)=0,\ \ u(x,b)=0,\ \ x\in\mathbb{R}^1 -$$

\- граничные условия (например, идеально проводящие стенки).

Для функций сечения получаем задачу Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} \psi''(y)+\lambda\psi(y)=0, \quad 0<y<b, \\ \quad \psi(0)=0, \quad \psi(b)=0, \end{cases}$$

где $\lambda = k^2 - \gamma^2.$

$$\psi_n(y)=\sqrt{\frac{2}{b}}\sin\frac{\pi n y}{b}, \qquad \lambda_n=\left(\frac{\pi n}{b}\right)^2, \ (n=1,2,\ldots)$$

Существует счетное множество нормальных волн (мод) вида:

$$u_n(x,y)=e^{i\gamma_n x}\psi_n(y), \qquad \gamma_n=\sqrt{k^2-\lambda_n}, \ \ (n=1,2,\ldots)$$

при $(x\le 0,\ x\ge a).$

Пусть на неоднородность падает слева нормальная волна индекса n_0 с амплитудой A_{n_0}. В сечении $x=0$ парциальные условия излучения при временной зависимости $e^{-i\omega t}$ имеют вид:

$$\int_0^b \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + i\gamma_n^{(1)} u \right\}_{x=0} \cdot \psi_n(y)dy = 2i\gamma_{n_0}^{(1)} A_{n_0} \cdot \delta_{n,n_0}, \quad (n=1,2,...)$$

Аналогично ставятся условия в сечении $x=a$. Парциальные условия излучения являются нелокальными условиями.

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(x)\psi_n(y),$$

$$Z_n(x) = \int_0^b u(x,y)\psi_n(y)dy \qquad (n=1,2,...)$$

Парциальные условия излучения накладываются на коэффициенты Фурье разложения функции $u(x, y)$ по функциям сечения $\psi_n(y)$:

$$Z_n'(0) + i\gamma_n^{(1)} Z_n(0) = 2i\gamma_{n_0}^{(1)} A_{n_0} \delta_{n,n_0}$$

Краевая задача имеет вид:

$$\begin{cases} \Delta u + k^2(x, y)u = 0, \quad (x, y) \in D, \\ u(x,0)=0, \ u(x,b) = 0, \quad 0 \le x \le a, \\ \int\limits_0^b \left\{ \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\gamma_n^{(1)} u \right\}_{x=0} \psi_n(y)dy = 2i\gamma_{n_0}^{(1)} A_{n_0} \delta_{n,n_0} \ \ (n = 1, 2, \ldots), \\ \int\limits_0^b \left\{ \dfrac{\partial u}{\partial x} - i\gamma_n^{(2)} u \right\}_{x=a} \psi_n(y)dy = 0 \ \ (n = 1, 2, \ldots), \end{cases}$$

где $\gamma_n^{(l)} = \sqrt{k_l^2 - \lambda_n} \ \ (n = 1, 2, \ldots; l = 1, 2),$ $\quad \bar{D} \equiv \left\{ 0 \le x \le a, 0 \le y \le b \right\}.$

$$u_n\left(x,y\right)=\overrightarrow{A}_n e^{i\gamma_n^{(1)}x}\psi_n\left(y\right)+\overleftarrow{B}_n e^{-i\gamma_n^{(1)}x}\psi_n\left(y\right)$$

$$\int_0^b\left\{\frac{\partial u}{\partial x}+i\gamma_n^{(1)}u\right\}\Big|_{x=0}\psi_n\left(y\right)dy=\left(i\overrightarrow{A}_n\gamma_n^{(1)}+i\overrightarrow{A}_n\gamma_n^{(1)}\right)\int_0^b\psi_n^2\left(y\right)dy+$$

$$+\left(-i\overleftarrow{B}_n\gamma_n^{(1)}+i\overleftarrow{B}_n\gamma_n^{(1)}\right)\int_0^b\psi_n^2\left(y\right)dy=2i\gamma_n^{(1)}\overrightarrow{A}_n=2i\gamma_{n_0}^{(1)}\overrightarrow{A}_{n_0}\Rightarrow$$

$$\overrightarrow{A}_n=0,\quad n\neq n_0,\quad \overrightarrow{A}_{n_0}\neq 0,\quad \overleftarrow{B}_n\neq 0,\quad n=1,2,\ldots$$

$$\int_0^b\psi_n^2\left(y\right)dy=\frac{2}{b}\int_0^b\sin^2\frac{\pi n y}{b}dy=\frac{2}{b}\frac{1}{2}\int_0^b\left(1-\cos\frac{2\pi n y}{b}\right)dy=\frac{1}{b}\int_0^b dy=1$$

