

Вопросы к коллоквиуму по курсу “Методы математической физики”

(2019 год, первый поток)

В билете 5 вопросов, по одному из каждого раздела. Разделы отделены чертой.

1. Сформулируйте лемму о поведении решений уравнения $(k(x)u'(x))' - q(x)u = 0, x \in (a, b)$, где $k(x) = (x - a)\varphi(x), \varphi(a) \neq 0$, в особых точках. Как она доказывается?
 2. Напишите уравнение Бесселя, его фундаментальные системы решений. Дайте определение функций, входящих в эти системы решений, приведите графики функций Бесселя и Неймана.
 3. Дайте определение функции Бесселя с помощью обобщенного степенного ряда. Напишите формулы для функций Бесселя порядков $1/2$ и $-1/2$. Всегда ли функции Бесселя полуцелого порядка можно выразить через элементарные функции?
 4. Дайте определение функций Ханкеля и Неймана. Напишите интегральное представление для функции Бесселя и функций Ханкеля первого и второго рода. Как связаны между собой эти функции? Приведите график функции Неймана нулевого порядка. Могут ли функции Ханкеля иметь вещественные нули?
-
5. Напишите асимптотические формулы при больших и малых значениях аргумента для функций Бесселя, Неймана и Ханкеля. Покажите, что все нули функции Бесселя, кроме, быть может, $x=0$, простые.
 6. Дайте определение собственных функций круга. Напишите характеристическое уравнение для определения собственных значений в случае граничных условий третьего рода. Напишите выражение для квадрата нормы.
 7. Напишите уравнение для цилиндрических функций чисто мнимого аргумента. Приведите фундаментальную систему решений этого уравнения. Дайте определение функции Инфельда и Макдональда, приведите их графики. Укажите поведение этих функций при больших и малых значениях аргумента.
 8. Какие из цилиндрических функций образуют пары линейно-независимых решений уравнения Бесселя? Напишите выражения для определителя Вронского для функций Бесселя положительного и отрицательного порядков, для функций Бесселя и Неймана, для функций Бесселя и Ханкеля.
-
9. Дайте определение классических ортогональных полиномов. Напишите уравнение, которому удовлетворяют эти функции. Сформулируйте теорему о нулях классических ортогональных полиномов. Образуют ли производные КОП систему КОП, если да, то с каким весом? Откуда это следует?
 10. Поставьте задачу на собственные значения для классических ортогональных полиномов на отрезке с условиями в особых точках. Напишите формулу для собственных значений этой задачи. Как получают эту формулу?
 11. Напишите общую формулу для классических ортогональных полиномов (формулу Родрига). Приведите формулу Родрига для полиномов Лежандра. С ее помощью постройте полиномы Лежандра P_0 и P_1 .
 12. Дайте определение полиномов Лежандра. Поставьте задачу на собственные значения для полиномов Лежандра. Напишите выражение для собственных значений этой задачи и выражение квадрата нормы для полиномов Лежандра.
 13. Дайте определение полиномов Лагерра и полиномов Эрмита. Сформулируйте задачу, решениями которой они являются. Приведите формулу Родрига. Напишите

- выражения для квадрата нормы.
14. Дайте определение производящей функции классических ортогональных полиномов. Напишите для нее общую формулу. Напишите выражение производящей функции полиномов Лежандра, Лагерра и Эрмита.

 15. Дайте определение присоединенных функций Лежандра. Поставьте задачу на собственные значения для присоединенных функций Лежандра. Напишите собственные значения для присоединенных функций Лежандра и выражение для квадрата нормы.
 16. Дайте определение сферических функций. Поставьте задачу на собственные значения для этих функций. Напишите условие ортогональности для сферических функций. Приведите выражение квадрата нормы. Сформулируйте теорему Стеклова о разложимости в ряд по сферическим функциям. Дайте определение шаровых функций.
 17. Дайте определение собственных функций шара. Напишите характеристическое уравнение для определения собственных значений в случае граничных условий третьего рода. Напишите выражение для квадрата нормы.

 18. Дайте определение полного нормированного пространства. Приведите примеры. Сформулируйте теорему о пополнении нормированного пространства.
 19. Дайте определение линейного множества (линеала). Дайте определение множества, плотного в нормированном пространстве. Приведите примеры.
 20. Дайте определение полной ортогональной системы функций в пространстве Лебега. Приведите примеры полных систем.
 21. Дайте определение замкнутой ортогональной системы в пространстве Лебега. Приведите примеры.
 22. Как строится пространство Лебега $L_2(D)$?
 23. Как строится пространство Соболева $W_2^1(D)$?