$$u_n\left(x,y\right)=\vec{C}_n e^{i\gamma_n^{(2)}x}\psi_n\left(y\right)+\overleftarrow{D}_n e^{-i\gamma_n^{(2)}x}\psi_n\left(y\right)$$

$$\int_0^b\left\{\frac{\partial u}{\partial x}-i\gamma_n^{(2)}u\right\}\Big|_{x=a}\psi_n\left(y\right)dy=\left(i\vec{C}_n\gamma_n^{(2)}-i\vec{C}_n\gamma_n^{(2)}\right)e^{i\gamma_n a}\int_0^b\psi_n^2\left(y\right)dy+$$

$$+\left(-i\overleftarrow{D}_n\gamma_n^{(2)}-i\overleftarrow{D}_n\gamma_n^{(2)}\right)e^{-i\gamma_n a}\int_0^b\psi_n^2\left(y\right)dy=-2i\gamma_n^{(2)}\overleftarrow{D}_n=0\quad\Rightarrow$$

$$\vec{C}_n\neq 0,\quad \overleftarrow{D}_n=0,\quad n=1,2,...$$

$$\int_0^b\psi_n^2\left(y\right)dy=\frac{2}{b}\int_0^b\sin^2\frac{\pi ny}{b}dy=\frac{2}{b}\frac{1}{2}\int_0^b\left(1-\cos\frac{2\pi ny}{b}\right)dy=\frac{1}{b}\int_0^b dy=1$$

8) Задачи электростатики

В задачах электростатики решение уравнения Максвелла сводится к отысканию одной скалярной функции - потенциала φ, связанного с напряженностью поля соотношением

$$\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\varphi.$$

Используя уравнение Максвелла

$$\mathrm{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho,$$

получим

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho.$$

Таким образом, потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона в тех точках пространства, где находятся электрические заряды, и уравнению Лапласа, в тех точках, где зарядов нет.

Основная задача электростатики: отыскание поля, создаваемого системой зарядов на заданных проводниках. Возможны две постановки задачи: прямая и обратная.

1) Прямая задача электростатики. Задаются потенциалы проводников и требуется определить поле вне проводников и плотность зарядов на проводниках.

Математическая формулировка задачи состоит в следующем. Требуется найти функцию φ, удовлетворяющую уравнению Лапласа $\Delta\varphi = 0$ всюду вне заданной системы проводников, обращающихся в нуль на бесконечности, и принимающую заданные значения φ_i на поверхностях проводников S_i: $\varphi\big|_{S_i} = \varphi_i$, $\varphi_i = \text{const}$.

Таким образом, в случае решения прямой задачи электростатики мы приходим к решению первой краевой задачи для уравнения Лапласа. Единственность ее решения следует из общей теории.

2) Обратная задача электростатики. На проводниках задаются полные заряды. Требуется определить потенциалы проводников, распределение зарядов на их поверхности и поле вне проводников.

Решение обратной задачи сводится к отысканию функции φ, удовлетворяющей уравнению Лапласа $\Delta\varphi = 0$ вне заданной системы проводников, обращающейся в нуль на бесконечности, принимающей на поверхностях проводников некоторое постоянное значение $\left.\varphi\right|_{S_i} = \mathrm{const}$ и удовлетворяющей интегральному соотношению на поверхностях проводников

$\oint\limits_{S_i} \frac{\partial\varphi}{\partial n} d\sigma = -4\pi e_i$, где e_i – полный заряд на i- м проводнике.

7) Применение метода конформного преобразования в задачах электростатики

Для решения двумерных задач электростатики часто используются методы теории функций комплексной переменной.

Задача. Найти электрическое поле нескольких заряженных проводников, потенциалы которых равны $u_1, u_2, \ldots$

Математическая постановка задачи имеет следующий вид:

$$\Delta u = 0, \qquad u\big|_{S_i} = u_i\,,$$

где через S_i где обозначена поверхность проводника с номером *i*.

Если поле можно считать плоским, неменяющимся, например, вдоль оси Z, то постановка задачи принимает следующий вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad u\big|_{C_i} = u_i,$$

где C_i – контур, ограничивающий область S_i.

Напомним некоторые факты из теории функций комплексной переменной.

Теорема. Если функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ дифференцируема в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, то в точке (x_0, y_0) существуют частные производные функций $u\,(x,y)$ и $v\,(x,y)$ по переменным x и y, причем имеет место соотношение – условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}.$$

Если функция $f(z)$ дифференцируема во всех точках некоторой области G, а ее производная непрерывна в этой области, то функция $f(z)$ называется *аналитической функцией* в области G.

Отображение окрестности точки z_0 на окрестность точки w_0, осуществляемое аналитической функцией $w = f(z)$ и обладающее в точке z_0 свойством сохранения углов и постоянством растяжений, называется *конформным отображением*.

Теорема (взаимно-однозначное соответствие). Пусть функция $f(z)$ является однозначной аналитической функцией в области G, осуществляющей взаимно-однозначное отображение области G на область $\mathbf{G}$ комплексной плоскости w. Тогда это отображение является конформным.

Функция $u(x, y)$ называется *гармонической* в области D, если она дважды непрерывно дифференцируема в области D, удовлетворяет в ней уравнению Лапласа: $\Delta u = 0$.

Действительная и мнимая части аналитической функции являются гармоническими функциями, связанными между собой условиями Коши-Римана.

Необходимыми и достаточными условиями аналитичности функции $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ в области *G* является требование, чтобы функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ были гармоническими и удовлетворяли условиям Коши – Римана в соответствующей области плоскости x, y.

Для решения поставленной задачи будем искать потенциал $u(x,y)$ как мнимую часть некоторой аналитической функции

$$f(z)=v(x,y)+iu(x,y), \qquad (z=x+iy),$$

причем в силу условий Коши - Римана

$$v_x=u_y, \quad v_y=-u_x$$

и

$$v_x v_y + u_x u_y = 0.$$

Из граничного условия $u|_{C_i} = u_i$ следует, что функция $f(z)$ имеет постоянную мнимую часть на контурах C_i, ограничивающих наши проводники.

Из условий Коши-Римана вытекает, что уравнение

$$v(x, y) = \text{const}$$

представляет собой уравнение семейства силовых линий.

В самом деле, уравнение семейства силовых линий имеет вид

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y}.$$

Используя условия Коши-Римана, получим:

$$u_y dx - u_x dy = v_x dx + v_y dy = dv = 0 \quad \Rightarrow \quad v(x, y) = \text{const}.$$

Отметим, что уравнение

$$u(x, y) = \text{const}$$

определяет семейство эквипотенциальных линий.

Следовательно, для решения поставленной задачи достаточно построить конформное преобразование $w = f(z)$, которое переводит плоскость комплексного переменного $z = x + iy$ в плоскость $w = v + iu$, при котором границы проводников переходят в прямые $u = \text{const}$ или $\operatorname{Im} w = \text{const}$.

Если такая функция $w = f(z)$ найдена, то искомый потенциал находится по формуле

$$u = u(x, y) = \operatorname{Im} f(z).$$

Зная потенциал, можно вычислить электрическое поле:

$$E_x = -\frac{\partial u}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

и плотность поверхностных зарядов на единицу длины по оси z:

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}\sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2},$$

Которая в силу условий Коши-Римана равна

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}\left|f'(z)\right|.$$

5. Построение математических моделей на основе вариационных принципов

1) Вариационное исчисление

Функционалами называются переменные величины, значения которых определяются выбором одной или нескольких функций.

Например, функционалом является длина l дуги плоской или пространственной кривой, соединяющей две заданные точки $A(x_0, y_0)$ и $B(x_1, y_1)$.

Если задано уравнение кривой $y = y(x)$, то функционал будет иметь вид:

$$l\left[y(x)\right] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+(y')^2}\,dx.$$

Вариационное исчисление изучает методы, позволяющие находить максимальные и минимальные значения функционалов. Задачи, в которых требуется исследовать функционал на максимум или минимум, называются вариационными задачами.

Многие законы механики и физики сводятся к утверждениям, что некоторый функционал в рассматриваемом процессе должен достигать минимума или максимума. В такой формулировке эти законы носят название **вариационных принципов механики или физики.**

Многие дифференциальные детерминированные модели строятся исходя из того положения, что математические задачи, описывающие соответствующие физические процессы, при определенных условиях могут иметь две эквивалентные формулировки: в виде краевой задачи или в виде вариационной задачи.

Например, вариационная задача на нахождение минимума функционала

$$J\left[y(x)\right]=\int_{x_0}^{x_1} F\left(x, y(x), y'(x)\right)dx$$

на классе допустимых кривых с закрепленными концами: $y\left(x_0\right)=y_0, y\left(x_1\right)=y_1$ при определенных условиях эквивалентна следующей краевой задаче:

$$\begin{cases} F_x-\dfrac{d}{dx}F_{y'}=0, \quad x\in\left(x_0, x_1\right), \\ y\left(x_0\right)=y_0, \quad y\left(x_1\right)=y_1. \end{cases}$$

Уравнение $F_y-\dfrac{d}{dx}\left(F_{y'}\right)=0$ называется **уравнением Эйлера-Остроградского** и является **необходимым условием экстремума функционала** $J\left[y(x)\right]$.

2) Вариационный принцип

Мы получили дифференциальное уравнение, описывающее малые продольные колебания упругого стержня, используя теорему об изменении количества движения, то есть используя второй закон Ньютона в интегральной форме. Приведем теперь вывод того же уравнения, используя вариационный принцип.

Вариационный принцип. Если материальная система, находящаяся в поле внешних сил, характеризуется для любого момента времени t кинетической энергией $T(t)$ и потенциальной энергией $U(t)$, то переход её из состояния в момент времени t_1 в новое состояние в момент времени t_2 происходит так, что функционал

$$\Phi = \int_{t_1}^{t_2} \left(T(t) - U(t)\right) dt$$

имеет экстремальное значение.

Так как рассматривается случай малых колебаний, то при подсчете кинетической и потенциальной энергии членами высшего порядка малости можно пренебречь.

Кинетическая энергия ΔT малого участка стержня Δx равна (считаем, что в пределах малого участка все параметры сохраняют постоянное значение)

$$\Delta T = \frac{1}{2}\rho(x)\Delta x u_t^2(x,t).$$

Следовательно, кинетическая энергия всего стержня равна

$$T(t) = \frac{1}{2}\int_0^l \rho(x) u_t^2(x,t) dx.$$

Потенциальная энергия системы «стержень в поле внешних сил» U складывается из потенциальной энергии упругой деформации $U_{\text{у.д.}}$ и из работы A внешней силы:

$$U = U_{\text{у.д.}} - A.$$

Работа ΔA внешней силы, затраченная на перемещение малого элемента Δx из состояния равновесия в состояние $u(x,t)$, равна

$$\Delta A = f(x,t)\,\Delta x\,u,$$

где $f(x,t)$ – плотность распределения внешней силы в момент времени t.

Полная работа A внешней силы записывается следующим образом:

$$A(t) = \int_0^l f(x,t)\,u(x,t)\,dx.$$

Подсчитаем энергию упругой деформации. Выделим малый участок стержня длиной $\vartriangle x$, считая, что в пределах данного участка коэффициент упругости является постоянным $k(x) = k_0$. На участок $\vartriangle x$ со стороны соседнего элемента действует сила упругого напряжения F , равная $F = \varepsilon k_0$, где $\varepsilon -$ относительное удлинение элемента $\vartriangle x$. При перемещении элемента $\vartriangle x$ на расстояние δ будет совершена работа

$$\vartriangle U_{\text{у.д.}} = k_0 \varepsilon \delta.$$

С перемещением на расстояние δ связано изменение относительного удлинения ε на величину $\vartriangle \varepsilon$, причем

$$\vartriangle \varepsilon = \frac{\delta}{\vartriangle x}.$$

Следовательно, $\delta = \vartriangle \varepsilon \vartriangle x$ и

$$\vartriangle U_{\text{у.д.}} = k_0 \vartriangle x \varepsilon \vartriangle \varepsilon.$$

Проинтегрировав последнее равенство от 0 до $\varepsilon,$ получаем выражение для энергии упругой деформации, которой обладает выделенный элемент:

$$dU_{\text{у.д.}} = \int_0^{\varepsilon} k_0 \vartriangle x \varepsilon d\varepsilon = \frac{1}{2} k_0 \varepsilon^2 \vartriangle x.$$

Рассмотрим теперь неоднородный стержень с коэффициентом упругости $k(x)$ и применим последнюю формулу для бесконечно малого элемента $dx,$ учитывая, что $\varepsilon = u_x(x,t)$:

$$dU_{\text{у.д.}} = \frac{1}{2} k(x) u_x^2(x,t) dx.$$

Составим функционал

$$\Phi[u]=\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{0}^{l}\left(\tfrac{1}{2}\rho(x)u_t^2-\tfrac{1}{2}k(x)u_x^2+f(x,t)u\right)dxdt.$$

Выпишем для данного функционала уравнение Эйлера-Остроградского, которое является необходимым условием экстремума функционала

$$\left(F_{u_t}\right)_t+\left(F_{u_x}\right)_x-F_u=0,$$

где

$$F=F(u,u_t,u_x)=\tfrac{1}{2}\rho u_t^2-\tfrac{1}{2}ku_x^2+fu.$$

Вычисляя входящие в формулу производные, получим уравнение Эйлера-Остроградского для функционала $\Phi[u]$, описывающее малые продольные колебания упругого стержня:

$$\rho u_{tt}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+f(x,t).$$

Выражение в левой части последнего уравнения описывает силы инерции, первое слагаемое в правой части-упругое взаимодействие, а второй член в правой части-действие внешней силы.

Если стержень однородный и его линейная плотность и коэффициент упругости постоянны: $\rho(x) = \rho_0, k(x) = k_0$, то уравнение, описывающее малые продольные колебания стержня, имеет вид

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + \bar{f},$$

где

$$a^2 = \frac{k_0}{\rho_0}, \quad \bar{f} = \frac{1}{\rho_0} f.$$